**MARMARA ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# TAM KARE SAYI DİZİSİ, TAM KARE LUCAS SAYI DİZİSİ VE POLİNOMLARI

İKRAMİYE ALTIPARMAK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

**DANIŞMAN**
Prof. Dr. Engin ÖZKAN

İSTANBUL, 2026

MARMARA UNIVERSITY
INSTITUTE FOR GRADUATE STUDIES
IN PURE AND APPLIED SCIENCES

# PERFECT SQUARE NUMBER SEQUENCE, PERFECT SQUARE LUCAS NUMBER SEQUENCE, AND THEIR POLYNOMIALS

İKRAMİYE ALTIPARMAK

(520924950)

**MASTER THESIS**
Department of Mathematics

**Thesis Supervisor**
Prof. Dr. Engin ÖZKAN

ISTANBUL, 2026

# TEŞEKKÜR

İlk olarak, buralara kadar gelmemi nasip eden Rabbim'e sonsuz hamdolsun.

En büyük teşekkürüm, her zaman desteğini hissettiğim, bilgi ve tecrübeleriyle çalışmamın her aşamasına katkı sağlayan çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Engin Özkan'a yöneliktir.

Yüksek lisans yapmamda öncü olan, desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen çok değerli hocalarım başta Prof. Dr. Uğur Şengül, Prof. Dr. Ünsal Tekir, Prof. Dr. Bahar Kırık Racz ve Doç. Dr. Suat Koç olmak üzere Matematik Bölümü'ndeki tüm hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tezime katkı sunan Doç. Dr. Ali Aydoğdu hocama da çok teşekkür ederim.

Hayatımın her anında yanımda olan, sevgi ve dualarıyla beni daima destekleyen kıymetli anneme, canım babama ve sevgili kız kardeşlerime sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Beni her zaman destekleyen ve yardımını esirgemeyen enişte Murat Özdal'a ve değerli teyzeme de çok teşekkür ederim.

Daima daha ileriye gitmem için beni teşvik eden sevgili dedem ve anneanneme minnettarlığımı ifade etmek isterim. Ayrıca, tevafuk eseri tanıştığım ve yüksek lisans sürecimde bana destek olan Betül Başhan ablama ve Şuayip Başhan abime gönülden teşekkür ederim. Vefatıyla bizleri derinden üzen, Matematik Bölümü hocalarımızdan çok değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Halil İbrahim Çelik'i rahmet ve minnetle anıyor, kendisine şükranlarımı sunuyorum. Son olarak, burs desteği sağlayan Yurt Dışı Türkler ve Akraba Toplulukları Başkanlığı'na çok teşekkür ederim.

**Haziran 2026** **İkramiye ALTIPARMAK**

# İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR ..... ii
ÖZET ..... iii
ABSTRACT ..... iv
SEMBOL LİSTESİ ..... v
TABLO LİSTESİ ..... vii
1. GİRİŞ ..... 1
2. MATERYAL VE YÖNTEM ..... 4
2.1 Fibonacci ve Lucas Sayı Dizileri ..... 4
2.2 Fibonacci ve Lucas Polinomları ..... 4
2.3 Tam Kare Sayı Dizisi ..... 5
2.4 Kuaterniyonlar ..... 6
2.5 Hibrit Sayılar ve Hibrit Kuaterniyonlar ..... 7
3. BULGULAR VE TARTIŞMA ..... 9
3.1 Tam Kare Sayı Dizisinin Özellikleri ..... 10
3.2 Tam Kare Lucas Sayı Dizisi ..... 15
3.3 Tam Kare ve Tam Kare Lucas Sayı Dizileri Arasındaki İlişkiler ..... 19
3.4 Tam Kare Polinomları ..... 22
3.5 Tam Kare Lucas Polinomları ..... 28
3.6 Tam Kare ve Tam Kare Lucas Polinomları Arasındaki İlişkiler ..... 34
3.7 Tam Kare ve Tam Kare Lucas Kuaterniyonları ..... 36
3.8 Tam Kare ve Tam Kare Lucas Hibrit Sayıları ile Hibrit Kuaterniyonları ..... 40
3.9 Tam Kare ve Tam Kare Lucas Kuaterniyonları, Hibrit Sayıları ve Hibrit Kuaterniyonları Arasındaki İlişkiler ..... 49
4. SONUÇLAR ..... 52
KAYNAKLAR ..... 53
ÖZGEÇMİŞ ..... 56

# ÖZET

## TAM KARE SAYI DİZİSİ, TAM KARE LUCAS SAYI DİZİSİ VE POLİNOMLARI

Bu tez çalışmasında, sayılar teorisinin temel yapı taşlarından olan tam kare sayı dizisi derinlemesine incelenmiştir. Tam kare sayı dizisinin, Fibonacci ve Lucas sayı dizileriyle olan ilişkisini gösteren genel bir eşitliğin elde edilmesi ve "Tam Kare Lucas Sayı Dizisi" nin tanımlanması literatüre yeni birer katkı oluşturmuştur. Çalışma kapsamında tanımlanan ilgili dizi için Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve toplam formülü analitik yöntemlerle elde edilmiştir.

Ayrıca, tam kare Lucas sayı dizisinin Fibonacci ve Lucas dizileriyle olan cebirsel bağları kurularak, Cassini, Catalan gibi temel özdeşliklerin bu yeni dizi üzerindeki karşılıkları ispatlanmıştır. Söz konusu dizinin matris temsili de sunulmuştur.

Tam kare sayı dizisi ve tam kare Lucas sayı dizisi polinomlara, ardından kuaterniyon, hibrit sayılar ve hibrit kuaterniyon yapılarına genelleştirilmiştir. Bu cebirsel yapılar için karakteristik denklemler ve matris temsilleri sunulmuş; dizilerin çok boyutlu uzaylardaki davranışları sistematik bir şekilde analiz edilmiştir. Bu çalışma, tam kare sayı dizisinin modern cebirsel sistemlerle bütünleştirilmesi açısından özgün bir araştırma sunmaktadır.

Bu tez kapsamında elde edilen bazı sonuçlar, *Mathematica Montisnigri* dergisinde yayımlanan “On a Generalization of the Perfect Square Sequence and Its Polynomial” başlıklı makalede (vol. 62, no. 2, 2025, pp. 64–77) ve *Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Series III: Mathematics and Computer Science* dergisinde yayımlanmak üzere kabul edilen “Perfect Square and Perfect Square Lucas Quaternions and Their Hybrid Extensions” başlıklı makalede sunulmuştur.

**Haziran 2026** **İkramiye ALTIPARMAK**

# ABSTRACT

## PERFECT SQUARE NUMBER SEQUENCE, PERFECT SQUARE LUCAS NUMBER SEQUENCE, AND THEIR POLYNOMIALS

In this thesis, the sequence of perfect square numbers, one of the fundamental structures of number theory, is investigated in depth. The derivation of a general identity relating the perfect square number sequence to the Fibonacci and Lucas sequences, together with the introduction of the Perfect Square Lucas Sequence, constitutes a novel contribution to the literature. For the newly defined sequence, the Binet formula, generating function, and summation formula are derived analytically.

Furthermore, the algebraic relationships between the Perfect Square Lucas Sequence and the Fibonacci and Lucas sequences are established, and analogues of classical identities, including the Cassini and Catalan identities, are proved. A matrix representation of the sequence is also presented.

Finally, both the perfect square number sequence and the Perfect Square Lucas Sequence are generalized to polynomial, quaternion, hybrid number, and hybrid quaternion structures. Characteristic equations and matrix representations are obtained, and the behavior of these sequences in multidimensional spaces is analyzed. This study provides an original contribution to the integration of the perfect square number sequence with modern algebraic systems.

Some of the results presented in this thesis have been published in the article “On a Generalization of the Perfect Square Sequence and Its Polynomial” in *Mathematica Montisnigri* (vol. 62, no. 2, 2025, pp. 64–77) and in the article “Perfect Square and Perfect Square Lucas Quaternions and Their Hybrid Extensions”, accepted for publication in *Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Series III: Mathematics and Computer Science*.

**June 2026** **İkramiye ALTIPARMAK**

# SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{N}$ : Doğal Sayılar Kümesi

$\boldsymbol{H}$ : Hibrit Sayılar Kümesi

$\boldsymbol{q}$ : Kuaterniyon

$\mathbf{det}(\boldsymbol{A})$ : A Matrisinin Determinantı

$\sum$ : Toplam sembolü

$\boldsymbol{F_n}$ : Fibonacci sayı dizisi

$\boldsymbol{L_n}$ : Lucas sayı dizisi

$\boldsymbol{s_n}$ : Tam kare sayı dizisi

$\boldsymbol{sL_n}$ : Tam kare Lucas sayı dizisi

$\boldsymbol{sH_n}$ : Tam kare hibrit sayı dizisi

$\boldsymbol{sLH_n}$ : Tam kare Lucas hibrit sayı dizisi

$\boldsymbol{sQ_n}$ : Tam kare kuaterniyonu

$\boldsymbol{sLQ_n}$ : Tam kare Lucas kuaterniyonu

$\boldsymbol{sHQ_n}$ : Tam kare hibrit kuaterniyonu

$\boldsymbol{sLHQ_n}$ : Tam kare Lucas hibrit kuaterniyon

$\boldsymbol{F_n(x)}$ : Fibonacci Polinomu

$\boldsymbol{L_n(x)}$ : Lucas Polinomu

$\boldsymbol{s_n(x)}$ : Tam kare sayı dizisi polinomu

$\boldsymbol{sL_n(x)}$ : Tam kare Lucas sayı dizisi polinomu

$\boldsymbol{G_F(x)}$ : Fibonacci sayı dizinin üreteç fonksiyonu

$\boldsymbol{G_L(x)}$ : Lucas sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$\boldsymbol{G_s(x)}$ : Tam kare sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$\boldsymbol{G_{sL}(x)}$ : Tam kare Lucas sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$G_F(t,x)$ : Fibonacci polinomunun üreteç fonksiyonu

$G_L(t,x)$ : Lucas polinomunun üreteç fonksiyonu

$G_s(t,x)$ : Tam kare polinomunun üreteç fonksiyonu

$G_{sL}(t,x)$ : Tam kare Lucas polinomunun üreteç fonksiyonu

$G_{sQ}(x)$ : Tam kare Kuaterniyonun üreteç fonksiyonu

$G_{sLQ}(x)$ : Tam kare Lucas Kuaterniyonun üreteç fonksiyonu

$G_{sH}(x)$ : Tam kare Hibrit sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$G_{sLH}(x)$ : Tam kare Lucas Hibrit sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$G_{sHQ}(x)$ : Tam kare Hibrit Kuaterniyon sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$G_{sLHQ}(x)$: Tam kare Lucas Hibrit Kuaterniyon sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

# TABLO LİSTESİ

**Tablo 2.1** Kuaterniyon birimlerinin çarpılması ..... 7

**Tablo 2.2** Hibrit birimlerinin çarpılması ..... 7

**Tablo 3.1** Tam Kare Polinomları ..... 22

**Tablo 3.2** Tam Kare Lucas Polinomları ..... 29

# 1. GİRİŞ

Sayılar teorisinin temel çalışma alanlarından biri olan diziler, sayılar arasındaki düzenin, ilişkilerin ve matematiksel modellerin incelenmesinde kritik bir rol oynamaktadır. Bir sayı dizisi, genellikle belirli bir kurala dayanan ve yinelemeli bir bağıntıyla tanımlanan sıralı kümelerdir. Bu yapılar, sadece aritmetik ilişkilerin anlaşılmasına değil, aynı zamanda karmaşık cebirsel ve analitik sistemlerin çözümlenmesine de katkı sunmaktadır.

Diziler, uzun yıllar boyunca birçok matematikçi tarafından araştırılmış, bu çalışmalar neticesinde farklı türlerde sayı dizileri tanımlanmış ve çeşitli alanlarda uygulanmıştır.

Literatürde en köklü ve üzerinde en çok çalışma yapılan dizilerin başında Fibonacci ($F_n$) ve Lucas ($L_n$) dizileri gelmektedir. Fibonacci sayı dizisi ilk olarak Leonardo Fibonacci tarafından 1202 yılında yazılan Liber Abaci adlı eserde ortaya konulmuştur. Fibonacci bu eserinde tavşanların üreme sürecini modelleyen bir problem aracılığıyla söz konusu diziyi tanıtmıştır. Problemin varsayımına göre başlangıçta bir çift tavşan bulunmaktadır; bu tavşan çifti bir ay sonra olgunlaşmakta ve olgunlaştıktan sonra her ay yeni bir tavşan çifti doğurmaktadır. Tavşanların ölmediği kabul edildiğinde, her ay oluşan tavşan çiftlerinin sayısı kendisinden önceki iki ayın toplamına eşit olmaktadır. Bu durum Fibonacci sayı dizisinin tekrarlama yapısını ortaya koymaktadır. Fibonacci sayı dizisi ile yakından ilişkili olan Lucas sayı dizisi ise aynı yineleme bağıntısını sağlayan ancak $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ başlangıç değerlerine sahip bir dizidir [1,2].

Bu iki dizi, hem teorik hem de uygulamalı matematikte temel bir konuma sahiptir. Fibonacci sayı dizisi, özellikle doğada gözlenen düzende, örneğin bitkilerin yaprak dizilimlerinde, arı popülasyonlarında ve çiçek yaprak sayılarında görülmektedir [1]. Bununla birlikte, Fibonacci sayı dizisi; çizge teorisi [3], biyomatematik [4], kimya [5] ve mühendislik [6] gibi pek çok bilim dalında da uygulama alanı bulmuştur.

Fibonacci sayı dizisinin pek çok genelleştirmesi literatürde tanımlanmıştır. Bu genelleştirmeler, dizinin temel yineleme bağıntısına ek parametreler veya farklı başlangıç koşulları eklenmesiyle elde edilmektedir. Örneğin k-Jacobsthal, k-Oresme–Lucas, Leonardo, Fibonacci k-sayıları ve genelleştirilmiş (k,r)- Pell ve Pell-Lucas sayı dizileri bu genelleştirmelere örnek olarak gösterilebilir [7–11].

Bilim insanları, Fibonacci ve Lucas dizilerinin benzer özelliklerinden yola çıkarak birçok yeni sayı dizisi geliştirmiştir. Bu diziler arasındaki ilişkilerin araştırılması, sayılar teorisinde yeni sonuçların elde edilmesine olanak tanımıştır [11–18]. Örneğin, Sabaa ve arkadaşları Mersenne–Lucas sayı dizisini tanımlamış ve bu dizinin Mersenne sayıları ile ilişkisini inceleyerek bu iki dizi arasındaki yineleme bağıntısını elde etmişlerdir [19].

Çelemoğlu, Pell–Leonardo sayıları üzerine yaptığı çalışmasında; Leonardo sayılarının Pell sayıları ile ilişkisini göstermiş, ayrıca bu sayıların özellikleri ve matris gösterimlerini vermiştir [20]. Köken ve Bozkurt, Jacobsthal–Lucas sayılarını matris yöntemiyle incelemişlerdir [21].

Bu çerçevede Fibonacci ve Lucas dizileri, yalnızca teorik olarak değil, aynı zamanda kombinatorik, matris teorisi ve uygulamalı matematik gibi dallarda da uygulama alanı bulmuştur. Bu diziler, sayıların yapısal özelliklerinin incelenmesinde sıkça başvurulan iki temel dizidir.

Bu tez çalışmasında, karesel bir artış dinamiğine sahip olan tam kare sayı dizisi ($s_n = n^2$) odağa alınmıştır. Tam kare sayıların geometrik düzendeki simetrisi ve mühendislik tasarımlarındaki yapısal karşılığı, bu sayıları hem teorik hem de pratik çalışmalarda önemli kılar. Çalışmanın temel motivasyonu, bu karesel yapıyı klasik Fibonacci ve Lucas dizileriyle ilişkilendirerek literatüre "Tam Kare Lucas Sayı Dizisi" ($sL_n$) kavramını kazandırmaktır.

Çalışmanın kapsamı sadece reel sayı dizileriyle sınırlı kalmayıp; ilgili diziler polinomlara, 1843 yılında Hamilton tarafından tanımlanan kuaterniyonlara [22], Özdemir tarafından sunulan hibrit sayılara [23] ve hibrit kuaterniyonlara [24] genelleştirilmiştir. Bu genelleştirme, dizilerin komütatif (değişmeli) olmayan cebirsel yapılardaki davranışlarını incelemeyi ve yeni özdeşlikler elde etmeyi amaçlamaktadır.

Bu yapılara ait Binet formülleri, yineleme bağıntıları ve üreteç fonksiyonları tanımlanarak, birbirleriyle olan ilişkileri sistematik biçimde analiz edilmiştir.

Sonuç olarak, tam kare sayıların kuaterniyon ve hibrit yapılarda incelenmesi, hem sayılar teorisinde hem de cebirsel analiz alanında yeni bir bakış açısı kazandırmaktadır.

Bu yaklaşım, dizilerin modern cebirsel sistemlerle bütünleştirilmesi açısından özgün ve geliştirilebilir bir araştırma yönü sunmaktadır.

Bu çalışmada elde edilen diziler ve eşitlikler yalnızca teorik matematik açısından değil, aynı zamanda bilgisayar grafikleri, sinyal işleme, kriptografi ve fiziksel modelleme gibi uygulamalı bilim alanlarında da potansiyel katkılar sunmaktadır.

# 2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, tezin ilerleyen kısımlarında elde edilecek bulgulara ve yapılacak analizlere temel teşkil eden kavramsal çerçeve ve matematiksel yöntemler sunulmaktadır. Bu çalışmanın temel odak noktasını teşkil eden Fibonacci ve Lucas dizileri, ilgili polinomlar ve tam kare sayı dizileri; temel tanımları, karakteristik yineleme bağıntıları ve üreteç fonksiyonları bağlamında kapsamlı bir biçimde incelenmiştir.

Ayrıca, bu dizilerin cebirsel özellikleri; kompleks, dual ve hiperbolik sayı sistemlerinin birer genişlemesi olan kuaterniyonlar ve hibrit sayı yapıları içerisine taşınarak incelenmektedir. Bu kapsamda, önce ilgili sayı dizilerinin teorik altyapısı verilmiş, ardından bu dizilerin entegre edileceği çok boyutlu sayı sistemlerinin çarpım kuralları ve yapısal özellikleri tanımlanmıştır. Bölümde sunulan bu teorik hazırlık, dizilerin bu sistemlerdeki karakteristik özelliklerinin belirlenmesi ve yeni formüllerin türetilmesi için gerekli zemini oluşturmaktadır. Bu tezde $n \in \mathbb{N}$ olduğu kabul edilmiştir.

