T.C.
Marmara Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
İlköğretim Anabilim Dalı
İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ MATEMATİKSEL MUHAKEME VE İSPAT YAPMA SÜREÇLERİNİN MUHAKEME – İSPATLAMA ÇERÇEVESİ VE ÜSTBİLİŞ BAĞLAMINDA İNCELENMESİ

Yüksek Lisans Tezi

MEHTAP ÇAĞLA ÇOKYAŞA

İstanbul, 2019

T.C.
Marmara Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü
İlköğretim Anabilim Dalı
İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ MATEMATİKSEL MUHAKEME VE İSPAT YAPMA SÜREÇLERİNİN MUHAKEME – İSPATLAMA ÇERÇEVESİ VE ÜSTBİLİŞ BAĞLAMINDA İNCELENMESİ

Yüksek Lisans Tezi

MEHTAP ÇAĞLA ÇOKYAŞA

Danışman

DR. ÖĞR. ÜYESİ ALAATTİN PUSMAZ

İstanbul, 2019

Tüm kullanım hakları

M.Ü. Eğitim Bilimleri Enstitüsü'ne aittir.

© 2019

ONAY

Mehtap Çağla ÇOKYAŞA tarafından hazırlanan "Matematik Öğretmen Adaylarının Matematiksel Muhakeme ve İspat Yapma Süreçlerinin Muhakeme - İspatlama Çerçevesi ve Üstbiliş Bağlamında İncelenmesi" konulu bu çalışma, 21/11/2019 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda jüri tarafından başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

	Adı Soyadı	İmza
TEZ DANIŞMANI	**Dr. Öğr. Üyesi Alaattin PUSMAZ**	
JURİ ÜYESİ	**Dr. Öğr. Üyesi Ali Rıza KÜPCÜ**	
JURİ ÜYESİ	**Doç. Dr. Elif BAHADIR**	

ÖZGEÇMİŞ

EĞİTİM BİLGİLERİ

İlköğretim: Kocaeli Gölcük Piri Reis İlköğretim Okulu

Lise: Kocaeli Gölcük İhsaniye Lisesi

Lisans: Kocaeli Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı

Yüksek Lisans: Marmara Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı

ÇALIŞMA BİLGİLERİ

2017 - MEB, İlköğretim Matematik Öğretmeni

İLETİŞİM BİLGİLERİ

Mail Adresi: mehtapccokyasa@gmail.com

TEŞEKKÜR

Hayatta yürünen bazı yolların kahramanları vardır. Onlar olmazsa, o yol hiç başlamayacak ya da yürünemeyecektir. Bu yüzdendir ki, senden emin olmak için o yolda seni önce pişirir sonra da sana en büyük güveni verirler. Bu yolu yürümemde bana ışık ve güven kaynağı olan iki iyi insana sahip olmak, benim için teşekkürlerle anlatılamayacak kadar mutluluk verici.

Birlikte çalışmaktan ve aynı yolu yürümekten onur duyduğum, ışık kaynağım olan Dr. Öğr. Üyesi Alaattin PUSMAZ Hocam… Yüksek lisans eğitimim ve tez araştırmam boyunca ihtiyaç duyduğum her anımda yanımda olması, düşüncelerimi değer vererek dinlemesi ve bana güven vermesi benim için bu süreçlerin en değer biçilmez yönüydü. Bu yolculuğu benim için çok değerli olan kişiliği ile anlamlı kılarak, önce insanlığıma bıraktığı iz sonra da çalışmama kattığı sonsuz faydalar için ona teşekkürlerin en güzelini sunuyorum. Süreç boyunca bana sağladığı her türlü desteği ve özverisi benim için her zaman hem çok önemli hem de çok değerli olacak.

Bu yola emin adımlarla çıkmamı sağlayan ve güven kaynağım olan çok değerlim Doç. Dr. Funda DAĞ Hocam… Hayatıma kazandırdığı sayısız güzelliklerden biri olan: "Her zaman, her konuda sadece elinden gelenin en uygun olanını yapmaya çalış. İşinin vicdani yükümlülük tarafına bunu kabul ettirirsen, korkma ve rahatla. Çünkü artık her şey kararlanmıştır, olur." sözünün değerini her zaman bilerek koruyacağıma inandığı ve her zaman yanımda olduğu için ona çok teşekkür ediyorum. Karşılık beklemeden verilen emeğin mutluluğunu yaşayarak, bu yolu da sevgimle emeğimi bütünleştirerek yürümeme ışık olması; yaptığım ve yapacağım her şey de vicdanımın sesini dinleyerek emeklerimi sonuna kadar korumamın değerini bana öğretmesi, hem lisans eğitimime hem de hayatıma kattığı anlamlar benim için her zaman çok değerli olacak.

Araştırma sürecimde değerli fikir ve deneyimlerinden faydalandığım Dr. Öğr. Üyesi Ali Rıza KÜPCÜ ve Dr. Oğuz KÖKLÜ Hocalarıma; tezimi benimle birlikte sahiplendikleri ve ilgilendikleri, her soruma bana rehber olacak şekilde yanıt verdikleri ve süreç boyunca bana ve çalışmama sağladıkları desteklerden ötürü teşekkürü bir borç bilirim. Tez sürecimin nasıl devam ettiğini sorarak araştırmamla ilgilenen, süreç boyunca beni

rahatlatan Prof. Dr. İlyas YAVUZ ve Dr. Öğr. Üyesi Orhan ÇANAKÇI Hocalarıma çok teşekkür ediyorum. Değerli deneyimlerini bizlerle paylaşarak yüksek lisans eğitim sürecimde sorduğum sorulara içtenlikle yanıt veren Prof. Dr. Ahmet Şükrü ÖZDEMİR Hocama çok teşekkür ediyorum. Ders dönemim boyunca, araştırmamda takip edeceğim ve dikkatli olacağım konularda beni aydınlatan Doç Dr. Sare ŞENGÜL Hocama çok teşekkür ediyorum. Uygulama sürecim boyunca yaşadığım zorluklarda bana destek olan Araş. Gör. Emine Gülen ULUSOY Hocama çok teşekkür ediyorum. Jürimde yer alarak değerli bilgileri ile araştırmama katkı sağlayan Doç. Dr. Elif BAHADIR Hocama teşekkürlerimi sunarım.

Tez uygulamam boyunca sabırları ve anlayışları ile ellerinden gelenin en iyisini yaparak araştırmama sağladıkları katkıların yanı sıra; ilgi ve özverileri ile beni araştırma sürecime daha fazla motive ettikleri ve bana destek oldukları için uygulama sürecimde bulunan her bir öğretmen adayıma çok teşekkür ediyorum.

Beni bu günlere getirerek, maddi ve manevi hiçbir desteği benden esirgemeyen canım ailem… Özlem duygularına rağmen, "Doğru yürü yolun ile gafil olma bilgin ile (Yunus Emre)" sözünün anlamını unutmadan, kendimi geliştirmem ve bilgimi arttırmam doğrultusunda en büyük destekçilerim oldukları, fedakarlıkları ve aile duygusunun en güzel anlamını bana bu süreçte de yaşattıkları için onlara çok teşekkür ediyorum. İyiki varsınız.

Küçüklüğümden beri her anımda yoldaşım olan ve her zaman da yanımda olacağından emin olduğum canım Sena'ma, bu süreçte de beni yalnız bırakmadığı ve bana sabırla destek olduğu için çok teşekkür ediyorum. Yüksek lisans sürecimin bana güzel hediyelerinden biri olan Kübra TÜRKAN arkadaşıma, tanıştığımız günden beri her sürecimizi gönül rahatlığı ile birlikte paylaşarak yol alabildiğimiz ve bana sağladığı moral ve desteklerden ötürü çok teşekkür ediyorum.

Yazmak küçüklüğümde, kendime ait sözlerimi karalamak ile başlamıştı benim için. Şimdi ise kalemimden çıkan bir araştırmayı okuyacaksınız. Bir çalışmaya sahip olmanın yanı sıra bana değerli insanlar, değerli deneyimler katan bu çalışma; her türlü süreci ile yaşamıma bir de kalemimden çıkan bir söz kazandırdı. En güzeli de böyle hissetmek.

Her şey olur biter, sen yeter ki yüreğine iyi bak…
Mehtap Çağla ÇOKYAŞA
İstanbul, 2019

ÖZET

Matematiksel anlamanın en önemli özelliği bir matematiksel ifadenin nasıl oluştuğu ve bu matematiksel ifadenin doğruluğu ile ilgili geçerli gerekçelendirmeler elde etmeye katkı sağlamasıdır. Matematiksel anlamaya sağladığı destek ile anlamlı öğrenmelerin gerçekleşmesine katkıda bulunan matematiksel muhakeme ve ispat, öğrenme süreçlerinde işe koşulması gereken temel kavramlardandır. Bu kapsamda değerlendirildiğinde, matematiksel bilginin kurulması ve aktarılmasında gerekli olan matematiksel ispatlar, öğrenme süreçlerinde ve matematiksel anlamayı sağlama konusunda matematiksel muhakeme ile daha fazla anlam kazanan bir yapıda olurlar. Var olan düzenlilikleri belirleme, tahminde bulunma, sorgulama yapabilme, gerekçelendirmede bulunma ve ilişkilendirme; muhakeme ve ispatın birlikte kazandığı anlamlardan birkaçıdır. Muhakeme ile beraber öğrenme-öğretme süreçleri adına farklı işlevlere sahip olan ispatın etki alanları bunlarla sınırlı değildir. Matematiksel ispatlar; problem çözmenin özel bir rolüdür ve matematiksel iletişimin bir parçasıdır. Geçmiş bilgilerin sentezlenerek yeni bilgilerin kurulmasını ve düşünceleri zorlayarak üstbilişin gelişimini sağlaması da matematiksel ispatın anlamlı öğrenmelerin gerçekleşmesine sağladığı katkılarındandır.

Etkili öğretmenler de öğrettiği matematiği sadece bilmekle kalmayıp matematiksel muhakeme ve ispatın farklı anlamları kapsamında gerçekten anlayan kişilerdir. Ancak matematiksel ispatlar sadece teoremlerin doğruluğunu sağlayan ve belirli bilgi seviyesine sahip kişilerde ele alınabilecek bir konu alanı olarak görülür. Matematiksel ispatları sadece bu kapsamda ele almak; uluslararası çalışmalarda da ifade edildiği üzere tüm sınıf seviyelerinde ele alınabilecek ve matematik eğitimindeki etkisi geniş işlevlerini görememeye neden olur. Bu durumun önüne, matematiksel ispatları gerçek anlamıyla tanıyan, etki alanlarını bilen ve tüm bunları; gerek matematiksel gerek psikolojik ve gerekse de pedagojik açıdan yorumlayan ve düşünme süreçleri bağlamında ele almış öğretmenler geçebilir. Bu doğrultuda bu araştırmanın amacı; matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispatlara yönelik görevlerle bireysel ve grup halinde meşgul olurken matematiksel muhakeme ve ispat yapma süreçlerini; Muhakeme - İspatlama Çerçevesi ve üstbiliş bağlamında incelemektir. Araştırma amacı doğrultusunda, matematik öğretmen adaylarının matematiksel muhakeme ve ispat yapma süreçlerini;

görev soruları, gözlem ve doküman inceleme yöntemleriyle nasıl olduğunu ortaya çıkarmak, bunların nedenleri ve yol açtığı sonuçları tartışmak hedeflendiği için nitel araştırma desenlerinden durum çalışması yaklaşımı esas alınmıştır. Araştırmanın çalışma grubunu, Marmara Bölgesi'nde bulunan bir Devlet Üniversitesi'nin Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümü 2017 - 2018 eğitim-öğretim dönemi 3. sınıfta öğrenim görmekte olan üç öğretmen adayı oluşturmuştur. Araştırma amacına uygun verileri elde edebilmek için çeşitli veri toplama araçları kullanılmıştır. Muhakeme-İspatlama Analitik Çerçevesi dikkate alınarak oluşturulan farklı kategorilerdeki ispat görevlerini içeren Muhakeme - İspat odaklı görev soruları hazırlanmıştır. Ayrıca ispat görevlerinin çözümüne ilişkin sesli düşünme protokolleri, üstbilişsel süreçlere ilişkin davranış kartları, görüşme soruları ve video-ses kayıtları kullanılmıştır. Veriler bireysel ve grup çalışmaları ile iki yönlü olarak toplanmıştır. Elde edilen veriler betimsel ve içerik analizi ile analiz edilmiştir. Matematik öğretmen adaylarının matematiksel muhakeme ve ispat yapma süreçlerini matematiksel perspektiften inceleyebilmek için Muhakeme-İspatlama Analitik Çerçevesinin matematiksel bileşen bölümünden faydalanılmıştır. Psikolojik ve pedagojik bileşen ile üstbilişsel düzenleme süreçleri kapsamında yapılan analizlerde ise alanyazından yararlanılmıştır.

Araştırma sonucunda, matematik öğretmen adaylarının, matematiksel muhakeme ve ispat yapma süreçlerinin farklı bileşenler bağlamında çeşitlilik gösterdiği ve bu bileşenlerin birbirini destekler sonuçlar verdiği belirlenmiştir. Matematiksel bileşen perspektifinden değerlendirilen bireysel çözümlerde çoğunlukla deneysel argüman kategorisine uygun çözümler geliştirdikleri dolayısıyla belirli durumları içerisine alan çözümler geliştirmeye odaklandıkları tespit edilmiştir. Grup olarak geliştirdikleri çözümlerinde ise çoğunlukla genel örnek kategorisine uygun çözümler geliştirmiş dolayısıyla tüm durumları içerisine alan genel bir temsil durumu oluşturmaya çalışmışlardır. Geliştirmiş oldukları çözümlere ilişkin stratejik algılarını en çok bilgileri ile ilişkilendirdikleri; çözüm niteliğine ilişkin algılarını ise geçerli olmaya dayandırarak açıkladıkları tespit edilmiştir. Muhakeme ve ispat yapmaya ilişkin pedagojik bilgilerini kendi eksiklikleri doğrultusunda yorumladıkları ve ispat kavramına genel anlamda; kesin bilgileri kullanma, istenilen durumları gösterme ve genelleme yapma anlamı yükledikleri tespit edilmiştir. Üstbilişsel düzenleme süreçlerinin muhakeme ve ispat yapma süreçlerini desteklediği ve bu süreçleri net olarak ortaya koyabildikleri gözlemlenmiştir. Genelde ispat yapma sürecinde,

izlemeye dayalı süreçlerini çözüm sürecinde gerçekleştirdikleri tespit edilmiştir. Matematik öğretmen adaylarının ispatın farklı anlamlarını deneyimleyerek, öğretmenlik yaşamlarında ispatın bu yönlerini nasıl ele alacaklarını yorumladıkları bu araştırmanın matematiksel muhakeme ve ispat konusunda önemli sonuçlar içerdiği düşünülmektedir.

Anahtar sözcükler: matematiksel muhakeme, matematiksel ispatlama, üstbiliş, öğretmen eğitimi, matematik öğretmen adayları

ABSTRACT

The most important feature of mathematical understanding is its contribution to obtaining valid justifications about how a mathematical expression is formed and the accuracy of this mathematical expression. Mathematical reasoning and proving, which contributes to the materialization of meaningful learning through the support it provides to mathematical understanding, is one of the basic concepts that must be pressed into service in learning processes. When assessed in this context, the mathematical provings that are necessary for the establishment and transferring of mathematical knowledge are in a structure that gains more meaning with mathematical reasoning in learning processes and providing mathematical understanding. Identifying existing regularities and also predicting, questioning, justifying and associating them are a few of the meanings gained together with mathematical reasoning and proving. The scope of proof, which has different functions in the name of learning-teaching processes along with reasoning, is not limited to these. Mathematical proving has a special role of problem solving and is a part of mathematical communication. The establishment of new knowledge with the synthesis of past knowledge and the development of metacognition by forcing thoughts are the contributions of mathematical proving to the realization of meaningful learning.

Effective teachers are the ones who not only know the mathematics they teach, but also really understand the different meanings of mathematical reasoning and proving. However, mathematical proving is seen as a subject area that can be dealt only with people that have a certain level of knowledge, which ensures only the accuracy of the theorems. Considering mathematical proving only in this context; As stated in international studies, leads to the inability of its broad function which can be addressed at all grade levels and also of its effect on mathematics education. In front of this situation, it can be preceded by teachers that recognize mathematical proving truly, that know the spheres of influence and that interpret all these from a mathematical, psychological and pedagogical point of view and consider them in the context of thinking processes. In this respect, the aim of this research is to analyse the pre-service mathematics teachers' preoccupation with mathematical reasoning and proving processes while engaging in tasks related to mathematical proving individually and in groups in the scope of Reasoning-Proving Framework and metacognition. For the purpose of the research, pre-

service mathematics teachers' mathematical reasoning and proving processes; task questions, observation and document review methods to reveal how it is, to discuss the reasons and the consequences of these qualitative research designs are what this research study approach is based on. The study group of the research consisted of three pre-service teachers studying in the 3rd year of 2017 - 2018 academic year in the Department of Elementary Mathematics Teaching, Faculty of Education of a State University in Marmara Region. Various data collection tools were used in obtaining the data suitable for the research purpose. The Reasoning-Proving task questions, which contain different categories of proving tasks, have been prepared considering the Reasoning-Proving Analytical Framework. In addition, thinking aloud protocols, behavior cards related to metacognitive processes, interview questions and video-audio recordings were used for the solution of proving tasks. The said data were collected in two ways with individual and group studies. The obtained data were analyzed by descriptive and content analysis. In order to examine the mathematical reasoning and proving processes of pre-service mathematics teachers from a mathematical perspective, the mathematical component section of the Reasoning-Proving Analytical Framework was utilized. In the analyzes carried out within the context of psychological and pedagogical component also within metacognitive regulation processes, body of literature was used.

As a result of the research, it was determined that mathematics pre-service teachers' mathematical reasoning and proving processes varied in the context of different components and it was also determined that these components supported each other. In the individual solutions assessed from the perspective of mathematical components, it was found that they mostly developed solutions that fit the emprical argument category and therefore focused on developing solutions that included certain situations. As for the solutions they developed as a group, most of the time they developed solutions that are appropriate to the generic example category and therefore they tried to create a general representation situation that covers all situations. It was also found that they associate their strategic perceptions with the information they have developed; and their perceptions about the quality of solution based on validity. They interpret the pedagogical knowledge about reasoning and proving in line with their own deficiencies and for the concept of proof in general terms; It is determined that they have the meaning of using the exact information, showing the desired situations and making generalization. It has

been observed that metacognitive regulation processes support the processes of reasoning and proving and can clearly demonstrate these processes. In general, in the process of making proof, it has been determined that they perform their observation based processes in the solution process. This research, which has been expounding how pre-service mathematics teachers will handle the aforementioned aspects of proof in their teaching life by experiencing different meanings of proof, is thought to have important results in mathematical reasoning and proving.

Key words: mathematical reasoning, mathematical proving, metacognition, teacher education, pre-service mathematics teachers

İÇİNDEKİLER

ONAY i
ÖZGEÇMİŞ ii
TEŞEKKÜR iii
ÖZET v
ABSTRACT viii
TABLOLAR LİSTESİ xv
ŞEKİLLER LİSTESİ xx
KISALTMA VE SEMBOLLER xxiii
BÖLÜM I: GİRİŞ 1
1.1. Problem Durumu 1
1.2. Amaç 9
1.3. Önem 10
1.4. Kapsam ve Sınırlılıklar 12
1.5. Tanımlar 12
BÖLÜM II: İLGİLİ ALANYAZIN 13
2.1. Matematiksel ve İleri Matematiksel Düşünme 13
2.2. Matematiksel Muhakeme 14
2.3. Matematiksel İspat: Doğası ve Tanımı 16
2.3.1. Matematiksel İspatın Tarihi ve Formalleşme Süreci 16
2.3.2. Matematiksel İspatın Doğası ve Tanımı 17
2.4. Matematiksel İspatın Öğretim Programındaki Yeri 22
2.5. Matematiksel İspat Çerçeveleri 25
2.5.1. Muhakeme ve İspatlamanın Analitik Çerçevesi 26
2.5.2. Analitik Çerçevenin Matematiksel Bileşeni 27
2.5.3. Analitik Çerçevenin Psikolojik Bileşeni 38
2.5.4. Analitik Çerçevenin Pedagojik Bileşeni 38
2.6. Matematiksel İspatın Problem Çözme İle İlişkisi ve Üstbiliş 38
2.7. Muhakeme ve İspat Yapma İle İlgili Yapılan Çalışmalar 42
2.7.1. Matematiksel Bileşen Kapsamında Yapılan Çalışmalar 42
2.7.2. Psikolojik ve Pedagojik Bileşen Kapsamında Yapılan Çalışmalar 47

2.7.3. Matematiksel İspatın Problem Çözme İle İlişkisi ve Üstbiliş Kapsamında Yapılan Çalışmalar 50
BÖLÜM III: YÖNTEM 53
3.1. Araştırma Deseni 53
3.1.1. Durum Çalışması 54
3.2. Araştırma Süreci ve Araştırma Uygulamasının Planlanması 56
3.3. Çalışma Grubu 57
3.4. Verilerin Toplanması ve Veri Toplama Araçları 60
3.4.1. Matematiksel Muhakeme-İspatlama Odaklı Görev Soruları 61
3.4.2. Sesli Düşünme Protokolleri 68
3.4.3 Davranış Kartları 69
3.4.4. Görüşme 71
3.4.5. Verilerin Toplanma Süreci 73
3.4.5.1. Hazırlık Süreci 73
3.4.5.2. Pilot Uygulama 74
3.4.5.3. Uygulama Süreci 75
3.4.6. Uygulama Sırasında Araştırmacının Rolü 75
3.5. Verilerin Analizi 76
3.5.1. M-İ Odaklı Görev Sorularına İlişkin Matematiksel Bileşen Analizi 78
3.5.2. M-İ Yapma Sürecinde Psikolojik, Pedagojik Bileşen ve Üstbilişsel Düzenleme Süreçlerinin Analizi 84
3.6. Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği 95
3.6.1. Geçerlik 95
3.6.2. Güvenirlik 96
3.7. Araştırmanın Etik Konuları Ele Alışı 97
..... 98
BÖLÜM IV: BULGULAR 99
4.1. Erdem'in M-İ Bileşenleri ve Üstbiliş Kapsamında Elde Edilen Bulguları 99
4.1.1. Erdem'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Matematiksel Bileşen Kapsamında Elde Edilen Bulgular 99
4.1.2. Erdem'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Psikolojik Bileşen Kapsamında Elde Edilen Bulgular 114

4.1.3. Erdem'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Pedagojik Bileşen Kapsamında Elde Edilen Bulgular 120
4.1.4. Erdem'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Üstbiliş Kapsamında Elde Edilen Bulgular 133
4.2. İpek'in M-İ Bileşenleri ve Üstbiliş Kapsamında Elde Edilen Bulguları 144
4.2.1. İpek'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Matematiksel Bileşen Kapsamında Elde Edilen Bulgular 144
4.2.2. İpek'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Psikolojik Bileşen Kapsamında Elde Edilen Bulgular 155
4.2.3. İpek'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Pedagojik Bileşen Kapsamında Elde Edilen Bulgular 161
4.2.4. İpek'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Üstbiliş Kapsamında Elde Edilen Bulgular 172
4.3. Deniz'in M-İ Bileşenleri ve Üstbiliş Kapsamında Elde Edilen Bulguları 183
4.3.1. Deniz'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Matematiksel Bileşen Kapsamında Elde Edilen Bulgular 183
4.3.2. Deniz'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Psikolojik Bileşen Kapsamında Elde Edilen Bulgular 190
4.3.2. Deniz'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Pedagojik Bileşen Kapsamında Elde Edilen Bulgular 194
4.3.4. Deniz'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Üstbiliş Kapsamında Elde Edilen Bulgular 200
4.4. Grup Çalışmasında M-İ Bileşenleri Kapsamında Elde Edilen Bulgular 206
4.4.1. Grup Çalışmasında M-İ Odaklı Görev Sorularından Matematiksel Bileşen Kapsamında Elde Edilen Bulgular 206
4.4.2. Grup Çalışmasında M-İ Odaklı Görev Sorularına İlişkin Psikolojik Bileşen Kapsamında Edilen Bulgular 223
4.4.3. Grup Çalışmasında M-İ Odaklı Görev Sorularına İlişkin Pedagojik Bileşen Kapsamında Edilen Bulgular 226
BÖLÜM V: SONUÇ 230
5.1. Sonuç 230
5.2. Tartışma 237
5.3. Öneriler 246
KAYNAKÇA 248
EKLER 257

EK 1. Bilgilendirilmiş Gönüllü Katılım ve Video-Ses Kaydı İzin Formu..... 258
Ek 2. M-İ Odaklı Görev Soruları 259
Ek 3. Davranış Kartları ve Yapılandırılmış Görüşme Soruları 271
Ek 4. Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları..... 274

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 2. 1. MEB (2018) Öğretim Programında Muhakeme ve İspat 24
Tablo 2. 2. M-İ Analitik Çerçevesi 27

Tablo 3. 1. Matematik Öğretmen Adaylarının Aldıkları Dersler 58
Tablo 3. 2. Görev Kâğıtlarında Yer Alan Sorulara Ait Bilgiler 62
Tablo 3. 3. M-İ Odaklı Görev Sorularına İlişkin Uzman Görüş Değerlendirmesi 67
Tablo 3. 4. M-İ Analitik Çerçevesi 78
Tablo 3. 5. Birinci Araştırma Sorusunun Veri Analiz Bilgileri 78
Tablo 3. 6. M-İ Odaklı Görev Sorularının Veri Analizinde Kullanılan İsimlendirmeleri 80
Tablo 3. 7. M-İ Odaklı Görev Sorularına İlişkin Geliştirilen Çözümlerin Derecelendirme Ölçütleri 81
Tablo 3. 8. Muhakeme ve İspat Yapma Sürecine İlişkin Matematiksel Bileşen Çerçevesi 82
Tablo 3. 9. İkinci, Üçüncü ve Dördüncü Araştırma Sorularının Veri Analiz Bilgileri .. 84
Tablo 3. 10. Muhakeme ve İspat Yapma Sürecine İlişkin Psikolojik Bileşen Çerçevesi88
Tablo 3. 11. Muhakeme ve İspat Yapma Sürecine İlişkin Pedagojik Bileşen Çerçevesi89
Tablo 3. 12. Muhakeme ve İspat Yapma Sürecinde Sergilenen Üstbilişsel Düzenleme Süreç Teması ve Kodlarına İlişkin Örnek İfadeler 93

Tablo 4. 1. Erdem'in M-İ Odaklı Görev Çözümlerinin Derecesi..... 101
Tablo 4. 2. Erdem'in Çözüm Sırasında Zorlandığı Noktalar..... 103
Tablo 4. 3. Erdem'in BU 1-a Sorusuna İlişkin Çözüm Süreci ve Zorlandığı Noktalar 105
Tablo 4. 4. Erdem'in BU 1-b Sorusuna İlişkin Çözüm Süreci ve Zorlandığı Noktalar 106
Tablo 4. 5. Erdem'in BU 2 Sorusuna İlişkin Çözüm Süreci 106
Tablo 4. 6. Erdem'in BU 3.1 Sorusuna İlişkin Çözüm Süreci 108
Tablo 4. 7. Erdem'in BU 3.2 Sorusuna İlişkin Çözüm Süreci 110
Tablo 4. 8. Erdem'in BU 4.1 Sorusuna İlişkin Çözüm Süreci 112
Tablo 4. 9. Erdem'in BU 4.2 Sorusuna İlişkin Çözüm Süreci 114
Tablo 4. 10. Erdem'in M-İ Sürecine İlişkin Algıları..... 115
Tablo 4. 11. Erdem'in M-İ Sürecinde BU 1 Sorusunun Örüntü Çözümüne İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar..... 116
Tablo 4. 12. Erdem'in M-İ Sürecinde BU 2 Sorusunun Varsayım Çözümüne İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar..... 117
Tablo 4. 13. Erdem'in M-İ Sürecinde BU 3.1 ve BU 3.2 Soruları Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar 118
Tablo 4. 14. Erdem'in M-İ Sürecinde BU 4.1 Sorusu Genel Örnek ve Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar 119
Tablo 4. 15. Erdem'in M-İ Sürecinde BU 4.2 Sorusu Kanıt Çözümüne İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar 120

Tablo 4. 16. Erdem'in BU 1 Sorusunun Örüntü Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları 120
Tablo 4. 17. Erdem'in BU 1 Sorusunun Örüntü Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri 122
Tablo 4. 18. Erdem'in BU 2 Sorusunun Varsayım Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları 123
Tablo 4. 19. Erdem'in BU 2 Sorusu Varsayım Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri 124
Tablo 4. 20. Erdem'in BU 3.1 Sorusu Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları 125
Tablo 4. 21. Erdem'in BU 3.1 Sorusunun Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri 126
Tablo 4. 22. Erdem'in BU 3.2 Sorusunun Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları 127
Tablo 4. 23. Erdem'in BU 3.2 Sorusunun Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri 128
Tablo 4. 24. Erdem'in BU 4.1 Sorusunun Genel Örnek ve Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları 129
Tablo 4. 25. Erdem'in BU 4.1 Sorusunun Genel Örnek ve Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri 130
Tablo 4. 26. Erdem'in BU 4.2 Sorusunun Kanıt Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları 130
Tablo 4. 27. Erdem'in BU 4.2 Sorusunun Kanıt Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri 131
Tablo 4. 28. Erdem'in M-İ Sürecine Yönelik Pedagojik Bilgileri ve Dağılımları 132
Tablo 4. 29. Erdem'in BU 1 Sorusu Örüntü Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci 135
Tablo 4. 30. Erdem'in BU 2 Sorusu Varsayım Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci 136
Tablo 4. 31. Erdem'in BU 3.1 Sorusu Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci 137
Tablo 4. 32. Erdem'in BU 3.2 Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci 138
Tablo 4. 33. Erdem'in BU 4.1 Sorusu Genel Örnek ve Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci 139
Tablo 4. 34. Erdem'in BU 4.2 Sorusu Kanıt Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci 140
Tablo 4. 35. Erdem'in Seçim Yapmadığı Kartlara İlişkin Açıklamaları 141
Tablo 4.36. Erdem'in Muhakeme ve İspat Yapma Sürecinde Sergilediği Üstbilişsel Düzenleme Süreç Kategorileri ve Sıklıkları 142
Tablo 4. 37. Erdem'in Üstbilişsel Düzenleme Sürecine İlişkin Örnek İfadeler 143
Tablo 4. 38. İpek'in M-İ Odaklı Görev Çözümlerinin Derecesi 146
Tablo 4. 39. İpek'in BU 1 Sorusuna İlişkin Zorlandığı Noktalar 148