## 2.1 Fibonacci ve Lucas Sayı Dizileri

Fibonacci ve Lucas dizilerinin temel yineleme bağıntıları sırasıyla aşağıdadır;

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ F_0 = 0 \text{ ve } F_1 = 1, \tag{2.1}$$

ve

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, L_0 = 2 \text{ ve } L_1 = 1. \tag{2.2}$$

Bu dizilerin üreteç fonksiyonları ise sırasıyla

$$G_F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{1}{1 - x - x^2} \tag{2.3}$$

ve

$$G_L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2 - x}{1 - x - x^2} \tag{2.4}$$

şeklinde verilir.

Bu tanımlar, dizilerin kapalı biçimlerinin elde edilmesi ve özelliklerinin analiz edilmesi açısından temel öneme sahiptir.

## 2.2 Fibonacci ve Lucas Polinomları

Fibonacci polinomları $F_n(x)$, birinci dereceden polinomların lineer kombinasyonlarıyla

tanımlanır ve aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$n \geq 2 \text{ için } F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x), F_0(x) = 0, F_1(x) = 1 \quad (2.5)$$

Lucas polinomları $L_n(x)$ ise benzer bir yineleme bağıntısı ile tanımlanır ve

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x),\ L_0(x) = 2, L_1(x) = x \quad (2.6)$$

şeklinde verilir [25].

Doman ve Williams (1981) yaptıkları çalışmada, bu polinomların yalnızca sayı dizisi olarak değil, aynı zamanda üreteç fonksiyonları aracılığıyla da incelenebildiğini göstermiştir. Fibonacci polinomlarının üreteç fonksiyonu:

$$G_F(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)t^n = \frac{t}{1 - xt - t^2} \quad (2.7)$$

dır [25].

Lucas polinomları için üreteç fonksiyonu ise:

$$G_L(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n = \frac{2 - xt}{1 - xt - t^2} \quad (2.8)$$

şeklinde verilir [25].

Bu yapı, polinomların simetri özelliklerinin ve toplam formüllerinin türetilmesine olanak sağlar. Çalışmamızda, Fibonacci ve Lucas polinomları teorik çerçeve olarak kullanılmıştır [25].

### 2.3 Tam Kare Sayı Dizisi

Tam kare sayı dizisi $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$s_n = n^2 \quad (2.9)$$

Bu dizinin ilk birkaç terimi aşağıda verilmiştir:

$$\{0,1,4,9,16,25, \dots\}.$$

Tam kare sayı dizisi için kullanılan birinci mertebeden ve homojen olmayan yineleme bağıntısı

$$s_n = s_{n-1} + 2n - 1,\ (s_0 = 0, n \geq 1) \quad (2.10)$$

şeklindedir.

Tam kare sayı dizisinin Binet formülü, $n \geq 0$ olmak üzere, $s_n = n^2$ dir.

Bu dizinin üreteç fonksiyonu,

$$G_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \frac{x + x^2}{(1-x)^3} \tag{2.11}$$

olarak elde edilmektedir [26]. (Burada referans verilen kitapta eşitlik tam olarak geçmemektedir ama yapılan bazı matematiksel işlemlerle (2.11) eşitliği kolayca elde edilebilir.)

## 2.4 Kuaterniyonlar

Kuaterniyonlar, 1843 yılında William Rowan Hamilton tarafından tanımlanmış ve kompleks sayıların bir genellemesi olarak kabul edilmiştir. Bu yapılar, özellikle üç boyutlu uzayda dönüşümlerin modellenmesi ve yönelimlerin temsilinde büyük öneme sahiptir. Gerçel ve kompleks sayılardan farklı olarak, kuaterniyonlar değişmeli olmayan bir cebirsel yapı oluşturur. Hamilton, kuaterniyon kavramını üç boyutlu uzayda iki yönlü doğrultunun oranı veya eşdeğer biçimde iki vektörün bölünmesi olarak tanımlamıştır [22].

Kuaterniyonlar, bilgisayar bilimi, fizik, mühendislik, robotik ve kuantum mekaniği gibi birçok temel alanda bir matematiksel araç haline gelmiştir. Özellikle üç boyutlu uzay dönüşümlerinin modellenmesinde önemli bir rol oynarlar. Bu kapsamda, Horadam (1963), Fibonacci kuaterniyonları kavramını tanıtarak bu yapıların tanımlanması ve analizi için genel bir çerçeve oluşturmuştur [27].

Genel olarak bir kuaterniyon şu şekilde tanımlanır:

$$q = a + bi + cj + dk, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

burada $i, j, k$ birim kuaterniyonlardır ve aşağıdaki çarpım kurallarını sağlarlar:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Bu özellikler, kuaterniyonların cebirsel yapısını belirler ve onları hem reel hem de kompleks sayı sisteminden farklı kılar [22].

Bu birimlerin çarpma kuralları, aşağıdaki **Tablo 2.1**'de verilmiştir.

**Tablo 2.1** Kuaterniyon birimlerinin çarpılması

| . | $i$ | $j$ | $k$ |
|---|---|---|---|
| $i$ | $-1$ | $k$ | $-j$ |
| $j$ | $-k$ | $-1$ | $i$ |
| $k$ | $j$ | $-i$ | $-1$ |

## 2.5 Hibrit Sayılar ve Hibrit Kuaterniyonlar

Özdemir [23] kompleks, dual ve hiperbolik sayı sistemlerini kapsayan hibrit sayılar kavramını tanıtmış ve bu sayılara ilişkin temel özellikleri ayrıntılı biçimde incelemiştir. Hibrit sayı sistemi, farklı sayı sistemlerini bir araya getiren genelleştirilmiş bir cebirsel yapı olup, bu yönüyle klasik sayı sistemlerinin ortak bir çatı altında toplanmasını sağlar.

Hibrit sayılar kümesi

$$H = \{a + bi + c\varepsilon + dh : a, b, c, d \in \mathbb{R},\ i^2 = -1,\ \varepsilon^2 = 0,\ h^2 = 1,\ ih = -hi = \varepsilon + i\}$$

şekilde tanımlanır.

Bu yapı, kompleks, dual ve hiperbolik sayı sistemlerinin bir genellemesi olup; burada $i$ kompleks birimi, $\varepsilon$ dual birimi ve $h$ hiperbolik birimi temsil etmektedir. Bu üçlüye hibrit birimleri adı verilmektedir. Hibrit birimleri arasındaki çarpma kuralları **Tablo 2.2**'de verilmiştir.

**Tablo 2.2** Hibrit birimlerinin çarpılması

| . | $i$ | $\varepsilon$ | $h$ |
|---|---|---|---|
| $i$ | 1 | $1-h$ | $\varepsilon+i$ |
| $\varepsilon$ | $1+h$ | 0 | $-\varepsilon$ |
| $h$ | $-\varepsilon-i$ | $\varepsilon$ | 1 |

Bu tablo, hibrit sayı sisteminin cebirsel yapısını açık biçimde göstermekte olup, klasik sayı sistemlerinden farklı olarak bu yapının komütatif olmayan bir çarpma özelliği

taşıdığını ortaya koymaktadır. Böylece hibrit sayıları, kompleks düzlemin ötesinde daha geniş bir sayı uzayı tanımlar ve cebirsel analizde çok boyutlu ilişkilerin incelenmesine olanak tanır. Dağdeviren ve Kuruz, Hibrit kuaterniyon sayılarını tanıtmış ve bu yapıların çeşitli sayı dizilerinde olan uygulamalarını ele almışlardır [24]. Hibrit kuaterniyonlar, klasik kuaterniyonların bir genişlemesi olup; gerçel, kompleks, dual ve hiperbolik bileşenleri aynı anda içeren birleşik bir yapıdır. Bu sayede, hem cebirsel hem de geometrik sistemlerde daha zengin bir temsil gücü sağlarlar [24].

# 3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, tam kare sayı dizisi için yeni bir yineleme bağıntısı tanımlanmıştır. Bu diziye ait toplam formülü ve çeşitli özdeşlikler; Cassini, Catalan, d'Ocagne, Vajda ve Halton özdeşlikleri verilmiştir. Söz konusu özdeşlikler, matematiğin farklı alanlarında önemli bir yere sahiptir. Örneğin, Cassini özdeşliği, Curry'nin Paradoksu'nda temel bir rol oynamakta ve dizilerin yapısal özelliklerini ortaya koymaktadır [1].

Ayrıca, tam kare sayı dizisinin Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ile ilişkisini veren genel bir eşitlik elde edilmiştir.

Tam kare sayı dizisi ve Lucas sayı dizisinin özellikleri kullanılarak,'' Tam kare Lucas sayı dizisi'' adı verilen yeni bir dizi tanımlanmış ve bu dizinin Binet formülü ile üreteç fonksiyonu elde edilmiştir. Böylece, hem tam kare sayı dizisi hem de tam kare Lucas sayı dizisinin analitik özellikleri ortaya konulmuştur.

Tam kare Lucas sayı dizisi negatif indekslere genişletilerek dizinin kapsamı genişletilmiştir. Negatif indeksli terimlerin tanımlanması, dizinin simetrik özelliklerinin ve genel davranışının daha bütüncül bir biçimde incelenmesine olanak sağlamıştır.

Ayrıca, tam kare Lucas sayılarının sağladığı belirli özdeşlikler ispatlanmıştır.

Tam kare sayı dizisi ile tam kare Lucas sayı dizisi arasında analitik ve cebirsel ilişkiler kurulmuş, bu iki dizi arasındaki bağıntılar ayrıntılı olarak elde edilmiştir. Böylece, tam kare sayıların Lucas sayı dizisi ile olan yapısal bağı, dizilerin ortak özellikleri üzerinden ifade edilmiştir.

Fibonacci**,** Lucas**,** tam kare ve tam kare Lucas sayı dizileri arasında ortak bir yapı gösteren bir eşitlik elde edilerek bu dizilerin birbirleriyle olan bağlantıları ortaya konmuştur.

Bu eşitlik ile diziler arasındaki dönüşüm ilişkileri ve ortak özellikler sistematik biçimde analiz edilmiştir.

Sonra tam kare polinomları ve tam kare Lucas polinomları tanımlanarak bu polinomların temel özellikleri ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Bu polinomların Binet formülleri çıkarılmış, bu formüller yardımıyla polinomların kapalı biçimde ifade edilebileceği gösterilmiştir. Ayrıca, polinomlara ait üreteç fonksiyonları elde edilmiştir.

Bu polinomların sağladığı bazı eşitlikler ve özdeşlikler ispatlanmış, ayrıca söz konusu polinomların matris temsilleri ayrıntılı biçimde verilmiştir. Böylece, tam kare polinomları ve tam kare Lucas polinomlarının cebirsel, analitik ve lineer cebirsel yönleri bütüncül bir biçimde incelenmiştir. Son olarak, tanımladığımız tam kare kuaterniyonlarının ve tam kare Lucas kuaterniyonlarının hibrit sayıları ve hibrit kuaterniyonlar üzerine odaklanılmıştır. Bu yapılara ait Binet formülleri, yineleme bağıntıları ve üreteç fonksiyonları ayrıntılı biçimde elde edilmiştir.

Ayrıca, bu sayı dizileri arasındaki karşılıklı ilişkiler incelenmiş ve aralarındaki yapısal benzerlikler ortaya konmuştur.

### 3.1 Tam Kare Sayı Dizisinin Özellikleri

Şimdi tam kare sayı dizisi için yeni bir yineleme bağıntısını aşağıdaki teorem ile verelim.

**Teorem 3.1** Tam kare sayı dizisi aşağıda birinci mertebeden, homojen olmayan ve değişken katsayılı yinelemeli bağıntı ile ifade edilebilmektedir [28].

$$s_n = \begin{cases} 0 & ,n = 0 \\ 1 & ,n = 1 \\ n + \frac{ns_{n-1}}{n-1} & ,n \geq 2 \end{cases} \tag{3.1}$$

**İspat.** Burada amacımız temel tanıma varabilmektir, $s_n = n^2$. Tümevarım yöntemi kullanarak ispatlanacaktır.

$$s_2 = 2 + \frac{2\,s_1}{1} = 2 + 2 = 4 \tag{3.2}$$

olup $n = 2$ için iddianın doğru olduğu görülür.

$n - 1$ için teoremin doğru olduğunu kabul edelim. O halde, $s_{n-1} = (n-1)^2$ dir.

$n$ için doğru olduğunu gösterelim. Bunu $s_n$ de yerine yazarsak,

$$s_n = n + \frac{ns_{n-1}}{n-1} = n + \frac{n(n-1)^2}{n-1} \tag{3.3}$$

elde edilir.

$n \geq 2$ için $n - 1 \neq 0$ olduğundan,

$$s_n = n + n(n-1) = n^2$$ □

Aşağıda verilen teoremde, tam kare sayı dizisinin Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ile ilişkisi ifade edilmektedir.

**Teorem 3.2** $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ve $A_{n-i} = \left(\frac{(1+n-i)(2+n-i)}{2} - s_{n-i}\right)$ olsun. Bu

takdirde; $F_n$ , $L_n$ ve tam kare sayı dizisi $s_n$ arasında ilişki;

$$s_n = 2\sum_{i=0}^{n} F_{i+1}A_{n-i} - \sum_{i=0}^{n} L_i\, A_{n-i} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta^{\mathrm{i}}\alpha - \beta\alpha^{\mathrm{i}}}{\alpha - \beta}\right) A_{n-i}\,, \qquad (3.4)$$

bağıntısıyla verilir [28].

**İspat.** İspat için tam kare sayı dizisinin üreteç fonksiyonu olan $G_s(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$ eşitliğinden yola çıkacağız. İfadeyi $1 - x - x^2$ ile çarpıp bölerek yeniden düzenlersek:

$$G_s(x) = \frac{x + x^2}{1 - x - x^2}\frac{1 - x - x^2}{(1 - x)^3}$$

Bu eşitliğin sağ tarafını, iki ayrı üreteç fonksiyonunun Cauchy çarpımı olarak analiz edelim. İlk çarpanı Fibonacci ve Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonları cinsinden parçalarsak:

$$\frac{x+x^2}{1-x-x^2} = \frac{2}{1-x-x^2} - \frac{2-x}{1-x-x^2} + \frac{x^2}{1-x-x^2}.$$

Bu ifadenin kuvvet serisi açılımı şu şekildedir:

$$\frac{x + x^2}{1 - x - x^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n\alpha - \beta\alpha^n}{\alpha - \beta}x^n.$$

İkinci çarpan olan $\frac{1-x-x^2}{(1-x)^3}$ ifadesini ise bilinen seriler yardımıyla açalım:

$$\frac{1 - x - x^2}{(1 - x)^3} = \frac{1}{(1 - x)^3} - \frac{x + x^2}{(1 - x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

Bu seriyi ortak parantezde toplarsak, katsayıları $A_n$ olan seriyi elde ederiz:

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\frac{(n + 1)(n + 2)}{2} - s^n]\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

Son olarak, her iki çarpanın serilerini birbiriyle çarptığımızda, $x^n$ nin katsayısı olan $s_n$ değeri

$$s_n = 2\sum_{i=0}^{n} F_{i+1}A_{n-i} - \sum_{i=0}^{n} L_i\, A_{n-i} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta^{\mathrm{i}}\alpha - \beta\alpha^{\mathrm{i}}}{\alpha - \beta}\right) A_{n-i}$$

olarak elde edilir. □

**Önerme 3.1** $k \geq 1$ ve $j \geq 0$ olmak üzere,

$$\sum_{i=0}^{n} s_{ki+j} = s_n\left(\frac{nk^2}{3} + \frac{k^2}{2} + kj\right) + n\left(\frac{k^2}{6} + kj + j^2\right) + j^2 \tag{3.5}$$

şeklindedir [28].

**İspat.** Tam kare sayı dizisinin Binet formülü (2.9) ve sonlu toplam formülleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} s_{ki+j} &= \sum_{i=0}^{n}(ki+j)^2 = \sum_{i=0}^{n}(ki)^2 + \sum_{i=0}^{n} 2kij + \sum_{i=0}^{n} j^2 \\ &= k^2\sum_{i=0}^{n} i^2 + 2kj\sum_{i=0}^{n} i + j^2\sum_{i=0}^{n} 1 \\ &= k^2\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2kj\,\frac{n(n+1)}{2} + j^2(n+1) \\ &= \frac{k^2(2n^3 + 3n^2 + n)}{6} + kj(n^2+n) + j^2(n+1) \\ &= \frac{k^2}{6}(2ns_n + 3s_n + n) + kj(s_n + n) + (n+1)j^2 \\ &= s_n\left(\tfrac{nk^2}{3} + \tfrac{k^2}{2} + kj\right) + n\left(\tfrac{k^2}{6} + kj + j^2\right) + j^2\end{aligned}$$

elde edilir. □

**Önerme 3.2 (Cassini Özdeşliği)**

$$s_{n-1}s_{n+1} - s_n^2 = 1 - 2n^2 \tag{3.6}$$

eşitliği sağlanır [28].

**İspat.** Tam kare sayı dizisi için Binet formülü (2.9) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}s_{n-1}s_{n+1} - s_n^2 &= (n-1)^2(n+1)^2 - n^4 \\ &= (n^2-1)^2 - n^4 \\ &= 1 - 2n^2\end{aligned}$$

olur. □

Önerme 3.2'de ispatlanan $s_{n-1}s_{n+1} - s_n^2 = 1 - 2n^2$ bağıntısı, tam kare sayı dizisinin Fibonacci sayı dizisinden farkını ortaya koymaktadır. Klasik Fibonacci sayı dizisinde Cassini özdeşliği sabit bir değer olan $(-1)^n$ sonucunu verirken, tam kare sayı dizisinde bu farkın $n$ değişkenine bağlı olarak karesel bir hızla büyümesi dikkat çekicidir.

Geometrik olarak bu durum, kenar uzunlukları dizinin ardışık terimleri olan dikdörtgenlerin alanları ile terimin kendi karesi (alanı) arasındaki farkın sabit kalmadığını, aksine dizinin ilerleyen basamaklarında bu farkın arttığını gösterir. Bu sonuç, tam kare sayı dizisinin klasik yinelemeli dizilerine kıyasla daha belirgin bir büyüme sergilediğini ve dizinin ardışık üç terimi arasındaki simetrinin $n$ büyüdükçe karesel bir sapmaya uğradığını kanıtlamaktadır.

**Sonuç 3.1** $n \geq 1$ olmak üzere tam kare sayı dizisi için aşağıdaki özelliği elde etmek mümkündür [28].

$$s_{n-1}s_{n+1} = (s_n - 1)^2 \tag{3.7}$$

**İspat.** Tam kare sayı dizisi için Cassini özdeşliği ve Binet formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} s_{n-1}s_{n+1} &= s_n^2 + 1 - 2n^2 \\ s_{n-1}s_{n+1} &= s_n^2 + 1 - 2s_n \\ s_{n-1}s_{n+1} &= (s_n - 1)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. □

**Önerme 3.3 (Catalan Özdeşliği)** $n, r \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$s_{n-r}s_{n+r} - s_n^2 = r^4 - 2r^2 s_n \tag{3.8}$$

eşitliği sağlanır [28].

**İspat.** Tam kare sayı dizisi için Binet formülü kullanırsak,

$$\begin{aligned} s_{n-r}s_{n+r} - s_n^2 &= (n-r)^2(n+r)^2 - n^4 \\ &= (n^2 - r^2)^2 - n^4 \\ &= n^4 - 2n^2r^2 + r^4 - \mathrm{n}^4 \\ &= r^4 - 2r^2 s_n \end{aligned}$$

bulunur. □

**Önerme 3.4 (d'Ocagne Özdeşliği)** $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere ve $r < n$ için

$$s_{n+1}s_r - s_n s_{r+1} = (r-n)(r+n+2nr) \tag{3.9}$$

eşitliği sağlanır [28].

**İspat.** Tam kare sayı dizisinin binet formülü kullanılırsa istenilen aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} s_{n+1}s_r - s_n s_{r+1} &= (n+1)^2 r^2 - n^2(r+1)^2 \\ &= r^2(n^2+2n+1) - n^2(r^2+2r+1) \\ &= 2r^2 n + r^2 - 2n^2 r - n^2 \\ &= 2nr(r-n) + (r-n)(r+n) \\ &= (r-n)(r+n+2nr) \end{aligned}$$ □

**Önerme 3.5 (Vajda Özdeşliği)** $i, j \in \mathbb{N}$ olmak üzere ve $i, j < n$ için,

$$s_{n+i}s_{n+j} - s_n s_{n+i+j} = 2nij(n+i+j) + i^2 j^2 \tag{3.10}$$

eşitliği sağlanmaktadır [28].

**İspat.** Tam kare sayı dizisinin binet formülü kullanılırsa istenilen aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} s_{n+i}s_{n+j} - s_n s_{n+i+j} &= (n+i)^2(n+j)^2 - n^2(n+i+j)^2 \\ &= [(n+i)(n+j)]^2 - [n(n+i+j)]^2 \\ &= ((n+i)(n+j) - n(n+i+j))((n+i)(n+j) + n(n+i+j)) \\ &= ij(2n(n+i+j) + ij) \\ &= 2nij(n+i+j) + i^2 j^2 \end{aligned}$$ □

**Önerme 3.6 (Halton Özdeşliği)** $r, i \in \mathbb{N}$ olmak üzere ve $r, i < n$ için,

$$s_{n+r}s_{n-r} - s_{n-i}s_{n+i} = 2n^2(i^2 - r^2) + r^4 - i^4 \tag{3.11}$$

eşitliği sağlanır [28].

**İspat.** Tam kare sayı dizisinin Binet formülü kullanılırsa istenilen aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} s_{n+r}s_{n-r} - s_{n-i}s_{n+i} &= (n+r)^2(n-r)^2 - (n-i)^2(n+i)^2 \\ &= (n^2 - r^2)^2 - (n^2 - i^2)^2 \\ &= (i^2 - r^2)(2n^2 - r^2 - i^2) \\ &= 2n^2(i^2 - r^2) + r^4 - i^4 \end{aligned}$$ □

Aşağıda, tam kare sayı dizisini ve Lucas sayı dizisini içeren yeni bir sayı dizisi tanımlanacaktır [28]. Bu iki diziyi birbiri ile ilişkilendirip tam kare Lucas sayı dizisi adında yeni bir dizi elde edilecektir.

Tam kare sayı dizisinin yineleme bağıntısı homojen olmadığından, homojene dönüştürmek için (2.10) eşitliğinde $n$ yerine $n+1$ yazılırsa,

$$s_{n+1} = s_n + 2n + 1$$

elde edilir ve (2.10) dan, son elde edilen eşitlik çıkarılırsa,

$$s_{n+1} - 2s_n = 2 - s_{n-1}$$

bulunur. Yukarıda elde edilen eşitlikte $n$ yerine $n+1$ yazılırsa,

$$s_{n+2} - 2s_{n+1} = 2 - s_n$$

elde edilen son iki denklem birbirinden çıkarılırsa,

$$s_{n+1} - 2s_n - s_{n+2} + 2s_{n+1} = 2 - s_{n-1} - 2 + s_n$$

olur. Son olarak elde edilen eşitlik düzenlenirse, $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi için aşağıdaki üçüncü mertebeden homojen yineleme bağıntısı elde edilir [30]. (Burada referans verilen kitapta eşitlik tam olarak geçmemektedir ama verilen yöntemlerle bu eşitliğe kolayca varılabilir)

$$s_{n+2} = 3s_{n+1} - 3s_n + s_{n-1} \quad (n \geq 1\,;\, s_0 = 0, s_1 = 1\,, s_2 = 4\,) \tag{3.12}$$

### 3.2 Tam Kare Lucas Sayı Dizisi

**Tanım 3.1** $\{sL_n\}_{n=0}^{\infty}$ olmak üzere, tam kare Lucas sayı dizisinin yineleme bağıntısı,

$$sL_{n+2} = 3sL_{n+1} - 3sL_n + sL_{n-1} \ (\, n \geq 1\,;\, sL_0 = 2, sL_1 = 1\,, sL_2 = 4) \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [28].

Tam kare Lucas sayı dizisinin bazı terimleri aşağıda verilmiştir:

$$\{2, 1, 4, 11, 22, 37, 56, 79, \dots\}$$

Bu dizinin karakteristik denklemi şu şekildedir:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

Bu denklemin üç tane aynı reel kökü bulunur: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$

Bu reel kökler arasındaki ilişkiler

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3, x_1x_2x_3 = 1, \ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 3$$

verilmiştir.

**Teorem 3.3** Tam kare Lucas sayı dizisi için Binet formülü

$$sL_n = 2 - 3n + 2n^2 \tag{3.14}$$

dir [28].

**İspat.** Tam kare Lucas sayı dizisinin karakteristik denkleminin üç tane eşit reel kökü olduğundan genel çözüm

$$sL_n = Ax_1^n + Bnx_1^n + Cn^2x_1^n$$
$$sL_n = A + Bn + Cn^2$$

şeklindedir. Tam kare Lucas sayı dizisinin başlangıç koşulları kullanılarak,

$$sL_0 = A = 2$$
$$sL_1 = A + B + C = 1$$
$$sL_2 = A + 2B + 4C = 4$$

$A = 2$ , $B = -3$ ve $C = 2$ olduğu bulunur.

Bu değerler, $sL_n = A + Bn + Cn^2$ denkleminde yerine yazılırsa istenilen elde edilmiş olur. □

**Teorem 3.4** Tam kare Lucas sayı dizisi için üreteç fonksiyonu

$$G_{sL}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} sL_n x^n = \frac{2 - 5x + 7x^2}{1 - 3x + 3x^2 - x^3} \tag{3.15}$$

formundadır [28].

**İspat.** Üreteç fonksiyonu tanımı, tam kare Lucas sayı dizisinin yineleme bağıntısı (3.13) ve toplam sembolünün özellikleri kullanılarak,

$$G_{sL}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} sL_n x^n = sL_0 + sL_1 + sL_2 + \sum_{n=3}^{\infty} sL_n x^n$$
$$= 2 + x + 4x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (3sL_{n-1} - 3sL_{n-2} + sL_{n-3})x^n$$
$$= 2 + x + 4x^2 + 3\sum_{n=2}^{\infty} sL_n x^{n+1} - 3\sum_{n=1}^{\infty} sL_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} sL_n x^{n+3}$$
$$= 2 + x + 4x^2 + 3x\sum_{n=2}^{\infty} sL_n x^n - 3x^2\sum_{n=1}^{\infty} sL_n x^n + x^3\sum_{n=0}^{\infty} sL_n x^n$$
$$= 2 + x + 4x^2 + (-6x - 3x^2) + 3x\sum_{n=0}^{\infty} sL_n x^n + 6x^2 - 3x^2\sum_{n=0}^{\infty} sL_n x^n + x^3\sum_{n=0}^{\infty} sL_n x^n$$

bulunur. Elde edilen eşitlik düzenlenirse,

$$(1 - 3x + 3x^2 - x^3)\sum_{n=0}^{\infty} sL_n x^n = 2 - 5x + 7x^2$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} sL_n x^n = \frac{2 - 5x + 7x^2}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}$$

bulunur. □

**Teorem 3.5** $n \geq 0$ olmak üzere, tam kare Lucas sayılarının sonlu toplamı

$$\sum_{k=0}^{n} sL_k = \frac{(n+1)(4n^2-7n+12)}{6} \tag{3.16}$$

şeklindedir [28].

**İspat.** Tam kare Lucas sayı dizisi için Binet formülünü (3.14) ve toplam sembolünün özelliklerini kullanırsak,

$$\sum_{k=0}^{n}(2k^2-3k+2) = 2\sum_{k=0}^{n}k^2 - 3\sum_{k=0}^{n}k + 2\sum_{k=0}^{n}1$$

$$= 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\frac{n(n+1)}{2} + 2(n+1)$$

$$= \frac{2n(n+1)(2n+1) - 9n(n+1) + 12(n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(4n^2-7n+12)}{6}$$

bulunur. □

Aşağıdaki önermede Catalan özdeşliği verilmiştir.

**Önerme 3.7 (Catalan Özdeşliği)** $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$sL_{n-k}sL_{n+k} - sL_n^2 = -8s_n k^2 + 12nk^2 + 4k^4 - k^2 \tag{3.17}$$

eşitliği sağlanır.

**İspat.** Tam kare Lucas sayı dizisi için Binet formülü (3.14) kullanılırsa,

$$LS_{n-k}LS_{n+k} - LS_n^2 = (2(n-k)^2 - 3(n-k) + 2)(2(n+k)^2 - 3(n+k) + 2) - (2n^2 - 3n + 2)^2$$
$$= (2n^2 - 4nk + 2k^2 - 3n + 3k + 2)(2n^2 + 4nk + 2k^2 - 3n - 3k + 2) - (2n^2 - 3n + 2)^2$$
$$= \big((2n^2 - 3n + 2 + 2k^2) - (4nk - 3k)\big)\big((2n^2 - 3n + 2 + 2k^2) + (4nk - 3k)\big) - (2n^2 - 3n + 2)^2$$
$$= (2n^2 - 3n + 2 + 2k^2)^2 - (4nk - 3k)^2 - (2n^2 - 3n + 2)^2 - (2n^2 - 3n + 2)^2$$
$$= (2n^2 - 3n + 2)^2 + 4k^2(2n^2 - 3n + 2) + 4k^4 - (16n^2k^2 - 24nk^2 + 9k^2)$$
$$= 4k^2(2n^2 - 3n + 2) + 4k^4 - 16n^2k^2 + 24nk^2 - 9k^2$$
$$= 8k^2n^2 - 12nk^2 + 8k^2 + 4k^4 - 16n^2k^2 + 24nk^2 - 9k^2$$
$$= 4k^4 - 8n^2k^2 + 12nk^2 - k^2$$
$$= -8n^2k^2 + 12nk^2 + 4k^4 - k^2$$
$$= -8s_n k^2 + 12nk^2 + 4k^4 - k^2$$

elde edilir.

Catalan özdeşliğinde $k = 1$ yerine yazılırsa, Cassini özdeşliği elde edilir:

$$sL_{n-1}sL_{n+1} - sL_n^2 = -8s_n + 12n + 3$$ □

Aşağıdaki teoremde tam kare Lucas sayı dizisinin matris temsili tanıtılacaktır.

**Teorem 3.6** $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} sL_{n+2} \\ sL_{n+1} \\ sL_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} sL_2 \\ sL_1 \\ sL_0 \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanmaktadır [28].

**İspat.** Tümevarım yöntemiyle ispat yapılacaktır.

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sL_2 \\ sL_1 \\ sL_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3sL_2 - 3sL_1 + sL_0 \\ sL_2 \\ sL_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_3 \\ sL_2 \\ sL_1 \end{bmatrix}$$

olup böylece $n = 1$ için eşitliğin doğru olduğu görülür.

$n - 1$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım ve $n$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sL_{n+1} \\ sL_n \\ sL_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3sL_{n+1} - 3sL_n + sL_{n-1} \\ sL_{n+1} \\ sL_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_{n+2} \\ sL_{n+1} \\ sL_n \end{bmatrix}$$

$n$ için eşitliğin doğru olduğu görülür. □

**Teorem 3.7** $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} sL_{n+2} \\ sL_{n+1} \\ sL_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sL_{n+1} \\ sL_n \\ sL_{n-1} \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır [28].

**İspat.** Tümevarım yöntemiyle ispatlanacaktır.

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sL_2 \\ sL_1 \\ sL_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3sL_2 - 3sL_1 + sL_0 \\ sL_2 \\ sL_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_3 \\ sL_2 \\ sL_1 \end{bmatrix}$$

olduğundan $n = 1$ için eşitlik doğrudur.

$n - 1$ için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim ve $n$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{bmatrix}3 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}sL_{n+1}\\ sL_n\\ sL_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3sL_n-3sL_{n-1}+sL_{n-2}\\ 3sL_{n-1}-3sL_{n-2}+sL_{n-3}\\ 3sL_{n-2}-3sL_{n-3}+sL_{n-4}\end{bmatrix}$$

$$=3\begin{bmatrix}3 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}sL_n\\ sL_{n-1}\\ sL_{n-2}\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}3 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}sL_{n-1}\\ sL_{n-2}\\ sL_{n-3}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}sL_{n-2}\\ sL_{n-3}\\ sL_{n-4}\end{bmatrix}$$

$$=3\begin{bmatrix}3sL_n-3sL_{n-1}+sL_{n-2}\\ sL_n\\ sL_{n-1}\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}3sL_{n-1}-3sL_{n-2}+sL_{n-3}\\ sL_{n-1}\\ sL_{n-2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3sL_{n-2}-3sL_{n-3}+sL_{n-4}\\ sL_{n-2}\\ sL_{n-3}\end{bmatrix}$$

$$=3\begin{bmatrix}sL_{n+1}\\ sL_n\\ sL_{n-1}\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}sL_n\\ sL_{n-1}\\ sL_{n-2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}sL_{n-1}\\ sL_{n-2}\\ sL_{n-3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3sL_{n+1}-3sL_n+sL_{n-1}\\ 3sL_n-3sL_{n-1}+sL_{n-2}\\ 3sL_{n-1}-3sL_{n-2}+sL_{n-3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}sL_{n+2}\\ sL_{n+1}\\ sL_n\end{bmatrix}$$

□

### 3.3 Tam Kare ve Tam Kare Lucas Sayı Dizileri Arasındaki İlişkiler

**Önerme 3.8** Aşağıdaki eşitlikler tam kare Lucas sayı dizisi için sağlanmaktadır [28]:

**i.** $sL_{-n}=sL_n+6n$

**ii.** $sL_{2n}=2(\,sL_n-(s_{n-1}s_{n+1}-s_n^2))$

**iii.** $sL_{2n+1}=8s_n+2n+1$

**İspat.** İspat için Binet formülü (3.14) ve Cassini formülü (3.6) kullanılırsa istenilen aşağıdaki gibi elde edilir.

**i.** $sL_{-n}=2n^2+3n+2=2n^2-3n+2+6n=sL_n+6n$

**ii**. $sL_{2n}=8n^2-6n+2=2\big(sL_n-(1-2n^2)\big)=\,2(\,sL_n-(s_{n-1}s_{n+1}-s_n^2)\,)$

**iii.** $sL_{2n+1}=\,8n^2+2n+1=8s_n+2n+1$ □

Aşağıdaki teorem ile $s_n$ ve $sL_n$ dizilerinin sırasıyla (2.11) ve (3.15) üreteç fonksiyonları kullanılarak, tam kare Lucas sayı dizisi ve tam kare sayı dizisi arasında ilişki verilecektir.

**Teorem 3.8** $n\geq 2$ olmak üzere, tam kare Lucas sayı dizisi ile tam kare sayı dizisi arasındaki ilişki,

$$sL_n=4s_{n-2}-2s_{n-1}+9n-12 \tag{3.18}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [28]:

**İspat.** Tam kare Lucas sayı dizisinin (3.15) ve tam kare sayı dizisinin (2.11) üreteç fonksiyonları ve toplam sembolünün özellikleri kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} sL_{n+2}x^n = \frac{x^2-x+4}{1-3x+3x^2-x^3} = \frac{x^2+x}{1-3x+3x^2-x^3} + \frac{4-2x}{1-3x+3x^2-x^3}$$

$$= \frac{x^2+x}{1-3x+3x^2-x^3} + \frac{6-2(x+1)}{1-3x+3x^2-x^3}$$

$$= \frac{x^2+x}{1-3x+3x^2-x^3} + \frac{-2(x+1)}{1-3x+3x^2-x^3} + \frac{6}{1-3x+3x^2-x^3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} s_{n+1}x^n + 6\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} s_{n+1}x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} s_{n+1}x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+3n+2)x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} s_{n+1}x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} (3n+2)x^n$$

$$= 4\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} s_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (9n+6)x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (4s_n - 2s_{n+1} + 9n + 6\ )x^n$$

En son elde edilen eşitlik düzenlenirse,

$$sL_{n+2} = 4s_n - 2s_{n+1} + 9n + 6$$

istenilen elde edilir. □

Aşağıdaki teoremde, tam kare Lucas sayı dizisi, Fibonacci ve Lucas sayı dizileri cinsinden elde edilecektir.

**Teorem 3.9** $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ve $A_{n-i} = \left(\frac{(1+n-i)(2+n-i)}{2} - s_{n-i}\right)$ olsun.