Tablo 4. 40. İpek'in BU 2 Sorusuna İlişkin Çözüm Süreci 150
Tablo 4. 41. İpek'in BU 2 Sorusuna İlişkin Çözüm Sürecinde Zorlandığı Noktalar ... 150
Tablo 4. 42. İpek'in B U 3.2. Sorusuna İlişkin Çözüm Süreci 154
Tablo 4. 43. İpek'in M-İ Sürecine İlişkin Algıları 156
Tablo 4. 44. İpek'in M- İ Sürecinde BU 1 Sorusu Örüntü Çözümüne İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar 157
Tablo 4. 45. İpek'in M- İ Sürecinde BU 2 Sorusu Örüntü ve Varsayım Çözümüne İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar 158
Tablo 4. 46. İpek'in M-İ Sürecinde BU 3.1 Sorusu Deneysel Argüman Çözümlerine İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar 159
Tablo 4. 47. İpek'in M-İ Sürecinde BU 3.2 Sorusu Mantıksal Argüman Çözümlerine İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar 160
Tablo 4. 48. İpek'in M-İ Sürecinde BU 4.1 Sorusu Genel Örnek ve Deneysel Argüman Çözümlerine İlişkin Algısından Örnek Diyalog 160
Tablo 4. 49. İpek'in M-İ Sürecinde BU 4.2 Sorusu Kanıt Çözümlerine İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar 161
Tablo 4. 50. İpek'in BU 1 Sorusu Örüntü Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları 161
Tablo 4. 51. İpek'in BU 1 Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri 163
Tablo 4. 52. İpek'in BU 2 Sorusu Örüntü ve Varsayım Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları 164
Tablo 4. 53. İpek'in BU 2 Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri 165
Tablo 4. 54. İpek'in BU 3.1 Sorusu Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları 166
Tablo 4. 55. İpek'in BU 3.1 Sorunun Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri 167
Tablo 4. 56. İpek'in BU 3.2 Sorusu Mantıksal Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları 168
Tablo 4. 57. İpek'in BU 3.2 Sorunun Mantıksal Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri 169
Tablo 4. 58. İpek'in BU 4.1 Sorusu Genel Örnek ve Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları 170
Tablo 4. 59. İpek'in BU 4.2. Sorusu Kanıt Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları 171
Tablo 4. 60. İpek'in M-İ Sürecine Yönelik Pedagojik Bilgileri ve Dağılımları 172
Tablo 4. 61. İpek'in BU 1 Sorusu Örüntü Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci 175
Tablo 4. 62. İpek'in BU 2 Sorusu Örüntü ve Varsayım Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci 176
Tablo 4. 63. İpek'in BU 3.1. Sorusu Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci 177

Tablo 4. 64. İpek'in BU 3.2 Sorusu Mantıksal Argüman Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci 178
Tablo 4. 65. İpek'in BU 4.1 Sorusu Genel Örnek ve Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci 179
Tablo 4. 66. İpek'in BU 4.2 Sorusunun Kanıt Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci 180
Tablo 4. 67. İpek'in Seçim Yapmadığı Kartlara İlişkin Açıklamaları 181
Tablo 4. 68. İpek'in Muhakeme ve İspat Yapma Sürecinde Sergilediği Üstbilişsel Düzenleme Süreç Kategorileri ve Sıklıkları 182
Tablo 4. 69. İpek'in Üstbilişsel Düzenleme Sürecine İlişkin Örnek İfadeler 182
Tablo 4. 70. Deniz'in M-İ Odaklı Görev Çözümlerinin Derecesi 185
Tablo 4. 71. Deniz'in BU 1 Sorusu Çözüm Sürecinde Zorlandığı Noktalar 187
Tablo 4. 72. Deniz'in BU 2 Sorusu Çözüm Sürecinde Zorlandığı Noktalar 188
Tablo 4. 73. Deniz'in BU 2 Sorusuna İlişkin Çözüm Süreci 189
Tablo 4. 74. Deniz'in M-İ Sürecine Yönelik Algıları 191
Tablo 4. 75. Deniz'in M-İ Sürecinde BU 1 Sorusu Sınıflandırılmamış Çözümüne İlişkin Algısından Örnekler 192
Tablo 4. 76. Deniz'in M-İ Sürecinde BU 3.1 Sorusu Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Algısından Örnekler 193
Tablo 4. 77. Deniz'in M-İ Sürecinde BU 3.2 Sorusuna İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar 193
Tablo 4. 78. Deniz'in BU 1 Sorusu Sınıflandırılamamış Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları 194
Tablo 4. 79. Deniz'in BU 1 Sorunun Sınıflandırılamamış Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri 195
Tablo 4. 80. Deniz'in BU 3.1 Sorusu Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları 197
Tablo 4. 81. Deniz'in BU 3.1. Sorusunun Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri 198
Tablo 4. 82. Deniz'in Pedagojik Bilgilerine İlişkin Bir Diyalog 199
Tablo 4. 83. Deniz'in M-İ Sürecine Yönelik Pedagojik Bilgileri ve Dağılımları 200
Tablo 4. 84. Deniz'in BU 1 Sorusu Sınıflandırılamamış Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci 202
Tablo 4. 85. Deniz'in BU 3.1 Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci 203
Tablo 4. 86. Deniz'in Seçim Yapmadığı Kartlara İlişkin Açıklamaları 204
Tablo 4. 87. Deniz'in Muhakeme ve İspat Yapma Sürecinde Sergilediği Üstbilişsel Düzenleme Süreç Kategorileri ve Sıklıkları 205
Tablo 4. 88. Deniz'in Üstbilişsel Düzenleme Süreçlerine İlişkin Örnek İfadeler 205
Tablo 4. 89. Grup Çalışmasının M-İ Odaklı Görev Çözümlerinin Derecesi 208
Tablo 4. 90. Grup Çalışması GU 1 Sorusu MÖA'nın Zorlandığı Noktalar 210
Tablo 4. 91. Grup Çalışması GU 1 Sorusu Çözüme Başlama Süreci 211

Tablo 4. 92. Grup Çalışmasının GU 2 Sorusunda Zorlandığı Noktalar 213
Tablo 4. 93. Grup Çalışması GU 3.2 Sorusu Çözüm Süreçleri 217
Tablo 4. 94. GU 4.2 Sorusu Çözüm Süreçleri 222
Tablo 4. 95. MÖA'nın Grup Çalışmasında M-İ Sürecine Yönelik Algıları 223
Tablo 4. 96. MÖA'nın Grup Çalışmasında M-İ Çözümlerine Yönelik Algılarından Örnek Diyaloglar 224
Tablo 4. 97. Grup Çalışmasında MÖA'nın Çözümlerine İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları 226
Tablo 4. 98. Grup Çalışmasında MÖA'nın Pedagojik Bilgilerinden Örnek İfadeler ... 227
Tablo 4. 99. MÖA'nın M-İ Bileşenleri ve Üstbilişsel Düzenleme Süreçlerinde Sıklıkla Gözlemlenen Tema ve Kodları 229

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Örüntü Belirleme Örneği 29
Şekil 2.2. Deneysel Argüman Örneği 32
Şekil 2.3. Genel Örnek 35
Şekil 2.4. Argümanlara İlişkin Hiyerarşik Gösterim 37

Şekil 3. 1. Uygulamalarda Kullanılan Soru Yapısı 67
Şekil 3. 2. Üstbilişsel Düzenleme Süreçlerinin İncelenmesine Yönelik Süreç Akışı 70
Şekil 3. 3. Araştırmanın Uygulama Süreci 75
Şekil 3. 4. Muhakeme ve İspat Yapmaya İlişkin Süreç Akışı 83
Şekil 3. 5. Muhakeme ve İspat Yapma Sürecinde Sergilenen Üstbilişsel Düzenleme Süreçlerine İlişkin Çerçeve 92

Şekil 4. 1. Erdem'in Muhakeme ve İspat Yapmaya İlişkin Süreç Akışı 100
Şekil 4. 2. Erdem'in BU 1-a ve BU 1-b Sorularına İlişkin Çözümleri 101
Şekil 4. 3. Erdem'in. BU 1-c Sorusuna İlişkin Çözümü 102
Şekil 4. 4. Erdem'in. BU 2-a ve BU 2-b Sorularına Uygun Çözümleri 105
Şekil 4. 5. Erdem'in BU 3-1 Sorusuna İlişkin Çözümleri 107
Şekil 4. 6. Erdem'in BU 3.2 Sorusuna İlişkin Çözümleri 109
Şekil 4. 7. Erdem'in BU 4.1-a Sorusuna İlişkin Çözümü 111
Şekil 4. 8. Erdem'in BU 4.1-b Sorusuna İlişkin Çözümü 112
Şekil 4. 9. Erdem'in BU 4.2 Sorusuna İlişkin Çözümü 114
Şekil 4. 10. Erdem'in Muhakeme ve İspat Yapma Sürecinde Sergilediği Üstbilişsel Düzenleme Süreç Akışı 133
Şekil 4. 11. Erdem'in Muhakeme ve İspat Yapma Sürecinde Sergilediği Üstbilişsel Düzenleme Süreçleri 134
Şekil 4. 12. İpek'in Muhakeme ve İspat Yapmaya İlişkin Süreç Akışı 145
Şekil 4. 13. İpek'in BU 1 Sorusuna İlişkin Çözümü 147
Şekil 4. 14. İpek'in BU 2-a Sorusuna İlişkin Çözümü 149
Şekil 4. 15. İpek'in BU 2-b Sorusuna İlişkin Çözümü 149
Şekil 4. 16. İpek'in BU 3.1 Sorusuna İlişkin Çözümleri 152
Şekil 4. 17. İpek'in BU 3.2 Sorusuna İlişkin Çözümleri 154
Şekil 4. 18. İpek'in BU 4.2 Sorusuna İlişkin Çözümü 155
Şekil 4. 19. İpek'in Muhakeme ve İspat Yapma Sürecinde Sergilediği Üstbilişsel Düzenleme Süreç Akışı 173
Şekil 4. 20. İpek'in Muhakeme ve İspat Yapma Sürecinde Sergilediği Üstbilişsel Düzenleme Süreçleri 174
Şekil 4. 21. Deniz'in Muhakeme ve İspat Yapmaya İlişkin Süreç Akışı 184
Şekil 4. 22. Deniz'in BU 1 Sorusuna İlişkin Çözümü 186
Şekil 4. 23. Deniz'in BU 1-c Sorusuna İlişkin Çözümü 186

Şekil 4. 24. Deniz'in BU 2 Sorusuna İlişkin Çözümü 188
Şekil 4. 25. Deniz'in BU 3.1 Sorusuna İlişkin Çözümü 189
Şekil 4. 26. Deniz'in Muhakeme ve İspat Yapma Sürecinde Sergilediği Üstbilişsel Düzenleme Süreci ve Akışı..... 201
Şekil 4. 27. Grup Çalışmasının Muhakeme ve İspat Yapmaya İlişkin Süreç Akışı 207
Şekil 4. 28. Grup Çalışmasının GU 1 Sorusuna İlişkin Çözümleri 209
Şekil 4. 29. Grup Çalışmasının GU 2-a Sorusuna İlişkin Çözümleri 211
Şekil 4. 30. Grup Çalışmasının GU 2-b Sorusuna İlişkin Çözümleri 213
Şekil 4. 31. Grup Çalışmasının GU 3.1-a Sorusuna İlişkin Çözümleri 214
Şekil 4. 32. Grup Çalışmasının GU 3.1-b Sorusuna İlişkin Çözümleri 215
Şekil 4. 33. Grup Çalışmasının GU 3.1-c Sorusuna İlişkin Çözümleri 216
Şekil 4. 34. Grup Çalışmasının GU 3.2 Sorusuna İlişkin Çözümleri 218
Şekil 4. 35. Grup Çalışmasının GU 4.1-a Sorusuna İlişkin Çözümü..... 219
Şekil 4. 36. Grup Çalışmasının GU 4.1-b Sorusuna İlişkin Çözümü 220
Şekil 4. 37. Grup Çalışmasının GU 4.2 Sorusuna İlişkin Kanıt Çözümleri 221
Şekil 4. 38. Grup Çalışmasının GU 4.2. Sorusuna İlişkin Kanıt Çözümleri 222

KISALTMA VE SEMBOLLER

CCSSM **:**Ortak Devlet Standartları (Comen Core State Standarts for Mathematics)

MEB **:** Milli Eğitim Bakanlığı

NCTM **:** Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics)

M-İ **:** Muhakeme Etme - İspatlama (Reasoning-Proving)

MÖA **:** Matematik Öğretmen Aday(lar)ı (Preservice Mathematics Teacher(s))

BÖLÜM I: GİRİŞ

Bu bölümde ilk olarak araştırmanın temelinde bulunan problem durumu açıklanacaktır. Daha sonra anlatım akışı sırasıyla araştırmanın amacı, önemi, sınırlılıkları ve tanımlar başlıkları altında sunulacaktır.

1.1. Problem Durumu

"Herkes bir ispatı dinleyebilir, herhangi bir ispatı okuyabilir ancak bir matematikçi ispat yapabilmelidir (Almeida, 1995, s.172)."

Bireyin ve toplumun değişen ihtiyaçları ile birlikte öğrenme-öğretme yaklaşımlarındaki yenilik ve gelişmeler bireylerden beklenen rolleri de doğrudan etkilemiştir. Bu değişim bilgiyi üreten, hayatta işlevsel olarak kullanabilen, problem çözebilen, eleştirel düşünen, iletişim becerilerine sahip, empati yapabilen, topluma ve kültüre katkı sağlayan vb. niteliklerdeki bir bireyi tanımlamaktadır (MEB [Milli Eğitim Bakanlığı], 2018a). Dinamik toplum yapısının güncel ihtiyaçları doğrultusunda şekillenen nitelikler, eğitimin kalitesine doğrudan ve en önemli etkiyi sağlayan öğretmenlerin bu nitelikleri öğrenme ortamlarına yansıtması ile anlam kazanacaktır. Eğitim alanında hayata geçirilen değişimler ve yenilikler öğretmenler tarafından öğrenme ortamına yansıtılmaz ise hedeflere ulaşılamayacağı açıktır.

Matematik öğretmenlerinin öğrenme ortamını ve öğretim sürecini nasıl organize ettikleri, matematik hakkında bildikleri ve inandıkları şeyler ile matematik öğrenimi ve öğretimi konularından ne anladıklarına bağlıdır (Anthony ve Walshaw, 2009). İyi düzeydeki öğretmen bilgisi, öğrencilerin mevcut matematiksel anlama seviyelerini değerlendirebilmeyi mümkün kılmaktadır. Bununla birlikte, bir öğrencinin bir şeyi anlamasını istemek aslında bir öğretmenden, öğrencisinin anlayıp anlamadığını değerlendirmesini istemek demektir (CCSSM [Comen Core State Standarts for Mathematics], 2010). Peki, matematiksel anlama neye benzemektedir? Bu soru matematiksel anlamanın temelinde bulunan yeteneklere açıklık getirmekle cevaplanabilir. Matematiksel anlamanın en önemli özelliği, öğrencinin matematiksel olgunluğuna uygun bir şekilde, belirli bir matematiksel ifadenin neden

doğru olduğunu ya da matematiksel bir kuralın nereden geldiğini gerekçelendirebilme yeteneğine sahip olmasıdır. Bu nedenledir ki etkili öğretmen denince, öğrettiği matematiği anlayan kişi akla gelmektedir (Varghese, 2009). Tüm sınıf seviyeleri için öğrenciler fikir geliştirerek, fenomenleri keşfederek, sonuçları gerekçelendirerek ve tüm içerik alanlarında matematiksel varsayımları kullanarak matematiğin anlamlı olduğunu görmelidir (NCTM [National Council of Teachers of Mathematics], 2000).

Etkili matematik öğretimi; öğrencilerde var olan bilginin düzeyini belirleyerek öğrenmeleri gerekeni anlamayı, akabinde daha iyi öğrenmeleri için onlardan beklentiyi yüksek tutmayı ve onları desteklemeyi gerektirir. Etkili matematik öğretiminin temel noktasında, öğretmenlerin öğrenci muhakemelerine katılmaları bulunmaktadır (Yackel ve Hanna, 2003). Matematiği anlamının temeli ise muhakeme yapabilmekte gizlidir. Muhakeme yapabilen ve analitik düşünebilen insanlar, hem gerçek dünyadaki durumları hem de sembolik nesnelerdeki örüntü, yapı ve düzeni fark etme eğilimindendirler. Dolayısıyla bu örüntülerin rastgele oluşup oluşmadığını ya da bir nedenden ötürü ortaya çıkıp çıkmadığını sorgulayıp, tahmin edip, ispatlayabilmektedirler (NCTM, 2000). Bu yönüyle, matematik eğitiminin her düzeyinde temel bir bakış açısı olarak muhakemeye vurgu yapmak, matematik eğitimcilerinin bireylerin nasıl bildiği hakkında daha iyi bir anlayışa sahip olmalarını sağlayacağı için doğru ve yerinde bir seçim olacaktır (Yackel ve Hanna, 2003). Bununla birlikte, öğrencileri muhakeme ve ispatlama ile meşgul etmek zorlu bir amaç olarak görünse de matematik yapmanın ve öğrenmenin de önemli bir amacıdır (Stylianides, 2010). Matematik yapmanın en etkili yolu ise muhakemenin yoğun bir şekilde kullanıldığı ispat uygulamalarıdır (Bayazıt, 2017). Matematiksel ispatın matematik derslerindeki en önemli rolü, öğrencilerin matematiksel anlamalarına yardımcı olmaktır (Hanna, 2000). Bu sebeple matematik eğitimcileri ve matematikçiler, ispatı geçerliliği önemli bir matematiksel etkinlik olarak kabul ederler (Alcock ve Weber, 2005). İspatın önemli bir matematiksel etkinlik olarak kabul edilmesinde ayrıca matematiksel bilginin kurulmasında, gelişiminde ve aktarılmasında gerekli oluşu da etkilidir. (Stylianides, 2007).

İspatlar matematiğin uygulama alanlarından bir tanesidir ve verilen bir teoremin doğruluğunu kanıtlamanın ötesinde öğrenme-öğretme süreçlerini destekleme adına farklı işlevleri bulunmaktadır (Bayazıt, 2017). Furinghetti ve Morselli (2009) ispatı bir yola benzetir ve bu yolu özel bir problem çözme durumu olarak tanımlar. Schoenfeld (2009,

s. xii) ise "problem çözme matematiğin kalbiyse ispat matematiğin ruhudur" yaklaşımıyla ispatın matematikteki önemine ve problem çözme ile ilişkine dikkat çeker. Matematiksel ispatlara bu yönüyle bakıldığında problem çözmede araç, yöntem ve stratejiler içerdiği, matematiksel bilginin kökeni ve bağlantılarını aydınlatan sistemli yapısı ile iletişim kurduğu yönlerine ulaşılır (Zaslavsky vd., 2012).

İspat ve ispatlama, matematiksel düşünme ile birlikte ileri matematiksel düşünmenin geliştirilmesinde de merkezi bir öneme sahiptir (Uğurel ve Moralı, 2010). İspat sürecinde geçmiş bilgiler sentezlenir ve yapılan çıkarsamalar ile yeni bilgilere ulaşılır. Böylelikle ispatın, matematiksel düşünceleri kendilerinin keşfetmesi için öğrencilere imkân tanıdığı söylenebilir (Knuth, 2002). Düşüncesel veya zihinsel kapasitelerini zorlaması nedeniyle de öğrencilerin üstbilişsel yeteneklerini geliştirdiği, dolayısıyla öz-takip ve öz-düzenleme becerilerini desteklediği söylenebilir (Bayazıt, 2017). Schoenfeld'e (1994) göre ise ispatlar matematik yapmanın en etkili yoludur; bu açıdan bakıldığında öğrencilere yaparak ve yaşayarak öğrenme ortamları sunduğu söylenebilir. Ayrıca muhakeme ve ispat, müfredatta özel günler veya konular için ayrılmış özel etkinlikler değildir. Bu yönüyle de hangi konunun çalışıldığına bakılmaksızın sınıf tartışmalarının devam eden doğal bir parçası olmalıdırlar (NCTM, 2000).

İfade edilen önemi ve matematik müfredatının (NCTM, 2000) her seviyesinde ispata daha belirgin bir şekilde yer verilmesi matematik eğitimcilerine, öğrencilerin matematiksel muhakeme ve ispat rollerini anlamalarını sağlamada önemli bir görev yüklemiştir (Hanna vd., 2012). Bunlardan biri, matematik eğitimcilerinin öğrencilerin ispat gereksinimlerine ilişkin bakış açılarını ve hangi durumlardaki görev ve bilgilerinin bu gereksinimleri ortaya çıkardığını anlamalarıdır (Zaslavsky vd., 2012). Ancak öğretmenler, ispatları ağırlıklı olarak bilgi aktarımı yoluyla sunar ve öğrencileri ispat yapımı sırasındaki bilişsel süreçlere yeterince dahil etmezlerse bu gereksinimlerin hangi durumlarda ortaya çıktıklarını anlamayacaklardır. Bununla beraber öğrenciler de, ispat yapmanın anlamını ve adımlarını sınırlı bir şekilde öğrenecek ve ispat çalışmalarının niteliğinde düşüşler gözlemlenecektir (Uğurel ve Moralı, 2010).

Öğretmenler matematiksel ispatı, matematiksel iletişim ve çalışmaların gerekli bir aracı olmaktan ziyade konu öğretiminde kullanmaktadırlar (Knuth, 2002). Dolayısıyla matematiksel ispatın öğrenimi belirli bir sıra halinde görünürde gerçekleşmekte, ezbere

olmaktan öteye gitmemekte ve herhangi bir eğitimsel değer içermemektedir (Dede ve Karakuş, 2014). Böylelikle matematik eğitimcileri ve matematikçiler için önemli işlevlere hizmet eden ispatın amacını öğrenciler anlayamamaktadır (de Villiers, 1990). Öğrencilerin, matematik eğitimcilerinin uzmanlık bilgileri ve üstbilişsel bilgi becerilerine sahip olmadığı da göz önüne alındığında, genel matematiksel ilişkileri belirleyerek ispatları anlamaları daha da zor olabilmektedir (Özgür vd., 2017). Sonuç olarak matematikte ispat yapma kabiliyeti; geniş bir inanç, bilgi, bilişsel becerilere dayanan ve öğrenmenin gerçekleştiği toplumsal bağlam tarafından şekillendirilen karmaşık bir beceri olarak ele alınır (Blanton ve Stylianou, 2003). Buna karşılık matematiksel ispatların oluşturulması sürecinde zorlanılan noktalar, üstbilişsel süreçler ile öğrenme ortamının sosyokültürel etkilerine dayandırılır.

Matematik eğitiminde ispat yapma sürecine dayalı literatürde yer alan çalışmalar iki kategoride incelenebilir. Birinci kategoride yer alan çalışmaların, matematiksel ispat yapma sürecine dayalı olarak literatürde sıklıkla karşılaşılan ve çalışılan konulardan oluşan;

- Matematiksel ispatları oluşturmada, anlamada ve değerlendirmede karşılaşılan zorluklar (Bell, 1976; Knuth, 2002; Alcock ve Weber, 2005; Stylianides, 2007),
- Matematiksel ispatları oluşturma, anlama ve değerlendirme sürecinde var olan eksiklikler ve yapılan hatalar (Healy ve Hoyles, 2000; Stylanides ve Stylianides, 2009) üzerine yoğunlaştığı görülür.

Bu araştırmalar ile *"İspat yapma sürecinde yaşanan zorluklar, var olan eksiklikler ve yapılan hatalar nelerdir?"* sorularına cevap bulunur. Bunu takiben; *"İspat yapma sürecinde yaşanan zorluklar, var olan eksilikler ve hataların nedeni/kaynağı nedir?", "Matematiksel ispat yapma sürecinde yaşanan zorluklar, var olan eksiklikler ve yapılan hatalar nasıl giderilebilir?*" gibi sorulara aranacak cevaplar ise bizi matematiksel ispat yapma sürecine dayalı ikinci kategorideki araştırmalara götürür. Böylece ikinci kategorideki araştırmalar ile aslında birinci kategorideki araştırmaları temele alan ve matematiksel ispat yapma sürecine dayalı iyileştirici ve geliştirici sonuçlar veya öneriler içeren bir temele ulaşılır. Böylece ispatın anlamı, amacı ve değeri nitelikli bilgiler doğrultusunda daha da anlam kazanmış olur. Bu kapsam da yapılan çalışmalar incelendiğinde:

- Matematiksel ispat yapma, anlama ve değerlendirmedeki öğrenme ve öğretme ortamlarına veya süreçlerine (Stylianides ve Silver, 2009; Bussi, 2009; Uğurel ve Moralı, 2010; Stylianides, 2010; Bieda, 2010; Steele ve Rogers, 2010; Janke ve Wambach, 2013; Lesseing, 2016; Özgür vd., 2017; Mason, 2017; Knuth vd., 2017; Yee vd., 2018),
- Matematiksel ispat yapma, anlama ve değerlendirmedeki bilişsel süreçlere (Almeida, 1995; Harel ve Sowder, 1998; Tall, 1998; Almeida, 2003; Weber, 2010; Brown, 2014; Wiest, 2015; Öztürk ve Kaplan, 2019) odaklanan çalışmaların olduğu görülmektedir.

Stylianides vd. (2017) de ispat alanında yapılan araştırmaların artmasının matematik eğitiminde ispatının önemini yansıttığını belirtmişler ve var olan çalışmalara dair yaptıkları incelemelerde çeşitli sonuçlara ulaşmışlardır. Bunlar:

1. Çeşitli eğitim seviyelerinde ispatın öğretilmesi ve öğrenilmesinin farklı yönlerine ışık tutan iyi geliştirilmiş teorik çerçevelerin varlığı,
2. Öğrencilerin ispatları nasıl kanıtladığı ve genellikle yanlış anladıklarına dair oldukça geniş bir bilgi tabanı,
3. Okuldaki matematik dersi uygulamalarında ispatın yeri ve
4. İspat öğretme ve öğrenmenin önemli hususlarını ele almak için az sayıda geliştirilmiş uygulama temelli araştırmaların varlığına dair sonuçlardır.

Matematiksel ispatlar ilkokul yıllarından itibaren sınıf uygulamalarına dahil edilirse üniversitede karşılaşılacak bir zorluk olmalarının önüne geçilir. Ayrıca öğrenci muhakemelerini bu süreçle desteklemek için örnek kullanımının rolü süreç içinde netleştirilebilir (Mason, 2017). Eğer kişi bir duruma ilişkin genel durumu görebiliyorsa, örnek kullanımı gerekli olmayabilir ancak bu nadiren rastlanan bir durumdur (Özgür vd., 2017). Çoğu durumda da bu ilişki açık değildir. Bu nedenle matematik eğitimcileri ve matematikçiler bir konuyu veya yeni bir problemi araştırmak ve anlamak için örneklere başvururlar. Böylece öğrenciler de örnek kullanımı ile ispatlamaya dayalı faaliyetleri gerçekleştirirken daha bilinçli ve stratejik olmayı öğrenirler (Knuth vd, 2017). Örnek kullanımı, hem ifade edilen bu yönü hem de genelleme ve gerekçelendirmeye olan katkılarının yanı sıra keşfetme, inceleme ve çözümlerin gözden geçirilmesi fırsatlarına olanak tanıyarak, sınıf düzeylerinde ispatlama süreçlerinin derinlemesine incelenmesini sağlayabilir (Özgür vd., 2017). Öğrencilerin ispatı anlamlı bir süreç içinde öğrenmek için

ispatın çeşitli işlevlerini anlamalarını ve deneyimlemelerini savunan de Villiers (1990) de hipotezlere dayalı ispat sürecinin geleneksel ispat sürecinden daha kapsamlı olabileceğinin altını çizer. Hipotez üretiminde harcanan zaman israf edilmez ve ispat yapımı sırasında geri kazanılan bir süreç olarak yorumlanır (Bussi, 2009). Böylelikle genel durumlara dayalı örnekler ve hipotezler ile başlayıp ispata doğru giden uygulamalar içerisinde öğrencilere kişisel bir rol vermek anlamlı olabilir (Almeida, 2003).

Dawkins ve Weber (2017) ispatın, öğrencileri matematiksel olarak geliştirmenin bir aracı olarak görülebileceğini ve öğretmen otoritesine dayalı pasif bir süreçten ziyade öğretmenden bağımsız deneyim elde edebilecekleri rollere fırsat tanıyabileceğini belirtirler. Tall (1998) da ispatın bilişsel gelişimdeki rolünün, bilişsel yapıya ve öğrencinin kullanımına sunulan temsillere bağlı olduğunu belirtir. Ayrıca ispat kavramının "sözlü olarak tanımlanmış kavramlardan, kavramları belgeleyen sözlü tanımlara" şeklinde bir dönüşüme sahip olduğunu ifade eder. Bunlara ek olarak Tall (1998)'a göre, öğrencilerin bilişsel gelişimini dikkate alarak ispatların anlamlı yapılarda sunulması gerekir. Böylece matematik eğitimcileri ile matematikçilerin matematiksel ispatın doğasını yeniden düşünerek, bireyin bilişsel gelişimi ile ilgili farklı ispat türlerini kullanmalarına ilişkin gerekliliğin altını çizer.

Matematiksel ispat yapma sürecinde üstbilişsel beceriler, bilişsel becerilere göre daha az kullanılır (Öztürk ve Kaplan, 2019). Bu durum; matematiksel ispat yaparken kişilerin, ne yaptıklarını bilmediklerini ve yeterli sorgulama ile değerlendirme yapmadıklarını gösterir. Bu problemin önüne geçmek için ispatların ezberlenebilir kavramlar olmasına dayalı yanlış anlamaların önüne geçilmesi gerekir. Bunlardan biri; ispatın problem çözmenin özel bir durumu olarak görülebileceği ve problem çözme ile beraber üstbilişsel yetenekleri geliştiren bir alan olmasına dayalı farkındalığın sağlanabilmesidir (Lucast, 2005; Furinghetti ve Morseli, 2009). Kişi ispat yaparken, biliş bilgisine dayalı var olan süreçlerinin nasıl gerçekleştiğini bildiğinde; yaşadığı zorlukların, yapmış olduğu hataların, ona kolay gelen noktaların ve bu benzeri durumlar konusunda kendini iyi bir şekilde tanımlayabilme fırsatı kazanmış olacaktır. Böylece bilişsel seviyeleri zorlayan ispatın, üstbilişsel süreçler yardımıyla gelişimi sağlanacaktır. Dolayısıyla başarılı problem çözmeye yardımcı olan üstbilişin, özel bir problem çözme durumu olarak ispat yapma sürecine de katkı sağlayacağı yorumu anlamlı olacaktır.

Janke ve Wambach (2013) tümdengelimsel düşüncenin anlamını yeterli bir şekilde ortaya koyabilmek için tek seferde yapılan uygulamaların yeterli olmadığını belirtmiştir. Okullarda öğrencilerin, farklı bağlamlardaki hipotezler ile ispatın ve tümdengelimsel düşüncenin rolünü ve gücünü çok çeşitli uygulamalar ile deneyimlemeleri gerektiğini önermişlerdir. Bleirel-Baxter ve Pair (2017) de özellikle öğretmen olmaya hazırlanan lisans öğrencilerinin farklı ispat rollerini deneyimlemelerini önemli görmüştür. Bu kapsamda, ispata yönelik anlamlı etkinlikler ile öğrenme alanlarının bu rollere nasıl dahil olunacağını anlamaya çalıştıkları araştırmalarında, matematiksel uygulamalarla ispat rolleri arasındaki bağlantıları keşfetmeye dayalı araştırmaların gerekliliğine dikkat çekmişlerdir.

Brown (2014) deneysel ispatlara yönelik şüpheci yaklaşımların gelişiminin ispatlama pratiğinin gelişimi için gerekli ancak tamamen yeterli bir adım olmayacağını belirterek beraberinde muhakeme ve belirli bir bilgi durumunu gerektireceğini ifade etmiştir. Hatta bu durumu "öğrenciler yolda ama yolculuğu tamamlamadı" benzetmesi ile açıklamıştır. Bu durum, gerek uygulama temelli gerekse bilişsel süreçlere dayalı ispat çalışmalarındaki matematiksel bilginin gerekliliğine ilişkin önemi ortaya çıkarmaktadır. Bu gereklilik paralelinde Bieda (2010), gerekçelendirme faaliyetini önemseyen bir müfredatı kullanan, yeterli tecrübeye ve mesleki gelişime sahip öğretmenlerin bile ortaokul düzeyindeki öğrencilerin ispat anlayışlarını destekleyici bilgilerinin yüzeysel olduğunu gözlemlemiştir. Bu doğrultuda, okul matematiğinde ispatın rolünün arttırılmasının önemli bir öğretmen eğitimini gerektireceğini savunan Lesseig (2016)'e göre ispatları okul matematiğinin ayrılmaz bir parçası haline getirmek için öğretmenler sürekli olarak desteğe ihtiyaç duymaktadır. Bu ihtiyaçlar, öğretmenlerin bilgisel anlamdaki yeterlilikleri, mesleki gelişimleri ve müfredat çalışmaları bağlamında desteklenmeleri olarak belirtilebilir (Bieda, 2010). Böylece ispat öğretimi için matematiksel bilginin detaylandırılması ve profesyonel gelişimin ispat bilgisine entegrasyonunu nasıl destekleyebileceği bu hedefe doğru atılan ilk adım olarak görülebilir (Lesseig, 2016).

Sonuç olarak, öğrencilerin ispatlara ve ispatlamaya yönelik bilgilerinde var olan eksikliklerin, sınırlılıkların belirlenmesi ve ispatlama becerilerinin geliştirilmesi için izlenecek yollardan birisi onları ispatlarla daha fazla karşı karşıya getirmektir (Uğurel ve Moralı, 2010). Bu yönüyle, matematik eğitimcileri ve matematikçiler öğrencilerin ispat yapma sırasındaki zihinsel tartışmalardan hoşlanmalarını sağlayacak ortamlar veya

etkinlikler hazırlamalı ve öğrencileri bu noktada cesaretlendirmelidirler (Dede ve Karakuş, 2014). Bu amaç doğrultusunda hazırlanacak ortamlardan biri, öğrencilerin ispatın esas anlamını öğrenmelerini sağlayacak faaliyetlerde bulunmaktır. Bu durumun gerçekleşmesi için de yapılması gereken ilk şey; faaliyetleri hazırlayacak olan öğretmenlerin, ispatın farklı anlamları ve yönlerini öğrenmelerine yönelik farkındalık sahibi olmalarını sağlamaktır. Bu farkındalığı sağlayacak yaklaşımlardan biri; genelleme yapmak ile başlayıp ispat ile sonlanan bir süreçte, ispata ve dolayısıyla matematiğe ilişkin anlamlı öğrenmelerin gerçekleşmesini mümkün kılmaktır. Nitekim, Stylianides (2008) tarafından oluşturulan M-İ [Muhakeme Etme – İspatlama] Analitik Çerçevesini ortaokul düzeyinde bir öğretmenin bilmesi ve öğretim sürecinde kullanması bu durumu örneklemektedir. İspatın farklı anlamlarını ve yönlerini farklı kategoriler kapsamında ele alan bu çerçeveyi, öğretim sürecinde kullanan bir öğretmen düşüncelerinden birkaçı şu şekilde açıklanabilir (Stylianides, 2010, s.44):

- M-İ Analitik Çerçevesi sınıfta yaptığım şeyleri kelimeler ile ifade ediyor.
- Bu çerçeveyi kullanan bir öğretmen farklı görevleri takip ederek, öğrencilerinin matematiksel hedeflere ulaşmasına yardımcı olabilir.
- Öğrenciler örüntü belirleme ve varsayımda bulunmaya devam ederken, onlara formal ispata dayalı uygulamaların yapılması gerekir mi?
- Bu çerçeveyi bilmek bir öğretmenin öğrencilerin sorgulama yapmalarına yardımcı olabilir. Genelleme yapmak ile başlayıp argümanlardan ispatlara geçiş çok önemlidir.
- Bence bu çerçeve öğretmenlerin, öğrencilerinin bir şeyi ispatlamaya nasıl başlayabilecekleri konusunda düşünmelerine yardımcı olmak için oldukça faydalıdır. Ayrıca çerçeve tüm argümanların ispat olarak davranamayacağını hatırlatmak için de yararlıdır.

Öğrencilere ispat yapma, anlama ve kavrama yeterliliğini kazandırmak için zengin fırsatlar sunma konusunda artan önem göz önüne alındığında, matematik öğretmen eğitimcilerinin, öğretmen adaylarının ispatları anlamaları ve mesleki gelişimlerine yönelik nasıl katkılarda bulunduğu önemli görülmektedir. Bu doğrultuda matematik öğretmen eğitimcileri, öğretmen adaylarının iyi düzeyde ispat bilgisine sahip olmasına yönelik uygun öğretim uygulamaları tasarlamalıdırlar (Stylianides vd., 2007). Bu durum, ispat alanında öğrenme zorluklarına ve ispatın farklı anlamlarına odaklanan uygulama

temelli sınıf tasarımlarına yönelik araştırmalara ihtiyaç oluşturmaktadır (Stylianides vd., 2017). Ancak matematik eğitimi literatürü incelendiğinde, öğrenme zorluklarını ve ispatın farklı anlamlarını temele alan sınıf içi uygulamalarda; bilişsel süreçleri yönlendiren üst düzey bilgi ve zihinsel faaliyetler olarak ele alınan üstbilişsel süreçlerin ispat yapma, anlama ve kavramaya yönelik etkilerinin incelenmesine yönelik araştırmaların sınırlı kaldığı belirlenmiştir. Dolayısıyla uygulama temelli sınıf tasarımlarına yönelik araştırmalar, ispat yapma sürecinde üstbilişsel faaliyetlere ilişkin farkındalık oluşturacak örneklerin seçilmesi ve kullanılmasına yönelik araştırmaların varlığı ile desteklenmelidir (Lockwood vd., 2016). İfade edilen tüm bu nedenlerle bu araştırma matematik öğretmen adaylarının matematiksel muhakeme ve ispat yapma süreçlerini, Muhakeme – İspatlama Çerçevesi ve üstbiliş bağlamında ele almış ve bu sürecin etkileri üzerine odaklanmıştır.

1.2. Amaç

Bu araştırmanın amacı, matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispatlara yönelik görevlerle bireysel ve grup halinde meşgul olurken matematiksel muhakeme ve ispat yapma süreçlerini; Muhakeme - İspatlama Çerçevesi ve üstbiliş bağlamında incelemektir. Bu amaç doğrultusunda aşağıdaki sorulara cevap aranmıştır.

1. M-İ sürecine yönelik kategorilerdeki ispat görevleri matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerini nasıl etkilemektedir?
   1.1. Bireysel çalışmalarda bu süreçler nasıl ortaya çıkmıştır?
   1.2. Grup çalışmalarında bu süreçler nasıl ortaya çıkmıştır?
   1.3. Bireysel çalışmalarda matematik öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar M-İ Analitik Çerçevesindeki hangi kategorilerle uyuşmaktadır?
   1.4. Grup çalışmalarında matematik öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar M-İ Analitik Çerçevesindeki hangi kategorilerle uyuşmaktadır?
2. M-İ sürecine yönelik kategorilerdeki ispat görevleri matematik öğretmen adaylarının algılarını nasıl etkilemektedir?
3. M-İ sürecine yönelik kategorilerdeki ispat görevlerinin matematiksel nitelikleri matematik öğretmen adaylarının algıları ile nasıl kıyaslanmaktadır?

4. Matematik öğretmen adaylarının M-İ sürecine yönelik kategorilerdeki ispat görevlerini yaparken ortaya çıkan üstbilişsel süreçler nelerdir ve ispat yapma sürecini nasıl etkilemektedir?

1.3. Önem

Ulusal matematik eğitimi literatürü incelendiğinde, matematiksel ispatlara yönelik literatürün öğretmen yeterlikleriyle ilgili çalışmalar açısından ciddi bir eksikliğe sahip olduğu söylenebilir (Bayazıt, 2017). Öğretmenlerin sınıflarında ispatı etkin bir şekilde geliştirmek için yetersiz oluşları birçok öğrencinin ispatlarla ilgili sağlam yanılgılara sahip olmasına büyük ölçüde neden olacaktır (Stylianides ve Ball, 2008). Öğretmenlerin iyi bir ispat anlayışına sahip olmadıkça öğrenci ispatlarını etkin bir şekilde desteleyeceklerini bekleyemeyiz. Bunun önüne geçmek için öğretmenlerin ispat konusundaki yeterliklerinin matematiksel ve pedagojik alan bilgisi boyutlarıyla incelenerek, matematiksel ispatlar konusundaki bilgilerinin ve sınıf içi öğretimlerinin geliştirilmesi sağlanabilir (Bayazıt, 2017). Bu durum, ispat bilgisine dayalı önemli talepler oluşmasının bir gerekliliği olarak yorumlanabilir (Stylianides ve Ball, 2008). Bu taleplerden biri, ispatın matematiksel içerik alanlarının tamamında derin bir öğrenme aracı olmasıdır. Bir diğeri ise ilkokul seviyesinden itibaren tüm öğrencilerin ispata ilişkin matematiksel deneyimlerine yönelik önemin artmasıdır.

Matematik eğitimcileri ve matematikçilerin, matematiksel bilgiyi anlamaya ve ortaya çıkarmaya yönelik profesyonel kullanımları ile öğrencileri yönlendirme desteği arasındaki ilişki ispatın problematik yönünü yansıtmaktadır. Bir başka deyişle matematiksel ispatlar, matematiksel etkinliklerden bağımsız formal bir süreç olarak ele alınmaktadır (Stylianides, 2008). Bunun önüne geçmek için; matematiksel bilgiyi anlamanın ve kurmanın sıklıkla bir parçası olan tüm önemli etkinliklerin, yeterliliklerin gelişimini ve bunlarla ilişkilerini anlamaya yardımcı olmak önemlidir. Bu kapsam da matematiksel ispat yapma sürecinin örüntüler tanımlamak, hipotezler üretmek, ispatlanmamış argümanlar sağlamak ve ispatlar sunmaya dayalı görevler bağlamında ele alınması anlamlı olacaktır. Bunun yanı sıra matematiksel ispat yapma sürecini sadece matematiksel bilgi perspektifinden ele almak bizleri Brown (2014)'nın "öğrenciler yolda ama yolculuğu tamamlamadı" benzetmesi içinde bırakır. Kişilere, bir görevin çözümüne

dayalı olarak matematiksel bilgilerini ortaya koyarken o görevin çözümüne yönelik yorumlarını psikolojik perspektiften ele almasını sağlayacak fırsatlar sunmak ve ortamlar oluşturmak gerekir. Bu durum sağlandıktan sonra da pedagojik perspektiften, öğrencilerin çözümlerinde kullandıkları matematiksel bilginin niteliği ile öğrencilerin çözümlerine ilişkin yorumlarını karşılaştıracakları ve bu karşılaştırmadan doğan olası tutarsızlıkları gidermeye çalışacakları fırsatlar vermek gerekir. Bu gereklilikler temelinde kurgulanan bu araştırma, farklı kategorilerdeki ispat görevleri ile matematik öğretmen adaylarının matematiksel perspektiften ele alınan matematiksel ispat yapma süreçlerinin psikolojik ve pedagojik perspektif ile bütünleştirilip incelenmesine olanak tanımıştır.

Uluslararası matematik eğitimi literatür incelediğinde, ispat alanında farklı sınıf uygulamalarının temelini oluşturan süreçlerin anlaşılması ve olası çözümlerin üretilmesine yeterince odaklanılmadığı sonucuna ulaşılmaktadır (Stylianides vd., 2017). Oysaki ispat toplumsal bir uygulamadır ve bireylerin uygulamaya katılımları, toplum söylemi ve o uygulamanın temsilinden etkilenmektedir (Brown, 2017). McCrone ve Martin (2009) de ispatları anlama üzerine belirledikleri altı ilkeden birini "İspatın iki rolü, ikna etmek ve açıklamaktır." olarak belirlemişlerdir. Bu bilgilerden hareketle ispat çalışmalarının toplum içinde anlam kazanan bir yapıda olduğu yargısına ulaşabiliriz. Bu durumun farklı bir yansıması olarak ise ispat çalışmaları ile meşgul olan kişilerin farklı bilişsel süreçlere sahip olmanın verdiği çeşitlilik ile ispat çalışmalarına farklı açılardan yaklaşabilecekleridir. Bu sebeple farklı bilişsel süreçlere sahip kişilerin bir araya gelişi ile gerçekleştirilen matematiksel ispat çalışmalarının farklı gerekçelendirme, değerlendirme ve yorumlamalar ile daha nitelikli ürünler olarak ortaya çıkarabileceklerini söyleyebiliriz. Bu yönüyle bu araştırma, matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapma süreçlerindeki üst düzey bilgi ve zihinsel faaliyetler olarak ele alınan üstbilişsel süreçlerin etkilerinin incelenmesine olanak tanımıştır. Ayrıca bu araştırma, farklı üstbilişsel süreçlere sahip matematik öğretmen adaylarının bir arada, sosyokültürel faktörlerinde etkisiyle matematiksel ispat yapma süreçlerini nasıl şekillendirdiklerini ortaya çıkarmaya olanak tanımıştır.

Özetle, muhakeme ve ispat yapmayı farklı kategorilerdeki ispat görevleri ile ele alırken, sosyal faktörlerin matematiksel ispat yapma sürecine etkisini üstbilişsel süreçlerle bütünleştirerek karmaşık bir beceri olarak incelemek nerdeyse çalışılmamış bir alandır. Literatürün bu eksikliğine odaklanması sebebiyle bu araştırmanın, hem öğretmen

adaylarının mesleki gelişimlerine katkı hem de öğretmen eğitimcileri, öğretmenler ve öğrenciler için önemli katkılar sunacağı düşünülmektedir.

1.4. Kapsam ve Sınırlılıklar

Bu araştırma, şu sınırlıklar kapsamında planlanmış ve gerçekleştirilmiştir:

1. Araştırma uygulaması, Marmara Bölgesi'nde bulunan bir Devlet Üniversitesi'nin Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği programının 3. sınıfında öğrenim gören 3 MÖA [Matematik öğretmen aday(lar)ı] ile gerçekleştirilmiştir. MÖA seçiminde, amaçlı örnekleme uygun olarak ders başarısı ve düzenli ders takibi dikkate alınmıştır. Araştırma, çalışma grubu bağlamında bu öğretmen adayları ile sınırlı kalmıştır.
2. Araştırma uygulaması 2017 - 2018 yılında 15 haftalık süre ile gerçekleştirilmiştir. Araştırma süresi açısından bu zaman aralığı ile sınırlı kalmıştır.

1.5. Tanımlar

İspat (Proof): Matematiksel bir açıklama ve geçerli bir argümana karşılık kabul edilmiş doğrulardır (Stylianides, 2005, s. 187).

Muhakeme Etme - İspatlama (Reasoning-Proving): Matematiksel genellemeler yapma ve matematiksel iddialara destek sağlamanın matematiksel uygulamasıdır (Stylianides, 2005).

Üstbiliş (Metacognition): Bilişsel olgularla ilgili bilgi ve inançlar ile bilişsel eylemlerin düzenlenmesi ve kontrolünü içeren bir süreçtir (Garafolo ve Lester, 1985).

BÖLÜM II: İLGİLİ ALANYAZIN

Bu bölümde, araştırmanın kurumsal temelini oluşturan alanyazın hakkında bilgiler sunulmuştur.

2.1. Matematiksel ve İleri Matematiksel Düşünme

Çevreyi anlama ve kontrol etmenin bir yolu olan düşünme eylemi, matematiğin kendine özgü yöntemlerinin kullanılması ile matematiksel düşünme süreci içerisinde bir anlam kazanır (Burton, 1984). Matematiksel düşünme sürecinde öğrenciler, edindikleri matematiksel bilgileri kullanabilecek yeteneklere sahip olurlar. Örneğin, PISA tarafından matematiksel okuryazarlık bağlamında geliştirilen çerçevede; muhakeme yapma, modelleme ve fikirler arasında bağlantı kurma gibi matematiksel düşünmenin birçok bileşenin varlığı görülür (OECD, 2013). Dolayısıyla matematik eğitimi adına temel bileşenlere sahip olan matematiksel düşünme beraberinde; *"Matematiksel düşünmeyi matematik eğitiminde önemli kılan süreçler nelerdir?"* sorusunu akla getirir. Bu soru, Burton (1984) ve Stacey (2006) tarafından matematiksel düşünmenin içerdiği temel süreçlerle cevap bulabilir:

- Özelleştirme veya özel durumlar üzerinde çalışma: Özel durumları denemek, belirli örnekleri incelemek,
- Genelleme: Belirli örnekler arasındaki örüntü ve ilişkilerin açığa çıkarılmasıyla bu örnekleri içeren daha geniş küme ve kümeler hakkında tahminlerde bulunmak,
- Tahmin etme: İlişkileri ve sonuçları tahmin etmek,
- Varsayımda bulunma: Bir şeyin doğru olduğunu sezmek, tahmin etmek ve doğruluğunu araştırmak,
- Genelleme yapma: Belirli örnekler arasındaki örüntü ve ilişkilerin açığa çıkarılmasıyla bu örnekleri içeren daha geniş küme ve kümeler hakkında tahminlerde bulunmak,
- İkna etme: Bir şeyin doğruluğuyla ilgili nedenleri bulma ve ilişkilendirmedir.

Burton (1984) ve Stacey (2006) tarafından ifade edilen bu temel beceriler göstermektedir ki, süreç perspektifinden ele alınan matematiksel düşünme; varsayımda bulunma, genelleme yapma ve ispat gibi kavramları içerisine almaktadır. Dolayısıyla bu

perspektiften bakıldığında, matematiksel düşünmenin bir sorun ya da problem karşısında düşünme eylemini harekete geçirdiği ve *"matematiksel düşünme nasıl gerçekleşir?"* sorusuna cevap bulmaya çalıştığı görülmektedir (Çelik, 2016).

Matematiksel düşünmenin ne olduğu ve nasıl gerçekleştiğine ilişkin farklı bakış açılarının doğal bir sonucu olarak ileri matematiksel düşünme kavramı ortaya çıkmıştır. Tall (2002)'a göre ileri matematiksel düşünme, matematiksel kavramlara dayalı tanımlar ile bu tanımlarla ilişkili tümdengelimsel muhakemeler olarak tanımlanır. Dreyfus (2002)'a göre ise ileri matematiksel düşünmede temsil etme ile soyutlamanın önemli bir yeri vardır. Bunların yanında, keşfetme, sezme, kontrol, ispatlama vb. ileri matematiksel düşünme sürecinde önemi olan diğer süreçler arasındadır. Ko ve Knuth (2009) tarafından da ispatlamanın, önermelerin doğruluğu veya yanlışlığını belirtmesi ve bunların nedenine açıklık getirmesinden dolayı ileri matematiksel düşünmede önemli bir beceri olduğunu ifade etmişlerdir. Özetle ileri matematiksel düşünme, matematiksel muhakeme ve ispatı içeren önemli bir düşünme sürecidir.

2.2. Matematiksel Muhakeme

Matematik derslerinin en önemli amaçlarından biri, öğrencilere mantıksal muhakemeyi öğretmektir. Bu sadece matematiksel değil, temel bir beceridir (Ross, 1998). Bu nedenle, matematiksel düşünme ve matematiksel muhakeme yapma becerisi; matematiği anlama, yeni fikirleri destekleme ve daha fazla çalışma adına bir temel oluşturur. Bu da muhakemenin matematikte temel ve özel bir rolünün olmasına katkı sağlar (NCTM, 2000). Böylelikle, muhakemenin sahip olduğu temel ve özel roller matematik eğitiminde çeşitli anlamlar taşımasını da beraberinde getirir (Polya, 1954, 1966; Russell, 1999; Lithner, 2008; Martin vd., 2009; Brodie, 2010; Lannin vd., 2011).

Matematiksel muhakeme, başkalarıyla iletişim kurabileceğiniz gerekçelendirilmiş bir argümana sahip olduğunuzu bilmenin getirdiği inançla ilişkili olup deliller veya varsayımlar temelinde sonuca ulaşma süreci olarak tanımlanır (Martin vd., 2009; Brodie, 2010). Bir başka tanımıyla muhakeme, görevlerin çözümü sırasında iddialarda bulunma ve sonuçlara varmak için kabul edilen düşünme hattıdır ve mutlaka formal mantığa dayanmak zorunda değildir (Lithner, 2008). Bu nedenle ispatla sınırlandırılmamıştır ve bazı mantıksal nedenlerle desteklendiği sürece yanlışlanabilir (Lithner, 2008).

Russell (1999) ise matematiksel muhakemeyi "temelde matematiksel genellemelerin geliştirilmesi, gerekçelendirilmesi ve kullanılması" olarak farklı bir bakış açısıyla tanımlamıştır (s.1). Bu tanımı geliştirerek yeni bir tanım ortaya atan Lannin vd. (2011) ise matematiksel muhakemeyi "Varsayım, genelleme, nedenini araştırma, argüman geliştirme ve değerlendirmeyi içeren bir süreç" olarak tanımlamışlardır (s. 10).

Matematiksel muhakemenin kullanımı araştırmacılar tarafından değişkenlik gösterse de, matematiksel muhakeme inkar edilmeyecek bir şekilde ispatla ilişkili bir kavramdır (Stylianides, 2005). Bu bakış açısıyla ele alırsak matematikte muhakemenin, genellikle sonuçların mantıksal olarak tahminlerden veya tanımlardan çıkarımlarının yapıldığı formal muhakeme ve ispat süreçlerini içerdiğini söyleyebiliriz. Bu doğrultuda ispat, bir anlam oluşturma temeli üzerine kurulmuş formal bir muhakeme iletişimidir ve matematiksel düşüncenin önemli bir sonucudur. (Martin vd., 2009). Bir başka deyişle, matematiksel ispat belirli türdeki muhakeme ve gerekçeleri ifade etmenin formal bir yoludur (NCTM, 2000).

Polya (1954) muhakemeyi içerecek şekilde ispatın değerini "Öğrenci geometrik ispatlarla yakınlaşmamışsa, gerçek ispatın en iyi ve en basit örneklerini, titiz muhakeme kavramı edinebilme fırsatını kaçırmış demektir." ifadesinde olduğu gibi sayısız gerekçe ile açıklamıştır (s. 216). Bu kapsamda, muhakeme ve ispatın birbirleriyle olan ilişkisini izah etmek için "bulgusal, dedüktif ve akla yakın muhakeme" kavramlarını kullanmıştır. Bulgusal muhakeme ve ispat ilişkisini, bir bina yapılırken kurulan yapı iskelesine benzeterek; kesin ispat yaparken bulgusal muhakemeye ihtiyaç duyulduğunu ifade etmiştir. Problemin çözümünü bulma sürecinde mantık yürütme biçimi olarak ele aldığı bulgusal muhakemenin, kesin ispat olarak görülmemesi gerektiğine, bir başka deyişle kesin ispatın yerine konulmaması gerektiğine dikkat çekmiştir. Dedüktif ve akla yakın muhakemenin ispatla olan ilişkisini ise şu şekilde açıklamıştır (Polya, 1966, s. 8):

> Matematiksel bilgilerimizi dedüktif (ispatlayıcı) muhakeme ile sağlama bağlarız fakat tahminlerimizi akla yakın muhakeme ile destekleriz. Bir matematiksel ispat dedüktif muhakemedir. Bu iki muhakeme cinsi arasındaki fark büyük ve çok çeşitlidir. Dedüktif muhakeme; emin, su götürmez ve kesindir. Akla yakın muhakeme; riskli, münakaşaya açık ve geçicidir. Bu iki muhakeme tarzının birbiri ile karşıt halde olmadığını aksine onların birbirini tamamladığına işaret etmek

> isterim. Dedüktif muhakemede esas olan şey bir ispatı bir tahminden geçerli bir ispat teşebbüsünden ayırt etmektir. Akla yakın muhakemede ise bir tahmini diğer bir tahminden daha akla yakın bir tahmini daha az akla yakın bir tahminden ayırt etmektir.

İspat muhakeme olmadan imkansızdır. Bununla beraber ispat da öğrencilerin matematiksel muhakemelerini geliştiren ve matematiksel düşünmelerini anlamalarını sağlayan yollardan biridir. Dolayısıyla matematiğin temeli muhakemeye, özü ise ispatlara dayanır (Ross, 1998). Böylece öğrencilere; örnekler, varsayımlar ve ispatlar arasındaki ayırım netleştirilerek; matematiksel sonuçların ancak dikkatli bir şekilde ispatlandıktan sonra geçerli olacağı vurgulanmalıdır. Matematiksel sonuçlar, az sayıda durumun doğruluğunu karşılayabilir ancak öğrenciler bu durumda sahip oldukları her şeyin sonuç kesinleşene kadar bir hipotezin delili olduğunu kabul etmelidir. Eğer muhakeme yeteneği öğrencide geliştirilmezse, matematik basitçe bir dizi prosedürün izlendiği ve ne anlam ifade edildiğinin düşünülmediği örnekleri taklit etmekten ibaret bir mesele haline gelir.

2.3. Matematiksel İspat: Doğası ve Tanımı

2.3.1. Matematiksel İspatın Tarihi ve Formalleşme Süreci

Matematiksel ispatlara tarihsel bakış açısıyla yaklaşıldığında, zaman içerisinde değişkenlik gösteren yapısı ile karşılaşılmaktadır. Uygarlığın ilk zamanlarında; Mısırlılar, Babiller ve Çinlilerin ağırlıklı olarak gözleme dayalı çalışmalarının, ispatların doğrulama rolü için yeterli olmadığı görülmüştür (Hanna ve Barbeau, 2002). Bu duruma yeterlilik kazandırmaya çalışan antik Yunan matematikçileri, matematiksel gerçekliği veya yanlışlığı göstermenin bir yolu olarak ispatlara mantıksal açıdan yaklaşmışlardır. Böylece matematiği deney ve gözlemler yerine mantık kurallarına dayandırarak, mantıksal argümanlar ve muhakeme yöntemleri ile matematiğe yaklaşmışlardır (Reid ve Knipping, 2010). Bu nedenle matematik tarihinde ispat, insanlığın antik Yunan matematiğinden aldığı en dikkat çekici hediyelerden biri olarak görülmektedir (Harel ve Sowder, 2007).

Yunan geometrisinde yeterli görülmeyen görsel ispatlar, mantıksal ispat yapısının oluşumuna katkı sağlamıştır. En basit anlamıyla mantıksal ispat, "zaten doğru olduğuna inanılan bir şeyin mantıksal bir sonucu olduğunu göstermek" olarak tanımlanmaktadır

(Grabiner, 2012, s.148). Bu tanım doğrultusunda, Yunanlıların matematiğe mantıksal bir bakış açısı kazandırmasının çeşitli nedenlerinden bahsedilir (Kleiner, 1991; Grabiner, 2012). Bunlardan bazıları ele alınacak olursa:

1. Daha önceki medeniyetlerle çelişkili bulunan sonuçları netleştirme isteği,
2. Öğretme ihtiyacı,
3. Problemleri daha basit problemlere parçalamaya dayalı matematiksel uygulama çalışmaları,
4. Yunan biliminin doğasıdır.

Yunan biliminin doğasına dayandırılan yaklaşımda, en eski Yunan doğa filozoflarının tüm evreni anlamlandırabilecek tek bir açıklayıcı ilke bulma uğraşları temele alınmıştır. Mesela; Thales "Her şey sudur.", Anaximenes: "Her şey havadır.", Pisagorcular: "Her şey sayıdır.", Democritus: "Her şey atomdan oluşur." ve Empedocles: "Her şey dört elementten oluşur; su, toprak, ateş, hava." demiştir. Yani doğada olduğu gibi matematikte de Yunanlılar, her şeyi ilk basit prensiplerine ve elemanlarına indirgemeye çalışmış bu nedenle ispata mantıksal açıdan yaklaşmışlardır (Grabiener, 2012). Dolayısıyla, tartışmanın içeriği ile düşünce kurallarına dayanan ve içerikten bağımsız olan biçimsel yapı arasında ayrım yapmışlardır. Böylece formalizm matematik tarihinde ispat adına uzun bir geçmişe dayanmış; ispatın formal ve informal yaklaşımını yansıtan tanımlarla, ispat kavramına ilişkin bakış açılarına netlik kazandırılmaya çalışılmıştır. İspatın formal yapısı ile kesin kurallara dayalı ifadelerin doğruluğunun bilinmesi ya da matematiksel çıkarım kurallarıyla doğruluğunun gösterilmesi ifade edilmeye çalışılır. Sosyal ve kültürel boyutları ifade eden informal yapısı ile de ispatın geçerliliği için matematikçilerin kullandığı süreç, işlem ve yöntemler ifade edilir (Arsac, 2007). On dokuzuncu yüzyılın sonlarından günümüze kadar ise modern matematik kapsamında Yunan matematiğinden farklı bir bakış açısıyla ispat kavramı sembolik açıdan ele alınmaya başlanmıştır (Harel ve Sowder, 2007; Reid ve Knipping, 2010; Grabiener, 2012).

2.3.2. Matematiksel İspatın Doğası ve Tanımı

İspat kavramı, farklı bağlamlarda çok farklı şeyler ifade eder (Tall, 1989). Bir yargıç için "makul bir şüphenin ötesinde" delillerle belirlenmiş bir şey anlamına gelir. Bir

istatistikçiye göre, belirli olayların rastgele gerçekleşebilmesi için olası varsayımların hesaplanarak bir olasılıkla meydana geldiği bir şey anlamına gelir. Bir bilim insanına göre, suyun 100° C de kaynamasını ispatlamak için bir deney yapmak gibi test edilebilecek bir şey anlamına gelir. Bir matematikçi ise görülmeyen varsayımlara karşılık olarak daha fazlasını ister. Onun için basitçe tahminler yapmak ve test etmek yeterli değildir. Dolayısıyla, bir iddianın ispatı gerçek yaşamda; mantıksallığı, geçerliliği ve objektifliği sorgulamaya açık bir şekilde sezgilere, kişisel öngörülere ve yorumlara dayanabilmektedir (Bayazıt, 2017). Matematiksel ispatlarda ise sezgiler aracılığıyla ulaşılan çıkarsamalar ile deney ve gözlem bulgularına yer yoktur.

Matematiksel ispat farklı araştırmacılar tarafından; "matematiğin kalbi" (Rav, 1999), "matematiğin ruhu" (Schoenfeld, 2009), "matematiğin temel aktivitesi" (Almeida, 1995), ve "matematiksel gelişmeyi sağlayan kraliyet yolu" (Rav, 1999) şeklinde farklı analojilerle ele alınmıştır. Aslında bu analojiler ispatın matematik eğitimindeki konumu ve önemiyle ilgili dolaylı açıdan çağrışımlar yapmaktadır. Bu nedenle matematiksel ispatların önemini bilmek, ispatın matematik eğitiminde sahip olduğu yeri kadar önemlidir. Goldberg (2002) matematiksel ispatların önemini şu iki yaklaşımla açıklamıştır (s.1-2):

> Bir hipoteziniz varsa, bunun doğruluğundan emin olmanızın tek yolu geçerli bir matematiksel ispat sunmaktır. Matematiksel bir ispatın diğer bir önemi ise anlamayı sağlamasıdır. Geçerli bir ispat yazabilmek, bir problemi tam olarak anladığınızı gösterebilir. Fakat bundan daha fazlası var. Bir hipotezin ispatlanması, bazen söz konusu teorinin daha derinden anlaşılmasını gerektirebilir. Bir şeyi ispat etmeye çalışan bir matematikçinin, hipotezini ispatlaması başarısızlıkla sonuçlansa bile, çok fazla anlayış ve bilgi kazanabilir.