$F_i$ , $L_i$ ve $sL_n$ sırasıyla Fibonacci, Lucas ve tam kare Lucas sayı dizileri olmak üzere bu diziler arasında,

$$sL_n = 5\sum_{i=0}^{n} L_i A_{n-i} - 8\sum_{i=0}^{n} F_{i+1}\, A_{n-i} + 7\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta^{\mathrm{i}}\alpha - \beta\alpha^{\mathrm{i}}}{\alpha-\beta}\right)A_{n-i} \qquad (3.19)$$

eşitliği sağlanır [28].

**İspat.** İspat için tam kare Lucas sayı dizisinin üreteç fonksiyonu olan $G_{sL}(x) = \frac{2-5x+7x^2}{(1-x)^3}$ eşitliğinden yola çıkacağız.

İfadeyi $1-x-x^2$ ile çarpıp bölerek yeniden düzenlersek:

$$G_{sL}(x) = \frac{2-5x+7x^2}{1-x-x^2}\frac{1-x-x^2}{(1-x)^3}$$

Bu eşitliğin sağ tarafını, iki ayrı üreteç fonksiyonunun Cauchy çarpımı olarak analiz edelim. İlk çarpanı Fibonacci ve Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonları cinsinden parçalarsak:

$$\frac{2-5x+7x^2}{1-x-x^2} = \frac{5(2-x)}{1-x-x^2} - \frac{8}{1-x-x^2} + \frac{7x^2}{1-x-x^2}$$

Bu ifadenin kuvvet serisi açılımı şu şekildedir:

$$\frac{2-5x+7x^2}{1-x-x^2} = 5\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n - 8\sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}x^n + 7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n\alpha - \beta\alpha^n}{\alpha-\beta}x^n.$$

İkinci çarpan olan $\frac{1-x-x^2}{(1-x)^3}$ ifadesini ise bilinen seriler yardımıyla açalım:

$$\frac{1-x-x^2}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{x+x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

Bu seriyi ortak parantezde toplarsak, katsayıları $A_n$ olan seriyi elde ederiz:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} - s^n\right]x^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

Son olarak, her iki çarpanın serilerini birbiriyle çarptığımızda, $x^n$ nin katsayısı olan $sL_n$ değeri

$$sL_n = 5\sum_{i=0}^{n} L_i A_{n-i} - 8\sum_{i=0}^{n} F_{i+1}\, A_{n-i} + 7\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta^{\mathrm{i}}\alpha - \beta\alpha^{\mathrm{i}}}{\alpha-\beta}\right)A_{n-i}$$

olarak elde edilir. □

### 3.4 Tam Kare Polinomları

**Tanım 3.2** Tam kare polinomları $s_n(x)$, $s_0(x) = 0$, $s_1(x) = 1$ ve $s_2(x) = x + 3$ olmak üzere

$$s_{n+3}(x) = (x+2)s_{n+2}(x) - (2x+1)s_{n+1}(x) + xs_n(x) \tag{3.20}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [28].

Tam kare sayıları, $s_n(x)$ polinomunda $x = 1$ yazılarak elde edilir. Tam kare polinomlarının karakteristik denklemi

$$r^3 - (x+2)r^2 + (2x+1)r - x = 0$$

dır. Bu denklemin kökleri

$$r_1 = x, r_2 = 1 \text{ ve } r_3 = 1$$

bulunur. Bu kökler arasındaki ilişki

$$r_1 + r_2 + r_3 = x + 2,\ r_1r_2r_3 = x,\ \text{ve}\ r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = 2x + 1$$

şeklinde tanımlıdır.

$s_n(x)$ polinomunun ilk dört terimi aşağıdaki tabloda verilmiştir [28].

**Tablo 3.1** Tam Kare Polinomları

| | |
|---|---|
| $s_0(x)$ | 0 |
| $s_1(x)$ | 1 |
| $s_2(x)$ | $x + 3$ |
| $s_3(x)$ | $x^2 + 3x + 5$ |

Aşağıdaki teoremde, tam kare polinomunun Binet formülü elde edilecektir.

**Teorem 3.10** Tam kare polinomu için

$$s_n(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}(x^n - 1) + \frac{2}{1-x}n$$

eşitliği sağlanır [28].

**İspat.** Tam kare polinomunun karakteristik denkleminin iki eşit kökü olduğundan Binet formülü

$$s_n(x) = A_1 r_1^n + (A_2 + A_3 n) r_2^n$$

şeklindedir.

Yukarıda $s_n(x)$ polinomunda $n$ değerleri yerine yazılırsa $A_1$, $A_2$ ve $A_3$ bulunur.

$$\begin{aligned} s_0(x) &= 0 = A_1 + A_2, \\ s_1(x) &= 1 = A_1 x + A_2 + A_3, \\ s_2(x) &= x + 3 = A_1 x^2 + A_2 + 2A_3 \end{aligned}$$

olup

$$A_1 = \tfrac{x+1}{(x-1)^2},\ A_2 = -\tfrac{x+1}{(x-1)^2} \text{ ve } A_3 = \tfrac{2}{1-x}$$

olur.

$$s_n(x) = \frac{x+1}{(x-1)^2}(x^n - 1) + \frac{2}{1-x}n$$

bulunur. □

Aşağıdaki teoremde, tam kare polinomu için üreteç fonksiyonu elde edilecektir.

**Teorem 3.11** Tam kare polinomunun üreteç fonksiyonu $G_s(t,x)$ olmak üzere,

$$G_s(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(x) t^n = \frac{t + t^2}{1 - t(x+2) + (2x+1)t^2 - xt^3} \tag{3.21}$$

şeklinde tanımlıdır [28].

**İspat.** Üreteç fonksiyonun tanımı, toplam sembolünün özellikleri ve tam kare polinomunun yineleme bağıntısı (3.20) kullanılırsa,

$$G_s(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(x) t^n = t + (x+3)t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} s_n(x) t^n$$

$$= t + (x+3)t^2 + \sum_{n=3}^{\infty}((x+2)s_{n-1}(x) - (2x+1)s_{n-2}(x) + xs_{n-3}(x))t^n$$

$$= t + (x+3)t^2 + (x+2)\sum_{n=3}^{\infty}s_{n-1}(x)t^n - (2x+1)\sum_{n=3}^{\infty}s_{n-2}(x)t^n + x\sum_{n=3}^{\infty}s_{n-3}(x)t^n$$

$$= t + (x+3)t^2 + (x+2)t\sum_{n=2}^{\infty}s_n(x)t^n - (2x+1)t^2\sum_{n=1}^{\infty}s_n(x)t^n + xt^3\sum_{n=0}^{\infty}s_n(x)t^n$$

$$= t + (x+3)t^2 - (x+2)t(s_0(x) + s_1(x)t) + (x+2)t\sum_{n=0}^{\infty}s_n(x)t^n + (2x+1)t^2s_0(x)$$

$$-(2x+1)t^2\sum_{n=0}^{\infty}s_n(x)t^n + xt^3\sum_{n=0}^{\infty}s_n(x)t^n$$

$$= t + (x+3)t^2 - (x+2)t^2 + (x+2)t\sum_{n=0}^{\infty}s_n(x)t^n - (2x+1)t^2\sum_{n=0}^{\infty}s_n(x)t^n$$

$$+xt^3\sum_{n=0}^{\infty}s_n(x)t^n$$

Elde edilen eşitlik düzenlenirse,

$$(1 - t(x+2) + (2x+1)t^2 - xt^3)\sum_{n=0}^{\infty}s_n(x)t^n = t + t^2$$

olur.

$$G_s(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty}s_n(x)t^n = \frac{t+t^2}{1 - t(x+2) + (2x+1)t^2 - xt^3}$$

Böylece istenilen elde edilir. □

**Teorem 3.12** Tam kare polinomu için

$$\begin{bmatrix} s_{n+2}(x) \\ s_{n+1}(x) \\ s_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x+3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır [28].

**İspat.** Tümevarım üzerinden ispatlanacaktır.

$$\begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x+3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x+2)(x+3) - 2x - 1 \\ x+3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x+2)s_2(x) - (2x+1)s_1(x) + xs_0(x) \\ s_2(x) \\ s_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_3(x) \\ s_2(x) \\ s_1(x) \end{bmatrix}$$

$n = 1$ için eşitlik doğrudur. $n - 1$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım. $n$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x+3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} x+3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{n+1}(x) \\ s_n(x) \\ s_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x+2)s_{n+1}(x) - (2x+1)s_n(x) + xs_{n-1}(x) \\ s_{n+1}(x) \\ s_n(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_{n+2}(x) \\ s_{n+1}(x) \\ s_n(x) \end{bmatrix}$$

Son eşitlikten iddianın $n$ için doğru olduğu görülür. □

**Teorem 3.13** Tam kare polinomu için

$$\begin{bmatrix} s_n(x) \\ s_{n+1}(x) \\ s_{n+2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & -2x-1 & x+2 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} s_0(x) \\ s_1(x) \\ s_2(x) \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır [28].

**İspat.** Tümevarım ile ispat yapılacaktır.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & -2x-1 & x+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0(x) \\ s_1(x) \\ s_2(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s_1(x) \\ s_2(x) \\ (x+2)s_2(x) - (2x+1)s_1(x) + xs_0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1(x) \\ s_2(x) \\ s_3(x) \end{bmatrix}$$

$n = 1$ için eşitlik doğrudur. $n - 1$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım. $n$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & -2x-1 & x+2 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} s_0(x) \\ s_1(x) \\ s_2(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & -2x-1 & x+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & -2x-1 & x+2 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} s_0(x) \\ s_1(x) \\ s_2(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & -2x-1 & x+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{n-1}(x) \\ s_n(x) \\ s_{n+1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_n(x) \\ s_{n+1}(x) \\ s_{n+2}(x) \end{bmatrix}$$

Son eşitlikten iddianın $n$ için doğru olduğu görülür. □

**Teorem 3.14** Tam kare polinomu için

$$\begin{bmatrix} s_{n+2}(x) \\ s_{n+1}(x) \\ s_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{n+1}(x) \\ s_n(x) \\ s_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır [28].

**İspat.** Tümevarım yöntemi kullanılacaktır. $n = 1$ için

$$\begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x+2)(x+3)-2x-1 \\ x+3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x+2)s_2(x)-(2x+1)s_1(x) \\ s_2(x) \\ s_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_3(x) \\ s_2(x) \\ s_1(x) \end{bmatrix}$$

olup eşitlik doğrudur.

$n-1$ için eşitlik doğru olsun. Bu durumda, $n$ için doğru olduğunu ispatlayalım.

$$\begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{n+1}(x) \\ s_n(x) \\ s_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x+2)s_n(x)-(2x+1)s_{n-1}(x)+xs_{n-2}(x) \\ (x+2)s_{n-1}(x)-(2x+1)s_{n-2}(x)+xs_{n-3}(x) \\ (x+2)s_{n-2}(x)-(2x+1)s_{n-3}(x)+xs_{n-4}(x) \end{bmatrix}$$

$$= (x+2) \begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_n(x) \\ s_{n-1}(x) \\ s_{n-2}(x) \end{bmatrix} - (2x+1) \begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{n-1}(x) \\ s_{n-2}(x) \\ s_{n-3}(x) \end{bmatrix}$$

$$+x\begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{n-2}(x) \\ s_{n-3}(x) \\ s_{n-4}(x) \end{bmatrix}$$

$$= (x+2)\begin{bmatrix} (x+2)s_n(x) - (2x+1)s_{n-1}(x) + xs_{n-2}(x) \\ s_n(x) \\ s_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

$$-(2x+1)\begin{bmatrix} (x+2)s_{n-1}(x) - (2x+1)s_{n-2}(x) + xs_{n-3}(x) \\ s_{n-1}(x) \\ s_{n-2}(x) \end{bmatrix}$$

$$+x\begin{bmatrix} (x+2)s_{n-2}(x) - (2x+1)s_{n-3}(x) + xs_{n-4}(x) \\ s_{n-2}(x) \\ s_{n-3}(x) \end{bmatrix}$$

$$= (x+2)\begin{bmatrix} s_{n+1}(x) \\ s_n(x) \\ s_{n-1}(x) \end{bmatrix} -(2x+1)\begin{bmatrix} s_n(x) \\ s_{n-1}(x) \\ s_{n-2}(x) \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} s_{n-1}(x) \\ s_{n-2}(x) \\ s_{n-3}(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x+2)s_{n+1}(x) - (2x+1)s_n(x) + xs_{n-1}(x) \\ (x+2)s_n(x) - (2x+1)s_{n-1}(x) + xs_{n-2}(x) \\ (x+2)s_{n-1}(x) - (2x+1)s_{n-2}(x) + xs_{n-3}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{n+2}(x) \\ s_{n+1}(x) \\ s_n(x) \end{bmatrix}$$

Son eşitlikten iddianın $n$ için doğru olduğu görülür. □

**Teorem 3.15 (Simpson Formülü)** Tam kare polinomu için

$$det\begin{bmatrix} s_{n+2}(x) & s_{n+1}(x) & s_n(x) \\ s_{n+1}(x) & s_n(x) & s_{n-1}(x) \\ s_n(x) & s_{n-1}(x) & s_{n-2}(x) \end{bmatrix} = -(4x+4)x^{n-2}$$

eşitliği sağlanmaktadır [28].

**İspat.** $n$ üzerinde tümevarım ile gösterilecektir. $n = 1$ için

$$det\begin{bmatrix} s_3(x) & s_2(x) & s_1(x) \\ s_2(x) & s_1(x) & s_0(x) \\ s_1(x) & s_0(x) & s_{-1}(x) \end{bmatrix} = -(4x+4)x^{-1}$$

olduğundan eşitlik doğrudur.

$n-1$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım. $n$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$det\begin{bmatrix} s_{n+2}(x) & s_{n+1}(x) & s_n(x) \\ s_{n+1}(x) & s_n(x) & s_{n-1}(x) \\ s_n(x) & s_{n-1}(x) & s_{n-2}(x) \end{bmatrix}$$

$$= det\begin{bmatrix} (x+2)s_{n+1}(x) - (2x+1)s_n(x) + xs_{n-1}(x) & s_{n+1}(x) & s_n(x) \\ (x+2)s_n(x) - (2x+1)s_{n-1}(x) + xs_{n-2}(x) & s_n(x) & s_{n-1}(x) \\ (x+2)s_{n-1}(x) - (2x+1)s_{n-2}(x) + xs_{n-3}(x) & s_{n-1}(x) & s_{n-2}(x) \end{bmatrix}$$

$$= det\begin{bmatrix} (x+2)s_{n+1}(x) & s_{n+1}(x) & s_n(x) \\ (x+2)s_n(x) & s_n(x) & s_{n-1}(x) \\ (x+2)s_{n-1}(x) & s_{n-1}(x) & s_{n-2}(x) \end{bmatrix} + det\begin{bmatrix} -(2x+1)s_n(x) & s_{n+1}(x) & s_n(x) \\ -(2x+1)s_{n-1}(x) & s_n(x) & s_{n-1}(x) \\ -(2x+1)s_{n-2}(x) & s_{n-1}(x) & s_{n-2}(x) \end{bmatrix}$$

$$+det\begin{bmatrix} xs_{n-1}(x) & s_{n+1}(x) & s_n(x) \\ xs_{n-2}(x) & s_n(x) & s_{n-1}(x) \\ xs_{n-3}(x) & s_{n-1}(x) & s_{n-2}(x) \end{bmatrix}$$

$$= xdet\begin{bmatrix} s_{n+1}(x) & s_n(x) & s_{n-1}(x) \\ s_n(x) & s_{n-1}(x) & s_{n-2}(x) \\ s_{n-1}(x) & s_{n-2}(x) & s_{n-3}(x) \end{bmatrix} = -(4x+4)x^{n-2}$$

$n$ için eşitliğin doğru olduğu görülmektedir. □

### 3.5 Tam Kare Lucas Polinomları

**Tanım 3.3** Tam kare Lucas polinomları $sL_n(x)$, $sL_0(x) = 2$, $sL_1(x) = 1$ ve $sL_2(x) = x + 3$ olmak üzere

$$sL_{n+3}(x) = (x+2)sL_{n+2}(x) - (2x+1)sL_{n+1}(x) + xsL_n(x) \qquad (3.22)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Tam kare Lucas sayıları $sL_n(x)$ polinomunda $x = 1$ yazılarak elde edilir. Tam kare Lucas polinomlarının karakteristik denklemi

$$r^3 - (x+2)r^2 + (2x+1)r - x = 0$$

şeklindedir [28].

Bu denklemin kökleri,

$$r_1 = x, r_2 = 1 \text{ ve } r_3 = 1$$

dir. Bu kökler arasındaki ilişki

$$r_1 + r_2 + r_3 = x + 2,\ r_1r_2r_3 = x \text{ ve } r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = 2x + 1$$

olur.

$sL_n(x)$ polinomunun ilk dört terimi aşağıdaki tabloda verilmiştir [28].

**Tablo 3.2** Tam Kare Lucas Polinomları

| | |
|---|---|
| $sL_0(x)$ | 2 |
| $sL_1(x)$ | 1 |
| $sL_2(x)$ | $x+3$ |
| $sL_3(x)$ | $x^2+5x+5$ |

Aşağıdaki teoremde, tam kare polinomunun Binet formülü verilmektedir.

**Teorem 3.16** Tam kare Lucas polinomu için

$$sL_n(x) = \frac{x+3}{(x-1)^2}x^n + \frac{2x^2-5x-1}{(x-1)^2} + \frac{2x+2}{1-x}n$$

eşitliği sağlanır [28].

**İspat.** Tam Kare Lucas polinomunun karakteristik denkleminin üç kökünden ikisi eşit kökler olduğundan dizinin, Binet formülü

$$sL_n(x) = B_1 r_1^n + (B_2 + B_3 n) r_2^n$$
$$sL_n(x) = B_1 x^n + B_2 + B_3 n$$

şeklindedir. Yukarıda $sL_n(x)$ polinomunda $n$ değerleri yazılırsa

$$sL_0(x) = 2 = B_1 + B_2,$$
$$sL_1(x) = 1 = B_1 x + B_2 + B_3,$$
$$sL_2(x) = x + 3 = B_1 x^2 + B_2 + 2B_3$$

elde edilir. Sonucunda,

$$B_1 = \frac{x+3}{(x-1)^2},\ B_2 = \frac{2x^2-5x-1}{(x-1)^2} \text{ ve } B_3 = \frac{2x+2}{1-x}$$

bulunur. Böylece,

$$sL_n(x) = \frac{x+3}{(x-1)^2}x^n + \frac{2x^2-5x-1}{(x-1)^2} + \frac{2x+2}{1-x}n$$

istenilen elde edilir. □

Aşağıdaki teoremde, tam kare Lucas polinomu için üreteç fonksiyonu elde edilecektir.