Geleneksel olarak ispat; matematiksel ifadelerin doğrulanması, gerekçelendirilmesi veya bir öğrencinin ikna edilmesi işlevlerine sahip bir konu alanı olarak görülür (Bell, 1976; de Villiers, 1990). Bu değerli olsa da ispatın sadece öğrenciler için bir anlam ifade etmesi ihtiyacına dikkat çekmek, ispatın gerçek doğasını göz önünde bulundurmaktan uzaklaşmaya neden olur (Bell, 1976). Çünkü matematikte ikna etmek, genellikle mantıksal bir ispatı izlemekten çok daha başka yollarla elde edilir. Bu anlamda ispat, "içsel olarak uygulanabilmesine rağmen hayali bir potansiyel şüpheciye karşı ikna olmayı

amaçlayan toplumsal bir aktivite" olarak tanımlanır ve matematikte sahip olduğu çok çeşitli işlevleri vardır (Bell, 1976, s.24; de Villiers, 1990, s.18). Bunlar:

- Bir ifadenin gerçeğiyle ilgilenmesini sağlayan *"doğrulama"*,
- Bir şeyin neden doğru olduğu ile ilgili fikir vermeyi sağlayan *"açıklama"*,
- Çeşitli sonuçların dedüktif bir aksiyom sistemi, temel kavramlar ve teoremler halinde düzenlenmesini sağlan *"sistematikleştirme"*,
- Yeni sonuçların keşfedilmesi veya icadını sağlayan *"keşif"*,
- Matematiksel bilgilerin iletilmesini sağlayan *"iletişim"* işlevleridir.

Schoenfeld (1994) de ispatın keşfedilmesi gereken üç işlevini şu şekilde açıklamıştır:

- Tüm disiplinlerden farklı olan ve matematik yapmanın da bir parçası olan matematiksel argümanların sağladığı kesinliğin kendine özgü karakteri,
- İspatın gizli bir formal ritüel olarak algılanmasının gerekmediği düşünceleri başkalarıyla paylaşmanın bir yolu olarak görülebileceği,
- Matematikçiler için ispatın bir düşünme, keşfetme, anlama biçimi olduğu ve öğrencilerin matematiksel ispatı aynı şekilde deneyimleyebileceği ve deneyimlemesi gerektiği gerçeğidir.

İspatın matematik eğitimindeki önemi ve sahip olduğu çeşitli işlevler birçok araştırmacı tarafından ele alınmasına ve farklı şekillerde tanımlanmasına neden olmuştur. Bu tanımlara bakıldığında genel olarak iki yaklaşımın olduğu görülür (Miller, 2012). Bunlardan biri, teorem ve aksiyomların doğruluğunu göstermek olarak ispatın tanımlandığı formal yaklaşımdır (Tall, 1989; Hersh, 1993; Greenberg, 1993). Bir diğeri ise ispatın ikna edici olarak tanımlandığı informal yaklaşımdır (Alibert ve Thomas, 1991; Almeida, 1995; Harel ve Sowder, 2007). İspat ayrıca, farklı düşünme süreçlerini içeren karmaşık (Healy ve Hoyles, 1998; Rav, 1999; Ball vd. 2002; Lucast, 2003; Weber, 2005; Hanna ve Barbeau, 2008) ve toplumsal (Edwards, 1997; Stylianides, 2007, Stylianou vd., 2009; Selden ve Selden, 2013;) bir süreç olarak da tanımlanmıştır.

Tall (1989)'a göre ispat, iki önemli fikre dayanır. Bunlardan biri "Açıkça formüle edilmiş tanımlar ve ifadeler içermesidir.", bir diğeri ise "Bir ifadenin gerçekliğini ortaya çıkarmak için hemfikir olunmuş yöntemler gerektirmesidir." (s.5). Hersh (1993) ise matematiksel ispatı, "Matematiksel bir sonucun doğruluğunu göstermekten ziyade çeşitli aksiyomlara dayanan ve ilgili matematiksel ifadenin neden doğru olduğunun gösterildiği

mantıksal bir gösterim.” olarak tanımlamıştır (s.389-390). Bu nedenle matematikçilerin bir varsayımın doğru olmasından ziyade neden doğru olduğu ile ilgilendiğini belirtmiştir. Greenberg (1993) de ispat ifadelerinin altı önemli bileşene sahip olduğunu ifade etmiş ve bunları “varsayımda bulunma; aksiyom, önceden ispatlanmış teorem ve tanımlardan yararlanma, argüman öncesi adım ve mantıksal kurallara dayalı çıkarımda bulunma” olarak sıralamıştır (s. 41).

Alibert ve Thomas (1991)’a göre, hipotezlerin oluşturulması ve ispatların geliştirilmesi profesyonel matematikçilerin çalışmalarının iki temel yönüdür. Bunlardan biri, varsayım ifadeleri ile araştırmacının kendi anlayışını açıklığa kavuşturmasını amaçlayan kişisel ve samimi bir tarafının olmasıdır. Bir diğeri ise matematikçilerin önerilerinin bir yansıması olan ve henüz emin olmayan fikirlerin paylaşıldığı ortak bir tarafının olmasıdır. Bu bağlamlara göre ispatı, “başkalarını ikna etmeye çalışırken kişinin kendisini ikna etmesi” olarak tanımlamıştır (s.215). Benzer şekilde Almeida (1995) matematiksel ispatı “muhakeme edilmiş bir argüman kullanarak bir ifadenin doğruluğu hakkında birilerini ikna etmek” olarak tanımlamıştır (s. 660-661).

Healy ve Hoyles (1998) ispat yapmanın; hipotez ve hüküm ifadelerini ayırma, uygun çıkarımları belirleme ve bu çıkarımlar arasında geçişleri sağlama gibi eylemleri içerdiğini belirterek karmaşık bir süreç olduğundan bahsetmiştir. İspatın karmaşık bir matematiksel aktivite olduğuna vurgu yapan Weber (2005) de; ispatın mantıksal, kavramsal, sosyal ve problem çözme boyutlarına sahip olduğunu ifade etmiştir. Bu bakımdan ispat basit bir matematiksel işlemden ziyade zihinsel faaliyetleri içeren bir süreç olarak ele alınmaktadır (Selden ve Selden, 2013). Lucast (2003) da ispatın, öğrencilerin matematiksel kavramları öğrenmelerine yardımcı olacak üstbilişsel faaliyetleri içerdiğini ifade etmiştir. Ball vd. (2002) de ispatın “yapılar ve değişkenleri arama, varsayımları tanımlama, mantıksal argümanları düzenleme ve keşfetme” şeklindeki bir takım zihinsel faaliyetleri içerdiği ifade etmişlerdir (s.5). Ayıca bu süreçlerin; görsel veya deneysel ispatlar veya matematiksel sonuç ve gerekçelerle koordine edilmezse sezgi, kişisel inanç ve sosyal normlardan etkilenebileceğini belirtmişlerdir.

Rav (1999) matematiksel ispatın, “problem çözme için yeni yöntem, strateji ve araçlar sunar” seklinde tanımlamıştır (s.5). Hanna ve Barbeau (2008) ise ispatın problem çözmede ispatların sağladığı bu yeni matematiksel ilişkiler ve yöntemlerin, ispatlara

matematiksel önermelerin doğruluğunu göstermekten daha çok değer kazandırdığını ifade etmiştir. Furinghetti ve Morselli (2009) ispatlama sürecinin problem çözmenin özel bir durumu olduğunu ifade etmiş ve ispat yapma sürecinde Polya'nın (1954) problemi anlama, bir plan geliştirme, planı uygulama ve kontrol adımlarının izlenilebileceğini belirtmiştir.

Edwards (1997) ispatı sezgileri ve genellemeleri kesin iddialara dönüştüren açık ve kesin bir dil ile ifade edilen ve bir matematik topluluğu tarafından kabul edilen süreçlerin kümesi olarak tanımlar. Stylianou vd. (2009) de ispatı, "matematiksel bir iddianın doğruluğunu göstermek ve kişinin kendisini ve başkalarını ikna etmek için yapılan mantıksal argüman" olarak tanımlamışlar ve bu argümanın biçiminin, dilinin ve derecesinin farklı bağlamlar ve topluluklar arasında değişebileceğini ifade etmşlerdir (s.12).

İspatın önemi üzerinde anlaşmaya varılmış olsa da, matematik eğitimi topluluğunda kabul edilmiş ortak bir ispat tanımı yoktur. Ancak ispatın şu üç özelliği göze çarpar: "İspatlamak; matematiksel, bilişsel ve sosyal bir aktivitedir.". İspatın matematiksel yönü ile ilişki arama, hipotezler üretme, genelleme ve gerekçelendirme ele alınır. Bilişsel yönü ile ispatın öğrencilerin bilişsel gelişimlerine göre farklı seviyelerde karmaşıklığa sahip olmasından bahsedilir. İspatın sosyal yönü ile ispatın sosyal olarak inşa edilmesi ve bu nedenle geçerliliğinin toplum normlarına göre belirlendiği ifade edilir (Özgür, 2017).

Bu araştırmada ise Stylianides (2007) tarafından matematikçilerin ispat anlayışı ile öğrencilerin okullardaki ispat etkinliklerinin önemine dayalı sunmuş olduğu, üç önemli hususu içeren ve ispatı matematiksel, bilişsel ve sosyo-pedagojik açıdan ele alan tanım temele alınmıştır. Bu tanıma göre ispat:

1. Sınıf topluluğu tarafından kabul edilen (kabul edilen ifadeler kümesi) daha fazla gerekçeye ihtiyaç duyulmayan doğru ve uygun ifadeleri kullanır;

2. Geçerli ve bilinen veya sınıf topluluğunun kavramsal erişimi içinde olan gerekçelendirme biçimlerini (argüman modları) kullanır; ve

3. Uygun ve bilinen veya sınıf topluluğunun kavramsal erişimi dahilinde olan ifade biçimleriyle (argüman modları) iletilir. (s. 291)

2.4. Matematiksel İspatın Öğretim Programındaki Yeri

Polya (1966) tümdengelimsel muhakemeyi öğrenmek için matematiğin önemli bir imkan teşkil ettiğini ancak okul müfredatında buna imkan verecek bir dersin olmadığını ileri sürmüştür. İşlemlerin ispat olmadan öğretilmesinin gerekli matematiksel anlamayı sağlayamayacağını ve kuralların nedenlerinin olmadan verilmesinin ilişkilendirme yapılmadan öğrenmeye neden olacağı için çabucak unutulacağını ifade etmiştir. Bu düşüncelerinden ötürü ispatın, matematik öğretim programlarında yer alması ve öğrenciler tarafından öğrenilmesi gerektiğini ifade etmiştir.

Schoenfeld (1994) ispatın en görkemli tarafını, kesinliği sağlamış olmasına dayandırmıştır. Bilinen bir şeyin ispatlanması ile doğruluğu ve neden doğru olduğunu göstermiş olmanın hissettirdiği kesinlik duygusunun çok güçlü olduğunu ifade etmiştir. Bu nedenle "Okul matematiğinde ispat yapmak gerekir mi?" şeklindeki bir soruya verilecek yanıtın "kesinlikle, daha da anlatmalı mıyım, kesinlikle" şeklinde karşılık bulması gerektiğini belirtmiştir. Buna karşılık olarak Schoenfeld (1994)'e göre ispat, matematik müfredatının en yanlış anlaşılan kavramlarından biridir; matematik ve matematiksel düşüncede oynadığı rol ve bununla başa çıkmanın nasıl olacağı öğrenilmelidir. Çünkü ispat, matematik müfredatından ayrılabilir bir şey değildir, matematik yapmanın ve iletişim kurmanın temel bir bileşenidir.

Matematik eğitiminde ispatın sahip olduğu bu temel bileşenler, ispatın önemi ve matematik müfredatındaki yerinin uluslararası kuruluşlar tarafından da ele alınmasını mümkün kılmıştır. Bu doğrultuda, NCTM (2000) Muhakeme ve İspat Süreç Standartları'nda da söz konusu olan muhakeme ve ispatın, okulöncesinden 12. Sınıfa kadar öğretim programlarında yer alması gerekli görülmüş ve öğrencilerin:

a. Muhakeme ve ispatı matematiğin temel yönleri olarak tanıma;
b. Matematiksel varsayımlar yapmak ve araştırmak;
c. Matematiksel argümanları ve ispatları geliştirmek, değerlendirmek;
d. Çeşitli muhakeme türleri ve ispat yöntemlerini seçip kullanmayı yapabilecek durumda olması gerektiği ifade edilmiştir.

NCTM (2000) 3-5. sınıflardaki öğrencilerin; sayılar, şekiller veya işlemler için geçerli olan ilişkiler hakkında düşünmeleri gerektiğini ifade eder. İlişkileri tanımlamaları, bu ilişkilerin neden doğru olduğunu analiz etmeleri ve hangi matematiksel nesne grubuna

(sayılar, şekiller ve işlemler) uygulanabileceğini belirlemeleri gerektiğini açıklar. Sık sık matematiksel ilişkiler hakkında varsayımlar yapmalarını, bu varsayımları araştırmalarını ve çalışmalarına dayanan matematiksel argümanları oluşturmalarını gerektiğini belirtir. Varsayımları oluşturma ve bunları doğrulamaya çalışmanın, öğrencilerin matematiksel etkinliklerinin beklenen bir parçası olması gerektiğini ifade eder. Gerekçelendirmenin, 3-5. Sınıflardaki öğrenciler için çeşitli anlamlara sahip olacağını, ancak bu sınıflarda matematiksel argümanlar oluşturma konusunda daha fazla deneyime sahip olduklarından, argümanlarını artan bir şekilde özelliklerin, yapıların ve ilişkilerin bir analizine dayandırmaları gerektiğini belirtir. Örneklerin geçerli argümanlar için garanti niteliğinde sayılmadığını anlamları gerektiğini ve özel durumlara ilişkin argümanlardan uzaklaşarak genel argümanlar oluşturmaya başlamaları gerektiğini ifade eder.

NCTM (2000) 6-9. sınıflardaki öğrencilerin, iddia ve varsayımlarını değerlendirmek ve matematiksel argümanlarını formüle etmek için tümevarımsal ve tümdengelimsel muhakemeyi kullanarak muhakeme becerilerini geliştirmelerini gerektiğini ifade eder. Buna göre bu sınıflarda öğrenciler:

- Düzenlilikleri belirlemek için örüntüleri ve yapıları incelemeli,
- Belirlenen düzenliliklerle ilgili genellemeleri ve varsayımları formüle etmeli,
- Varsayımları değerlendirmeli;
- Matematiksel argümanları oluşturmalı ve değerlendirmelidirler.

Böylece öğrenciler, muhakemelerini öğretmenleri ve birbirleriyle düzenli olarak tartışmalı, varsayımlarının temelini ve matematiksel iddialarının gerekçelerini açıklamalıdırlar. Bu deneyimler sayesinde, öğrenciler tümevarımsal ve tümdengelimsel muhakemeyi uygun biçimde kullanma konusunda daha yetkin hale gelmelidirler (NCTM, 2000).

NCTM (2000) 9-12. sınıflarda, öğrencilerin anladıkları ve kullandıkları matematiksel indüksiyon, karşıt-ters ispatlar, karşıt örnek gibi ispat teknikleri lise yıllarına yayılması gerektiğini ifade eder. Öğrencilerin, bir varsayımın geçerliliğini belirlemek için doğrudan argümanlar sunabilmeleri gerektiğini belirtir. Bazı durumlarda varsayımlar, doğrulama araçlarını yönlendirmeye elverişli olmadığından, öğrenciler de dolaylı ispatlarla ilgili deneyime sahip olmaları gerektiğini ifade eder. Böylece bu türden muhakemeler, uzun zamandır Öklid geometrisinin özü olmasına rağmen tüm içerik alanlarında kullanılması

gerekli olur. Ayrıca; ispat yapılarında birden fazla temsili kullanmaları gerektiğini, gerekçelerini açıklayan formal ispatlar sunabilmelerini, başkası tarafından ifade edilen bilgiyi direkt kullanmak yerine mantıklarını kullanmalarını ve başkalarının iddialarını eleştirmenin sınıf tartışmalarının devam eden bir parçası olması gerektiğini ifade eder. Böylece çok çeşitli akıl yürütme türlerini (uzamsal muhakeme, olasılıklı muhakeme, sembolik muhakeme) ve tartışma biçimlerini kullanabilen öğrencilerin, günlük durumlarda daha etkili muhakeme kaynaklarına sahip olacağını belirtir.

Muhakeme ve ispatın müfredat programında yer almasının gerekliliği ve önemine karşılık, MEB (2018) Matematik Dersi Öğretim Programları incelediğinde muhakeme ve ispatın yeterli düzeyde ele alınmadığı görülür.

Tablo 2. 1. MEB (2018) Öğretim Programında Muhakeme ve İspat

Öğretim Programı		Amaç / Kazanım/ Konu
Matematik Dersi Öğretim Programı: 1-8 Sınıflar (MEB, 2018a)	Genel Amaç	*"Problem çözme sürecinde kendi düşünce ve akıl yürütmelerini rahatlıkla ifade edebilecek, başkalarının matematiksel akıl yürütmelerindeki eksiklikleri veya boşlukları görebilecektir." (s.9).*
	Kazanım	*"M.5.1.1.3. Kuralı verilen sayı ve şekil örüntülerinin istenen adımlarını oluşturur." (s. 51).*
	Kazanım	*"M.7.2.1.3. Sayı örüntülerinin kuralını harfle ifade eder, kuralı harfle ifade edilen örüntünün istenilen terimini bulur ."(s. 67).*
Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı (MEB, 2018b)	Kazanım	*"9.1.1.5. Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar." (s. 18).*
Ortaöğretim Fen Lisesi Matematik Dersi Öğretim Programı (MEB, 2018c)	Konu	*"Açık Önermeler ve İspat Teknikleri" (s. 12).*
	Kazanım	*"9.1.2.3. Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar."(s. 17).*
	Kazanım	*"9.4.3.1. Üçgenin iç ve dış açıortaylarının özelliklerini elde eder.* *b) Açıortay teoremleri ispatlanır." (s.23).*

İspatı matematik eğitiminde önemli bir faaliyet olarak görülmesine karşılık, matematikteki rolü ve K-12 eğitiminde yer bulmadığı görülmektedir (Doğan, 2019a). Böylece çoğu öğretim programı bağlamında ispat öğrenciler için kişisel bir anlam ifade etmemektedir (Schoenfeld, 1994). Öğretim programı kapsamında var olan ispat uygulamalarında ise çoğunlukla öğrencilerden Öklid geometrisi bağlamında; zaten sezgisel olarak doğru olduğunu bildikleri yani birçok farklı kişi tarafından zaten ispatlanmış olan bir yapının doğrulamasını yapmalarına dayalı çalışmalar yapılmaktadır.

Böylece matematiksel ispatlar öğrenciler tarafından zaten doğru olduğu bilinen bir şeyin doğruluğunun gösterildiği bir anlama sahip olmaktadır. Böylece öğrenciler ispata az ilgi duymaktadırlar ve bu alandaki yetenekleri de oldukça az olmaktadır. Schoenfeld (1994). Böylece bu durum, K-12 eğitiminde yeterli düzeyde yer almayan ispatın öğretmenler tarafından da yeterince anlaşılmadığını göstermektedir (Doğan, 2019a).

2.5. Matematiksel İspat Çerçeveleri

Matematik eğitimi alanyazını kapsamında matematiksel ispatlar üzerine yapılan araştırmalar incelendiğinde (makaleler, ulusal ve uluslararası tezler vb.) ispatı çeşitli şekillerde ele alan birçok çerçeve ile karşılaşılmaktadır. Bu çerçevelerden bazıları, ispatla ilgili araştırmaların kuramsal alt yapısını oluşturmak amacıyla sıklıkla kullanılarak birçok araştırmaya konu olmuştur (Balacheff, 1988; de Villiers 1990; Coe ve Ruthven 1994; Harel ve Sowder, 1998; Selden ve Selden, 2007; Stylianides, 2008).

Balacheff (1988) öğrencilerin ortaokul matematik uygulamalarındaki ispat kavramını, bir problemin çözümünde kullanılan ispat işlemlerinin daha anlaşılması için deneysel bir yaklaşıma dayandırarak ele almıştır. Özellikle öğrencilerin önerilen çözümün geçerliliği konusundaki inançlara nasıl ulaştığını inceleyen çeşitli ispat düzeyleri ve türlerini ortaya koymuştur. Bunlar; uygulamaya karşılık kavramsal ispat, saf deneyselcilik, önemli deney, genel örnek ve düşünce deneyidir.

de Villiers (1990) ispatın sadece matematiksel ifadelerin doğrulanması olarak görülmesine karşı çıkarak, matematikte ispatın beş farklı kavramı (ya da rolü) arasında ayırım yapan bir model önermiştir. Bu beş kavram; doğrulama, açıklama, sistematikleştirme, keşfetme ve iletişimdir. Bu yaklaşım doğrultusunda, ispatın öğrencileri temele alınarak okullarda ele alınmasına yönelik öneme dayalı bilgiler sunmuştur.

Coe ve Ruthven (1994) öğrencilerin çalışmalarını analiz etmek için Van Dormolen (1977) ve Balacheff (1988)'in ortaya koydukları hiyerarşilerin üzerine bir analitik çerçeve kullanmıştır. Böylece; ispatın kullanılabileceği durumları belirleyerek ispat türlerini; deneysel ispat, zayıf tümdengelimsel ispat ve güçlü tümdengelimsel ispat olarak sınıflandırmıştır.

Harel ve Sowder (1998) ispat ve ispatlamayı psikolojik yönü olan ve öğrenci merkezli bir yaklaşım olarak ele almışlardır. Sınıflandırmasındaki ispat şemaları her biri, bilişsel bir aşamayı ve öğrencilerin matematiksel gelişiminde entelektüel bir yeteneğini temsil etmişledir. Ayrıca her bir şemanın öğrencilerin ispatlama sürecinde gerçekleştirdikleri faaliyetlere ilişkin gözlemlerinden türeterek ortaya koymuşlardır. Bu şemaları; dışsal, deneysel ve analitik ispat şeması olarak ortaya koyup ve bu her bir şemayı alt şemaya ayırmışlardır.

Selden ve Selden (2007) lisans öğrencileri ile lisansüstü eğitime yeni başlayan öğrencilerin ispatlama becerilerini ve çeşitli yapıları içeren ispatlarını detaylı bir çerçeve aracılığıyla açıklamaya çalışmışlardır. Bu nedenle, öğrenci gelişimlerinin farklı dönemlerinde ve farklı şekillerde öğrenilebilen çeşitli küçük becerileri içeren detaylı çerçevelerinde ispatları; hiyerarşik yapı, yapılış yolu, formal-retorik ve problem merkezli olmak üzere üç yapıda ele almışlardır. 2008 ve 2015 yıllarında yaptıkları araştırmalarıyla bu çerçevelerini geliştirmişlerdir.

Stylianides (2008) matematik disiplininde yeni bilgilerin gelişiminin genellikle birkaç aşamadan oluştuğunu ve ispat yapmanın bu aşamalar içerisinde en sonda bulunduğunu ifade etmiştir. Bu kapsamda, muhakeme ve ispatlamaya yönelik olarak geliştirdiği Analitik Çerçevesini farklı kategori ve bileşenleri dikkate alarak oluşturmuştur.

2.5.1. Muhakeme ve İspatlamanın Analitik Çerçevesi

Stylianides (2008) matematik disiplininde yeni bilgilerin gelişiminin genellikle birkaç aşamadan oluştuğunu ve ispat yapmanın bu aşamalar içerisinde en sonda bulunduğunu ifade etmiştir. Muhakeme ve ispatlamaya yönelik olarak geliştirdiği Analitik Çerçevesini (Tablo 2.2.) bu aşamaları dikkate alarak ve matematiksel, psikolojik, pedagojik olmak üzere 3 bileşene dayandırarak oluşturmuştur.

Tablo 2. 2. M-İ Analitik Çerçevesi

Muhakeme Etme ve İspatlama (Stylianides, 2008, s. 10)

Matematiksel Bileşen	Matematiksel genelleme yapma		Matematiksel iddialara destek sağlama	
	Örüntü belirleme	Varsayımda bulunma	İspat	İspatlanmamış argüman
	*Makul örüntü *Kesin örüntü	*Varsayım	*Genel örnek *Kanıt	*Deneysel argüman *Mantıksal argüman
Psikolojik Bileşen	Çözüm yapan kişinin bir örüntü/varsayım/ispat/ispatlanmamış argümana ilişkin matematiksel algısı nedir?			
Pedagojik Bileşen	Bir örüntü/varsayım/ispat/ispatlanmamış argümanın matematiksel doğası çözüm yapan kişinin bu nitelikteki algısı ile nasıl kıyaslanıyor? Bir örüntü/varsayım/ispat/ispatlanmamış argümanın matematiksel doğası çözüm yapan kişi için anlaşılır duruma nasıl gelebilir?			

2.5.2. Analitik Çerçevenin Matematiksel Bileşeni

Çerçevenin matematiksel bileşeni, M-İ'leri oluşturan dört faaliyeti ve bu faaliyetlerin önemli farklılıklarını belirlemek için bir kısmının ayrıntılı dökümünü içermektedir (Stylianides, 2008). Bu faaliyetler iki kategoride ele alınmıştır. Bunlardan birincisi bir örüntü belirleme ve varsayımda bulunma faaliyetlerini içeren "matematiksel genelleme yapma" kategorisidir. İkincisi ise, bir ispat sağlama ve ispatlanmamış argümanlar sağlama faaliyetlerini içeren "matematiksel iddialara destek sağlama" kategorisidir.

2.3.2.1. Matematiksel Genelleme Yapma

Genelleme, "Bir nesnenin ele alınmasından bu nesneyi içeren bir kümenin ele alınmasına ya da kısıtlı bir kümenin ele alınmasından bu kısıtlı kümeyi içeren daha geniş bir kümenin ele alınmasına geçmektir." (Polya, 1954, s. 94). Matematik eğitiminde karşı karşıya kalınan büyük bir zorluk, öğrencilerin birkaç örnekte bulunan düzenliliklere karşılık matematiksel yapılara dayanan genelleme yapma becerilerini geliştirmektir (Bills ve Rowland, 1999; Kücheman ve Hoyles, 2009). Bu nedenle matematik eğitiminde temele alınan önemli bir amaç, öğrencilerin sadece örüntü bulmaları değil aynı zamanda yapılan genellemenin neden doğru olduğunu anlamalarını sağlamaktır (Harel ve Sowder, 1998; NCTM, 2000). M-İ Analitik Çerçevesinde matematiksel genelleme yapmak, "sınırlı bir kümenin değerlendirilmesinden bu sınırlı kümeyi içeren daha genel bir kümenin değerlendirmesine geçmek" olarak tanımlanır (Stylianides, 2005, s. 189).

Muhakeme ve ispatlamanın iki genel yönünden biri olan matematiksel genelleme yapma, örüntü belirleme ve varsayımda bulunma faaliyetlerini içeresine almaktadır. Matematiksel genellemeler ifade edilirken "deneysel" ve "yapısal" olmak üzere iki terim kullanılır. Bu terimlerin kullanımı, genelleme türlerinden birinde sonuçların (deneysel) birinde ise yapı ve yöntemlerin temel anlamlarının (yapısal) dikkate alındığını gösterir (Bills ve Rowland, 1999). Stylianides (2008) de veri kümelerine uyan genel matematiksel ilişkileri belirleyen yapısal genelleme becerisinin, örüntülerle uğraşırken önemli olduğunu ifade eder.

Örüntü Belirleme

Örüntü belirleme (i*dentifying a pattern*), belirli veri kümesine uyan genel bir matematiksel ilişki olarak tanımlanır (Stylianides, 2005, 2008, 2009, 2010; Stylianides ve Silver 2009). Ancak örüntünün sınırlı bir durumda ele alınan matematiksel ilişki ifadesinin yanında daha genel bir anlamı da vardır (Stylianides, 2005). Mesela öğrencilerin genelleme yapmadan, genel bir matematiksel ilişki ortaya koymasına dayalı görevler bu kategoriye girmemektedir (örneğin, bilinen bir yöntemi uygulayarak grafik yardımıyla doğrusal bir denklem bulmak gibi). Buradaki örüntü kavramı içerik alanları (örneğin, cebir alanı) ve temsillerin (örneğin, görsel temsil) ötesinde olup aynı zamanda; yapılar ve özellikler arasındaki ortak değişkenliği tanımlayan ifadeleri içermektedir (Stylianides, 2009).

Bazı durumlarda örüntüler benzersiz bir şekilde belirlenmemiştir. Bir başka deyişle, verilen veri kümesine uyan diğer örüntülere göre belirli bir örüntünün seçimi için kesin deliller sağlamak mümkün değildir. Bu tür örüntülere makul örüntüler (*plausible patterns*) denir (Stylianides, 2005, 2008, 2009, 2010; Stylianides ve Silver 2009). Makul örüntüler söz konusu olduğunda seçilen örüntünün verilen verilere uyan en basit veya en yakın tanım olması dışında diğer olası örüntülere göre seçilmesinin bir nedeni yoktur. Makul örüntülerin, verilere uyan en basit örüntü olduğu düşünülür (Stylianides, 2005; Stylianides ve Silver, 2009). Bazı durumlarda da, verilen veri kümesine uyan diğer örüntülere göre belirli bir örüntünün seçimi için kesin deliller sağlamak mümkündür. Bu tür örüntülere kesin örüntüler (*definite pattern*) denir (Stylianides, 2005, 2008, 2009, 2010; Stylianides ve Silver 2009). Kesin örüntüler, görevdeki matematiksel yapı tarafından benzersiz bir şekilde belirlenir (Stylianides, 2005; Stylianides ve Silver, 2009).

Bir örüntünün makul veya kesin olup olmadığı, örüntünün neden bulunduğuna karşılık gelen bir gerekçe içerip içermemesine bağlıdır (Stylianides ve Silver, 2009).

Örüntü belirleme kategorisi kapsamında makul ve kesin örüntü ayırımını tanımlamaya yardımcı olacak örnek şu şekilde gösterilebilir:

x	0	1	2	3	4
y	0	3	6	?	?

Şekil 2.1. Örüntü Belirleme Örneği

> Tablodaki verilere uyan bir örüntü y = 3x'dir. Bu örüntüye göre eksik veriler 9 ve 12'dir. Verilere uyan başka bir örüntü ise $y=x^3-3x^2+5x$'dir. Matematiksel açıdan bakıldığında görevle ilgili bu cevaplardan herhangi biri doğru olabilir. Bu nedenle örüntünün benzersiz bir şekilde belirlenmediği ve makul bir örüntü olduğu açıktır. Peki bu görev, örüntüye kesinlik kazandıracak şekilde nasıl değiştirilebilir? Örüntüyü kesin kılmanın bir yolu görevi belirlenen duruma yerleştirmek olacaktır. Örneğin örüntü, y=3x olarak tanımlanır ve "Bir yazarın yayımcısıyla, satılan kitap başına 3 dolar alacak şekilde bir sözleşmesi vardır." şeklinde bir durumla açıklandığını göz önüne alalım. Bu durumda y=3x örüntüsü; y yazar tarafından alınan dolar miktarı ve x satılan kitap sayısı olarak tanımlanarak benzersiz bir şekilde geliştirilmiş olur (Stylianides ve Silver, 2009, s. 240).

Varsayımda Bulunma

Varsayımda bulunma (*making conjecture*), eksik delillere dayanan genel bir matematiksel ilişki hakkında muhakeme edilmiş bir hipotez olarak tanımlanır (Stylianides, 2005, 2008, 2009, 2010). "Muhakeme edilmiş" terimi, hipotezin keyfi olamayacağını belirtir. Bu doğrultuda hipotez, bir tahminden veya önsezilerden ayrılır. Örneğin, öğrencilere ortak olan bazı sayılar verilerek hangilerinin benzer olduklarını söylemeleri istendiğinde, bu bir hipotez üretmek olarak sayılmaz (Stylianides, 2005). "Hipotez" terimi ise matematiksel ifadenin henüz ispatlanmadığını; kesin olarak ifadeyi kabul etmek veya reddetmek için daha fazla eylem yapılması gerektiğini belirtir (Arzarello vd., 1998; Reid, 2002; Canadas ve Castro, 2005; Stylianides, 2005, 2008, 2009).

Varsayımda bulunma kategorisini tanımlamaya yardımcı olacak örnekler şu şekilde gösterilebilir:

> "12 sayının çarpanları ile oluşturabileceğiniz dikdörtgenlerin boyutları arasındaki ilişki hakkında ne gözlemliyorsunuz?" şeklinde geliştirilen bir soruda öğrencilerin "sayının çarpanlarına göre değişken dikdörtgen boyutlarının olması" söyleminde bulunmaları beklenirse bu örüntü olarak alınacaktır. Ancak soru: "Sayının çarpanları ile oluşturulabilecek dikdörtgenlerin boyutları arasındaki ilişki hakkında ne düşünüyorsunuz?" şeklinde sorularsa varsayım olarak alınacaktır (Stylianides, 2009, s. 264-265).

Bir başka örnekte ise:

> Bir öğrenci, ardışık tek sayı çiftleri toplamının 4'ün katı olacağını göz önünde bulundurmuştur. Öğrenci daha sonra bu örüntüyü tek doğal sayılar kümesinin tamamını kapsayan aşağıdaki varsayımlara genelleyebilir:
>
> İki ardışık tek doğal sayının toplamı, 4'ün katıdır (Stylianides, 2010, s. 3).

Örneklerde de görüldüğü üzere, örüntü belirleme ve varsayımda bulunma faaliyetleri, açık bir şekilde ilişkili olsalar da aralarında iki önemli fark vardır (Reid, 2002). Bunlardan birincisi; varsayımlar onu ortaya çıkaran durumların ötesine geçen bir referans alanına sahipken, örüntü belirleme de böyle bir referans alanı mevcut değildir. İkincisi ise, varsayımlar verilen gerçeklere ek olarak inançlar ile desteklense de, doğru veya yanlış kabul edilmediği halde teste tabi tutulur ancak örüntü belirleme de belirli verilerin gerçekliklerine ilişkin olası şüpheler doğrulanmadan sunulur. Harel ve Sowder'ın da (1998) belirttiği gibi, "Varsayım, gerçeği hakkında şüpheleri bulunan bir kişi tarafından yapılan bir gözlemdir." (s. 214). Dolayısıyla, varsayımlar nitelikleri gereği örüntülere göre daha fazla inceleme gerektirirler.

2.3.2.2. Matematiksel İddialara Destek Sağlama

Stylianides (2008)'in, matematiksel iddialara destek kavramı kategorisi kapsamında ele aldığı iki faaliyet vardır. Bunlar; ispatlanmamış argüman ve ispattır. Bu çerçevede ispat, matematiksel bir iddiaya karşı veya bu matematiksel iddia üzerinden kabul edilmiş gerçeklere dayalı geçerli bir argüman olarak tanımlanmıştır (Stylianides, 2005, 2008, 2009, 2010). İspat tanımında yer alan 'kabul edilen gerçekler' terimi, belirli bir

topluluğun belirli bir zamanda paylaştığı aksiyomları, teoremleri, tanımları, muhakeme biçimlerini ve temsil araçlarını içerecek şekilde kullanılmıştır. 'Geçerli' terimi ise günümüzde matematik alanında genel olarak üzerinde anlaşmaya varılan bağlamda anlaşılması gerektiği ifade edilmiştir.

İspatlanmamış Argüman

İspatlanmamış argüman, ispat olarak nitelendirilmeyen bir matematiksel iddia veya buna karşılık gelen bir argüman olarak tanımlanır (Stylianides, 2005, 2008, 2009, 2010). Bir başka deyişle, matematiksel bir ifadenin doğruluğunu ispatlamada yetersiz kalan argümanlar, ispatlanmamış argümanlar olarak ele alınır. Böylece, tam emin olunmayan ya da yanlış olan cevapların ispatlanmamış argümanlar olarak kabul edilmemesi gerektiği açıklığa kavuşturulur (Stylianides, 2009). M-İ Analitik Çerçevesinde iki tür ispatlanmamış argüman birbirinden ayırt edilir: Deneysel argüman ve mantıksal argüman (Stylianides, 2005, 2008, 2009, 2010).

Deneysel Argüman

Deneysel argümanlar (*emprical argument*), bir problemin genel yönlerine veya aksiyomatik sistem unsurlarına dayanan, tümdengelimsel durumlara neden olan ilgili farklılıkları içerebilir (Reid, 2002). Deneysel argümanlar ile bir matematiksel ifadenin doğru olduğuna dair yetersiz deliller sağlanabileceği gibi matematiksel gerçeklikler için kesin ispatlar da sağlanabilir (Stylianides, 2005, 2008, 2009). Ayrıca görevleri çözen kişinin, iddianın kapsadığı olası tüm durumların uygun bir alt kümesini kontrol ederek ya da muhtemel durumların tamamını göz önüne alarak ancak bunu yaptığını göstermeden bir iddianın doğru olduğuna karar verilebilir (Stylianides, 2005, 2008, 2009).

Deneysel argümanlarda örneklerin kullanılması, çözüme dair benimsenen inançların tek unsurudur (Bell, 1976; Marradas ve Gutierrez, 2000; akt. Stylianides, 2005, 2008, 2009). Ayrıca, deneysel argümanları destekleyen görevlerin öğrencilerin tümdengelimsel muhakeme yeterliklerini geliştirmelerine yardımcı olmadığı açıktır. Aksine, deneysel argüman ile tümdengelimsel argüman arasındaki farklılıkları ayırt etme zorluklarını destekler ve deneysel delillerin, ispat olduğu konusundaki yanlış anlayışlarını güçlendirirler (Fischbein ve Kedem, 1982; Chazan, 1993; akt. Stylianides, 2005, 2008, 2009).

Deneysel argüman kategorisini tanımlamaya yardımcı olacak örnek şu şekilde gösterilebilir:

Problem: Bir kare x santimetre uzunluğunda bir kenara sahiptir. Karenin bir kenarını 5 cm arttırıp, diğer kenarını 4 cm azaltarak yeni bir dikdörtgen oluşturuluyor. Yeni dikdörtgenin alanının karenin alanından küçük, eşit ve büyük olduğu x değerleri nelerdir?

x	Orijinal Karenin Alanı	Yeni Dikdörtgenin Alanı
5	25	10
10	100	90
15	225	220
20	400	400
25	625	630
30	900	910
35	1225	1240

Şekil 2.2. Deneysel Argüman Örneği

x sayısını temsil edecek sayılar aracılığıyla kare ve dikdörtgenin olası alanlarına ilişkin Şekil 2.2. deki gibi değerler elde edilir ve bu değerlere bağlı olarak ulaşılan aşağıdaki genel yargılar deneysel argüman kategorisine uygun bir cevap oluşturur. Böylece tüm durumların uygun bir alt kümesinin incelenmesi ile olası durumların tamamını içeren deneysel argüman sağlanmış olur.

- X değeri 20 den büyükse yeni dikdörtgenin alanı daha büyüktür.
- X değeri 20 den küçükse orijinal karenin alanı büyük olur.
- X değeri 20 ise alanlar aynıdır.

Mantıksal Argüman

Stylianides (2005, 2008, 2009) ispatlanmamış argüman türlerinden biri olan mantıksal argüman (*rational*) kavramının ise deneysel argümanın iyi bilinen kavramının aksine yeni olduğunu belirtmiştir. Mantıksal argümanları, hem deneysel argüman hem de ispat olamayan matematiksel iddiaları karşılayacak argümanları belirlemek için çerçevesinde tanımlamıştır. Örneğin; mantıksal argüman olarak sayılan ancak ispat sayılmayan bir argüman, kabul edilmiş tüm önemli gerekçelere açık bir referans getirmeyebilir; mantıksal argüman olarak sayılan ancak deneysel olmayan bir argüman ise durumlara

uyan örnekleri içerebilir ve düşünceleri ifade etmek için (gerekçelendirmeye karşıt olarak) kullanılır (Stylianides, 2005, 2008, 2009, 2010).

Stylianides (2005, 2009) ispatlanmamış argüman kategorisinde ele aldığı deneysel argümanlara göre mantıksal argümanların önemini şu şekilde ifade eder:

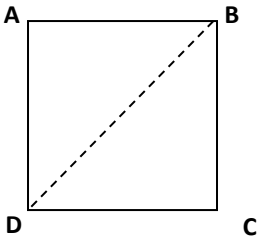
1. Deneysel argümanlardan farklı olarak mantıksal argümanlar, öğretim ile ele alınacak ispata ilişkin yanlış anlayışların gelişimini desteklemezler.
2. Geçerli ancak ispat olarak geliştirilmemiş mantıksal argümanlar, bir ispatı üretmek mümkün olmadığında (örneğin, zaman kısıtlamaları nedeniyle), imkansız olduğunda (örneğin, kavramsal engeller nedeniyle) veya istenmeyen durumlarda (örneğin, bir iddianın gerekçelendirilmesi dışında üzerinde çalışılan bir etkinlik olması durumunda) iyi bir argüman seçeneği sunarlar.
3. Geçerli ancak ispatlara kıyasla daha az geliştirilmiş argümanlar olan mantıksal argümanlar, öğrenciler için ispatlara göre daha kolay ulaşılabilirdirler. Dolayısıyla deneysel argümanlar ile ispatlar arasında geçiş aşaması olarak kullanılabilme potansiyeline sahiptirler.

Mantıksal argüman kategorisini tanımlamaya yardımcı olacak örnekler şu şekilde gösterilebilir:

> **Problem:** 7'nin 42 sayısının çarpanı olduğunu nasıl söyleriz?
>
> **Cevap**: 42 sayısını 7'e böldüğümüzde kalan sıfır olur.
>
> **Yorum:** Görevin beklenen formülasyonu açıkça bir tanıma bağlanıyorsa bu mantıksal argüman olarak değerlendirilir (Collins vd., 1993b, s. 213; Stylianides, 2005, s. 50).

Örneğin yorum kısmından da anlaşılacağı üzere; matematiksel olarak kabul edilen bir tanımın veya formülün direkt çözümde kullanılması mantıksal argüman olarak kabul edilmektedir.

Problem:



ABCD karesinin kenarları 1 cm uzunluğundadır. Kareyi iki üçgene bölen bir köşegen çizerek, kareyi köşegen boyunca katlayın. Elde ettiğiniz üçgenlerin her birinin açı ölçüleri kaçtır? Her bir açı ölçüsünü nasıl bulduğunuzu açıklayın?

Cevap: Her bir üçgendeki açı ölçüleri 45^0 45^0 90^0'dir. Köşegen çizgisi, köşe aşılarını iki eş parçaya böler. Böylece küçük açıların her biri 90^0'nin yarısı olan 45^0 olur.

Yorum: Bu çözüm ispat değil mantıksal argüman olarak kodlanır. Çünkü beklenen formülasyon da, argümanda kullanılan kabul edilen tüm önemli gerçeklere açık bir referans bulunmamaktadır. Örneğin; köşegen çizgisinin köşe açılarını neden iki eşit parçaya böldüğü açık değildir. Bunun sebebi, iki üçgenin benzer ve açı ölçülerinin eşit olması mıdır? (Lappan vd., 1998, 2003; Stylianides, 2005, s.51).

Benzer şekilde verilen örneğin yorum kısmından anlaşılacağı üzere; matematiksel gerçekliklerin tamamını içermeyen çözümler mantıksal argüman olarak kabul edilmektedir.

İspat

İspat, matematiksel bir iddiaya karşılık veya bu matematiksel iddia üzerine kabul edilmiş gerçeklere dayalı geçerli bir argüman olarak tanımlanır (Stylianides, 2005, 2008, 2009, 2010). Tanımda yer alan "kabul edilen gerçekler" ifadesi belirli bir topluluğun belirli bir zamanda paylaştığı kavramları, aksiyomları, gerçekleri, matematiksel sözleşmeleri ve yöntemleri içerecek şekilde genişçe tanımlanır. Bununla birlikte; bilinen bir formül, yöntem veya kuralın basit bir şekilde uygulanmasını gerektiren görevler, argümanlarda kullanılan bilinen durumlara açık bir referans olsalar da ispat olarak nitelendirilmezler. Bir argümanın ispat olarak nitelendirilmesi için gerekli durumları ifade eden bu yapılar;

önemli düzeyde tümdengelimsel faaliyetlerin de gerekliliğini ortaya koymaktadır (Stylianides, 2005).

M-İ Analitik Çerçevesinde ispatlar: genel örnek ve kanıt olarak ele alınır (Stylianides, 2005, 2008, 2009, 2010). İspat kategorilerinin tanımlanması ve oluşturulmasında ise öğrencilerin ispat problemlerine ilişkin çözümlerinin incelendiği çalışmalardan yararlanılmıştır (örneğin; Bell, 1976; Balacheff, 1988; Coe ve Ruthven, 1994; Harel ve Sowder, 1998; Tall, 1999; Healy, 2000 vb.).

Genel Örnek

Genel örnek (*generic example*), belirli bir durumda bütün sınıfın temsilcisi olarak kabul edilen ve genel bir argüman sağlanan ispattır (Stylianides, 2005; Stylianides, 2008; Stylianides, 2009; Stylianides, 2010). Healy (2000) benzer tanımı kullanarak, bu tür bir argümanı genel ispat olarak tanımlar. Balacheff (1988), bu tür ispatları genel örnek olarak adlandırarak; bir sınıfa ait temsiller ile karakteristik yapılara ait özellikleri aktarır. Tall (1999) da bu tür ispatı genel olarak ifade eder ve onu bir prototip alarak, özel bir durumda gösterilen genel bir argüman olarak tanımlar (Stylianides, 2005, 2008, 2009).

Deneysel argümanlar ve kanıt arasında geçiş kategorisi oldukları için genel ispatlar önemlidir. Genel ispatlar, güçlü ve kolayca ulaşılabilen, inanç ve açıklamaları sağlayabilirler (Rowland, 1998; akt. Stylianides, 2005, 2008, 2009) ve küçük yaştaki öğrencilerin tümdengelimsel muhakeme yapabilmelerini ve genel matematiksel ifadeleri ispat edebilmelerini, matematiksel dil göstergelerinden yoksun olsalar bile delilleri formal bir alan ile ifade edebilmede işe yararlar (Stylianides, 2005, 2008, 2009).

Mantıksal argüman kategorisini tanımlamaya yardımcı olacak örnekler şu şekilde gösterilebilir:

> Ardışık iki tek sayının toplamı 4'ün katıdır" iddiasını şu şekilde tanımlayan bir kişi 5 ve 7 sayılarını kullanarak bir temsilde tim durumları içerisine alan genel bir örnek sağlamaktadır.



Şekil 2. 3. Genel Örnek

Genel örneklerin sadece görsel temsillere dayalı olarak düşülmemesi gerektiğini ifade eden bir diğer örnek şu şekilde ele alınabilir:

> **Problem:** Bir sayının 5x5 ile bölünmesinden elde edilen kalan, sayının iki basamaklı olarak oluşturulan en sağdaki sayının 5x5 ile bölünmesinden kalan aynıdır.
>
> **Açıklama:** 43728 sayısını ele alalım. 43728 sayısı 43700 + 28 olarak yazılabilir. Bununla birlikte,
>
> $$43728 = 437 \times 100 + 28$$
> $$= 437 \times 10 \times 10 + 28$$
> $$= 437 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 + 28$$
>
> olarak yazılabileceği için "437 x 5 x 2 x 5 x 2 " ifadesi 5x5'e tam bölünür. 28 sayısının 25 ile bölümünden kalan ile 43728 sayısının 25 ile bölümünden kalan eşit olur. Bu durum sadece 43728 sayısına özgü değildir. Bir başka sayı için düşünüldüğünde yine aynı sonucu verecektir (Balacheff, 1988, s.231; Stylianides, 2005, s. 45).

Kanıt

Kanıt (*demonstration*), belirli bir durumun veya örneğin temsiline dayanmayan (Hadas vd., 2000; akt. Stylianides, 2005, 2008, 2009), tanımlar gibi özelliklere ve yapısal ilişkilere dayanarak mantıksal argümanlar sağlayan (Kücheman ve Hoyles, 2000; akt. Stylianides, 2005, 2008, 2009) ispatlar olarak tanımlanır. Kanıtlar, Harel ve Sowder (1998)'ın matematiksel doğrulamanın temelinde tanımlanmamış terimler ve aksiyomların bulunduğunun anlaşılmasını ifade eden aksiyomatik ispat kavramına benzer olarak ele alınmıştır . Bu kategori ayrıca öğrencilerin karşıt örnek, çelişki, matematiksel indüksiyon, zıtlık ve çürütme ile ispat sunması beklenen durumları içermektedir (Stylianides, 2005, 2008, 2009, 2010).

Kanıt kategorisini tanımlamaya yardımcı olacak örnek şu şekilde gösterilebilir:

"İki ardışık tek sayının toplamı 4'ün katıdır." İddiası şu şekilde doğrulanıyorsa kanıt yapılıyordur.

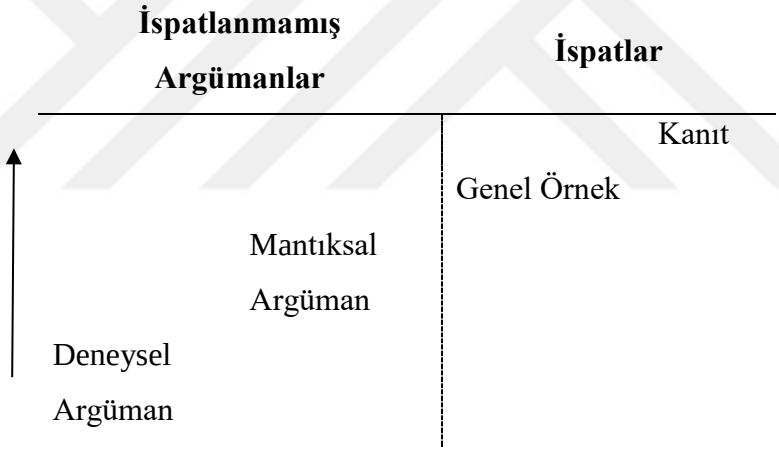
"n" bir tam sayı olmak üzere tek tam sayılar "2n+1" şeklindeki sayılardır.

4'ün katları ise k bir tam sayı olduğunda 4k şeklindeki sayılardır.

Böylece, iki ardışık tek sayıyı toplanırsa; (2n+1)+(2n+1+2)=4n+4=4(n+1) elde edilir. Bu toplam 4k formundadır.

Kanıtların sadece cebirsel çözümler içermesi de gerekmez. Görsel argümanlar, açıklayıcı bir ifade eşliğinde kanıt olarak kullanılabilir.

Sonuç olarak, M-İ Analitik Çerçevesindeki dört argümanın tanımlarının yakından incelenmesi, Şekil 2.4. de ki hiyerarşiye yol açmaktadır.



Şekil 2.4. Argümanlara İlişkin Hiyerarşik Gösterim

Geçersiz argümanlar olan deneysel argümanlar hiyerarşinin en altındadır. Deneysel argümanlardan, öğrencilerin yanlış ispat algılarını güçlendirdikleri için kaçınılmalıdır. Geçerli argümanlar olmakla birlikte ispat olarak geliştirilmemiş mantıksal argümanlar, deneysel argümanlar ile ispatlar arasındaki boşlukta gösterilmiştir. Gösterimler hiyerarşinin en üstünde yer alır çünkü genel örneklerin aksine belirli bir durumun temsil edilebilirliğine dayanmazlar. Özetlemek gerekirse, model dört farklı tür argüman için aşağıdaki ifadeler önerilebilir (Stylianides, 2009):

1. Ortaokul matematik ders kitabı dizisinde deneysel argümanlar olabildiğince olmamalıdır.

2. Mantıksal argüman bütün sınıf seviyelerinde önemlidir, ancak sayıları sınıf seviyelerinde azaltılmalıdır.

3. İspatların sayısı sınıf seviyelerinde artmalıdır.

4. Gösterimlerin yüzdesi, genel örneklerin yüzdesiyle karşılaştırıldığında, sınıf seviyelerinde sayıları artmalıdır.

2.5.3. Analitik Çerçevenin Psikolojik Bileşeni

Stylianides (2008) çerçevenin psikolojik bileşenini öğrenciye odaklamaktadır. Psikolojik bir perspektiften M-İ hakkında yapılan bir araştırmanın, görevi çözen kişinin M-İ ile ilgili matematiksel unsurlara ilişkin matematiksel nitelik (örüntü, hipotez, ispat, ispatlanmamış argüman) algılarını incelemiştir. Bu algının, örneğin kişilerin görev çözümünde veya başka bir çözümleyicinin görevi hakkındaki yorumlarını içerdiğini belirtmiştir. Dolayısıyla, çerçevenin matematiksel bileşeninin aksine psikolojik bileşenini çözen kişilerin öznel yorumlarına dayandırmıştır.

2.5.4. Analitik Çerçevenin Pedagojik Bileşeni

Stylianides (2008) çerçevenin pedagojik bileşenini hem matematiksel hem de psikolojik bileşenleri içerecek şekilde ele almıştır. Bu bağlamda incelediği ilk konu, M-İ ile ilişkili bir matematiksel unsurun matematiksel yapısının görev çözen kişinin bu nitelikteki algısı ile karşılaştırmasıdır. İlgili karşılaştırmadan ortaya çıkan olası tutarsızlıkların, öğrencilerin belirli bir M-İ unsurunun doğasını anlamalarını destekleyecek öğretmenlerin pedagojik faaliyetleri için çalışmaların belirlenmesine yardımcı olabileceğini belirtmiştir. Pedagojik bileşen kapsamında incelediği ikinci konu ise, öğrencilerin belirli matematiksel nesneleri algılamaları ile bu nesnelerin matematik topluluğundaki geleneksel anlayışları arasındaki olası tutarsızlıkları karşılaştırması ve tanımlamasıdır.

2.6. Matematiksel İspatın Problem Çözme İle İlişkisi ve Üstbiliş

Matematikte gerçeklik tümdengelimsel ispatlarla oluşturulur (Sriraman, 2005). Bu kapsamda ispatlar; yapıları ve değişkenleri belirlemek, keşfetmek, varsayımda bulunmak ve mantıksal gerekçeleri düzenlemek gibi bir grup zihinsel alışkanlıkları içeren bir süreç

olarak ele alınabilir. Bunlara ek olarak, ispatın görsel ve deneysel veriler ile desteklenen, mantıksal ve tümdengelimsel argümanları içeren, sezgiler ve inançlardan etkilenen kapsamlı bir süreç olduğu da söylenebilir (Healy ve Hoyles, 2007). Bu doğrultuda, ispat yapan kişiye bir miktar başlangıç bilgisi sağlanır (örneğin; varsayımlar, aksiyomlar ve tanımlar) ve zihinsel alışkanlıkları içine alan bir süreçle istenilen bir sonuç elde edilinceye kadar çıkarım kurallarını uygulaması beklenir (Weber, 2005). Böylece ispatın mantıksal, kavramsal, sosyal ve problem çözme boyutları olan karmaşık bir aktivite olduğu ve ispat yapmanın aslında bir problem çözme görevi olduğu söylenebilir. Başka bir deyişle, ispatlama süreci problem çözmenin özel bir durumudur (Furighetti ve Morseli, 2009) ve bu durum ispat yapma sırasında iki tür problem çözme sürecinin ortaya çıkmasına katkı sağlamaktadır (Selden ve Selden, 2013). Bunlardan biri, verilen hipotezden istenen sonuca ulaşmayı sağlayan gerçek matematiksel problemlerin çözülmesi sürecidir. Bir diğeri ise henüz kabul edilmemiş bir çözümü, kabul edilebilir yapıya dönüştürme sürecidir.

Problem çözmenin özel bir durumu olan ispat sürecinde, Polya (1954)'nın bir plan geliştirme, planı anlama, uygulama ve kontrol adımları izlenebilir. Dolayısıyla öğrencilerin matematiksel düşünmelerini ve ispat gerekliliğini sağlamak için bilinen problem çözme durumlarının kullanımı pedagojik açıdan olumlu durumlar oluşturabilir (Sriraman, 2005). Bir öğrencinin planlama, izleme ve çalışmalarını belirli bir matematiksel problemin çözümüne doğru uyarlama gibi öğelerin sahipliğini içeren terim üstbiliştir (Fortunato, 1991). Problem çözme sürecinin her aşamasında üstbiliş vardır (Schoenfeld, 1992). Blakey ve Spence (1990)'e göre problem çözme sürecinde sergilenen üstbilişsel eylemlere bakıldığında; var olan bilgilerle yeni bilgileri birleştirme, bilinçli olarak farklı stratejiler seçme, uygulama ile düşünme süreçlerini planlama, izleme değerlendirme ve bu eylemlere ilişkin tahminde bulunma gibi faaliyetlerle karşılaşılır (Hıdıroğlu, 2018). Bu nedenle biliş problem çözmede olmazsa olmaz bir unsurken bu süreçteki üstbiliş var olan bilişi en iyi şekilde kullanmayı sağlayan ek bir kuvvet haline gelir. Biliş içeriğinden farklı olarak üstbiliş, bilişten beslenir ve bilişsel aktiviteleri etkili kullanmak için yollar arar (Hıdıroğlu, 2018). Üstbilişin problem çözme ve dolaysıyla ispattaki etki ve önemini anlamaya çalışma, kavramı yakından tanımayı gerekli kılar.

Flawel (1976) tarafından "biliş hakkında bilgi" olarak ilk tanımı yapılan üstbiliş, insanların kendi bilişlerini izlemesi ve kontrol etmesidir (s. 231). Bu tanım, zaman

içerisinde üstbiliş alanında çalışan araştırmacılar yardımıyla zenginleştirilmiştir (Costa, 1984; Garafalo ve Lester, 1985; Schraw ve Dennision, 1994; Wilson ve Clarke, 2002; Schneider ve Artelt, 2010, Lai, 2011).

Costa (1984) üstbilişi, "bir stratejiyi planlama, çözüme ulaşma adımlarının farkında olma ve çözüme ulaşma sürecini yansıtma ve değerlendirme kabiliyeti" olarak açıklamıştır (s. 57). Garafolo ve Lester (1985) ise üstbilişin iki ayrı fakat birbiriyle ilişkili yönleri olduğuna dikkat çeken bir tanımda bulunmuştur. Bunlardan biri; "bilişsel olgularla ilgili bilgi ve inançlar" bir diğeri ise "bilişsel eylemlerin düzenlenmesi ve kontrolü "dür (s. 163). Schraw ve Dennision (1994) da üsbilişi "bilişin bilgisi ve düzenlenmesi" olarak tanımlamıştır (s. 460). Lin (2001)'e göre üstbiliş, "kişinin kendi düşüncelerini, varsayımlarını ve faaliyetlerinin etkisini anlama ve izleme becerisi" şeklinde belirtilmektedir. Wilson ve Clarke (2002)'e göre de, bireylerin sahip oldukları düşüncelere ilişkin farkındalıkları, değerlendirmeleri ve düzenlemeleridir. Bu araştırmada da üstbilişin problem çözme dolayısıyla ispata temasını açıklayabileceği ve bu açıklamaların psikolojik bileşen bağlamında algılardan etkilenebileceği düşüncesinden hareketle Garafolo ve Lester (1985) tarafından tanımlanan üstbiliş tanımı temele alınmıştır.

Üstbilişsel süreçlerin, kendi düşüncelerimizi düşündüğümüzde, örneğin bir şeyi bilip bilmediğimizi, öğrenip öğrenmediğimizi veya bir hata yaptığımızı düşünmemiz durumunda gerçekleştiği tahmin edilmektedir (Smith, 1994). Üstbilişsel bilgi ve üst bilişsel düzenleme olmak üzere iki bileşeni gerektiren üstbiliş, "düşünmeyi düşünme" faaliyetlerini içeren çok yönlü bir beceri olarak ele alınabilir (Lai, 2011). Bu kapsamda üstbilişsel bilgi veya biliş bilgisi, kişilerin kendi bilişleri hakkında veya genel bilişleri hakkında bildiklerini ifade eder (Schraw ve Moshman, 1995). Bu bilgi; üstbilişin yansıtıcı yönünü kolaylaştıran üç alt süreci içerir; bildirimsel bilgi, yöntem bilgisi ve şartlı bilgi (Schraw ve Dennision, 1994). Üstbilişsel düzenleme veya bilişin düzenlenmesi ise kişinin düşünmesini veya öğrenmesini kontrol etmeye yardımcı olan üstbilişsel etkinlikleri ifade eder (Schraw ve Moshman, 1995). Bilişin düzenlenmesi, öğrenmenin kontrolünü kolaylaştıran birkaç alt süreci içermektedir. Planlama, bilgi yönetimi, izleme hata ayıklama ve kontrol olmak üzere beş bileşenli düzenleme becerisinden bahsedilebilir (Schraw ve Dennision, 1994).

Kısacası, üstbilişsel bilgi, öğrencinin kendisini ve performansı etkileyen faktörler, stratejiler ve stratejilerin ne zaman, niçin kullanılacağı konularındaki bilgileri içerir (Lai, 2011; Schraw ve Dennison, 1994). Üstbilişsel düzenleme ise öğrenimleri düzenlemek için kullanılan aktiviteleri ifade eder ve şu beş alt kategoriye ayrılır (Schraw ve Dennison, 1994):

- *Planlama:* Öğrenmeden önce planlama, hedef belirleme ve kaynakların belirlenmesidir.
- *Bilgi yönetimi:* Bilgileri daha verimli bir şekilde işlemek için kullanılan beceriler ve strateji dizileridir (örneğin, düzenleme, detaylandırma, özetleme, seçici odaklama).
- *İzleme:* Kişinin öğrenme veya strateji kullanımının değerlendirilmesidir.
- *Hata ayıklama:* Anlama ve performans hatalarını düzeltmek için kullanılan stratejilerdir.
- *Değerlendirme:* Öğrenme bölümünden sonra performans ve strateji etkinliğinin analizidir.