**Teorem 3.17** Tam kare Lucas polinomunun üreteç fonksiyonu

$$G_{sL}(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty} sL_n(x)t^n=\frac{2-3t-2tx+3t^2+4t^2x}{1-t(x+2)+(2x+1)t^2-xt^3}$$

formundadır [28].

**İspat.** Üreteç fonksiyonun tanımı, toplam sembolünün özellikleri ve tam kare Lucas polinomunun yineleme bağıntısı (3.22) kullanılırsa,

$$G_{sL}(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty} sL_n(x)t^n=2+t+(x+3)t^2+\sum_{n=3}^{\infty} sL_n(x)t^n$$

$$=2+t+(x+3)t^2+\sum_{n=3}^{\infty}((x+2)sL_{n-1}(x)-(2x+1)sL_{n-2}(x)+xsL_{n-3}(x))t^n$$

$$=2+t+t^2(x+3)+t\sum_{n=2}^{\infty}(x+2)sL_n(x)t^n-t^2(2x+1)\sum_{n=1}^{\infty}sL_n(x)t^n$$
$$+t^3x\sum_{n=0}^{\infty}sL_n(x)t^n$$

$$=2+t+t^2(x+3)-t(x+2)(sL_0(x)+sL_1(x)t)+t(x+2)\sum_{n=0}^{\infty}sL_n(x)t^n$$
$$+t^2(2x+1)\,sL_0(x)-t^2(2x+1)\sum_{n=0}^{\infty}sL_n(x)t^n+xt^3\sum_{n=0}^{\infty}sL_n(x)t^n$$

$$=2+t+t^2(x+3)-t(x+2)(2+t)+t(x+2)\sum_{n=0}^{\infty}sL_n(x)t^n+2t^2(2x+1)$$
$$-t^2(2x+1)\sum_{n=0}^{\infty}sL_n(x)t^n+xt^3\sum_{n=0}^{\infty}sL_n(x)t^n$$

elde edilen eşitlik düzenlenirse,

$$(1-t(x+2)+(2x+1)t^2-xt^3)\sum_{n=0}^{\infty}sL_n(x)t^n=2-3t-2tx+3t^2+4t^2x$$

$$G_{sL}(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty} sL_n(x)t^n=\frac{2-3t-2tx+3t^2+4t^2x}{1-t(x+2)+(2x+1)t^2-xt^3}$$

Böylece istenilen elde edilir. □

**Teorem 3.18** Tam kare Lucas polinomu için

$$\begin{bmatrix} sL_{n+2}(x)\\ sL_{n+1}(x)\\ sL_n(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} x+3\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır [28].

**İspat.** Tümevarım yöntemi kullanılacaktır. $n = 1$ için,

$$\begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x+3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x+2)(x+3)-(2x+1)+2x \\ x+3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x+2)sL_2(x)-(2x+1)sL_1(x)+xsL_0(x) \\ sL_2(x) \\ sL_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_3(x) \\ sL_2(x) \\ sL_1(x) \end{bmatrix}$$

olup eşitlik doğrudur.

$n-1$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım. $n$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x+3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} x+3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} sL_{n+1}(x) \\ sL_n(x) \\ sL_{n-1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x+2)sL_{n+1}(x)-(2x+1)sL_n(x)+xsL_{n-1}(x) \\ sL_{n+1}(x) \\ sL_n(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} sL_{n+2}(x) \\ sL_{n+1}(x) \\ sL_n(x) \end{bmatrix}$$

Son eşitlikten iddianın $n$ için doğru olduğu görülür. □

**Teorem 3.19** Tam kare Lucas polinomu için

$$\begin{bmatrix} sL_n(x) \\ sL_{n+1}(x) \\ sL_{n+2}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & -2x-1 & x+2 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ x+3 \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır [28].

**İspat.** Tümevarım yöntemi kullanılacaktır.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & -2x-1 & x+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ x+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x+3 \\ (x+2)(x+3)-(2x+1)+2x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} sL_1(x) \\ sL_2(x) \\ (x+2)sL_2(x)-(2x+1)sL_1(x)+xsL_0(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_1(x) \\ sL_2(x) \\ sL_3(x) \end{bmatrix}$$

olduğundan $n = 1$ için eşitlik doğrudur. $n-1$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım. *n* için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & -2x-1 & x+2 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ x+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & -2x-1 & x+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & -2x-1 & x+2 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ x+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & -2x-1 & x+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} sL_{n-1}(x) \\ sL_n(x) \\ sL_{n+1}(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} sL_n(x) \\ sL_{n+1}(x) \\ xsL_{n-1}(x)-(2x+1)sL_n(x)+(x+2)sL_{n+1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_n(x) \\ sL_{n+1}(x) \\ sL_{n+2}(x) \end{bmatrix}$$

Son eşitlikten iddianın $n$ için doğru olduğu görülür. □

**Teorem 3.20** Tam kare Lucas polinomu için

$$\begin{bmatrix} sL_{n+2}(x) \\ sL_{n+1}(x) \\ sL_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} sL_{n+1}(x) \\ sL_n(x) \\ sL_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır [28].

**İspat.** Tümevarım yöntemi kullanılacaktır.

$$\begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x+3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x+2)(x+3)-(2x+1)+2x \\ x+3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x+2)sL_2(x) - (2x+1)sL_1(x) + xsL_0(x) \\ sL_2(x) \\ sL_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_3(x) \\ sL_2(x) \\ sL_1(x) \end{bmatrix}$$

olduğundan $n = 1$ için eşitlik doğrudur.

$n-1$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım. $n$ için doğru olduğunu ispatlayalım.

$$\begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sL_{n+1}(x) \\ sL_n(x) \\ sL_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x+2)sL_n(x) - (2x+1)sL_{n-1}(x) + xsL_{n-2}(x) \\ (x+2)sL_{n-1}(x) - (2x+1)sL_{n-2}(x) + xsL_{n-3}(x) \\ (x+2)sL_{n-2}(x) - (2x+1)sL_{n-3}(x) + xsL_{n-4}(x) \end{bmatrix}$$

$$= (x+2) \begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sL_n(x) \\ sL_{n-1}(x) \\ sL_{n-2}(x) \end{bmatrix} - (2x+1) \begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sL_{n-1}(x) \\ sL_{n-2}(x) \\ sL_{n-3}(x) \end{bmatrix}$$

$$+x \begin{bmatrix} x+2 & -2x-1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sL_{n-2}(x) \\ sL_{n-3}(x) \\ sL_{n-4}(x) \end{bmatrix}$$

$$= (x+2) \begin{bmatrix} (x+2)sL_n(x) - (2x+1)sL_{n-1}(x) + xsL_{n-2}(x) \\ sL_n(x) \\ sL_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

$$-(2x+1) \begin{bmatrix} (x+2)sL_{n-1}(x) - (2x+1)sL_{n-2}(x) + xsL_{n-3}(x) \\ sL_{n-1}(x) \\ sL_{n-2}(x) \end{bmatrix}$$

$$+x \begin{bmatrix} (x+2)sL_{n-2}(x) - (2x+1)sL_{n-3}(x) + xsL_{n-4}(x) \\ sL_{n-2}(x) \\ sL_{n-3}(x) \end{bmatrix}$$

$$= (x+2) \begin{bmatrix} sL_{n+1}(x) \\ sL_n(x) \\ sL_{n-1}(x) \end{bmatrix} - (2x+1) \begin{bmatrix} sL_n(x) \\ sL_{n-1}(x) \\ sL_{n-2}(x) \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} sL_{n-1}(x) \\ sL_{n-2}(x) \\ sL_{n-3}(x) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x+2)sL_{n+1}(x) - (2x+1)sL_n(x) + xsL_{n-1}(x) \\ (x+2)sL_n(x) - (2x+1)sL_{n-1}(x) + xsL_{n-2}(x) \\ (x+2)sL_{n-1}(x) - (2x+1)sL_{n-2}(x) + xsL_{n-3}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sL_{n+2}(x) \\ sL_{n+1}(x) \\ sL_n(x) \end{bmatrix}$$

Son eşitlikten iddianın $n$ için doğru olduğu görülür. □

**Teorem 3.21 (Simpson Formülü)** Tam kare Lucas polinomu için

$$det\begin{bmatrix} sL_{n+2}(x) & sL_{n+1}(x) & sL_n(x) \\ sL_{n+1}(x) & sL_n(x) & sL_{n-1}(x) \\ sL_n(x) & sL_{n-1}(x) & sL_{n-2}(x) \end{bmatrix} = x^{n-2}(-4x^3-20x^2-28x-12)$$

eşitliği sağlanmaktadır [28].

**İspat.** Tümevarım yöntemi kullanılacaktır. $n = 1$ için

$$det\begin{bmatrix} sL_3(x) & sL_2(x) & sL_1(x) \\ sL_2(x) & sL_1(x) & sL_0(x) \\ sL_1(x) & sL_0(x) & sL_{-1}(x) \end{bmatrix} = -4x^2-20x-28-\frac{12}{x}$$

olup eşitlik doğrudur.

$n-1$ için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım. $n$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$det\begin{bmatrix} sL_{n+2}(x) & sL_{n+1}(x) & sL_n(x) \\ sL_{n+1}(x) & sL_n(x) & sL_{n-1}(x) \\ sL_n(x) & sL_{n-1}(x) & sL_{n-2}(x) \end{bmatrix}$$

$$= det\begin{bmatrix} (x+2)sL_{n+1}(x)-(2x+1)sL_n(x)+xsL_{n-1}(x) & sL_{n+1}(x) & sL_n(x) \\ (x+2)sL_n(x)-(2x+1)sL_{n-1}(x)+xsL_{n-2}(x) & sL_n(x) & sL_{n-1}(x) \\ (x+2)sL_{n-1}(x)-(2x+1)sL_{n-2}(x)+xsL_{n-3}(x) & sL_{n-1}(x) & sL_{n-2}(x) \end{bmatrix}$$

$$= det\begin{bmatrix} (x+2)sL_{n+1}(x) & sL_{n+1}(x) & sL_n(x) \\ (x+2)sL_n(x) & sL_n(x) & sL_{n-1}(x) \\ (x+2)sL_{n-1}(x) & sL_{n-1}(x) & sL_{n-2}(x) \end{bmatrix}$$

$$+det\begin{bmatrix} -(2x+1)sL_n(x) & sL_{n+1}(x) & sL_n(x) \\ -(2x+1)sL_{n-1}(x) & sL_n(x) & sL_{n-1}(x) \\ -(2x+1)sL_{n-2}(x) & sL_{n-1}(x) & sL_{n-2}(x) \end{bmatrix}$$

$$+det\begin{bmatrix} xsL_{n-1}(x) & sL_{n+1}(x) & sL_n(x) \\ xsL_{n-2}(x) & sL_n(x) & sL_{n-1}(x) \\ xsL_{n-3}(x) & sL_{n-1}(x) & sL_{n-2}(x) \end{bmatrix}$$

$$= xdet\begin{bmatrix} sL_{n+1}(x) & sL_n(x) & sL_{n-1}(x) \\ sL_n(x) & sL_{n-1}(x) & sL_{n-2}(x) \\ sL_{n-1}(x) & sL_{n-2}(x) & sL_{n-3}(x) \end{bmatrix} = x^{n-2}(-4x^3-20x^2-28x-12)$$

$n$ için eşitliğin doğru olduğu görülür. □

### 3.6 Tam Kare ve Tam Kare Lucas Polinomları Arasındaki İlişkiler

Tam kare ve tam kare Lucas polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki teoremde gösterilecektir.

**Teorem 3.22** Tam kare ve Tam kare Lucas polinomu için

$$s_n(x) = -\frac{x+4}{2(x+1)^2(x+3)} sL_{n+2}(x) + \frac{3x+8}{2(x+1)(x+3)} sL_{n+1}(x) + \frac{-2x^2-4x+4}{4(x+1)^2(x+3)} sL_n(x)$$

eşitliği geçerlidir [28].

**İspat.** Aşağıdaki eşitlik tam kare polinomlarını, tam kare Lucas polinomları cinsinden yazabilmek için kullanılacaktır. $ax$, $bx$ ve $cx$ katsayıları $x$ değişkenine bağlı bulunması gereken bilinmeyenleri göstermektedir.

$$s_n(x) = axsL_{n+2}(x) + bxsL_{n+1}(x) + cxsL_n(x).$$

Yukarıdaki eşitlikte $n$ yerine $n = 0,\ n = 1$ ve $n = 2$ değerleri yazılırsa,

$$\begin{aligned} s_0(x) &= a\ x\ sL_2(x) + b\ x\ sL_1(x) + c\ x\ sL_0(x), \\ s_1(x) &= a\ x\ sL_3(x) + b\ x\ sL_2(x) + c\ x\ sL_1(x), \\ s_2(x) &= a\ x\ sL_4(x) + b\ x\ sL_3(x) + c\ x\ sL_2(x) \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} 0 &= a(x+3) + b\ + 2c, \\ 1 &= a(x^2+5x+5) + b(x+3) + c, \\ x+3 &= a(x^3+5x^2+9x+7) + b(x^2+5x+5) + c(x+3). \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak,

$$a = -\frac{x+4}{2(x+1)^2(x+3)},\ b = \frac{3x+8}{2(x+1)(x+3)} \text{ ve } c = \frac{-2x^2-4x+4}{4(x+1)^2(x+3)}.$$

bulunur.

Böylece,

$$s_n(x) = -\frac{x+4}{2(x+1)^2(x+3)} sL_{n+2}(x) + \frac{3x+8}{2(x+1)(x+3)} sL_{n+1}(x) + \frac{-2x^2-4x+4}{4(x+1)^2(x+3)} sL_n(x)$$

istenilen elde edilir. □

**Teorem 3.23** Tam kare ve Tam kare Lucas polinomu için

$$sL_n(x) = \frac{3x+4}{2x+2} s_{n+2}(x) - \frac{3x^2+9x+8}{2x+2} s_{n+1}(x) + \frac{5x^2+10x+6}{2x+2} s_n(x)$$

eşitliği geçerlidir [28].

**İspat.** Aşağıdaki eşitlik tam kare Lucas polinomlarını, tam kare polinomları cinsinden yazabilmek için kullanılacaktır. $ax$, $bx$ ve $cx$ katsayıları $x$ değişkenine bağlı bulunması gereken bilinmeyenleri göstermektedir.

$$sL_n(x) = axs_{n+2}(x) + bxs_{n+1}(x) + cxs_n(x)$$

Yukarıdaki eşitlikte $n$ yerine $n = 0,\ n = 1$ ve $n = 2$ değerleri yazılırsa,

$$sL_0(x) = a\ x\ s_2(x) + b\ x\ s_1(x) + c\ x\ s_0(x)$$
$$sL_1(x) = a\ x\ s_3(x) + b\ x\ s_2(x) + c\ x\ s_1(x)$$
$$sL_2(x) = a\ x\ s_4(x) + b\ x\ s_3(x) + c\ x\ s_2(x)$$

olur.

$$2 = a(x+3) + b\ ,$$
$$1 = a(x^2+3x+5) + b(x+3) + c,$$
$$x+3 = a(x^3+3x^2+5x+7) + b(x^2+3x+5) + c(x+3).$$

Elde edilen denklem sisteminden $a, b$ ve $c$ bulunur. Sonuç olarak,

$$a = \frac{3x+4}{2x+2},\ b = -\frac{3x^2+9x+8}{2x+2} \text{ ve } c = \frac{5x^2+10x+6}{2x+2}$$

elde edilir.

Böylece,

$$sL_n(x) = \frac{3x+4}{2x+2}s_{n+2}(x) - \frac{3x^2+9x+8}{2x+2}s_{n+1}(x) + \frac{5x^2+10x+6}{2x+2}s_n(x)$$

istenilen bulunur. □

### 3.7 Tam Kare ve Tam Kare Lucas Kuaterniyonları

Bu alt başlıkta tanımlanan $i, j$ ve $k$ birim kuaterniyonlarını ifade etmektedir. $\tau = 1 + i + j + k, \varphi = i + 2j + 3k,\ \gamma = i + 4j + 9k, \varphi^* = i + 5j + 9k - 3$ ve

$\gamma^* = i + 4j + 11k + 2$ olarak adlandırılmıştır.

Tam kare sayı dizisi ve tam kare Lucas sayı dizisi için kuaterniyon tanımları aşağıda yapılmaktadır [29].

**Tanım 3.4** Tam kare kuaterniyonu $\{sQ_n\}_{n=0}^{\infty}$ olmak üzere,

$$sQ_n = s_n + s_{n+1}i + s_{n+2}j + s_{n+3}k \tag{3.23}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [29].

**Tanım 3.5** Tam kare Lucas kuaterniyonu $\{LSQ_n\}_{n=0}^{\infty}$ olmak üzere,

$$sLQ_n = sL_n + sL_{n+1}i + sL_{n+2}j + sL_{n+3}k \tag{3.24}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [29].

**Teorem 3.24** Tam kare kuaterniyon binet formülü,

$$sQ_n = \tau n^2 + 2\varphi n + \gamma \tag{3.25}$$

şeklindedir [29].

**İspat.** Tam kare kuaterniyon tanımı (3.23) ve tam kare sayılarının Binet formülü (2.9) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} sQ_n &= s_n + s_{n+1}i + s_{n+2}j + s_{n+3}k \\ &= n^2 + (n+1)^2 i + (n+2)^2 j + (n+3)^2 k \\ &= n^2 + (n^2+2n+1)i + (n^2+4n+4)j + (n^2+6n+9)k \\ &= (1+i+j+k)n^2 + 2(i+2j+3k)n + i + 4j + 9k = \tau n^2 + 2\varphi n + \gamma \end{aligned}$$

istenilen elde edilir. □

**Teorem 3.25** Tam kare Lucas kuaterniyonu binet formülü,

$$sLQ_n = 2\tau n^2 + \varphi^* n + \gamma^* \tag{3.26}$$

şeklindedir [29].