Lockwood vd. (2016) de ispatta örnek kullanımı ile üstbilişin güçlendirilmesine ilişkin olası birkaç faaliyet olduğunu belirtmiş ve bu faaliyetleri şu şekilde sıralamıştır:

a) Varsayımda bulunmak için kullanılan örnek seçimleri netleştirilir ve öğrencilerle avantajları, dezavantajları tartışılır.

b) Genel örneklerin rolü vurgulanarak ispattan nasıl farklılaştıkları ve daha genel bir tümdengelim argümanına nasıl köprü görevi gördükleri belirlenir.

c) Öğrencilerden, örnek olayları formüle ederken, muhakeme ve ispatlama yaparken yansıtıcı soruları cevaplamaları istenir.

d) Öğrenciler sınıflarıyla fikirlerini paylaştıklarında bir örnek üzerinden tartışma faaliyetinde bulunabilir.

2.7. Muhakeme ve İspat Yapma İle İlgili Yapılan Çalışmalar

Araştırma amacı doğrultunda ele alınan konuları araştırma genelinde yansıtan belirli sayıdaki araştırmaya bu başlık altında; matematiksel, psikolojik, pedagojik bileşenler ve ispatın problem çözme ile üstbiliş ilişkisi kapsamındaki çalışmalara yer verilecektir.

2.7.1. Matematiksel Bileşen Kapsamında Yapılan Çalışmalar

Arzarello ve Andriano (1998), varsayımda bulunma ve teoremleri ispatlamayı amaçlayan problemlerin çözümüne dayalı konuları incelemeye yönelik bir araştırma gerçekleştirmişlerdir. Deneysel gözlemlerine dayalı araştırmalarında, verileri üç aşamada toplamışlardır. Bunlardan birincisini; üç yıl boyunca ilköğretim geometrisi hakkında bir öğretmenlik deneyimine katılan yaklaşık altmış (lise ve üniversite) öğrenci oluşturmuştur. İkinci olarak, problemleri çözerken yüksek sesle konuşmayı kabul eden temel fakat problemlerle ilgilenen uzmanların (lise ve üniversitedeki matematik öğretmenleri) performanslarından yararlanmışlardır. Üçüncü olarak ise yeni sonuçları keşfederken düşünce süreçleri hakkında yazılmış profesyonel matematikçilerin makalelerini veri toplama aracı olarak kullanmışlardır. Keşif→Varsayım→İspatlama sürecinin nasıl gerçekleştiğine yönelik analizlerini ise üç aşamada gözlemeyerek incelemişlerdir. Bu aşamalar:

- Birinci aşamada: Çözüm süreci, örneğin bazı belirli örnekler üzerinde neyin işe yaradığını tahmin etmek için sezgilerin kullanılmasını içeren bir keşif yöntemi ile başlar; bir varsayım seçilir.
- İkinci aşamada: Tümdengelimsel biçime geçiş gerçekleşir.
- Üçüncü aşamada: Varsayımı ispatlamak için sezgiler kullanılır.

Zaskis ve Liljedahl (2002) otuz altı öğretmen adayının, tekrarlayan bir görsel sayı modelini genelleştirmeye yönelik deneyimlerini araştırmışlardır. Öğretmen adaylarına bir görev sorusu yönelterek, bu soruda bulunan örüntüleri keşfetmelerini ve iki hafta boyunca çalışmalarını bir günlüğe kaydetmelerini istemişlerdir. Böylece öğretmen adaylarının; süreçlerini, sorgulamalarını, varsayımlarını, sonuçlarını ve çözüm süreçlerindeki psikolojik durumlarını günlüklerine kaydetmelerini onlardan istemişlerdir. Belirlediği süre sonunda öğretmen adaylarıyla bireysel olarak bir araya gelerek klinik görüşmelerle

yazılı çalışmalarını değerlendirmişlerdir. Araştırma sonucunda, öğretmen adaylarının çözümlerinde kullandıkları cebirsel gösterimlerinin basit kaldığını tespit etmişlerdir. Ayrıca genellemeleri sözlü olarak ifade etmeleri ile cebirsel notasyonları kullanabilmeleri arasında bir boşluk olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Bunların yanı sıra, bazı öğretmen adaylarının bir formül bulamadığı için çözümlerinin eksik olduğuna ilişkin endişe duyduklarını gözlemlemişlerdir. Tüm bunlara karşılık olarak ise yönelttikleri örüntü sorusuna benzer soruların, öğretmen adaylarının genelliği ifade etme becerilerini geliştirme anlamında önemli katkılarının olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Canadas ve Castro (2005) on iki ortaöğretim öğrencisinin belirli durumlardan genelleme yöntemlerine geçişlerini incelemişlerdir. Bu amaçla bir görev sorusuna ek olarak ses kaydı ve görüşmeci notlarını kullanmışlardır. Araştırmaları sonucunda; öğrencilerin belirli durumlarda matematiksel bir yapıyı keşfetmeye dayalı zihin alışkanlıkları yoksa, daha sonraki derslerde matematiksel yapılarla çalışmalarının önemli ölçüde zor olacağını tespit etmişlerdir. Araştırmalarında bulunan pek çok öğrencinin, konuyu belirli durumlar temelinde açık olarak gördüklerini ve ifadelerini doğrulamak için genel bir hipotez gerekçelendirmesinin gerekli olmadığını düşündüklerini tespit etmişlerdir. Böylece, bu seviyedeki öğrencilerin kendi hipotezlerini ispatlamaya alışkın olmadıkları sonucuna varmışlardır. Öğrencilerin bazılarının, özel durumlarla kendi hipotezlerini onayladıklarını ve bazılarının da genel ifadenin doğru olduğuna inanmanın gerekliliğini kabul ettiklerini gözlemlemişlerdir. Ayrıca öğrencilerin, zorlandıkları iki temel nokta bulmuşlardır. Bunlardan birincisinin, örüntü bulamamaları ve örüntünün nasıl elde edileceğini bilmemeleri; diğerinin ise buldukları örüntüleri açıklamakta zorlanmaları olarak ifade etmişlerdir. Yaşadıkları bu zorluklar nedeniyle de kendi çalışmalarına güvenmedikleri sonucuna ulaşmışlardır.

Stylianides ve Silver (2009) ortaokul matematik öğretmenlerine yönelik olarak gerçekleştirilen mesleki gelişim çalışmasının (BIFOCAL; Silver, Mills, Castro ve Ghousseini, 2006) örüntü belirleme ile ilgili oturumlardan oluşan bir bölümü ele almışlardır. Bu oturum kapsamında;

- Öğrenciler örüntülere güven duymakta neden zorlanıyor?
- Farklı örüntü çeşitleri var mıdır?

- Öğrenciler buldukları örüntülere güvenmeli midir? Değilse, güvenebilecekleri örüntüleri ve güvenemeyecekleri örüntüleri nasıl ayırt edebilirler?
- Öğrencilerin matematik üzerinde çalışması, bu ayrımlar ve gerekçelendirmelerde kendilerine nasıl yardımcı olabilir?

şeklindeki sorulara ilişkin elde edilen bulguları paylaşmışlardır. Sonuç olarak, deneyimli öğretmenlerin bile, örüntü tanımlamada var olan ufak farklılıkları anlamada güçlük çektikleri sonucuna ulaşmışlardır. Farklı örüntüler arasındaki ayrımları anlamanın önemli olduğunu, bunun öğretmenlerin sınıf ortamında örüntü görevlerini uygularken karşılaştıkları zorluklardan bazılarını yönetmelerine yardımcı olabileceğini ifade etmişlerdir. Mesleki gelişim ve öğretmen yetiştirme programlarında bu konuların açık bir şekilde ele alınmasının, tüm öğrencilerin örüntü belirleme konusunda, özellikle de muhakeme ve ispatlama yeteneğini geliştirmesi gerekliliğinin farkına varılmasında önemli olduğunu belirtmişledir.

Stylianides (2009) deneysel argümanların ispat olarak kabul etmesinin önüne geçmeye yönelik lisansüstü dersinde üç etkinliği uygulamaya dayalı bir ders işlemiş ve araştırmasını gerçekleştirmiştir. Araştırması sonucunda, "deneysel argüman=ispat" algısının birçok öğrencinin düşüncelerinde var olduğunu tespit etmiştir. Bu yanlışlığı giderebilmek için öğrencilere deneysel argümanların sınırlılığını anlama ve örüntüleri veya genellemeleri doğrulamak için daha güvenilir yöntemler sağlama konusuna bir ihtiyaç olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Rivera (2010) yedinci ve sekizinci sınıf öğrencilerinden oluşan otuz dört katılımcı ile örüntülerin görsel olarak genelleştirilmesine ilişkin deliller sunmaya dayalı bir araştırma gerçekleştirmiştir. Örüntü faaliyetleriyle, tasarım odaklı sınıf öğretimi kapsamında çalışan bu öğrenciler arasından on bir öğrenciyle klinik görüşmeler yapmıştır. Araştırma sonucunda örüntülerin genelleştirilmesinde tek bir sistematik yaklaşımın geliştirilmesine ek olarak orantısal muhakemenin önemini ortaya çıkarmıştır. Bununla birlikte, daha büyük öğrenci grupları veya öğretmenlerle yapılan çalışmalarda cebirsel gösterimlerde formülleştirmenin daha önemli olduğunu ancak genelleme becerisine yönelik olası öğretim tasarımlarının açıkça incelenmediğini belirtmiştir. Bu değerlendirmesi üzerine kendi çalışmasından elde ettiği sonuçlar doğrultusunda çeşitli önerilerde bulunmuştur. Bunlardan biri, yapılan öğretim uygulamaları ile öğrencilerin örüntüleri oluşturma

becerilerine nasıl katkı sağlanacağıdır. Bir diğeri ise, görsel stratejilerin kullanılması, şekilsel dönüşümler ve örüntülerin genelleştirilmesinde, orantısal muhakeme odaklı büyük ölçekli deneysel araştırmalara olan gerekliliğinin altını çizmiştir. Dolayısıyla görsel örüntülerin oluşturulmasını bir ihtiyaç olarak görmüştür.

Bieda (2010), okul matematiğinde öğrencilerin matematiksel anlamalarında muhakeme ve ispatlamanın önemine dikkat çekmiştir. Bu kapsamda ispatla ilgili görevlerin uygulanması, süreç ve sonuçların araştırılmasına dayalı yedi ortaokul sınıfında gerçekleşen araştırmanın sonuçlarını sunmuştur. İspatla ilgili görevlerin ise genellemeler, varsayımlar ve ispat üretmeye dayalı çalışmaları kullanmıştır. Araştırma sonucunda, öğrencilerin bu tür görevlerle ilgili deneyimlerinin, matematiksel gerekçelendirmeleri nelerin oluşturduğuna dayalı yeterliliklerinin düşük olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Tanışlı (2016), ortaokul öğrencilerinin ve öğretmenlerinin verilen matematiksel ifadeleri muhakeme etme ve ispatlama süreçlerini incelemiştir. Farklı mesleki deneyimlerine sahip iki matematik öğretmeni ve bu öğretmenlerin altıncı, yedinci ve sekizinci sınıfa devam eden, her sınıf düzeyinden üç öğrenci olmak üzer on sekiz öğrenci ile gerçekleştirdiği araştırmasında; görüşme tekniğini kullanmıştır. Araştırma sonucunda; öğrencilerin matematiksel bir iddiayı ispatlarken zorlandıklarını, süreçte deneysel delilleri ve deneysel ispatları kullanmayı tercih ettiklerini belirlemiştir. Bu tercihlerinin, matematiksel bir ifadenin doğruluğunu örnek kullanarak göstermenin öğrenciler geçerli bir ispat anlamına gelmesi nedenine bağlamıştır. Benzer şekilde öğretmenlerin ise ispat yapma eğilimlerinin doğrulama ve açıklama düzeyinde yer aldığı sonucuna ulaşmıştır.

Uğurel, Moralı ve Taşdan (2016) matematik öğretmen adaylarının bir önermenin ispatı sırasında ortaya koydukları davranışların neler olduğunu odaklandıkları bir araştırma gerçekleştirmişlerdir. 15 matematik öğretmen adayı ile durum çalışması şeklinde gerçekleştirdikleri araştırmalarında, ispat yaparken sesli düşünmelerini istemişlerdir. Bu çalışmanın bulguları, matematik öğretmen adaylarının verilen önerme ile ilgili davranış ve düşüncelerinin sınırlı olduğunu göstermektedir. Ayrıntılı olarak, matematik öğretmen adaylarının matematiksel dilin kullanılması ve notasyonların uygulanmasında, verilen önermenin anlamını anlamada, ispata nereden başlayacağını bilmede, örnekleri verimli kullanmada zorluk yaşadıklarını gözlemlemişlerdir. Ayrıca ispatı oluşturmak için uygun

ve etkili yöntemler kullanma ve mantıksal yapılarını tanımlamakta zorluk çektikleri sonucuna ulaşmışlardır.

Özgür vd. (2017) araştırmalarında, üç öğrenci grubu üzerinde (ortaokul-lise-lisans) sayı teorisi alanına giren bir görev ile başarılı ve başarısız ispatlama durumlarının özellikleri incelenmiş. Hipotezlerin doğruluğunu açıklayan geçerli bir gerekçelendirme yeteneğinin incelenmesine de odaklanılmışlardır. 39 öğrenci ile yarı yapılandırılmış görev tabanlı görüşmeler gerçekleştirmişlerdir. Araştırma sonucunda, örneklerin genelleme ve gerekçelendirmeye katkılarının yanı sıra keşfetme, inceleme ve çözümlerini gözden geçirmenin sınıf düzeylerinde yararlı olabileceğini gözlemlemişlerdir

Knuth vd. (2017), ispatlamayı öğretmek için muhakemenin; örneklerin, varsayımların geliştirilmesinde, keşfedilmesinde ve anlaşılmasında hem de sonraki ispatların geliştirilmesinde hem temel hem de önemli bir rol oynadıklarını ifade etmişlerdir. Çeşitli sınıf (ortaokul, lise, lisans, yüksek lisans) ve matematiksel uzmanlık düzeylerini temsil eden dört katılımcı grubuyla bir araştırma gerçekleştirmişlerdir. Öğrencilerin, ispatlama ile ilgili etkinlikler sırasında örneklerin verimli bir şekilde kullanılmasıyla ilgili öğretimsel rehberlik ve deneyim eksikliğinin, birçok öğrencinin örneklerden öğrenememesinin ana nedeni olduğunu görmüşlerdir. Sonuç olarak bunları temele alan araştırmalar yapılmadan yapılmadan öğretim uygulamaları, çoğu öğrencinin ispatlamayı öğrenmede verimli kullanmak için gerekli yetenekleri geliştirmesi pek mümkün olmayacağını belirtmişlerdir.

Zayyadi ve Kurnuati (2018) öğrencilerin örüntülerdeki algılarını ve ispatlarını gösteren deneysel veya yapısal genellemelerindeki gerekçelerini belirlemeye yönelik bir araştırma gerçekleştirmişlerdir. Üniversite öğrencileri ile gerçekleştirdikleri araştırmalarında veri toplama aracı olarak muhakeme testi ve görüşme yöntemini kullanmışlardır. Sonuç olarak, öğrencilerin örüntüleri deneme ve yanılmaya yoluyla belirlediklerini gözlemlemişlerdir. Mevcut örüntüleri genelleştirmenin birçok yolunu bulan öğrencilerin deneme ve yanılma yolunu kullanarak bu örüntüleri bulmasının doğru örüntüleri bulmalarını zorlaştırdıklarını tespit etmişlerdir. Bu nedenle öğrencilerin, makul örüntüler tanımladıkları sonucuna ulaşmışlardır. Örüntü tanımlayan öğrencilerin, veriler arasındaki ilişkileri araştırmaya dayalı makul varsayımlar ürettiklerini ancak bu varsayımların ispatlanmaya ihtiyaç olduğunu belirlemişlerdir. Ayrıca öğrencilerin, ispatlama

aşamalarını izlemeden sadece muhakemede bulunduklarını, makul argümanlar üretemediklerini ve delillerinin geçerliliğinin olmadığı sonuçlarını ulaşmışlardır.

Zeybek, Üstün ve Birol (2018) matematiksel ispat etkinliklerinin ortaokul 5,6,7 ve 8. Sınıf matematik ders kitaplarında hangi sıklıkta yer bulduğuna ilişkin kitap analizine dayalı bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. İlgili sınıflarda 2016 yılında okutulan ortaokul matematik ders kitaplarını araştırma amaçları doğrultusunda incelemişledir. Analizlerini Stylianides (2008)'in M-İ Analitik Çerçevesinin Matematiksel Bileşen kapsamında yapmışlardır. Ders kitabı analizleri sonucunda toplamda 177 muhakeme-ve-ispat etkinliklerinin bulunduğunu ve bunların büyük çoğunluğunun -78 (%44)- ise deneysel argüman kategorisindeki ispat olmayan argümanlardan oluştuğunu tespit etmişlerdir. Ders materyalleri inceleme sonuçlarına göre kitaplarda sıkça yer alan bir diğer muhakeme-ve-ispat etkinliğinin matematiksel genellemeler yapma kategorisi kapsamında 79 (% 45) etkinlik -46 örüntü bulma ve 33 çıkarım yapma- kategorisinde olduğunu tespit etmişledir. Bu bulgular ışığında ders kitaplarında yer alan muhakeme-ve-ispat etkinliklerinin sayısının güncel eğitim reformlarının ve matematik eğitimcilerinin önerileri ile uyuşmadığı sonucuna ulaşmışlardır.

2.7.2. Psikolojik ve Pedagojik Bileşen Kapsamında Yapılan Çalışmalar

Almeida (1995), lisans öğrencilerinin ispatla ilgili tutum ve görüşlerini incelemek amacıyla küçük ölçekli bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmasında formal ispatlarla tanışma aşamasına geçmiş öğrencilerden, iki farklı ifadeyi ispatlamalarını veya çürütmelerini istemiştir. Öğrencilerin ispat çalışmaları, görüşmeler ve anket cevaplarından elde ettiği yanıtlarda, öğrencilerin formal ispat kavramının anlamını edindiklerini ancak bazı öğrencilerin bu duruma halen hazır olmadığını gözlemlemiştir. Araştırmasın da öğrencilerin ispatla ilgili algılarında kesin olarak var olduğun gözlemlediği işlev ise ispatın açıklama ve doğrulamayı sağlamasıdır. Bazı öğrencilerinde ispatı başkalarını ikna etmek ve onları ikna etmenin bir aracı olarak gördüğü sonucuna ulaşmıştır. Ayrıca "örnek→ispat→teorem" yolunu öğretiminde takip ettiğinde, ispata ilişkin anlamlı öğrenmelerin geliştiğini gözlemlemiştir. Bu durumdan yola çıkarak, teoremleri göstermek için örneklerin kullanmanın genel matematiksel ifadelerin gösterilmesine

katkı sağladığını belirtmiş ve öğrencileri cesaretlendirmenin de bir yolu olacağını ifade etmiştir.

Gray (2006) doktora tez çalışmasında, on üç öğretmen adayının ve sekiz profesyonel matematikçinin; hem matematik disiplini hem de lise matematiğindeki ispat hakkındaki algılarını incelemiştir. Katılımcılardan, bu iki boyuttaki matematiksel ispat algılarına ilişkin açık uçlu sorulardan oluşan bir anket doldurmaları istemiştir. Hazırlamış olduğu anket kapsamında öğretmen adayları ve matematikçilerin; matematiksel ispat olarak kabul edilebilir ve geçerli olan durumlara ilişkin algıları, matematiksel ispatın amacı ve önemi ile ilgili algılarını ve öğrenciler için beklentilerine yönelik önemli sonuçlara ulaştığını belirtmiştir.

Weber (2010) ispata geçiş dersini tamamlamış yirmi sekiz matemati bölümü öğrencisine, on matematiksel argüman vererek argümanı ne kadar ikna edici bulduklarını ve argümanın matematiksel bir ispat teşkil edip etmediğini düşündüklerine karar vermelerini istediği bir araştırma yürütmüştür. Araştırması sonucunda; araştırmasında bulunan çoğu öğrencinin (a) deneysel argümanların ikna edici olmadığı ve ispat standartlarına uymadığını düşündüklerini, (b) hem ikna edici hem de ispat olduklarını gösteren şematik bir argüman bulduklarını, (c) içerikleri tümdengelimsel argümanlar ile değerlendirdikleri sonuçlarına ulaşmıştır. Öğrencilerin bir argümanın ikna edici olup olmadığına veya matematiksel ispatlarla ilişkisine karar verirken çeşitli faktörlerden etkilendiklerini gözlemlemlemiştir. Özellikle argümanların ispatla ilişkisine karar verirken, üniversite eğitmenlerinin ispatla ilgili yorumlarından veya gözlemlerinden etkilendikleri sonucuna ulaşmıştır.

Anapa ve Şamkar (2010), lisans öğrencilerinin ispatla ilgili algılarını belirleme ve karşılaştırmaya dayalı bir araştırma gerçekleştirmiştir. Ölçek kullanarak algı incelemesi yaptığı çalışmasında; matematikte kendilerini başarılı bulmuş öğrencilerin çoğunluğunun bile kanıtlama yeteneklerine güvenmediğini gözlemlemişlerdir. Öğrencilerin eğitimleri sırasında matematikte öğrendikleri teoremleri ve ispatları ezberlediklerini ve ispat yöntemlerinden tam olarak yararlanamadıkları sonucuna ulaşmıştır.

Aktaş ve Aktaş (2013) öğrencilerin ispat yapmak ile ilgili algılarını metafor yoluyla belirlemeye yönelik bir araştırma gerçekleştirmişlerdir. Doksan altı matematik bölümü öğrencisiyle çalıştıklarında araştırmalarında, öğrencilerin *"ispat yapmak……. gibidir,*

çünkü……" cümlesini tamamlamalarını istemişlerdir. Sonuç olarak öğrencilerin algılarını en fazla, ispatın açıklığa kavuşturma ve doğrulama işlevine dayandırdıkları sonucuna ulaşmışlardır. İspatın zor ve karmaşa içeren bir işlem olduğuna dayalı algılarının da mevcut olduğunu tespit etmişlerdir. İspat yapmanın sabır, uğraş, özen ve dikkat gerektirdiği; parçaların doğru adımlarla bir araya getirilmesini gerektiren bir işlem olduğu algılarını da tespit etmişlerdir. Tespit ettikleri öğrenci algılarının ispat yapmanın matematikteki önemini yansıttığını ifade etmişlerdir.

Aylar (2014) 7. Sınıf öğrencilerine ispat kavramının kazandırabilme derecesini tespit edebilmek amacıyla bir araştırma gerçekleştirmiştir. Öğrenciler ile formal ispat yapabilecekleri uygulamalar gerçekleştirdikten sonra ispata yönelik algılarını belirleyebilmek amacıyla görüşmeler gerçekleştirmiştir. Bu kapsamda elli dört öğrenciye soru ve görüşme formlarını uygulamıştır. Araştırma sonucunda, örnek vererek doğrulama ve ispat yapma arasındaki farklılığın zaman içerisinde daha net görülmeye başlandığı sonucuna ulaşılmıştır. Ancak öğrencilerde birkaç durumu denemenin, ispat için yeterli olduğuna dayalı düşüncenin var olmaya devam ettiğini gözlemlemiştir. Bu düşünceleri taşıyan öğrencilerin cebirsel ifadeleri anlama ve uygulama sırasında zorlandıktan sonra örnek vererek doğrulama işlemine geçtiklerini gözlemlemiştir. Bu durumun önüne uygulama sonrasında yapılan görüşmelerle geçtiğini ve öğrencilerin ispata yönelik algılarında gelişmenin olduğu sonucunu elde etmiştir.

Dickerson ve Doer (2014), on yedi lise matematik öğretmeninin matematiksel ispatlara yönelik görüşlerini ortaya çıkarmak amacıyla görüşmeler gerçekleştirmişlerdir. Üç aşamada gerçekleştirdikleri görüşmelerin birinci aşamasında; katılımcıların ispata kişisel bakış açılarını matematik tarihi ve pedagoji bilgileri kapsamında ele almışlardır. Görüşmelerin ikinci aşamasında, görevlere dayalı bir uygulama ile öğretmenlerin argümanları değerlendirmelerini istemişlerdir. Görüşmelerin üçüncü aşamasındaysa, öğretmenlerin ispatın rolü ve amacı ile ilgili algılarına odaklanmışlardır. Sonuç olarak, öğretmenlerin okul matematiğinde ispat yapmanın önemli iki amacını; (öğrencilerin matematiksel anlayışlarını geliştirmek ve matematiksel düşünme süreçleri kapsamında eleştirel ve üstbilişsel becerilerini geliştirmek olarak algıladıkları sonucuna ulaşmışlardır.

Wiest (2015) matematik alanından farklı alanlarda eğitim gören bir lisans ve bir yüksek lisans öğrencisinin matematiksel ispatlarla etkileşimde bulunmalarına yönelik bir

araştırma gerçekleştirmiştir. Yarı yapılandırılmış görüşmeler ile matematiksel ispatlara ilişkin bilgilerini, inançlarını ve öğrenme yaklaşımlarını keşfetmeyi amaçlamışlardır. Araştırma sonucunda matematiksel ispatları önemli olarak gören bu öğrencilerin inançları, ispatın matematik eğitimindeki önemini anlamadıkları sonuçlarına ulaşmıştır.

Davis (2018) Bu çalışma, yarı yapılandırılmış mülakatlar yoluyla değişen düzeylerde öğretim deneyimine sahip 22 İrlandalı öğretmen tarafından örüntü tanımlama, hipotez üretme ve ispatla ilgili algılarını incelemiştir. Öğretmenler örüntü tanımlama ve varsayımda bulunmayı ispat yapmaktan ayrı olarak algılamış ve varsayımda bulunup ispat yaparken zorlandıkları sonucuna ulaşmıştır.

Doğan (2019a) 8. sınıf matematik ders kitabında matematiksel akıl yürütme ve ispat etkinliklerinin ne oranda ve nasıl yer aldığı araştırmıştır. Bunun için okullarda yaygın olarak okutulan bir ders kitabının tüm içeriğini incelemiştir. Akıl yürütme ve ispat etkinliklerini; öğrenme alanlarına, kitabın bölümlerine ve etkinliklerin amacına göre ayrı ayrı değerlendirilmiştir. Sonuç olarak incelediği ders kitabında; akıl yürütme ve ispata yeterli düzeyde yer verilmediğini; dolayısıyla öğrencilerin bu tür etkinliklerle etkileşimlerinin sınırlı kalabileceği sonucuna ulaşmıştır.

Doğan (2019b), ortaokul matematik öğretmenlerinin muhakeme ve ispat ile ilgili etkinliklerle etkileşimlerine odaklanan yüksek lisans düzeyindeki bir mesleki gelişim dersinin gözlemsel verilerini incelemiştir. Bu gözlemsel veriler; ortalama dokuz yıllık ortaokul düzeyinde matematik öğretmenliği tecrübesine sahip 12 öğretmenin, etkinliklere verdikleri yazılı cevapları, sınıf içi çalışmalarıdır. Ayrıca araştırma alan notları, sınıf etkinliklerinin video-ses kayıtlarıdır. Araştırma sonucunda ise; öğretmenlerin ispat etkinliklerini çözmede oldukça başarılı olduklarını ancak tümdengelimsel argümanlar üretmede zorlandıklarını tespit etmiştir. Bu durumun nedeninin ise; öğretmenlerin çözüm üretmeyi ispatı tamamlamak olarak görmeleri, ispat yapma ihtiyacı duymamaları ve cebirsel ifadeleri matematiksel fikirleri ifade etmek için uygun bir araç olarak görmemeleri ile ilişkilendirmiştir.

2.7.3. Matematiksel İspatın Problem Çözme İle İlişkisi ve Üstbiliş Kapsamında Yapılan Çalışmalar

Lucast (2005) matematik öğretim programlarının niteliğine yönelik derleme olarak ele aldığı yüksek lisans tez çalışmasında ispatın problem çözmede başarılı olmak için zihinsel

bir araç olduğu ifade ederek; matematiksel ispatın problem çözme yeteneğinin üstbilişsel bir özelliği olduğunu belirtmiştir. İspatın öğrencilerin problem çözme ve üstbilişsel yeteneklerini geliştirdiğini, bununla beraber matematiksel bilgilerin temelini ve nereden geldiğini öğrenmeye katkı sağladığını belirtmiştir.

Depaepe, De Corte ve Verschaffel (2010), iki farklı öğretmeninin, problem çözme konusundaki üstbilişsel ve sezgisel yaklaşımlarına odaklanan iki altıncı sınıfta 7 aylık video tabanlı bir çalışma ile görüşme yöntemini de kullanarak bir araştırma yapmışlardır. Öğretmenlerin ve öğrencilerin üstbilişsel becerileri ile sezgilerinin ilişkisini, öğretmenlerin öğretim yaklaşımları doğrultusunda incelemişlerdir. Ayrıca bu süreçte, öğrencilerin problem çözme becerilerinin, öğretmenlerin öğretim yaklaşımları sonucunda nasıl geliştirdiğini araştırmışlardır. Sonuç olarak, Öğrencilerin rutin olmayan kelime problemlerini çözmek için kendiliğinden sezgisel uygulamaları ile öğretmenlerin problem çözme derslerinde bu becerilere etkisi arasında pozitif bir ilişki bulmuşlardır.

Furingetti ve Morseli (2009) ispatı özel bir problem çözme durumu olarak kabul ederek, ispatlama sürecini, hem duygusal hem de bilişsel faktörlerin bu süreci etkilediği bir bakış açısını benimseyerek incelemişlerdir. Çalışmalarını üniversitede matematik eğitimi alanındaki bir ders kapsamında gerçekleştirmişlerdir. Bu derste öğrencilere temel sayı teorisi alanında bir ifade verip bunu ispatlamalarını ve bu sürece eşlik eden düşüncelerini yazmalarını istemişlerdir. Böylece özellikle inançların öğrencilerin performansını nasıl şekillendiğine dair elde ettikleri sonuçları değerlendirmişlerdir.

Lockwood, Ellis ve Lynch (2016) örneklerin, varsayımların araştırılması ve ispatların geliştirilmesinde önemli bir rol oynadığını temele aldıkları araştırmalarında, otuz dokuz üniversite de bulunan matematik eğitimcilerine bir anket uygulamış ve görüşmeler yapmışlardır. Anketlerden ve görüşmelerden elde edilen bulgular doğrultusunda; ispatın kapsamlı bir çalışma alanı olmasına rağmen matematik eğitimcilerinin ispatları formüle ederken örnek kullanımına dayalı çalışmalarının arttırılması gerektiği sonucuna ulaşmışlardır. Ayrıca anketlere verilen yanıtlar doğrultusunda, ispat yapma sırasında takip edilen stratejilerinin neler olduğu hakkında fikir sahibi olduklarını belirtmişlerdir. İspat kapsamında yapılan çalışmaların niteliğinin arttırılması ve örnek kullanımı süreçlerindeki genelleme ve üstbilişin ne olabileceği konusunda öneriler sunmuşlardır.