**İspat.** Tam kare Lucas kuaterniyon tanımını (3.24) ve tam kare Lucas sayılarının Binet formülünü (3.14) kullanırsak,

$$\begin{aligned} sLQ_n &= sL_n + sL_{n+1}i + sL_{n+2}j + sL_{n+3}k \\ &= (2n^2 - 3n + 2) + (2(n+1)^2 - 3(n+1) + 2)i + (2(n+2)^2 - 3(n+2) + 2)j \\ &\quad + 2(n+3)^2 - 3(n+3) + 2)k \\ &= (2n^2 - 3n + 2) + \big((2n^2 + 4n + 2) - 3n - 1\big)i + \big((2n^2 + 8n + 8) - 3n - 4\big)j \\ &\quad + ((2n^2 + 12n + 18) - 3n - 7)k \\ &= (2n^2 - 3n + 2) + (2n^2 + n + 1)i + (2n^2 + 5n + 4)j + (2n^2 + 9n + 11)k \\ &= (2 + 2i + 2j + 2k)n^2 + (i + 5j + 9k - 3)n + (i + 4j + 11k + 2) \end{aligned}$$

elde edilir. En son elde edilen eşitlik düzenlenirse,

$$sLQ_n = 2\tau n^2 + \varphi^* n + \gamma^*$$

elde edilir. □

**Teorem 3.26** Tam kare kuaterniyon yineleme bağıntısı

$$sQ_n = 3sQ_{n-1} - 3sQ_{n-2} + sQ_{n-3} \tag{3.27}$$

şeklindedir [29].

**İspat.** Tam kare kuaterniyonunun tanımını (3.23) ve tam kare sayılarının yineleme bağıntısını (3.12) kullanarak

$$\begin{aligned} sQ_n &= s_n + s_{n+1}i + s_{n+2}j + s_{n+3}k \\ &= 3s_{n-1} - 3s_{n-2} + s_{n-3} + (3s_n - 3s_{n-1} + s_{n-2})i + (3s_{n+1} - 3s_n + s_{n-1})j \\ &\quad + (3s_{n+2} - 3s_{n+1} + s_n)k \\ &= 3(s_{n-1} + s_n i + s_{n+1} j + s_{n+2} k) - 3(s_{n-2} + s_{n-1} i + s_n j + s_{n+1} k) + (s_{n-3} + s_{n-2} i + s_{n-1} j + s_n k) \end{aligned}$$

elde edilir. Tam kare kuaterniyon tanımı (3.23) yerine yazılırsa

$$sQ_n = 3sQ_{n-1} - 3sQ_{n-2} + sQ_{n-3}$$

bulunur. □

**Teorem 3.27** Tam kare Lucas kuaterniyon yineleme bağıntısı

$$sLQ_n = 3sLQ_{n-1} - 3sLQ_{n-2} + sLQ_{n-3} \tag{3.28}$$

formundadır [29].

**İspat.** Tam kare Lucas kuaterniyon tanımını (3.24) ve tam kare Lucas sayılarının yineleme bağıntısını (3.13) kullanarak,

$$\begin{aligned} sLQ_n &= sL_n + sL_{n+1}i + sL_{n+2}j + sL_{n+3}k \\ &= (3sL_{n-1} - 3sL_{n-2} + sL_{n-3}) + i(3sL_n - 3sL_{n-1} + sL_{n-2}) + j(3sL_{n+1} - 3sL_n + sL_{n-1}) \\ &\quad +k(3sL_{n+2} - 3sL_{n+1} + sL_n) \\ &= 3(sL_{n-1} + sL_n i + sL_{n+1}j + sL_{n+2}k) - 3(sL_{n-2} + sL_{n-1}i + sL_n j + sL_{n+1}k) \\ &\quad +(sL_{n-3} + sL_{n-2}i + sL_{n-1}j + sL_n k) \end{aligned}$$

elde edilir. En son elde edilen eşitlikte tam kare Lucas kuaterniyon tanımı (3.24) yerine yazılırsa

$$sLQ_n = 3sLQ_{n-1} - 3sLQ_{n-2} + sLQ_{n-3}$$

olur. □

**Teorem 3.28** Tam kare kuaterniyonu üreteç fonksiyonu $G_{sQ}(x)$ olmak üzere

$$G_{sQ}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} sQ_n x^n = \frac{sQ_0 + (sQ_1 - 3sQ_0)x + (sQ_2 - 3sQ_1 + 3sQ_0)x^2}{1 - 3x + 3x^2 - x^3} \tag{3.29}$$

eşitliği sağlanır [29].

**İspat.** Tam kare kuaterniyon yineleme bağıntısı (3.27) ve toplam sembolünün özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} G_{sQ}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} sQ_n x^n = sQ_0 + sQ_1 x + sQ_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (3sQ_{n-1} - 3sQ_{n-2} + sQ_{n-3})x^n \\ &= sQ_0 + sQ_1 x + sQ_2 x^2 + 3x \sum_{n=2}^{\infty} sQ_n x^n - 3x^2 \sum_{n=1}^{\infty} sQ_n x^n + x^3 \sum_{n=0}^{\infty} sQ_n x^n \\ &= sQ_0 + sQ_1 x + sQ_2 x^2 - 3x(sQ_0 + sQ_1 x) + 3x^2 sQ_0 + 3x \sum_{n=0}^{\infty} sQ_n x^n - 3x^2 \sum_{n=0}^{\infty} sQ_n x^n \\ &\quad +x^3 \sum_{n=0}^{\infty} sQ_n x^n \end{aligned}$$

$$= (x^3 - 3x^2 + 3x)\sum_{n=0}^{\infty} sQ_n x^n + sQ_0 + (sQ_1 - 3sQ_0)x + (sQ_2 - 3sQ_1 + 3sQ_0)x^2$$

elde edilir. Eşitlik düzenlenirse,

$$(1 - 3x + 3x^2 - x^3)\sum_{n=0}^{\infty} sQ_n x^n = sQ_0 + (sQ_1 - 3sQ_0)x + (sQ_2 - 3sQ_1 + 3sQ_0)x^2$$

$$G_{sQ}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} sQ_n x^n = \frac{sQ_0 + (sQ_1 - 3sQ_0)x + (sQ_2 - 3sQ_1 + 3sQ_0)x^2}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}$$

istenilen elde edilir. □

**Teorem 3.29** Tam kare Lucas kuaterniyonu üreteç fonksiyonu

$$G_{sLQ}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} sLQ_n x^n = \frac{sLQ_0 + (sLQ_1 - 3sLQ_0)x + (sLQ_2 - 3sLQ_1 + 3sLQ_0)x^2}{1 - 3x + 3x^2 - x^3} \qquad (3.30)$$

şeklinde tanımlıdır [29].

**İspat.** Tam kare Lucas kuaterniyon yineleme bağıntısı (3.28) ve toplam sembolünün özellikleri kullanılırsa

$$G_{sLQ}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} sLQ_n x^n$$

$$= sLQ_0 + sLQ_1 x + sLQ_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (3sLQ_{n-1} - 3sLQ_{n-2} + sLQ_{n-3})x^n$$

$$= sLQ_0 + sLQ_1 x + sLQ_2 x^2 + 3x\sum_{n=2}^{\infty} sLQ_n x^n - 3x^2\sum_{n=1}^{\infty} sLQ_n x^n + x^3\sum_{n=0}^{\infty} sLQ_n x^n$$

$$= sLQ_0 + sLQ_1 x + sLQ_2 x^2 - 3x(sLQ_0 + sLQ_1 x) + 3x^2 sLQ_0 + 3x\sum_{n=0}^{\infty} sLQ_n x^n$$

$$-3x^2\sum_{n=0}^{\infty} sLQ_n x^n + x^3\sum_{n=0}^{\infty} sLQ_n x^n$$

$$= (x^3 - 3x^2 + 3x)\sum_{n=0}^{\infty} sLQ_n x^n + sLQ_0 + (sLQ_1 - 3sLQ_0)x + sLQ_2 - 3sLQ_1 + 3sLQ_0)x^2$$

elde edilir. Eşitlik düzenlenirse

$$(1 - 3x + 3x^2 - x^3)\sum_{n=0}^{\infty} sLQ_n x^n = sLQ_0 + (sLQ_1 - 3sLQ_0)x + (sLQ_2 - 3sLQ_1 + 3sLQ_0)x^2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} sLQ_n x^n = \frac{sLQ_0 + (sLQ_1 - 3sLQ_0)x + (sLQ_2 - 3sLQ_1 + 3sLQ_0)x^2}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}$$

istenilen elde edilir. □

**Teorem 3.30** Tam kare kuaterniyonlar için

$$sQ_{n+1} = sQ_n + \tau(2n+1) + 2\varphi \tag{3.31}$$

eşitlik sağlanır [29].

**İspat.** Tam kare kuaterniyon için Binet formülü (3.25) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} sQ_{n+1} &= \tau(n+1)^2 + 2\varphi(n+1) + \gamma \\ &= \tau n^2 + 2\varphi n + \gamma + \tau(2n+1) + 2\varphi \\ &= sQ_n + \tau(2n+1) + 2\varphi \end{aligned}$$

istenilen elde edilir. □

**Teorem 3.31** Tam kare Lucas kuaterniyonlar için

$$sLQ_{n+1} = sLQ_n + 2\tau(2n+1) + \varphi^* \tag{3.32}$$

eşitlik sağlanır [29].

**İspat.** Tam kare Lucas kuaterniyon için Binet formülü (3.26) kullanılırsa

$$\begin{aligned} sLQ_{n+1} &= 2\tau(n+1)^2 + \varphi^*(n+1) + \gamma^* \\ &= 2\tau(n^2+2n+1) + \varphi^* n + \varphi^* + \gamma^* \\ &= 2\tau n^2 + 4\tau n + 2\tau + \varphi^* n + \varphi^* + \gamma^* \\ &= (2\tau n^2 + \varphi^* n + \gamma^*) + (4\tau n + 2\tau + \varphi^*) \\ &= sLQ_n + 2\tau(2n+1) + \varphi^* \end{aligned}$$

istenilen elde edilir. □

### 3.8 Tam Kare ve Tam Kare Lucas Hibrit Sayıları ile Hibrit Kuaterniyonları

**Tanım 3.6** Tam kare hibrit sayıları $\{sH_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $i$ kompleks, $\varepsilon$ dual, $h$ hibrit birimler olmak üzere

$$sH_n = s_n + s_{n+1}i + s_{n+2}\varepsilon + s_{n+3}h \tag{3.33}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [29].

**Tanım 3.7** Tam kare Lucas hibrit sayıları $\{sLH_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $i$ kompleks, $\varepsilon$ dual ve $h$ hibrit birimler olmak üzere

$$sLH_n = sL_n + sL_{n+1}i + sL_{n+2}\varepsilon + sL_{n+3}h \tag{3.34}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [29].

**Tanım 3.8** Tam kare hibrit kuaterniyonu $\{sHQ_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $i, j, k$ birim kuaterniyonlar olmak üzere

$$sHQ_n = sH_n + sH_{n+1}i + sH_{n+2}j + sH_{n+3}k \tag{3.35}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [29].

Tam kare hibrit kuaterniyonu aşağıdaki şekilde de tanımlanmaktadır:

$$sHQ_n = sQ_n + sQ_{n+1}i + sQ_{n+2}\varepsilon + sQ_{n+3}h \tag{3.36}$$

Burada $i$ kompleks, $\varepsilon$ dual ve $h$ hibrit birimlerdir.

**Tanım 3.9** $i, j, k$ birim kuaterniyonlar olmak üzere tam kare Lucas hibrit kuaterniyonu $\{sLHQ_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$sLHQ_n = sLH_n + sLH_{n+1}i + sLH_{n+2}j + sLH_{n+3}k \tag{3.37}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [29].

$i$ kompleks, $\varepsilon$ dual ve $h$ hibrit birimler olmak üzere tam kare Lucas hibrit kuaterniyonu aşağıdaki şekilde de tanımlanmaktadır:

$$sLHQ_n = sLQ_n + sLQ_{n+1}i + sLQ_{n+2}\varepsilon + sLQ_{n+3}h \tag{3.38}$$

**Teorem 3.32** $i$ kompleks, $\varepsilon$ dual ve $h$ hibrit birimler olmak üzere tam kare hibrit sayı dizisinin Binet formülü

$$sH_n = \tilde{\tau}n^2 + 2\tilde{\varphi}n + \tilde{\gamma} \tag{3.39}$$
$$\tilde{\tau} = 1 + i + \varepsilon + h, \tilde{\varphi} = i + 2\varepsilon + 3h, \tilde{\gamma} = i + 4\varepsilon + 9h$$

şeklindedir [29].

**İspat.** Tam kare hibrit sayıların tanımını (3.33) ve tam kare sayı dizisi için Binet formülü kullanılırsa (2.9)

$$\begin{aligned} sH_n &= s_n + s_{n+1}i + s_{n+2}\varepsilon + s_{n+3}h \\ &= n^2 + (n+1)^2 i + (n+2)^2\varepsilon + (n+3)^2 h \\ &= n^2 + (n^2+2n+1)i + (n^2+4n+4)\varepsilon + (n^2+6n+9)h \\ &= (1+i+\varepsilon+h)n^2 + 2(i+2\varepsilon+3h)n + (i+4\varepsilon+9h) \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitlikte $\tilde{\tau}$ , $\tilde{\varphi}$ ve $\tilde{\gamma}$ yerine yazılırsa,

$$sH_n = \tilde{\tau}n^2 + 2\tilde{\varphi}n + \tilde{\gamma}$$

istenilen elde edilir. □

**Teorem 3.33** $i$ kompleks, $\varepsilon$ dual ve $h$ hibrit birimler olmak üzere tam kare Lucas hibrit sayı dizisinin Binet formülü

$$sLH_n = 2\tilde{\tau}n^2 + \tilde{\varphi}^* n + \tilde{\gamma}^* \tag{3.40}$$
$$\tilde{\varphi}^* = -3 + i + 5\varepsilon + 9h, \tilde{\gamma}^* = 2 + i + 4\varepsilon + 11h$$

şeklinde tanımlıdır [29].

**İspat.** Tam kare Lucas hibrit sayılarının tanımı (3.34) ve tam kare Lucas sayı dizisinin Binet formülü (3.14) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&sLH_n = sL_n + sL_{n+1}i + sL_{n+2}\varepsilon + sL_{n+3}h \\
&= (2n^2 - 3n + 2) + (2(n+1)^2 - 3(n+1) + 2)i + (2(n+2)^2 - 3(n+2) + 2)\varepsilon \\
&\quad + (2(n+3)^2 - 3(n+3) + 2)h \\
&= (2n^2 - 3n + 2) + (2(n^2 + 2n + 1) - 3(n+1) + 2)i \\
&\quad + (2(n^2 + 4n + 4) - 3(n+2) + 2)\varepsilon + (2(n^2 + 6n + 9) - 3(n+3) + 2)h \\
&= (2n^2 - 3n + 2) + ((2n^2 + 4n + 2) - 3n - 1)i \\
&\quad + (2(n^2 + 4n + 4) - 3n - 4)\varepsilon + (2(n^2 + 6n + 9) - 3n - 7)h \\
&= (2n^2 - 3n + 2) + (2n^2 + n + 1)i + (2n^2 + 5n + 4)\varepsilon + (2n^2 + 9n + 11)h \\
&= 2(1 + i + \varepsilon + h)n^2 + (-3 + i + 5\varepsilon + 9h)n + (2 + i + 4\varepsilon + 11h)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitlik düzenlenirse,

$$sLH_n = 2\tilde{\tau}n^2 + \tilde{\varphi}^* n + \tilde{\gamma}^*$$

istenilen bulunur. □

**Teorem 3.34** Tam kare hibrit kuaterniyon Binet formülü

$$sHQ_n = \tilde{\tau}\tau n^2 + 2(\tilde{\varphi}\tau + \tilde{\tau}\varphi)n + \tilde{\gamma}\tau + \tilde{\tau}\gamma + 2\varphi\tilde{\varphi} \tag{3.41}$$

$$\tau = 1 + i + j + k, \varphi = i + 2j + 3k, \tilde{\tau} = 1 + i + \varepsilon + h, \tilde{\varphi} = i + 2\varepsilon + 3h$$

$$\gamma = i + 4j + 9k \text{ ve } \tilde{\gamma} = i + 4\varepsilon + 9h$$

şeklinde tanımlanmaktadır [29].

**İspat.** Tam kare hibrit kuaterniyonunun tanımı (3.35) ve tam kare hibrit sayılarının Binet formülü (3.39) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&sHQ_n = sH_n + sH_{n+1}i + sH_{n+2}j + sH_{n+3}k \\
&= \tilde{\tau}n^2 + 2\tilde{\varphi}n + \tilde{\gamma} + ((n+1)^2\tilde{\tau} + 2\tilde{\varphi}(n+1) + \tilde{\gamma})i + ((n+2)^2\tilde{\tau} + 2\tilde{\varphi}(n+2) + \tilde{\gamma})j \\
&\quad + ((n+3)^2\tilde{\tau} + 2\tilde{\varphi}(n+3) + \tilde{\gamma})k \\
&= \tilde{\tau}n^2 + 2\tilde{\varphi}n + \tilde{\gamma} + ((n^2 + 2n + 1)\tilde{\tau} + 2\tilde{\varphi}(n+1) + \tilde{\gamma})i \\
&\quad + ((n^2 + 4n + 4)\tilde{\tau} + 2\tilde{\varphi}(n+2) + \tilde{\gamma})j + ((n^2 + 6n + 9)\tilde{\tau} + 2\tilde{\varphi}(n+3) + \tilde{\gamma})k \\
&= \tilde{\tau}n^2(1 + i + j + k) + n\big(2\tilde{\varphi}(1 + i + j + k) + 2\tilde{\tau}(i + 2j + 3k)\big) \\
&\quad + \tilde{\gamma}(1 + i + j + k) + \tilde{\tau}(i + 4j + 9k) + 2\tilde{\varphi}(i + 2j + 3k)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitlikte $\tau, \varphi$ ve $\gamma$ yerine yazılırsa,

$$sHQ_n = \tilde{\tau}\tau n^2 + 2(\tilde{\varphi}\tau + \tilde{\tau}\varphi)n + \tilde{\gamma}\tau + \tilde{\tau}\gamma + 2\tilde{\varphi}\varphi$$

istenilen elde edilir. □

**Teorem 3.35** Tam kare Lucas hibrit kuaterniyon Binet formülü

$$sLHQ_n = 2\tilde{\tau}\tau n^2 + (\tilde{\varphi}^*\tau + 4\tilde{\tau}\varphi)n + \tilde{\gamma}^*\tau + 2\tilde{\tau}\gamma + \tilde{\varphi}^*\varphi \tag{3.42}$$

$$\tau = 1 + i + j + k, \tilde{\tau} = 1 + i + \varepsilon + h, \varphi = i + 2j + 3k$$

$$\tilde{\varphi} = i + 2\varepsilon + 3h, \gamma = i + 4j + 9k, \tilde{\gamma} = i + 4\varepsilon + 9h$$

$$\tilde{\varphi}^* = -3 + i + 5\varepsilon + 9h \text{ ve } \tilde{\gamma}^* = 2 + i + 4\varepsilon + 11h$$

şeklinde tanımlıdır [29].

**İspat.** Tam kare Lucas hibrit kuaterniyon tanımı (3.37) ve tam kare Lucas hibrit sayıların Binet formülü (3.40) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&sLHQ_n = sLH_n + sLH_{n+1}i + sLH_{n+2}j + sLH_{n+3}k \\
&= (2\tilde{\tau}n^2 + \tilde{\varphi}^*n + \tilde{\gamma}^*) + [2\tilde{\tau}(n+1)^2 + \tilde{\varphi}^*(n+1) + \tilde{\gamma}^*]i \\
&\quad + [2\tilde{\tau}(n+2)^2 + \tilde{\varphi}^*(n+2) + \tilde{\gamma}^*]j + [2\tilde{\tau}(n+3)^2 + \tilde{\varphi}^*(n+3) + \tilde{\gamma}^*]k \\
&= (2\tilde{\tau}n^2 + \tilde{\varphi}^*n + \tilde{\gamma}^*) + [2\tilde{\tau}(n^2 + 2n + 1) + \tilde{\varphi}^*(n+1) + \tilde{\gamma}^*]i \\
&\quad + [2\tilde{\tau}(n^2 + 4n + 4) + \tilde{\varphi}^*(n+2) + \tilde{\gamma}^*]j + [2\tilde{\tau}(n^2 + 6n + 9) + \tilde{\varphi}^*(n+3) + \tilde{\gamma}^*]k \\
&= 2\tilde{\tau}n^2(1 + i + j + k) + n[\tilde{\varphi}^*(1 + i + j + k) + 4\tilde{\tau}(i + 2j + 3k)] \\
&\quad + \tilde{\gamma}^*(1 + i + j + k) + 2\tilde{\tau}(i + 4j + 9k) + \tilde{\varphi}^*(i + 2j + 3k)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\tau, \varphi$ ve $\gamma$ eşitlikte yerine yazılırsa,

$$sLHQ_n = 2\tilde{\tau}\tau n^2 + (\tilde{\varphi}^*\tau + 4\tilde{\tau}\varphi)n + \tilde{\gamma}^*\tau + 2\tilde{\tau}\gamma + \tilde{\varphi}^*\varphi$$

istenilen elde edilir. □

**Teorem 3.36** Tam kare hibrit sayı dizisi için yineleme bağıntısı

$$sH_n = 3sH_{n-1} - 3sH_{n-2} + sH_{n-3} \tag{3.43}$$

şeklinde tanımlanmıştır [29].

**İspat.** Tam kare hibrit sayılarının tanımı (3.33) ve tam kare sayılarının yineleme bağıntısı (3.12) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&sH_n = s_n + s_{n+1}i + s_{n+2}\varepsilon + s_{n+3}h \\
&= (3s_{n-1} - 3s_{n-2} + s_{n-3}) + i(3s_n - 3s_{n-1} + s_{n-2}) + \varepsilon(3s_{n+1} - 3s_n + s_{n-1}) \\
&\quad + h(3s_{n+2} - 3s_{n+1} + s_n) \\
&= 3(s_{n-1} + s_n i + s_{n+1}\varepsilon + s_{n+2}h) - 3(s_{n-2} + s_{n-1}i + s_n\varepsilon + s_{n+1}h) \\
&\quad + (s_{n-3} + s_{n-2}i + s_{n-1}\varepsilon + s_n h)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitlik düzenlenirse,

$$sH_n = 3sH_{n-1} - 3sH_{n-2} + sH_{n-3}$$

istenilen bulunur. □

**Teorem 3.37** Tam kare Lucas hibrit sayı dizisi için yineleme bağıntısı

$$sLH_n = 3sLH_{n-1} - 3sLH_{n-2} + sLH_{n-3} \tag{3.44}$$

şeklinde tanımlanmıştır [29].

**İspat.** Tam kare Lucas hibrit sayılarının tanımını (3.34) ve tam kare Lucas sayı dizisinin yineleme bağıntısı (3.13) kullanılırsa,

$sLH_n = sL_n + sL_{n+1}i + sL_{n+2}\varepsilon + sL_{n+3}h$
$=(3sL_{n-1} - 3sL_{n-2} + sL_{n-3}) + i(3sL_n - 3sL_{n-1} + sL_{n-2})$
$\quad +\varepsilon(3sL_{n+1} - 3sL_n + sL_{n-1}) + h(3sL_{n+2} - 3sL_{n+1} + sL_n)$
$= 3\,(sL_{n-1} + sL_n i + sL_{n+1}\,\varepsilon + sL_{n+2}h) - 3(sL_{n-2} + sL_{n-1}i + sL_n\,\varepsilon + sL_{n+1}h)$
$\quad +(sL_{n-3} + sL_{n-2}i + sL_{n-1}\varepsilon + sL_n h)$

elde edilir. Eşitlik düzenlenirse,

$$sLH_n = 3sLH_{n-1} - 3sLH_{n-2} + sLH_{n-3}$$

elde edilir. □

**Teorem 3.38** Tam kare hibrit kuaterniyon sayı dizisi için yineleme bağıntısı

$$sHQ_n = 3sHQ_{n-1} - 3sHQ_{n-2} + sHQ_{n-3} \tag{3.45}$$

şeklindedir [29].

**İspat.** Tam kare hibrit kuaterniyonunun tanımını (3.35) ve tam kare hibrit sayılarının yineleme bağıntısı (3.43) kullanılırsa,

$sHQ_n = sH_n + sH_{n+1}i + sH_{n+2}j + sH_{n+3}k$
$= (3sH_{n-1} - 3sH_{n-2} + sH_{n-3}) + i(3sH_n - 3sH_{n-1} + sH_{n-2})$
$\quad +j(3sH_{n+1} - 3sH_n + sH_{n-1}) + k(3sH_{n+2} - 3sH_{n+1} + sH_n)$
$= 3(sH_{n-1}+sH_n i+sH_{n+1}j+sH_{n+2}k) - 3(sH_{n-2}+sH_{n-1}i+sH_n j+sH_{n+1}k)$
$\quad +(sH_{n-3}+sH_{n-2}i + sH_{n-1}j + sH_n k)$

elde edilir. Eşitlik düzenlenirse,

$$sHQ_n = 3sHQ_{n-1} - 3sHQ_{n-2} + sHQ_{n-3}$$

istenilen sonuç bulunur. □

**Teorem 3.39** Tam kare Lucas hibrit kuaterniyon sayı dizisi için yineleme bağıntısı

$$sLHQ_n = 3sLHQ_{n-1} - 3sLHQ_{n-2} + sLHQ_{n-3} \tag{3.46}$$

şeklinde tanımlanmıştır [29].

**İspat.** Tam kare Lucas hibrit kuaterniyonunun tanımını (3.37) ve tam kare Lucas hibrit sayılarının yineleme bağıntısını (3.44) kullanılırsa,

$sLHQ_n = sLH_n + sLH_{n+1}i + sLH_{n+2}j + sLH_{n+3}k$
$=(3sLH_{n-1} - 3sLH_{n-2} + sLH_{n-3}) + (3sLH_n - 3sLH_{n-1} + sLH_{n-2})i$
$\quad +(3sLH_{n+1} - 3sLH_n + sLH_{n-1})j + (3sLH_{n+2} - 3sLH_{n+1} + sLH_n)k$
$=3(sLH_{n-1} + sLH_n i + sLH_{n+1}j + sLH_{n+2}k) - 3(sLH_{n-2} + sLH_{n-1}i$
$\quad + sLH_n j + sLH_{n+1}k) + (sLH_{n-3} + sLH_{n-2}i + sLH_{n-1}j + sLH_n k)$

elde edilir. Eşitlik düzenlenirse,

$$sLHQ_n = 3sLHQ_{n-1} - 3sLHQ_{n-2} + sLHQ_{n-3}$$

istenilen sonuç bulunur. □

**Teorem 3.40** Tam kare hibrit sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G_{sH}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} sH_n x^n = \frac{sH_0+(sH_1-3sH_0)x+(sH_2-3sH_1+3sH_0)x^2}{1-3x+3x^2-x^3} \tag{3.47}$$

şeklindedir [29].

**İspat.** Tam kare hibrit sayı dizisinin yineleme bağıntısı (3.43) ve toplam sembolünün özellikleri kullanılırsa

$$G_{sH}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} sH_n x^n = sH_0 + sH_1 x + sH_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (3sH_{n-1} - 3sH_{n-2} + sH_{n-3})x^n$$

$$= sH_0 + sH_1 x + sH_2 x^2 + 3x \sum_{n=2}^{\infty} sH_n x^n - 3x^2 \sum_{n=1}^{\infty} sH_n x^n + x^3 \sum_{n=0}^{\infty} sH_n x^n$$

$$= sH_0 + sH_1 x + sH_2 x^2 - 3x(sH_0 + sH_1 x) + 3x^2 sH_0 + 3x \sum_{n=0}^{\infty} sH_n x^n$$

$$-3x^2 \sum_{n=0}^{\infty} sH_n x^n + x^3 \sum_{n=0}^{\infty} sH_n x^n$$

$$= sH_0 + (sH_1 - 3sH_0)x + (sH_2 - 3sH_1 + 3sH_0)x^2 + (x^3 - 3x^2 + 3x) \sum_{n=0}^{\infty} sH_n x^n$$

elde edilir. Elde edilen eşitlik düzenlenirse,

$$(1 - 3x + 3x^2 - x^3) \sum_{n=0}^{\infty} sH_n x^n = sH_0 + (sH_1 - 3sH_0)x + (sH_2 - 3sH_1 + 3sH_0)x^2$$

$$G_{sH}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} sH_n x^n = \frac{sH_0 + (sH_1 - 3sH_0)x + (sH_2 - 3sH_1 + 3sH_0)x^2}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}$$

bulunur. □

**Teorem 3.41** Tam kare Lucas hibrit sayı dizisinin üreteç fonksiyonu $G_{sLH}(x)$ olmak üzere

$$G_{sLH}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} sLH_n x^n = \frac{sLH_0+(sLH_1-3sLH_0)x+(sLH_2-3sLH_1+3sLH_0)x^2}{1-3x+3x^2-x^3} \tag{3.48}$$

eşitliği sağlanır [29].

**İspat.** Tam kare Lucas hibrit sayı dizisinin yineleme bağıntısı (3.44) ve toplam sembolünün özellikleri kullanılırsa,

$$G_{sLH}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} sLH_n x^n$$

$$= sLH_0 + sLH_1x + sLH_2x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(3sLH_{n-1} - 3sLH_{n-2} + sLH_{n-3})x^n$$

$$= sLH_0 + sLH_1x + sLH_2x^2 + 3x\sum_{n=2}^{\infty} sLH_nx^n - 3x^2\sum_{n=1}^{\infty} sLH_nx^n + x^3\sum_{n=0}^{\infty} sLH_nx^n$$

$$= sLH_0 + sLH_1x + sLH_2x^2 - 3x(sLH_0 + sLH_1x) + 3x^2sLH_0 + 3x\sum_{n=0}^{\infty} sLH_nx^n$$

$$-3x^2\sum_{n=0}^{\infty} sLH_nx^n + x^3\sum_{n=0}^{\infty} sLH_nx^n$$

$$= (x^3 - 3x^2 + 3x)\sum_{n=0}^{\infty} sLH_nx^n + sLH_0 + (sLH_1 - 3sLH_0)x$$

$$+(sLH_2 - 3sLH_1 + 3sLH_0)x^2$$

elde edilir. Eşitlik düzenlenirse,

$$(1 - 3x + 3x^2 - x^3)\sum_{n=0}^{\infty} sLH_nx^n = sLH_0 + (sLH_1 - 3sLH_0)x + (sLH_2 - 3sLH_1 + 3sLH_0)x^2$$

$$G_{sLH}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} sLH_nx^n = \frac{sLH_0 + (sLH_1 - 3sLH_0)x + (sLH_2 - 3sLH_1 + 3sLH_0)x^2}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}$$

istenilen elde edilir. □

**Teorem 3.42** Tam kare hibrit kuaterniyon sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G_{sHQ}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} sHQ_nx^n = \frac{sHQ_0 + (sHQ_1 - 3sHQ_0)x + (sHQ_2 - 3sHQ_1 + 3sHQ_0)x^2}{1 - 3x + 3x^2 - x^3} \qquad (3.49)$$

şeklindedir [29].

**İspat.** Tam kare hibrit kuaterniyon yineleme bağıntısı (3.45) ve toplam sembolünün özellikleri kullanılırsa,

$$G_{sHQ}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} sHQ_nx^n$$

$$= sHQ_0 + sHQ_1x + sHQ_2x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(3sHQ_{n-1} - 3sHQ_{n-2} + sHQ_{n-3})x^n$$

$$= sHQ_0 + sHQ_1x + sHQ_2x^2 + 3x\sum_{n=2}^{\infty} sHQ_nx^n - 3x^2\sum_{n=1}^{\infty} sHQ_nx^n + x^3\sum_{n=0}^{\infty} sHQ_nx^n$$

$$= sHQ_0 + sHQ_1x + sHQ_2x^2 - 3x(sHQ_0 + sHQ_1x) + 3x^2sHQ_0 + 3x\sum_{n=0}^{\infty} sHQ_nx^n$$

$$-3x^2\sum_{n=0}^{\infty} sHQ_nx^n + x^3\sum_{n=0}^{\infty} sHQ_nx^n$$

$$= (x^3 - 3x^2 + 3x)\sum_{n=0}^{\infty} sHQ_n x^n + sHQ_0 + (sHQ_1 - 3sHQ_0)x$$
$$+(sHQ_2 - 3sHQ_1 + 3sHQ_0)x^2$$

olur. Elde edilen eşitlik düzenlenirse,

$$(1 - 3x + 3x^2 - x^3)\sum_{n=0}^{\infty} sHQ_n x^n = sHQ_0 + (sHQ_1 - 3sHQ_0)x$$
$$+(sHQ_2 - 3sHQ_1 + 3sHQ_0)x^2$$

$G_{sHQ}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} sHQ_n x^n = \frac{sHQ_0 + (sHQ_1 - 3sHQ_0)x + (sHQ_2 - 3sHQ_1 + 3sHQ_0)x^2}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}$ □

**Teorem 3.43** Tam kare Lucas hibrit kuaterniyon sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G_{sLHQ}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} sLHQ_n x^n = \frac{sLHQ_0 + (sLHQ_1 - 3sLHQ_0)x + (sLHQ_2 - 3sLHQ_1 + 3sLHQ_0)x^2}{1 - 3x + 3x^2 - x^3} \quad (3.50)$$

formundadır [29].

**İspat.** Tam kare Lucas hibrit kuaterniyon yineleme bağıntısı (3.46) ve toplam sembolü özellikleri kullanılırsa,

$$G_{sLHQ}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} sLHQ_n x^n$$
$$= sLHQ_0 + sLHQ_1 x + sLHQ_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (3sLHQ_{n-1} - 3sLHQ_{n-2} + sLHQ_{n-3})x^n$$
$$= sLHQ_0 + sLHQ_1 x + sLHQ_2 x^2 + 3x\sum_{n=2}^{\infty} sLHQ_n x^n - 3x^2\sum_{n=1}^{\infty} sLHQ_n x^n$$
$$+x^3\sum_{n=0}^{\infty} sLHQ_n x^n$$
$$= sLHQ_0 + sLHQ_1 x + sLHQ_2 x^2 - 3x(sLHQ_0 + sLHQ_1 x) + 3x^2 sLHQ_0$$
$$+3x\sum_{n=0}^{\infty} sLHQ_n x^n - 3x^2\sum_{n=0}^{\infty} sLHQ_n x^n + x^3\sum_{n=0}^{\infty} sLHQ_n x^n$$
$$= (x^3 - 3x^2 + 3x)\sum_{n=0}^{\infty} sLHQ_n x^n + sLHQ_0 + (sLHQ_1 - 3sLHQ_0)x$$
$$+(sLHQ_2 - 3sLHQ_1 + 3sLHQ_0)x^2$$

elde edilir. Eşitlik düzenlenirse,

$$(1 - 3x + 3x^2 - x^3)\sum_{n=0}^{\infty} sLHQ_n x^n = sLHQ_0 + (sLHQ_1 - 3sLHQ_0)x$$
$$+(sLHQ_2 - 3sLHQ_1 + 3sLHQ_0)x^2$$
$$G_{sLHQ}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} sLHQ_n x^n = \frac{sLHQ_0 + (sLHQ_1 - 3sLHQ_0)x + (sLHQ_2 - 3sLHQ_1 + 3sLHQ_0)x^2}{1 - 3x + 3x^2 - x^3}$$

böylece istenilen elde edilir. □

**Teorem 3.44** Tam kare hibrit sayıları arasında

$$sH_{n+1} = sH_n + \tilde{\tau}(2n+1) + 2\tilde{\varphi} \tag{3.51}$$

$$\tilde{\tau} = 1 + i + \varepsilon + h, \tilde{\varphi} = i + 2\varepsilon + 3h \text{ ve } \tilde{\gamma} = i + 4\varepsilon + 9h$$

eşitliği sağlanmaktadır [29].

**İspat.** Tam kare hibrit sayıları için Binet formülü (3.39) kullanılırsa istenilen aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} sH_{n+1} &= \tilde{\tau}(n+1)^2 + 2\tilde{\varphi}(n+1) + \tilde{\gamma} \\ &= \tilde{\tau}n^2 + 2\tilde{\varphi}n + \tilde{\gamma} + \tilde{\tau}(2n+1) + 2\tilde{\varphi} \\ &= sH_n + \tilde{\tau}(2n+1) + 2\tilde{\varphi} \end{aligned}$$ □

**Teorem 3.45** Tam kare Lucas hibrit sayıları arasında

$$sLH_{n+1} = sLH_n + 2\tilde{\tau}(2n+1) + \tilde{\varphi}^* \tag{3.52}$$

$$\tilde{\tau} = 1 + i + \varepsilon + h, \tilde{\varphi}^* = -3 + i + 5\varepsilon + 9h \text{ ve } \tilde{\gamma}^* = 2 + i + 4\varepsilon + 11h$$

eşitliği sağlanmaktadır [29].