Kuzle (2017), üstbilişin öğrencilerin matematik öğrenmeleri ve problem çözebilmeler için önemli bir beceri olduğu fikrinden yola çıkarak; üstbilişin problem çözme sürecindeki kapsamı, bu süreci incelemek için yapılabilecek görüşmelerin kapsamı konusunda bir araştırma yapmıştır. İkinci ve dördüncü sınıf öğrencileri üzerinde gerçekleştirdiği araştırmasında veri toplama aracı olarak; problemler, ses-video kayıtları, görüşmeler ve doküman incelemelerini kullanmışlardır. Sonuç olarak, birçok yöntemin kullanılması ile elde edilen bilgilerin üsbilişi yorumlamakta yeterli olabileceğini ancak yine de üstbilişsel süreçleri ortaya çıkarmanın zor olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Öztürk ve Kaplan (2019), matematik öğretmen ve öğretmen adaylarının cebirsel ispatları yapma süreçlerini bilişsel açıdan incelemişlerdir. Karma desen kullandıkları araştırmalarında veri toplama aracı olarak; ispat testi, sesli düşünmeler ve gözlem formlarını kullanmışlardır. Araştırmaları sonucunda, matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının ispat yapma sürecinde bilişsel süreçleri kullanmalarının üstbilişsel süreçlere göre daha yoğunlukta olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Temur, Özsoy ve Turgut (2019), iyi gelişmiş bir üstbilişsel öğretim yaklaşımının, öğrencilerin problem çözme stratejilerini etkili bir şekilde geliştirebileceği düşüncelerinde hareketle öğretmenlerin öğretim sürecinde kullandıkları üstbilişsel düzenleme süreçlerine yönelik bir araştırma yapmışlarıdır. On beş okul öncesi öğretmeni ile gerçekleştirdikleri araştırmalarında veri toplama aracı olarak, gözlem formunu kullanmışlardır. Araştırma sonuçlarında, okul öncesi öğretmenlerinin üstbilişsel temelli davranışlar gösterirken bu süreçleri yeterince yerine getirmediklerini gözlemlemişlerdir. Bu sonucu da, öğretmenlerin, yeterli düzeyde üstbilişsel bilgisine sahip olmadığıyla ilişkilendirmişlerdir.

BÖLÜM III: YÖNTEM

Bu bölümde araştırma yöntemi çeşitli başlıklar altında sırasıyla ele alınacaktır. Birinci başlık altında araştırmanın deseni nitel araştırma yönteminin temelleri kapsamında açıklanmıştır. İkinci başlık ile araştırma sürecine dayalı bilgiler sunulmuştur. Üçüncü başlık ile çalışma grubuna ait bilgiler sunulmuştur. Yöntem bölümünde en kapsamlı bölümler olarak ele alınan dördüncü ve beşinci başlıklar altında, araştırmada kullanılan veri toplama araçları ve verilerin analizine dair bilgiler sunulmuştur. Altıncı başlık ile araştırmanın geçerlik ve güvenirliğinin nasıl sağlandığının bilgisi verilmiştir. Yedinci başlık altında araştırmada etik konuların nasıl ele alındığı ile ilgili bilgiler verilmiştir.

3.1. Araştırma Deseni

Araştırma deseni, bir çalışma yapmak için plan yapmak anlamına gelmektedir (Creswell, 2016). Nitel araştırma tasarımı nicel araştırma tasarımının "hazırı kullan" sürecinden farklıdır. Nitel araştırma, tasarımın farklı bileşenleri arasındaki etkileşimi sağlayan ve bunların birbirlerine olan etkilerini değerlendirmeyi içeren "kendin yap" sürecidir. Bir nitel çalışma tasarlamak için önceden mantıklı bir strateji geliştirilmez ve sonrasında bu tam anlamıyla uygulanmaz. Nitel araştırma tasarımını önemli ölçüde süreç içerisinde inşa etmek gerekir. Tasarımın araştırma sırasında gerçekte nasıl işlediği, içinde bulunulan bağlamı nasıl etkilediği ve bu bağlamdan nasıl etkilendiğini sürekli olarak değerlendirmek ve çalışmanın istenilen başarıya ulaşabilmesi için gerekli olan düzenleme ve değişikliklerin yapılması gerekir (Maxwell, 2013).

Peki, nitel araştırmalar hangi durumlar için uygundur ve ne zaman kullanılmalıdır? Creswell (2016, s.48)'e göre bu soruya verilecek cevaplardan bazıları şunlardır:

- Bir konuyu veya problemi keşfetmek.
- Kompleks bir konuya ayrıntılı bir bakış açısı getirmek.
- Çalışmadaki katılımcıların bir konuyu veya problemi hangi ortam veya bağlamda ele aldıklarını anlamak.
- Belirli evren ve örneklemler için kısmi veya yetersiz teoriler olduğunda veya mevcut teoriler incelenen problemin karmaşıklığını incelemede yetersiz kaldığında teori geliştirmek.

İfade edilen tüm bu nedenlerden ötürü bu araştırma nitel araştırma deseni kullanılarak tasarlanmıştır.

3.1.1. Durum Çalışması

Nitel araştırma mecazi anlamda farklı renk ve dokuya sahip incecik iplik ve çeşitli malzemelerin karışımından oluşan grift bir kumaşa benzer. Bu kumaş kolay veya basit bir şekilde açıklanamaz. Kumaşın dokunduğu tezgah gibi genel varsayımlar ve yorumlayıcı çatı nitel araştırmayı bir arada tutar. Bu alan kendi tezgahlarında nitel araştırma kumaşını dokuyan farklı bakış açılarına sahip birçok farklı kişiye sahiptir. Diğer bir deyişle tüm nitel araştırma tiplerinin ortak özellikleri vardır ve farklı özellikler ise nitel araştırmanın yapısına bağlı olarak farkı vurgu alacaktır (Cresswell, 2016, s.42).

Çeşitli araştırma yöntemleri arasında ayırım yapmanın ilk ve en önemli koşulu sorulan araştırma sorusunun türünü sınıflandırmaktır. Araştırma sorularının tanımlanması ise muhtemelen bir araştırma çalışmasında atılacak en önemli adımdır. "Nasıl" ve "Neden" sorularına odaklanarak tasarlanan bir araştırmada durum çalışmasının tercih edilmesi muhtemeldir. Durum çalışması yapmak için tercih edilen diğer bir unsur ise araştırmacının davranışsal olaylar üzerindeki rolünün çok az olması ya da hiç olmamasıdır (Yin, 2014). Bu araştırmada, MÖA'nın matematiksel muhakeme ve ispat yapma süreçlerinin; görev kağıdı, gözlem ve doküman inceleme yöntemleriyle *nasıl olduğunu* ortaya çıkarmak, bunların *nedenleri* ve yol açtığı sonuçları tartışmak hedeflendiği için nitel araştırma desenlerinden durum çalışması yaklaşımı esas alınmıştır.

Durum çalışması araştırması, araştırmacının güncel sınırlı bir sistem (veya durum), gerçek yaşam ya da belirli bir zaman içindeki çoklu sınırlandırılmış sistemler (veya durumlar) hakkındaki çoklu bilgi kaynakları (örneğin raporlar, gözlemler, görsel-işitsel materyaller, mülakatlar ve dokümanlar) aracılığıyla derinlemesine ve detaylı bilgi topladığı durum temaları ya da bir durum betimlemesi ortaya koyduğu nitel bir yaklaşımdır (Punch, 2014, s.144). Bu yaklaşımdaki temel fikir, bir olayın (veya belki de az sayıda olayın) uygun gelebilecek herhangi bir yöntemle ayrıntılı bir biçimde incelenmesidir. Belirli araştırma soruları ve amaçlar mevcut olsa bile, olayı tüm yönleriyle olabildiğince anlamak genel amaçtır.

Yin (2014)'e göre durum çalışmasının tanımı iki bölümden oluşur. Bunlardan birincisi durum çalışmasının kapsamı ile ilgilidir. Durum çalışması, özellikle olgu ile bağlam arasındaki sınırların açıkça belirgin olmadığı durumlarda, güncel bir olguyu veya durumu gerçek dünya bağlamında derinlemesine araştırmaktır. İkincisi ise durum çalışmasının özellikleri ile ilgilidir. Durum çalışması, veriler açısından oldukça yoğun değişkenlik içerse de teknik olarak ayırt edici olaylar üzerinde çalışır. Ayrıca, çeşitleme şeklinde bir araya getirilmesi gereken verilerle birden fazla delil kaynağına güvenir. Bunlara ek olarak, verilerin toplanması ve analizine yardımcı olabilmesi için teorik önermelerin önceki gelişimlerinden faydalanır.

Durum çalışması araştırmasının doğru yapılması, durum çalışmaları hakkında beş geleneksel önyargıyı ele almak anlamına gelir (Yin, 2014). Bunlardan dördü, bu araştırma kapsamında şu şekilde ele alınmıştır:

Durum çalışmasını titizlikle yürütmek veya yanlı davranmamak: Durum çalışmasına dayalı bir araştırma yürütürken titizlik göstermek önemli bir ihtiyaçtır. Buna karşılık durum çalışması araştırmacılarının; süreci yönetirken yeterince özen gösteremediklerini, sistematik yöntemleri takip edemediklerini, bulguların ve sonuçların yönünü etkilemek için şüpheli bulgulara çalışmalarında yer verebildikleri çoğu kez görülmüştür (Yin, 2014). Durum çalışması yaparken bu tür uygulamalardan kaçınmak gerekir. Bu araştırmada belirtilen hususların önüne geçmek için; hem genel hem de haftalık olarak yapılan planlara bağlı kalınmış ve tüm süreçler tez danışmanın haftalık incelemeleri ile yürütülmüştür. Uygulama sonucunda, elde edilen veriler alanında uzman iki öğretim üyesine inceletilmiş; verilerdeki şüpheli, eksik veya yanlış kısımlar düzeltildikten sonra bulgu ve sonuç yazımına geçilmiştir. Böylece araştırmacı yanlılığından kaynaklanan yanlışların önüne geçilmeye çalışılmıştır.

Öğretim durumlarıyla ilgili karışıklıkları önlemek: Araştırmalarda kullanılan durum çalışmaları ile öğretimde kullanılan durum çalışmaları karıştırılır. Öğretim amaçlı kullanılan durum çalışmalarında materyaller belirli bir noktayı daha etkili gösterebilmek için değiştirilebilir. Ancak durum çalışması araştırmalarında böyle bir adım kesinlikle yasaktır (Yin, 2014). Bu sebepten, durum çalışmasına dayalı bir araştırmayı yürütürken tüm bulguları adil bir şekilde rapor etmek için çok çalışmak gerekir. Bu araştırmada belirtilen hususu sağlamak için, öncelikli olarak katılımcıların, muhakeme ve ispat yapma

süreçleri ile ilgili var olan süreçlerinin ortaya çıkarılmasına ve araştırmacı yönlendirmesinin olmamasına özen gösterilmiştir. Diğer bir deyişle, sürecin öğretim amaçlı değil var olanı ortaya çıkarmaya dayalı olmasına önem verilmiştir. Bunun yanında, MÖA'nın uygulama içerisinde elde ettikleri deneyimler muhakeme ve ispat yapma süreçlerindeki gelişimlerine katkı sağlamıştır. Düzenli olarak tutulan araştırmacı notları ile bu gelişimleri kayıt edilmiş ve böylece sürecin olduğu gibi aktarılmasına özen gösterilmiştir.

Durum çalışmasından elde edilen bulguların genelleme sorununa açıklık getirmek: Araştırma sonucunda elde edilen bulguları genellemek durum çalışmalarına ait bir yetersizlik olarak görülür. *"Tek bir durumdan genelleme nasıl yapılır?"* bu konuda sıkça duyulan bir sorudur (Yin, 2014). Durum çalışmaları deneysel çalışmalar gibi popülasyonlara veya evrenlere değil, teorik önermelere genellenirler. Durum çalışması araştırması yaparken amaç teorileri genişletmek veya genelleştirmektir. Bu araştırmada da ifade edilen hususlar dikkate alınarak temele alınan teorik çerçeveler elde edilen bulgular dahilinde genişletilmiştir.

Kontrol edilemeyen seviye: Durum çalışması araştırmaları ile ilgili diğer bir endişe, durum çalışmalarının çok uzun sürdüğü ve uzun, okunamayan belgelere neden olabileceğidir. Durum çalışmalarının uzun sürmesi gerekmez ve araştırma amacı doğrultusunda nitelikli bir planlama ile yerinde sonuçlandırılabilir (Yin, 2014). Bu araştırmada da sadece araştırma amacı doğrultusunda cevabı aranan sorulara dayalı bir araştırma planı yapılmıştır. Araştırmanın yazımı sırasında ise konuyla ilgili açık nokta bırakmayacak, temeli sağlam, duru bir anlatım yapılmasına özen gösterilmiştir.

3.2. Araştırma Süreci ve Araştırma Uygulamasının Planlanması

Araştırma genel olarak beş aşamada gerçekleşmiştir:

- MÖA'nın muhakeme ve ispat yapma süreçlerinin matematiksel perspektiften incelenmesini sağlayacak M-İ odaklı görev sorularının oluşturulması,
- MÖA'nın M-İ süreçlerinin psikolojik ve pedagojik perspektiften incelenmesini sağlayacak yarı yapılandırılmış görüşmelerin oluşturulması,

- MÖA'nın muhakeme ve ispat yapma süreçlerinde sergiledikleri üstbilişsel düzenleme süreçlerinin belirlenmesini sağlayan davranış kartları ve yapılandırılmış görüşme sorularının oluşturulması,
- Hazırlanan veri toplama araçlarının pilot uygulama, uzman görüşü ve araştırmacı süreç gözlemleri ile değerlendirilerek elde edilen veriler doğrultusunda gerekli düzeltmelerin yapılması,
- Son hali verilen veri toplama araçları ile matematik öğretmen adaylarının muhakeme ve ispat yapma süreçlerinin ve bu süreçte sergilenen üstbilişsel düzenlemelerinin incelenmesidir.

3.3. Çalışma Grubu

Örneklem büyüklüğü bilinmek istenen şeylere, nelerin faydalı olacağına, mevcut zaman ve kaynaklarla ne yapılacağına ve güvenirliğin ne olacağına bağlıdır (Patton, 2018). Nitel araştırma genel olarak amaçlı bir şekilde seçilmiş nispeten küçük örneklere hatta tek bir duruma derinlemesine odaklanır. Az sayıda insandan gelen derinlemesine bilgi özellikle durumlar bilgi açından zenginse çok değerli olabilir.

Durum çalışmasında araştırmacının çalışma için programlar, olaylar, süreçler, faaliyetler, bireyler veya birkaç kişi gibi bir veya daha fazla durumu seçmeye ihtiyacı vardır (Cresswell, 2014, s. 150). Ancak birkaç kişiyle çalışıldığında, her bir kişinin bir durumu ifade etmesi ve çoklu durum çalışması olması kabul edilebilir bir uygulamadır. Bu araştırmanın çalışma grubunu, Marmara Bölgesi'nde bulunan bir Devlet Üniversitesi'nin Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümü 2017 - 2018 eğitim-öğretim dönemi 3. Sınıfta öğrenim görmekte olan üç öğretmen adayı oluşturmuştur. Öğretmen adaylarından ikisi erkek, biri kızdır. Çalışmanın amacına uygun verileri elde etmek amacıyla nitel araştırma yöntemlerinin desteklediği amaçlı örnekleme yöntemi seçilmiştir. Amaçlı örnekleme üzerinde çalışılan soruları aydınlatacak bilgi açışından zengin durumların seçilmesine odaklanır (Patton, 2018).

Üç öğretmen adayının seçiminde tez danışmanın görüşleri dikkate alınmıştır. Tez danışmanı tarafından verilen Doğrusal (Lineer) Cebir 1-2 ve Matematiğin Doğası derslerindeki başarı durumları iyi ve düzenli ders takibini sağlayan altı öğretmen adayı belirlenmiştir. Katılımcı seçiminde ayrıca, bilgisel anlamada yeterlilik, kendini ifade

edebilme, ders içinde aktif olma gibi hususlara da dikkat edilmiştir. Belirlenen altı öğretmen adayı başarı durumlarına göre sıralanmış ve gönüllülük esasına uygun olarak sırasıyla yapılan görüşmeler sonucunda ilk üç adayın katılımcı olarak seçilmesine karar verilmiştir. Katılımcı seçiminde 3. Sınıfa devam eden matematik öğretmen adaylarının olmasına dikkat edilmesinin nedeni ise gerek alan bilgisi gerekse pedagojik bilgisi kapsamına girecek derslerin çoğunluğunu almış olmaları etkili olmuştur. Öğretmen adaylarının her birinin aldıkları dersler Tablo 3.1 de gösterilmiştir.

Tablo 3. 1. Matematik Öğretmen Adaylarının Aldıkları Dersler

Dersler		Katılımcılar	1.Sınıf (Güz, Bahar, Yaz Dönemi)	2.Sınıf (Güz, Bahar, Yaz Dönemi)	3.Sınıf (Güz Dönemi)
Alan Bilgisi	**Dersleri**	**Ortak**	Genel Matematik, Soyut Matematik, Matematiksel Analiz I-II, Geometri, Doğrusal Cebir I-II, Cebire Giriş, Analitik Geometri, Matematiğin Doğası, Elemanter Sayı Kuramı, Analiz ve Uygulamaları, İstatistik ve Olasılık I		
Pedagoji Bilgisi	**Dersleri**	**Ortak**	Matematik Ve Origami, İlk Dönem Türkçesi Matematik Metinleri, İlköğretim Matematik Öğretim Teknolojileri, Matematik Öğretimi I, Matematik Tarihi, İlköğretimde Matematiksel Kavram Yanılgıları		
		İpek			*İlköğretim Matematik Eğitiminde Okul Deneyimi *İlköğretim Matematik Eğitiminde Özel Eğitim *Zeka Oyunları *Matematik Felsefesi *Matematik ve Sanat *Problem Çözme *Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık / Temel Düzey

Araştırma etiği açısından katılımcıların gerçek isimleri yerine takma isimler kullanılmıştır. Tez danışmanının verdiği dersler sırasındaki gözlemleri ile araştırmacının araştırma sırasındaki gözlemleri sonucunda kişilerle ilgili şu bilgiler verilebilir:

Erdem: Derslerinde başarılı ve sorumluluk sahibidir. Derslerinin çoğunluğunda başarı gösteren ve başarısı ile dikkat çeken bir öğretmen adayıdır. Edindiği bilgilere ilişkin sorgulama yapabilmeyi çok sevmektedir. Kendini ifade edebilme gücü yüksektir. Açıklama yaptığında, aklına gelen her şeyi kendini en iyi şekilde ifade edebilecek bir toparlama becerisine sahiptir. Sorulara çok farklı bakış açılarından bakabilmektedir. Çözüme başlamadan önce çözüm stratejisi belirleyip süreç içerisinde o stratejiyi sürekli olarak sorgulamaktadır. Stratejisini süreç içerisinde sürekli sorgulamasının nedeni ise aklına gelen ilk stratejiyi sorgulamadan hemen çözüme başlamasıdır. Çözüm yaparken

sabırlı bir yapısı vardır ve her aşamayı kontrol ederek ilerlemektedir. Çözümü yapamadığında ya da zorlandığında uzun süre düşünüp farklı stratejiler aramaktadır. Çözümü sonlandırdığında yaptıklarını baştan sona gözden geçirip çözümü tamamladığından emin olmaktadır. Grup çalışmalarında ise genellikle çözüm stratejisine karar veren kişi rolündedir. Grup arkadaşlarının fikirlerini dinleyip, aklına takılan her noktaya açıklık getirilmesi için çaba göstermektedir. Grup arkadaşlarıyla ortak hareket etme konusunda uyum içindedir. Grup çalışmalarındaki amacı, en iyi çözümü üretebilmektir.

İpek: Derslerinde başarılı ve sorumluluk sahibidir. Öğrenmeye meraklı bir yapısı vardır. Edindiği bilgilerin nedenini sorgulamak yerine onları çözüm sürecinde etkin bir şekilde kullanmayı sevmektedir. Kendini kısa ve net olarak açıklamayı sevmektedir, bu nedenle açıklamalarında belirli bir standarda bağlı kalmaktan hoşlanmaktadır. İlköğretim Matematik Öğretmenliği programından üç yılda mezun olmayı istediği için yaz okulu dahil üst dönemlerden sürekli ders almıştır. 3.sınıf dersi olan Analiz ve Uygulamaları dersini 2. Sınıf bahar döneminde almıştır. Aynı şekilde 3. Sınıf dersi olan İstatistik ve Olasılık I dersini 2. Sınıf yaz okulunda almıştır. 4. Sınıf müfredatında bulunan İlköğretim Matematik Eğitiminde Okul Deneyimi, İlköğretim Matematik Eğitiminde Özel Eğitim, Zeka Oyunları, Matematik Felsefesi, Matematik ve Sanat, Problem Çözme, Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık / Temel Düzey dersini 3.sınıf güz döneminde almıştır. Sorulara var olan bilgi dağarcığı ile farklı açılardan bakabilmeyi becerebilmektedir. Çözüme başlamadan önce çözüm stratejisini belirleyip süreç içerisinde ona bağlı kalmaktadır. Çözüm yaparken stratejisini hemen uygulayıp, çözümü kontrol edip sonlandırmaktadır. Çözümü yapamadığında ya da zorlandığında uzun süre düşünüp farklı stratejiler aramaktadır. Grup çalışmalarında çözüm stratejisini belirleme konusunda etkin bir rolü vardır. Grup arkadaşlarının fikirlerini dinleyip, sormak istediği hususları sorup, ortak çözüm geliştirme konusunda uyum içinde hareket etmektedir. Grup çalışmalarındaki amacı, en iyi çözümü üretebilmektir.

Deniz: Başarı düzeyi iyiye yakındır ve sorumluluk sahibidir. Kendisine verilen sorumlulukları yerine getirme konusunda oldukça özenlidir. Üniversiteye ilk başladığında ders düzeylerine uyumda zorlanmış; genel matematik, soyut matematik ve geometri derslerini 2.sınıfta tekrar almıştır. Bilgiyi özümseyerek kullanması çok uzun sürmektedir. Tam olarak bildiği konular hakkındaki sorularda başarılı bir yaklaşım

sergilerken bilgisi olmayan konularla ilgili sorularda çekimser bir yaklaşım sergilemektedir. Soruyu çözmeden önce o soruyu çözebilip çözemeyeceğinden ilk olarak emin olmak istemektedir. Soruyu çözmek için strateji bulması ona yöneltilen soru, bilgisi dahilinde ise hızlı değilse çok yavaş olmaktadır. Soruyu çözerken sonuca ulaşmaya çalışıp bilgisel anlamda ilişkilendirme yapma konusunda eksik kalmaktadır. Bunun nedeninin ise, geçmişe yönelik var bilgilerinin temelinde eksiklikleri bulunmasına sürekli olarak dayandırmaktadır. Soruyu çözdükten sonra çözüme dayalı bütün açıklamaları kendini en iyi şekilde ifade edebilecek şekilde sıralamaktadır. Grup çalışmaları sırasında arkadaşlarının çözüm stratejisi önerilerini anlamaya çalışma ve sürekli sorgulayan bir yapısı vardır. Grup çalışmalarındaki amacı, sorunun çözüm stratejisini en iyi şekilde öğrenmek ve en iyi çözümü üretebilmeye yardımcı olabilmektir.

Çalışma grubuna katılımcı seçiminde gönüllük esas alınmış olup, bir örneği katılımcılarda bir örneği araştırmacı da bulunan *"Bilgilendirilmiş Gönüllü Katılım ve Video-Ses Kaydı İzin Formu"* hazırlanmıştır. Bu form Ek 1 de verilmiştir.

3.4. Verilerin Toplanması ve Veri Toplama Araçları

Duruma ilişkin derinlemesine bir anlayış sunma iyi bir durum çalışmasının ayrılan özelliğidir. Bunu gerçekleştirmek için araştırmacı mülakatlardan gözlemlere, dokümanlardan görsel-işitsel materyallere kadar birçok veri çeşidi toplar (Cresswell, 2014, s.98). Bu çalışmanın amacına uygun olarak; veri çeşitliliğini sağlamak ve araştırma sorularına tam ve derinlemesine yanıt alabilmek için birden fazla veri toplama aracı kullanılmıştır. Her bir görev için veri toplamada kullanılan araçlar şunlardır:

- M-İ Analitik Çerçevesi (Stylianides, 2008) dikkate alınarak oluşturulan farklı kategorilerdeki ispat görevlerini içeren *M-İ odaklı görev kağıtları,*
- İspat görevlerinin çözümüne ilişkin MÖA'nın *sesli düşünme protokolleri,*
- Muhakeme ve ispat sırasındaki üstbilişsel düzenleme süreçlerine ilişkin *davranış kartları,*
- Muhakeme ve ispat yapma süreçleri ile üstbilişsel düzenleme süreçlerine ilişkin *görüşme soruları,*
- İspat görevlerine ilişkin süreç gözlemlerini içeren *araştırmacı gözlem notları* (bireysel-grup çalışmaları),

- İspat görevlerinin gerçekleştirilmesi sırasında ortaya çıkan bütün iletişimlerin *video ve ses kayıtları* (etkileşim ortamı ve görev kağıdına yazılan unsurlar da dahil olmak üzere iki kamera kaydıyla).

3.4.1. Matematiksel Muhakeme-İspatlama Odaklı Görev Soruları

Alan yazın incelendiğinde ispat yapma süreçlerini çeşitli perspektiflerden ele alan birçok teorik çerçeve ile karşılaşılmaktadır (Balacheff, 1988; Coe ve Ruthven, 1994; de Villiers, 1990; Harel ve Sowder, 1998; Selden ve Selden, 2007; Stylianides, 2008). Araştırma amacı doğrultusunda MÖA'nın muhakeme ve ispat yapma süreçlerini matematiksel perspektif ile sınırlı kalmayıp psikolojik ve pedagojik perspektifler açısından bütünsel olarak ele almak için bu araştırmada Stylianides (2008) tarafından ortaya konulan M-İ Analitik Çerçevesi kullanılmıştır. İlgili çerçevenin tercih edilmesinin bir diğer nedeni ise matematiksel bileşen perspektifinden farklı kategoriler aracılığıyla muhakeme ve ispat yapma süreçlerinin incelenmesine imkan vermesi etkili olmuştur.

M-İ görevlerini oluşturmada temel alınan Analitik Çerçeve (Stylianides, 2008) de matematiksel bileşenler, "matematiksel genelleme yapma" ve "matematiksel iddialara destek sağlama" kategorilerine ayrılarak; örüntü belirleme, varsayımda bulunma, ispatlanmamış argüman sağlama ve ispat yapma şeklindeki faaliyetler ile bütünleştirilerek kategorilere ayrılmıştır. Araştırma kapsamında hazırlanan M-İ odaklı görev sorularında bu kategoriler dikkate alınmıştır. Her bir faaliyete yönelik, bireysel ve grup çalışmalarında kullanılmak üzere hazırlanan görev kağıtlarında yer alan sorulara ilişkin ayrıntılı bilgiler Tablo 3.2. verilmiştir.

Tablo 3. 2. Görev Kâğıtlarında Yer Alan Sorulara Ait Bilgiler

Görev İsmi		Alan	Çalışma Türü	Yararlanılan Kaynaklar
Örüntü Belirleme	**Görev 1**	Geometri	Bireysel Çalışma	Zazkis ve Liljedahl, 2002
	Görev 2	Cebir	Grup Çalışması	Rivera, 2010
Varsayımda Bulunma	**Görev 3**	Geometri	Bireysel Çalışma	SpringBoard, 2014
	Görev 4	Cebir	Grup Çalışması	Rivera, 2010
Deneysel Argüman	**Görev 5**	Geometri	Bireysel Çalışma	Mason, Burton ve Stacey, 2010
	Görev 6	Geometri	Grup Çalışması	Tez danışmanı tarafından hazırlandı.
Mantıksal Argüman	**Görev 7**	Sayılar	Bireysel Çalışma	Mason, Burton ve Stacey, 2010
	Görev 8	Cebir	Grup Çalışması	Johnston-Wilder ve Mason, 2005
Genel Örnek	**Görev 9**	Geometri	Bireysel Çalışma	Isis Problemi, Anonim
	Görev 10	Sayılar	Grup Çalışması	Anonim
Kanıt	**Görev 11**	Sayılar	Bireysel Çalışma	Beck ve Geoghegan, 2011
	Görev 12	Geometri	Grup Çalışması	Alsina ve Nelsen, 2010

M-İ odaklı görev sorularının hazırlanmasında sayılar, geometri ve cebir alan ayırımlarının dikkate alınmasındaki amaç, hem çalışılan alandan kaynaklanacak tekrara düşmemek hem de veri çeşitliliğini sağlamaktır.

Her bir görev sorusuna ilişkin bilgileri ve ilgili kategoriye uygun görülme nedenlerini sırasıyla şu şekilde ele alınabilir:

Örüntü Belirleme Görevleri: Bu kategoriye uygun soru hazırlanırken Stylianides (2008) tarafından ortaya konulan M-İ Analitik Çerçevesindeki örüntü tanımı dikkate alınmıştır. Bu kapsamda, belirli veri kümesine uyan genel bir matematiksel ilişkinin tanımlanmasını sağlayabilecek örüntü sorularının hazırlanmasına dikkat edilmiştir.

- ***Bireysel çalışmada kullanılmak üzere*** geometrik örüntü belirlemeye ilişkin bir soru literatür taraması sonucunda hazırlanmıştır. Bu soru hazırlanırken Zazkis ve Liljedahl (2002)'ın çalışmalarında var olan örüntü bulmaya dayalı bir soru araştırmacı tarafından seçilmiş ve uyarlanmıştır. Hazırlanan sorunun örüntü kategorisine uygun görülmesinin nedeni, genel matematiksel ilişkinin tanımlanmasını sağlamaya imkan vermesidir. Bu genel matematiksel ilişki satırlar ve sütunlar arasındaki bütünlük yardımıyla bulunabilecektir.
- ***Grup çalışmalarında kullanılmak üzere*** cebirsel örüntü belirlemeye ilişkin bir soru literatür taraması sonucunda hazırlanmıştır. Bu soru hazırlanırken Rivera (2010)'nın çalışmasında var olan bir soru araştırmacı tarafından seçilmiş ve uyarlanmıştır. Hazırlanan sorunun örüntü kategorisine uygun görülmesinin nedeni, bulunan genel matematiksel ilişkinin tanımlanmasını sağlamaya imkan vermesidir. Bu genel ilişki gerek beyaz kareler gerek yeşil kareler gerekse de şeklin tamamında yer alan bütünlük yardımıyla bulunabilecektir.

Varsayımda Bulunma Görevleri: Bu kategoriye uygun soru hazırlanırken Stylianides (2008) tarafından ortaya konulan M-İ Analitik Çerçevesindeki varsayım tanımı dikkate alınmıştır. Bu kapsamda, eksik delillere dayalı genel bir matematiksel ilişki hakkında muhakeme edilmiş bir hipotez üretmeyi sağlayabilecek varsayım sorularının hazırlanmasına dikkat edilmiştir.

- ***Bireysel çalışmada kullanılmak üzere*** geometrik varsayımda bulunmaya ilişkin bir soru literatür taraması sonucunda hazırlanmıştır. Bu soru hazırlanırken SpringBoard (2014) kitabında bulunan bir soru araştırmacı tarafından seçilmiş ve uyarlanmıştır. Hazırlanan sorunun varsayımda bulunma kategorisine uygun görülmesinin nedeni, genel matematiksel ilişki hakkında muhakeme edilmiş bir hipotez üretmeye imkan vermesidir. Bu genel matematiksel ilişki, verilen sayı örüntüleri arasında bulunarak oluşturulacak ve model oluşturma sırasında muhakeme edilebilecektir.
- ***Grup çalışmalarında kullanılmak üzere*** cebirsel varsayımda bulunmaya ilişkin bir soru literatür taraması sonucunda hazırlanmıştır. Bu soru hazırlanırken Rivera (2010)'nın çalışmasında var olan soru araştırmacı tarafından seçilmiş ve uyarlanmıştır. Hazırlanan sorunun varsayımda bulunma kategorisine uygun görülmesinin nedeni, genel matematiksel ilişki hakkında muhakeme edilmiş bir hipotez üretmeye imkan vermesidir. Bu genel matematiksel ilişki, çubuk ve nokta

sayıları arasında bulunabilecektir. Muhakeme süreci ise oluşturulan matematiksel ilişkinin doğrulanması sırasında gerçekleşebilecektir.