**İspat.** Tam kare Lucas hibrit sayıları için Binet formülü (3.40) kullanılırsa istenilen aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} sLH_{n+1} &= 2\tilde{\tau}(n+1)^2 + \tilde{\varphi}^*(n+1) + \tilde{\gamma}^* \\ &= 2\tilde{\tau}n^2 + \tilde{\varphi}^*n + \tilde{\gamma}^* + 2\tilde{\tau}(2n+1) + \tilde{\varphi}^* \\ &= sLH_n + 2\tilde{\tau}(2n+1) + \tilde{\varphi}^* \end{aligned}$$ □

**Teorem 3.46** Tam kare hibrit kuaterniyonlar arasında

$$sHQ_{n+1} = sHQ_n + (2n+1)\tilde{\tau}\tau + 2(\tilde{\varphi}\tau + \tilde{\tau}\varphi) \tag{3.53}$$

$$\tau = 1 + i + j + k, \tilde{\tau} = 1 + i + \varepsilon + h, \varphi = i + 2j + 3k$$

$$\tilde{\varphi} = i + 2\varepsilon + 3h, \gamma = i + 4j + 9k \text{ ve } \tilde{\gamma} = i + 4\varepsilon + 9h$$

eşitliği sağlanır [29].

**İspat.** Tam kare hibrit kuaterniyon için Binet formülü (3.41) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} sHQ_{n+1} &= \tilde{\tau}\tau(n+1)^2 + 2(\tilde{\varphi}\tau + \tilde{\tau}\varphi)(n+1) + \tilde{\gamma}\tau + \tilde{\tau}\gamma + 2\varphi\tilde{\varphi} \\ &= \tilde{\tau}\tau n^2 + (2n+1)\tilde{\tau}\tau + 2(\tilde{\varphi}\tau + \tilde{\tau}\varphi)n + 2(\tilde{\varphi}\tau + \tilde{\tau}\varphi) + \tilde{\gamma}\tau + \tilde{\tau}\gamma + 2\varphi\tilde{\varphi} \\ &= \tilde{\tau}\tau n^2 + 2(\tilde{\varphi}\tau + \tilde{\tau}\varphi)n + \tilde{\gamma}\tau + \tilde{\tau}\gamma + 2\varphi\tilde{\varphi} + (2n+1)\tilde{\tau}\tau + 2(\tilde{\varphi}\tau + \tilde{\tau}\varphi) \\ &= sHQ_n + (2n+1)\tilde{\tau}\tau + 2(\tilde{\varphi}\tau + \tilde{\tau}\varphi) \end{aligned}$$

istenilen elde edilir. □

**Teorem 3.47** Tam kare Lucas hibrit kuaterniyonları arasında

$$sLHQ_{n+1} = sLHQ_n + 2(2n+1)\tilde{\tau}\tau + (\varphi^*\tau + 4\tilde{\tau}\varphi) \tag{3.54}$$

$$\tau = 1 + i + j + k, \tilde{\tau} = 1 + i + \varepsilon + h, \varphi = i + 2j + 3k$$

$$\tilde{\varphi} = i + 2\varepsilon + 3h, \gamma = i + 4j + 9k\ ,\ \tilde{\gamma} = i + 4\varepsilon + 9h$$

$$\tilde{\varphi}^* = -3 + i + 5\varepsilon + 9h \text{ ve } \tilde{\gamma}^* = 2 + i + 4\varepsilon + 11h$$

eşitliği sağlanmaktadır [29].

**İspat.** Tam kare Lucas hibrit kuaterniyon için Binet formülü (3.42) kullanılırsa,

$sLHQ_{n+1} = 2\tilde{\tau}\tau(n+1)^2 + (\tilde{\varphi}^*\tau + 4\tilde{\tau}\varphi)(n+1) + \tilde{\gamma}^*\tau + 2\tilde{\tau}\gamma + \varphi\tilde{\varphi}^*$
$= 2\tilde{\tau}\tau n^2 + (\tilde{\varphi}^*\tau + 4\tilde{\tau}\varphi)n + \tilde{\gamma}^*\tau + 2\tilde{\tau}\gamma + \varphi\tilde{\varphi}^* + 2(2n+1)\tilde{\tau}\tau + (\tilde{\varphi}^*\tau + 4\tilde{\tau}\varphi)$
$= sLHQ_n + 2(2n+1)\tilde{\tau}\tau + (\tilde{\varphi}^*\tau + 4\tilde{\tau}\varphi)$
istenilen elde edilir.

### 3.9 Tam Kare ve Tam Kare Lucas Kuaterniyonları, Hibrit Sayıları ve Hibrit Kuaterniyonları Arasındaki İlişkiler

**Teorem 3.48** $n \geq 2$ için tam kare Lucas kuaterniyon ve tam kare kuaterniyon arasında

$$sLQ_n = 4sQ_{n-2} - 2sQ_{n-1} + 9n\tau - 3(4 + i - 2j - 5k) \tag{3.55}$$

$$\tau = 1 + i + j + k$$

eşitlik sağlanır [29].

**İspat.** Tam kare Lucas kuaterniyon tanımı (3.24) ve tam kare Lucas sayılarının tam kare sayılarla olan ilişkisi (3.18) kullanılırsa:

$sLQ_n = sL_n + sL_{n+1}i + sL_{n+2}j + sL_{n+3}k$
$= 4s_{n-2} - 2s_{n-1} + 9n - 12 + (4s_{n-1} - 2s_n + 9n - 3)i + (4s_n - 2s_{n+1} + 9n + 6)j$
$\quad +(4s_{n+1} - 2s_{n+2} + 9n + 15)k$
$= 4(s_{n-2} + s_{n-1}i + s_nj + s_{n+1}k) - 2(s_{n-1} + s_ni + s_{n+1}j + s_{n+2}k)$
$\quad +9n(1 + i + j + k) - 3(4 + i - 2j - 5k)$
$= 4(s_{n-2} + s_{n-1}i + s_nj + s_{n+1}k) - 2(s_{n-1} + s_ni + s_{n+1}j + s_{n+2}k) + 9n\tau$
$\quad -3(4 + i - 2j - 5k)$
$= 4sQ_{n-2} - 2sQ_{n-1} + 9n\tau - 3(4 + i - 2j - 5k)$
elde edilir. □

**Teorem 3.49** $n \geq 2$ için tam kare Lucas hibrit ve tam kare hibrit sayıları arasında

$$sLH_n = 4sH_{n-2} - 2sH_{n-1} + 9n\tilde{\tau} - 3(4 + i - 2\varepsilon - 5h) \tag{3.56}$$

$$\tilde{\tau} = 1 + i + \varepsilon + h$$

eşitliği sağlanmaktadır [29].

**İspat.** Tam kare Lucas hibrit sayıları tanımı (3.34) ve tam kare Lucas sayılarının tam kare sayılarıyla olan ilişkisini (3.18) kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
sLH_n &= sL_n + sL_{n+1}i + sL_{n+2}\varepsilon + sL_{n+3}h \\
&= (4s_{n-2} - 2s_{n-1} + 9n - 12) + (4s_{n-1} - 2s_n + 9n - 3)i \\
&\quad +(4s_n - 2s_{n+1} + 9n + 6)\varepsilon + (4s_{n+1} - 2s_{n+2} + 9n + 15)h \\
&= 4(s_{n-2} + s_{n-1}i + s_n\varepsilon + s_{n+1}h) - 2(s_{n-1} + s_n i + s_{n+1}\varepsilon + s_{n+2}h) \\
&\quad +9n(1 + i + \varepsilon \ + h) - 3(4 + i - 2\varepsilon - 5h) \\
&= 4(s_{n-2} + s_{n-1}i + s_n\varepsilon + s_{n+1}h) - 2(s_{n-1} + s_n i + s_{n+1}\varepsilon + s_{n+2}h) \\
&\quad +9n\tilde{\tau} \ - 3(4 + i - 2\varepsilon - 5h) \\
&= 4sH_{n-2} - 2sH_{n-1} + 9n\tilde{\tau} - 3(4 + i - 2\varepsilon - 5h)
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

**Teorem 3.50** $n \geq 2$ için tam kare Lucas hibrit kuaterniyon ve tam kare hibrit kuaterniyon arasında

$$sLHQ_n = 4sHQ_{n-2} - 2sHQ_{n-1} + 9\tilde{\tau}(\tau n + \varphi) - 3\tau(4 + i - 2\varepsilon - 5h) \qquad (3.57)$$

$$\tau = 1 + i + j + k\ ,\ \varphi = i + 2j + 3k,\ \tilde{\tau} = 1 + i + \varepsilon + h$$

eşitliği vardır.

**İspat.** Tam kare Lucas hibrit kuaterniyon tanımı (3.37) ve (3.56) eşitliği kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
&sLHQ_n = sLH_n + sLH_{n+1}i + sLH_{n+2}j + sLH_{n+3}k \\
&= (4sH_{n-2} - 2sH_{n-1} + 9n\tilde{\tau} - 3(4 + i - 2\varepsilon - 5h)) \\
&\quad +\big(4sH_{n-1} - 2sH_n + 9(n+1)\tilde{\tau} - 3(4 + i - 2\varepsilon - 5h)\big)i \\
&\quad +(4sH_n - 2sH_{n+1} + 9(n+2)\tilde{\tau} - 3(4 + i - 2\varepsilon - 5h))j \\
&\quad +(4sH_{n+1} - 2sH_{n+2} + 9(n+3)\tilde{\tau} - 3(4 + i - 2\varepsilon - 5h))k \\
&= 4(sH_{n-2} + sH_{n-1}i + sH_n j + sH_{n+1}k) - 2(sH_{n-1} + sH_n i + sH_{n+1}j + sH_{n+2}k) \\
&\quad +9\tilde{\tau}(n(1 + i + j + k) + i + 2j + 3k) - 3(1 + i + j + k)(4 + i - 2\varepsilon - 5h) \\
&= 4(sH_{n-2} + sH_{n-1}i + sH_n j + sH_{n+1}k) - 2(sH_{n-1} + sH_n i + sH_{n+1}j + sH_{n+2}k) \\
&\quad +9\tilde{\tau}(\tau n + \varphi) - 3\tau(4 + i - 2\varepsilon - 5h)
\end{aligned}
$$

Burada tam kare hibrit kuaterniyonu tanımı (3.35) kullanılırsa

$$sLHQ_n = 4sHQ_{n-2} - 2sHQ_{n-1} + 9\tilde{\tau}(\tau n + \varphi) - 3\tau(4 + i - 2\varepsilon - 5h)$$

istenilen elde edilir. □

Tezin bu bölümünde elde edilen tam kare ve tam kare Lucas kuaterniyon, hibrit ve hibrit kuaterniyon yapıları, klasik sayı dizilerinin çok boyutlu cebirsel uzaylardaki izdüşümlerini temsil etmektedir. Teorem 3.24, Teorem 3.25 , Teorem 3.32 ve Teorem 3.33 'de türetilen Binet formülleri, bu karmaşık yapıların genel terimlerinin $n$-inci adımda doğrudan hesaplanabilmesine olanak tanımaktadır.

Cebirsel açıdan incelendiğinde, kuaterniyon birimlerinin (i, j, k) değişmeli olmayan çarpım kuralları ile hibrit birimlerin (i, $\varepsilon$, h) sağladığı kompleks-dual-hiperbolik yapıların birleşimi, tam kare sayı dizisinin dinamiklerini çok daha geniş bir parametre uzayına taşımaktadır. Özellikle Teorem 3.48, Teorem 3.49 ve Teorem 3.50 'da sunulan tam kare

Lucas kuaterniyonları ile tam kare kuaterniyonları arasındaki lineer ilişki, bu yüksek boyutlu yapıların hala temel bir karesel çekirdeğe $s_n = n^2$ sadık kaldığını ve yapısal bütünlüğünü koruduğunu kanıtlamaktadır. Bu durum, söz konusu dizilerin sadece teorik sayılar teorisinde değil, aynı zamanda hibrit sistemlerin modellenmesi gereken bilgisayar grafikleri ve fiziksel modelleme gibi uygulamalı alanlarda da potansiyel birer araç olduğunu göstermektedir.

# 4. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, literatürde köklü bir yere sahip olan Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ile tam kare sayı dizisi arasındaki cebirsel bağlar derinlemesine incelenmiştir.

Çalışmanın en temel özgün değeri, tam kare sayı dizisinin Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ile ilişkisini veren genel bir eşitlik elde edilmiş ayrıca ilgili diziler polinom, kuaterniyon ve hibrit sayı sistemleri gibi ileri matematiksel yapılara sistematik bir şekilde genellenmiştir. Sonuç olarak bu çalışma; tam kare sayı dizisinin esnek yapısını kanıtlamış, sayılar teorisi ile hiperkompleks sistemler arasında yeni bir köprü kurmuştur.

Burada elde edilen teorik alt yapı; kriptografi, kodlama teorisi ve kuantum hesaplama gibi dizilerin periyodik özelliklerinden yararlanan alanlarda yeni araştırma ufukları açma potansiyeline sahiptir.

# KAYNAKLAR


[1] Koshy, T. (2001). Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. New York: Wiley-Interscience.

[2] Hoggatt, V. E. (1969). Fibonacci and Lucas Numbers. Boston: Houghton Mifflin.

[3] Wei, J. (2023). The radius and center of Fibonacci-run graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 325, 93–96. https://doi.org/10.1016/j.dam.2022.10.007

[4] Avazzadeh, Z., Hassani, H., Agarwal, P., Mehrabi, S., Javad Ebadi, M., & Hosseini Asl, M. K. (2023). Optimal study on fractional fascioliasis disease model based on generalized Fibonacci polynomials. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 46(8), 9332–9350. https://doi.org/10.1002/mma.9057

[5] Otto, H. H. (2022). Fibonacci stoichiometry and superb performance of Nb16W5O55 and related super-battery materials. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 10(6), 1936–1950. https://doi.org/10.4236/jamp.2022.106133

[6] De Oliveira, R. R., & Alves, F. R. V. (2019). An investigation of the bivariate complex Fibonacci polynomials supported in didactic engineering: An application of Theory of Didactics Situations (TSD). *Acta Scientiae*, 21(3), 170–195.

[7] Özkan, E., & Akkuş, H. (2024). A new approach to k-Oresme and k-Oresme-Lucas sequences. *Symmetry*, 16, 1–12. https://doi.org/10.3390/sym16111407

[8] Uygun, S., & Eldogan, H. (2016). k-Jacobsthal and k-Jacobsthal Lucas matrix sequences. *International Mathematical Forum*, 11(3), 145–154. http://dx.doi.org/10.12988/imf.2016.51192

[9] Soykan, Y. (2021). Generalized Leonardo numbers. *Journal of Progressive Research in Mathematics*, 18(4), 58–84.

[10] Falcon, S., & Plaza, A. (2007). On the Fibonacci k-numbers. *Chaos, Solitons &*

*Fractals*, 32(5), 1615–1624. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.09.022

[11] Kuloğlu, B., & Özkan, E. (2022). On generalized (k, r)-Pell and (k, r)-Pell–Lucas numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 28(4), 765–777.

[12] Yılmaz, N. Ş., Włoch, A., & Özkan, E. (2024). Generalization of the distance Fibonacci sequences. *Axioms*, 13(7), 1–16.

[13] Aydın, F. T. (2018). On generalizations of the Jacobsthal sequence. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 24(1), 120–135.

[14] Özkan, E., & Uysal, M. (2021). Mersenne–Lucas hybrid numbers. *Mathematica Montisnigri*, 52, 17–29.

[15] Catarino, P., & Morgado, M. L. (2016). On generalized Jacobsthal and Jacobsthal–Lucas polynomials. *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, 24(3), 61–78.

[16] Taşcı, D., & Sevgi, E. (2021). Some properties between Mersenne, Jacobsthal and Jacobsthal–Lucas hybrid numbers. *Chaos, Solitons and Fractals*, 146, 110862.

[17] Bravo, J. J., Herrera, J. L., & Luca, F. (2021). Common values of generalized Fibonacci and Pell sequences. *Journal of Number Theory*, 226, 51–71.

[18] Daşdemir, A. (2011). On the Pell, Pell–Lucas and modified Pell numbers by matrix method. *Applied Mathematical Sciences*, 5(64), 3173–3181.

[19] Sabaa, N., Boussayouda, A., & Kanuri, K. V. V. (2022). Mersenne–Lucas numbers and complete homogeneous symmetric function. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 24, 127–139.

[20] Çelemoğlu, Ç. (2024). Pell–Leonardo numbers and their matrix representations. *Journal of New Results in Science*, 13(2), 101–108.

[21] Köken, F., & Bozkurt, D. (2008). On the Jacobsthal–Lucas numbers by matrix method. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 3(33),

1629–1633.

[22] Hamilton, W. R. (1866). *Elements of Quaternions*. Longman, Green & Company: London, UK.

[23] Özdemir, M. (2018). Introduction to hybrid numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 28, 1–32.

[24] Dağdeviren, A., & Kuruz, F. (2020). On the Horadam hybrid quaternions. *arXiv preprint*, arXiv:2012.08277.

[25] Doman, B. G. S., & Williams, J. K. (1981). *Fibonacci and Lucas Polynomials*. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 90(3), 385-387

[26] Wilf, H. S. (2006). Generatingfunctionology (3rd ed.). A K Peters/CRC Press.

[27] Horadam, A. F. (1963). Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions. *American Mathematical Monthly*, 70, 289–291.

[28] Altıparmak, İ., Akkuş, H., & Özkan, E. (2025). On a Generalization of the Perfect Square Sequence and Its Polynomial. *Mathematica Montisnigri*, 62(2), 64–77.

[29] Özkan, E., & Altıparmak, İ. (2026). Perfect Square and Perfect Square Lucas Quaternions and Their Hybrid Extensions. *Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Series III: Mathematics and Computer Science*. (***baskıda***)

[30] Graham, R. L.,Knuth, D. E., and Patashnik, O. (1994) Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science (2nd ed.). Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA.

# ÖZGEÇMİŞ

Marmara Üniversitesi matematik bölümünden mezun oldu. Yurt Dışı Türkleri ve Akraba Topluluklarına ait olan Bağ-lar adlı dergide ‘’Matematik Her Yerde’’ ve ‘’Bir İnsan Kendini Nasıl Tanımlar’’ yazıları yayımlanmıştır. 2024 yılında Marmara Üniversitesi Matematik bölümünde yüksek lisansa başladı. 2025 yılında Marmara Üniversitesi Pedagojik formasyon eğitimi sertifikasını aldı.

**Haziran 2026** **İkramiye ALTIPARMAK**