Deneysel Argüman Sağlama Görevleri: Bu kategoriye uygun soru hazırlanırken Stylianides (2008) tarafından ortaya konulan M-İ Analitik Çerçevesindeki deneysel argüman tanımı dikkat alınmıştır. Bu kapsamda, iddianın kapsadığı olası tüm durumların uygun bir alt kümesinin sağlanabileceği deneysel argüman sorularının hazırlanmasına dikkat edilmiştir.

- ***Bireysel çalışmada kullanılmak üzere*** geometrik deneysel argüman sağlamaya ilişkin bir soru literatür taraması sonucunda hazırlanmıştır. Bu soru hazırlanırken Mason, Burton ve Stacey (2010) çalışmalarında var olan soru araştırmacı tarafından seçilmiş ve uyarlanmıştır. Hazırlanan sorunun deneysel argüman kategorisine uygun görülmesinin nedeni; seçilen üçgen çiftine göre oluşturulan dörtgenler başta olmak üzere, belirlenen kenar uzunlukları ve açı ölçülerinin farklılık gösterebilmesidir. Cevapların üçgen çiftlerine göre farklılık göstermesi yapılan çözümlerin belirli durumlara bağlı kalınarak doğrulanması anlamına gelecektir. Bu kategoride olmasının diğer bir nedeni ise matematik öğretmen adayı, örneğin b ve c şıkkında kenar uzunlukları ve açı ölçülerini oluşturabileceği dörtgenlerden sonra cevaplanmasıdır. Bu sebeple matematik öğretmen adayı örnekleyebileceği tüm durumları kendince denedikten sonra bir cevaba ulaşacaktır ve bu cevap onun için doğru olacaktır.
- ***Grup çalışmalarında kullanılmak üzere*** geometrik deneysel argüman sağlamaya ilişkin bir soru, tez danışmanı tarafından hazırlanmıştır. Hazırlana sorunun deneysel argüman kategorisine uygun görülmesinin nedeni, verilen iki üçgenin ağırlık merkezi ve uzunluklarının bulunabilmesi için denemeler yapılarak çözüme ulaşılabilmesine imkan vermesidir.

Mantıksal Argüman Görevleri: Bu kategoriye uygun soru hazırlanırken Stylianides (2008) tarafından ortaya konulan M-İ Analitik Çerçevesindeki mantıksal argüman tanımı dikkate alınmıştır. Bu kapsamda, kabul edilmiş tüm önemli gerçeklere açık bir referans getiremeyen ve durumlara uyan örnekleri içeren mantıksal argüman sorularının hazırlanmasına dikkat edilmiştir.

- ***Bireysel çalışmada kullanılmak üzere*** sayılar alanı ile ilgili mantıksal argümanda bulunmaya ilişkin bir soru literatür taraması sonucunda hazırlanmıştır. Bu soru hazırlanırken Mason, Burton ve Stacey (2010) çalışmalarında var olan bir soru araştırmacı tarafından seçilmiş ve uyarlanmıştır. Bu sorunun mantıksal argüman kategorisine uygun görülmesinin nedeni; asal sayıların tanımının bilinmesine dayalı olarak çözülebilecek bir soru olmasıdır. Bunun dışında matematik öğretmen adaylarının yaptıkları bir gerekçelendirme eylemi olmayacaktır. Mesela asal sayıların tanımı hakkında, bu tanımın neden böyle olduğu hakkında bir gerekçe onlardan istenmeyecektir.
- ***Grup çalışmalarında kullanılmak üzere*** cebirsel mantıksal argümanda bulunmaya ilişkin bir soru literatür taraması sonucunda hazırlanmıştır. Bu soru hazırlanırken Johnston-Wilder ve Mason (2005) çalışmalarında var olan bir soru araştırmacı tarafından seçilmiş ve tez danışmanı tarafından uyarlanmıştır. Bu sorunun mantıksal argüman kategorisine uygun görülmesinin nedeni; seçilen eşkenar üçgenin konumu başta olmak üzere yapılan döndürme işlemi durumlarına uyacak genel ifadelerin oluşturulabilmesine imkan vermesidir.

Genel Örnek Görevleri: Bu kategoriye uygun soru hazırlanırken Stylianides (2008) tarafından ortaya konulan M-İ Analitik Çerçevesindeki genel örnek tanımı dikkate alınmıştır. Bu kapsamda, belirli bir durumda bütün sınıfı temsil eden genel bir argümanın sağlanmasına imkan tanıyacak genel örnek sorularının hazırlanılmasına dikkat edilmiştir.

- ***Bireysel çalışmada kullanılmak üzere*** geometri alanı ile ilgili genel örnek oluşturmaya ilişkin bir soru literatür taraması sonucunda hazırlanmıştır. Bu soru hazırlanırken Isis problemi olarak bilinen soru araştırmacı tarafından seçilmiş ve tez danışmanı tarafından uyarlanmıştır. Bu sorunun genel örnek kategorisine uygun görülmesinin nedeni; dikdörtgen ve üçgenlerle ilgili soruda yer alan durumları gerçekleyebilecek temsil edilebilir genel örnek sunabilmelerine imkan verebilmesidir.
- ***Grup çalışmalarında kullanılmak üzere*** cebirsel genel örnek sağlamaya ilişkin bir soru tez danışmanı tarafından hazırlanmıştır. Bu sorunun genel örnek kategorisine uygun görülmesinin nedeni; verilen eşitlik durumunu ikiden fazla basamaktan oluşan

sayılar içinde gerçekleyebilecek temsil edilebilir genel örnek sunabilmelerine imkan verebilmesidir.

Kanıt Görevleri: Bu kategoriye uygun soru hazırlanırken Stylianides (2008) tarafından ortaya konulan M-İ Analitik Çerçevesindeki kanıt tanımı dikkat alınmıştır. Bu kapsamda, belirli bir örneğin veya durumun temsiline dayanmayan ispat sağlayabilmeye yönelik sorularının hazırlanmasına dikkat edilmiştir.

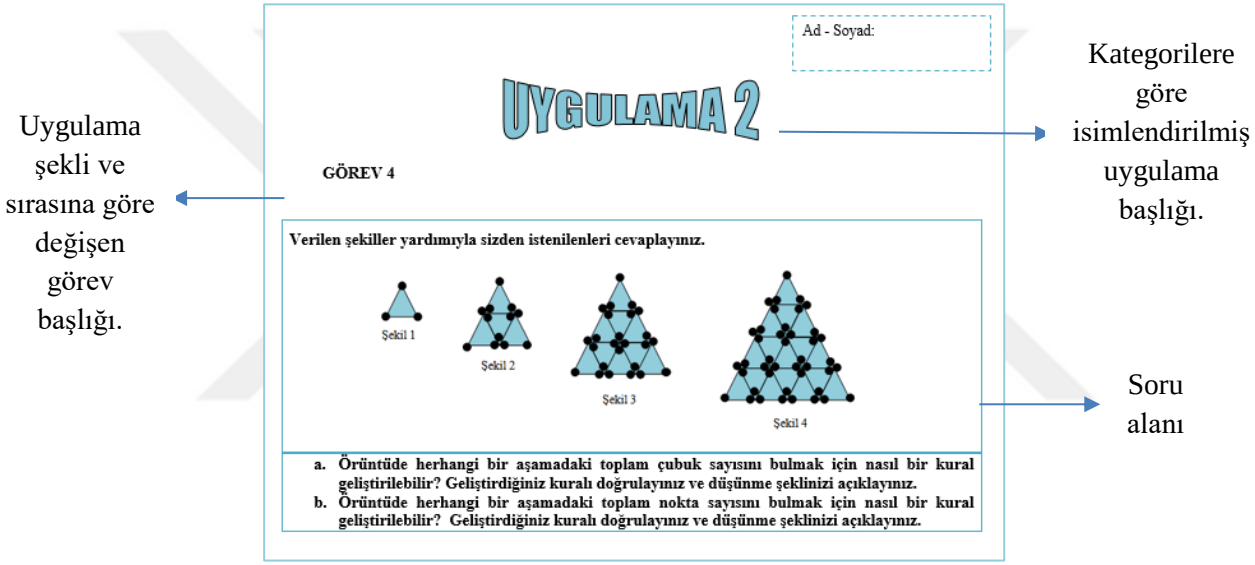
- ***Bireysel çalışmada kullanılmak üzere*** sayılar alanı ile ilgili kanıt oluşturmaya ilişkin bir soru literatür taraması sonucunda hazırlanmıştır. Bu soru hazırlanırken Beck ve Geoghegan (2011) çalışmalarında var olan soru araştırmacı tarafından seçilmiş ve uyarlanmıştır. Bu sorunun kanıt kategorisine uygun görülmesinin nedeni; verilen ifadenin ispatını herhangi bir örnek temsiline dayanmadan çözüm yapabilmelerine imkan vermesidir.
- ***Grup çalışmalarında kullanılmak üzere*** geometrik kanıt oluşturmaya ilişkin bir soru literatür taraması sonucunda hazırlanmıştır. Bu soru hazırlanırken Alsina ve Nelsen (2010) çalışmalarında var olan soru araştırmacı tarafından seçilmiş ve uyarlanmıştır. Bu sorunun kanıt kategorisine uygun görülmesinin nedeni; verilen ifadenin ispatını herhangi bir örnek temsiline dayanmadan çözüm yapabilmelerine imkan vermesidir.

Tüm bu nedenlerle hazırlanan ve M-İ Analitik Çerçevesindeki kategorilere uygun olarak görülen sorular; kategori uygunluğu açısından alanında uzman üç öğretim üyesine inceletilmiştir. Uzman değerlendirmesi sonucunda her bir uzman ile araştırmacı arasındaki uyum yüzdesi Miles ve Huberman (1994) katsayısına göre %100 bulunmuştur (Bkz. Tablo 3.3.). Kategoriye uygunluğu tespit edilen sorular daha sonra, hem alanında hem de soru-kitap hazırlama konusunda uzman bir öğretim üyesine soru kurgusu ve dil-anlatım anlaşılırlığı açısından inceletilmiştir. Yapılan değerlendirmeler sonucunda sorulara son halleri verilmiştir.

Tablo 3. 3. M-İ Odaklı Görev Sorularına İlişkin Uzman Görüş Değerlendirmesi

Görev Kategorileri	Çalışma Türü	Uzman 1	Uyum Düzeyi	Uzman 2	Uyum Düzeyi	Uzman 3	Uyum Düzeyi
***Örüntü Belirleme *Varsayım Üretme *Deneysel Argüman *Mantıksal Argüman *Genel Örnek *Kanıt**	Bireysel Çalışma	%100	Çok iyi	%100	Çok iyi	%100	Çok iyi
	Grup Çalışması	%100	Çok iyi	%100	Çok iyi	%100	Çok iyi

Uygulama sırasında kullanılan sorulardan biri Şekil 3.1. de verilmiştir:



Şekil 3. 1. Uygulamalarda Kullanılan Soru Yapısı

Kategorilere göre isimlendirilmiş uygulama başlıkları:

- Uygulama 1: Örüntü belirleme,
- Uygulama 2: Varsayımda bulunma,
- Uygulama 3: İspatlanmamış argüman,
- Uygulama 4: İspat.

Uygulama şekli ve sırasına göre değişen görev başlıkları:

- Görev 1-3-5-7-9-11: Bireysel çalışmalar,
- Görev 2-4-6-8-10-12: Grup çalışmaları.

3.4.2. Sesli Düşünme Protokolleri

Üstbilişsel süreçler, çevrimiçi ve çevrimdışı izleme yöntemleri ile ölçülebilir. Çevrimiçi izleme yöntemleri, uygulama sırasında gerçekleşen herhangi bir etkinliği yansıtırken, çevrimdışı izleme yöntemleri uygulamadan önce veya sonra gerçekleşen etkinlikleri yansıtır (Azevedo vd., 2010). Örneğin, sesli düşünme protokolleri (think aloud protocol) çevrimiçi izleme yöntemlerindendir. Çünkü bu yöntemle, bilişsel ve üstbilişsel süreçlere dayalı bilgiler uygulama sürecinde toplanır.

Kişilerin üstbilişsel süreçlerine ilişkin fikir sahibi olabilmek için kullanılan etkili bir yöntem sesli düşünme protokolleridir (Veenman, 2005). Sesli düşünme protokollerinde, kişilerin bir görev üzerinde çalışırken düşüncelerini sözlü olarak ifade etmeleri istenir. Sözlü olarak ifade edilen düşünceler sistematik olarak kaydedilir, tamamen aktarılır ve değerlendirilir. Böylece, insanların bir şeyler ile meşgul olurken duygu ve düşüncelerini kelimelere dökmelerini sağlanır. Bu sayede kişinin zihninde nelerin meydana geldiği ve iç düşüncelerini ortaya çıkarmak amaçlanır (Patton, 2018).

Sesli düşünme üstbilişsel bilgi ve stratejileri geliştirmek için çok iyi bir yöntemdir (Hartman, 2001). Düşünmeyi gerektiren bir işle meşgul olurken, düşünme süreçlerini dışa vurma tekniğidir. Düşünen kişi, bir görevi yerine getirirken ortaya çıkan tüm düşüncelerini veya duygularını sesli olarak dile getirir (örneğin, bir problemi çözme, bir soruya cevap verme, bir deney yapma, ders notlarını okuma vb.) . Dinleyen kişi ise, düşünen kişinin söylediklerine aktif olarak katılır, doğruluğu inceler, hataları işaret eder ve düşünen kişinin sesli olarak düşüncelerini ifade etmesini sağlar.

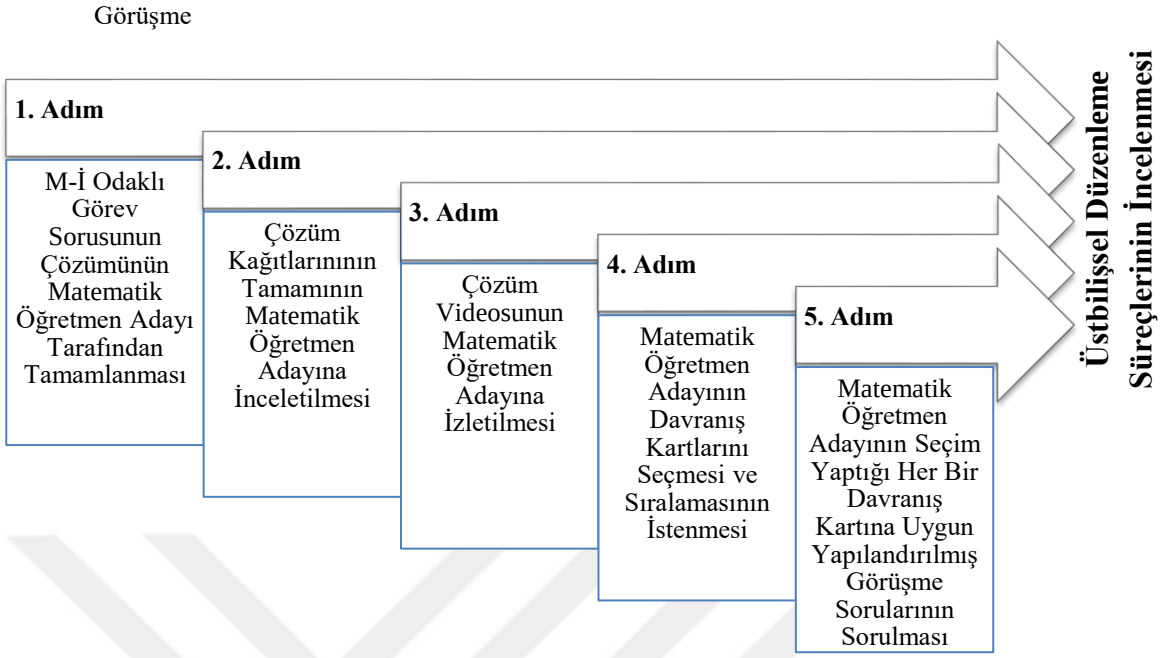
Matematik öğretmen adaylarının farklı kategorilerdeki ispatlara yönelik görevlerle bireysel halde meşgul olurken sergiledikleri üstbilişsel düzenleme süreçlerini ortaya çıkaran bu araştırmada, uygulama sürecindeki verileri toplayabilmek amacıyla sesli düşünme protokolleri yöntemi kullanılmıştır. Bu amacı gerçekleştirebilmek için araştırmacı matematik öğretmen adaylarına;

- **Uygulama başlamadan önce**: *"Tüm süreçlerini sesli olarak ifade edecek şekilde çözüme başlayabilirsin."*
- **Uygulama sırasında:** *"Düşüncelerini sesli olarak ifade etmeye devam et."*
- **Uygulama sonunda:** *"Bu soruyu çözerkenki düşünme adımların nelerdir?"*

şeklindeki ifadeleri yönelterek üstbilişsel düzenleme süreçlerini uygulama sırasında sergilemelerini sağlamaya çalışmıştır.

3.4.3 Davranış Kartları

Üstbilişsel süreçleri ortaya çıkarmada bilinen yöntemler; sesli düşünme protokolleri, kişisel rapor anketleri, performans kararları şeklinde ifade edilebilir. Farklı üstbilişsel yöntemlere ilişkin yapılan çalışmalara bakıldığında; Sperling vd. (2004) performans kararlarının doğruluğunu MAI-Üstbilişsel Farkındalık ölçeği (Schraw ve Dennission, 1994) ile karşılaştırmıştır. Sonuç olarak öğrencileri ile yaptıkları araştırmadan elde ettikleri bulgularda performans kararlarının doğruluğu ile ölçek arasında sıfır hatta olumsuz korelasyon olduğunu bulmuştur. Kullanılan diğer bir yöntem ise öz-değerlendirme anketlerinden yararlanarak oluşturulan sorular ile görüşme yapmaktır. Ancak görüşme kapsamında sorulan sorular veya öz-değerlendirme anketlerinde kişiler, ortaya çıkardıkları ya da var olan durumu değil olması gereken durumları göz önüne alarak cevap verebilirler. Mesela bir davranışı göstermemişlerdir ancak bunu *"yaptım"* diyebilirler ya da bir davranışı göstermişlerdir ancak farkında olmadıkları için *"yapmadım"* diyebilirler. Dolayısıyla tek bir yönteme bağlı kalarak yapılan üstbiliş çalışmaları eksiklikler taşıyabilmektedir. Bir başka deyişle, her yöntemin kendine ait avantaj ve dezavantajları bulunabilmektedir. Bunun önüne geçebilmek için, Wilson (2001) üstbilişsel süreçleri çoklu yöntem ile incelemenin daha yararlı olacağı bilincinde olarak Davranış kartları (action card) ile bir araştırma gerçekleştirmiştir. Bu çoklu yöntem; gözlem, video-ses kaydı, öz-raporlamaya ek olarak sesli düşünme içeren problem temelli mülakatları içerir. Bu araştırmada matematik öğretmen adaylarının üstbilişsel düzenleme süreçlerini ortaya çıkarabilmek için sesli düşünme protokollerine ek olarak davranış kartları yaklaşımı benimsenmiş ve kullanılmıştır. Davranış kartlarının kullanımına ilişkin süreç Şekil 3.2. deki gibi gösterilebilir.



Şekil 3. 2. Üstbilişsel Düzenleme Süreçlerinin İncelenmesine Yönelik Süreç Akışı

Bireysel çalışmalar ile M-İ odaklı görev soruları kapsamında uygulaması yapılan 6 görev M-İ odaklı görev sorusunun çözümleri MÖA tarafından tamamlanmıştır. Daha sonra her bir aday ile bağımsız olarak üstbilişsel düzenleme süreçlerini ortaya çıkaracak üstbiliş oturumları gerçekleştirilmiştir. Bu oturumlarda ilk olarak MÖA'a 6 görev kağıdındaki çözümleri inceletilmiştir. Böylece çözümlerini, yaptıklarını hatırlaması ve *"Çözümlerimin tamamını hatırladım"* ya da *"hazırım"* şeklindeki söylemde bulunan kadar ona zaman verilmiştir. Çözüm süreçlerini hatırlayan MÖA'a 6 uygulamasından çeşitli kesitlerin (üstbilişsel süreçlerini ele alabilecek en uygun noktalardan oluşan) alınması ile oluşturulmuş 15-20 dakikalık çözüm videosu izletilmiştir. Daha sonra, üstbilişsel düzenleme süreçleri temel alınarak hazırlanan davranış kartları karışık bir şekilde MÖA'nın önüne konulmuştur. İncelediği uygulama çözümleri ve izlediği çözüm videosu doğrultusunda davranış kartlarını bir sıraya dizmesi MÖA'dan istenmiştir. Ayrıca gösterdiği veya ortaya koyduğu bir davranış olduğunu düşünmesi ve bu davranışın kartlarda olmaması halinde, bu davranışları yazması için boş bırakılmış kartlara bunları yazabileceği bilgisi verilmiştir. İhtiyaç duyması halinde çözüm kağıtlarını tekrar inceleyebileceği ve çözüm videosunu tekrar izleyebileceği, istediği noktaları izleyebilmek için videosunu ileri-geri sarabileceğinin bilgisi verilmiştir. MÖA seçim yaptığı kartları kendi davranış sırasına göre sıraladıktan sonra, seçim yaptığı her bir kart

üzerinde hazırlanan yapılandırılmış görüşme kapsamından her bir karta ilişkin olarak hazırlanan sorular sorularak üstbilişsel düzenleme süreçlerinin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Bu uygulama 6 görev sorusu için tek tek değil bütünsel olarak bir defa uygulanarak gerçekleştirilmiştir.

Davranış kartlarının her birine yazılacak ifadeler için literatür taraması (makaleler, tezler, kitaplar) yapılmıştır. Literatür taraması sonucunda Schraw ve Denission (1994) tarafından geliştirilen üstbilişsel düzenleme süreçleri dikkate alınarak planlama, bilgi yönetimi, hata ayıklama, izleme ve değerlendirme kategorilerine uygun davranış kartları oluşturulmuştur. Planlama kategorisinde üç, bilgi yönetimi kategorisinde iki, izleme kategorisinde beş, hata ayıklama kategorisinde iki ve değerlendirme kategorisinde beş kart hazırlanmıştır. Kartlara uygun cümlelerin oluşturulmasında; Schraw ve Denission (1994), Wilson (2001), Hartman (2001), Wilson ve Clarke (2002, 2004) isimli araştırmacıların çalışmalarında bulunan üstbilişsel düzenleme süreçlerine ilişkin bilgilerden yararlanılmıştır. Hazırlanan davranış kartları alanında uzman üç öğretim üyesinin görüşlerine başvurularak üstbilişsel düzenleme süreçlerine uygunluk ve dil-anlatım anlaşılırlığı açısından incelettirilmiştir. Yapılan değerlendirmeler sonucunda her bir uzman ile araştırmacı arasındaki Miles Huberman (1994)'a göre uyum yüzdesi %100 bulunmuştur. Ayrıca dil-anlatım anlaşılırlığı açısından önerilen düzeltmeler yapılarak kartlara son halleri verilmiştir.

3.4.4. Görüşme

İnsanların gerçek durumlara ilişkin algılarını, anlamlarını, tanımlamalarını öğrenmenin bir yolu olan görüşmeler, başkalarını anlama amacıyla kullanılan en güçlü yöntemlerdendir. Farklı araştırma durumlarına adapte edilebilecek büyük bir esnekliğe sahiptirler ve birçok türü bulunmaktadır. Bu noktada, araştırma amacına ve sorularına en uygun çeşidin seçilmesi gerekli olmaktadır Araştırma amacına ve sorularına uygun olarak seçilen görüşme türü, görüşmenin yapılış şekli ile nasıl yönetildiğini etkileyecektir (Punch, 2014). Bu araştırmada da, belirlenen araştırma amacı ve sorularına uygun olarak farklı görüşme türleri kullanılmıştır. Bunlar yarı yapılandırılmış ve yapılandırılmış görüşmelerdir.

Yarı Yapılandırılmış Görüşme: Bu görüşme yaklaşımı, araştırma problemi kapsamına giren tüm boyutların ve soruların kapsanmasını sağlamak için geliştirilmiştir. Bu

yaklaşımda, araştırmacı önceden hazırladığı alanlara veya konulara bağlı kalır. Buna ek olarak, önceden hazırladığı sorulara ilaveten daha ayrıntılı bilgi alabilme amacıyla ek sorular sorabilme özgürlüğüne sahiptir. Konular veya soruların belirli bir hiyerarşi sırasına konulması zorunlu değildir. Araştırmacı, görüşme sırasında, önceden hazırlamış olduğu soruların cümle yapıları ve sıralarını değiştirebilir. Ayrıca bazı konuların ayrıntısına girebilir veya sohbet havası içeren bir yöntem benimseyebilir (Yıldırım ve Şimşek, 2013).

Bu araştırmanın amacı doğrultusunda matematiksel, psikolojik ve pedagojik bileşenleri incelemek amacıyla yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu kapsamda "*M-İ Odaklı Görev Sorularının Çözümüne İlişkin Görüşme Formu"* hazırlanmıştır (Bkz. Ek 4). Görüşme formunda yer alan soruların her birinin oluşturulması için literatür taraması (makale, tezler, kitaplar) yapılmıştır. Literatür taraması sonucunda özellikle M-İ Analitik Çerçevesinin öğretmenlerin mesleki gelişimlerine yönelik olarak kullanıldığı Stylianides ve Silver (2009)'in çalışmalarından yararlanılmıştır. Bu kapsamda MÖA'nın matematiksel perspektiften çözüm süreçlerini açıklayabilecekleri, psikolojik perspektiften çözümlerine ilişkin algılarını ortaya koyabilecekleri; pedagojik perspektiften çözümlerin matematiksel nitelikleri ile algılarını kıyaslayabilmelerine yönelik sekiz soru hazırlanmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşmeler kapsamında ayrıca, MÖA çözümü sonlandırdıktan sonra sesli düşünmelerine ek olarak düşünme adımlarını tekrar açıklamalarına yönelik bir soru hazırlanmıştır.

Yapılandırılmış Görüşme: Bu görüşme yaklaşımında, görüşme gerçekleştirilmeden önce her sorunun dikkatli bir şekilde ve tam olarak kurgulanması gerekir. Sorulması istenen sorular önceden belirlenir ve görüşmede kullanılması düşünülen her türlü açıklama ve verilecek detaylar görüşme formuna yazılır. Her katılımcıya aynı sorular sorularak araştırmacı etkisinin en aza indirgenmesi amaçlanır. Bu sayede görüşme sırasında araştırmacının karar verme ve müdahalede bulunma ihtiyacı da en aza iner. Katılımcıların aynı sorulara cevap vermeleri, cevaplarının karşılaştırabilirliğini arttırır. Tüm bunlara ek olarak yapılandırılmış görüşmelerde, her katılımcıdan görüşmede yer alan konuların tümü ile ilgili bilgiler alınır (Patton, 2018).

Bu araştırmanın amacı doğrultusunda, MÖA'nın muhakeme ve ispat yapma süreçlerinde sergiledikleri üstbilişsel düzenleme süreçlerinin ortaya çıkarılması amacıyla kullanılan

bir yöntem yapılandırılmış görüşmelerdir. Bu kapsamda hazırlanan her bir davranış kartına yönelik görüşme soruları hazırlanmıştır (Bkz. Ek 5). Görüşme soruları hazırlanırken; Schraw ve Denission (1994), Wilson (2001), Wilson ve Clarke (2002, 2004) isimli araştırmacıların çalışmalarından yararlanılmıştır. Hazırlanan yapılandırılmış görüşme soruları alanında uzman üç öğretim üyesinin görüşlerine başvurularak davranış kartlarının bulunduğu üstbilişsel düzenleme kategorilerine uygunluğu ve dil-anlatım anlaşılırlığı açısından incelettirilmiştir. Yapılan değerlendirmeler sonucunda her bir uzman ile araştırmacı arasındaki uyum yüzdesi %100 bulunmuştur. Ayrıca dil-anlatım anlaşılırlığı açısından öneriler düzeltmeler görüşme sorularına son halleri verilmiştir. Yapılandırılmış görüşmeler kapsamında bir davranış kartına yönelik olarak hazırlanan sorular, ilgili davranış kartını seçtikleri takdirde sunulmuştur. Örneğin; planlama kategorisine uygun olarak hazırlanan üç davranış kartından ikisini seçen öğretmen adayına seçmediği karta yönelik olarak hazırlanmış olan soru sorulmamıştır.

3.4.5. Verilerin Toplanma Süreci

3.4.5.1. Hazırlık Süreci

Araştırmanın tasarlanması ve planının yapılması ile ilgili genel hazırlıklar tamamlandıktan sonra katılımcıların seçimi ve uygulamanın gerçekleştirileceği yer ile ilgili hazırlıklara geçilmiştir.

"Çalışma grubu" başlığı altında verilen bilgiler doğrultusunda katılımcılarla iletişime geçilmiştir (Bkz. 3.3.). Araştırma süreci içerisinde bulunmayı kabul eden MÖA ile bir araya gelinerek; araştırmanın içeriği, amacı, araştırma kapsamında kullanılacak yöntemler ve araştırma süreci hakkında bilgiler verilmiştir. Ayrıca süreci sağlıklı yürütebilmek adına onlardan nelerin beklendiğine de araştırmacı tarafından açıklanmıştır. Daha sonra *"Bilgilendirilmiş Gönüllü Katılım ve Video-Ses Kaydı İzin Formu"* hakkında bilgilendirme yapılmış ve bu form üç öğretmen adayı tarafından imzalanmıştır (Bkz. Ek 1).

Katılımcı seçimi tamamlandıktan sonra uygulamanın gerçekleştiği ortam ile ilgili hazırlıklara geçilmiştir. Uygulamanın gerçekleştiği ortam, Marmara Bölgesi'nde bulunan bir Devlet Üniversitesi'nin Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümü seminer odasıdır. İlgili seminer odası haftanın iki günü uygulama için ayrılmıştır.

Uygulama ortamının sessiz ve rahat bir yer olmasına önem verilmiştir. Araştırmacı her hafta, uygulamanın başlamasından bir saat önce uygulama ortamına gelmiş ve hazırlıklar yapmıştır. Masanın üzerine ilgili görev sorusunu içeren kağıdı bütünüyle kayıt altına alabilecek yakın kamera yerleştirmiştir. Araştırmacı ve katılımcı arasındaki iletişimi bütünüyle kayıt altına alacak genel kamera ise masanın başlangıç kısmına yerleştirmiştir. Ayrıca her uygulama ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınmıştır. Araştırmacı bireysel uygulamalarda, katılımcıların yanına oturup sürecin tamamını gözlemlemiştir. Grup uygulamalarında ise katılımcıların her uygulamada değişen sırada (çözümü yazan kişinin farklılık oluşturması nedeniyle) yan yana oturmaları istenmiştir ve araştırmacı karşılarına oturup süreci takip etmiştir.

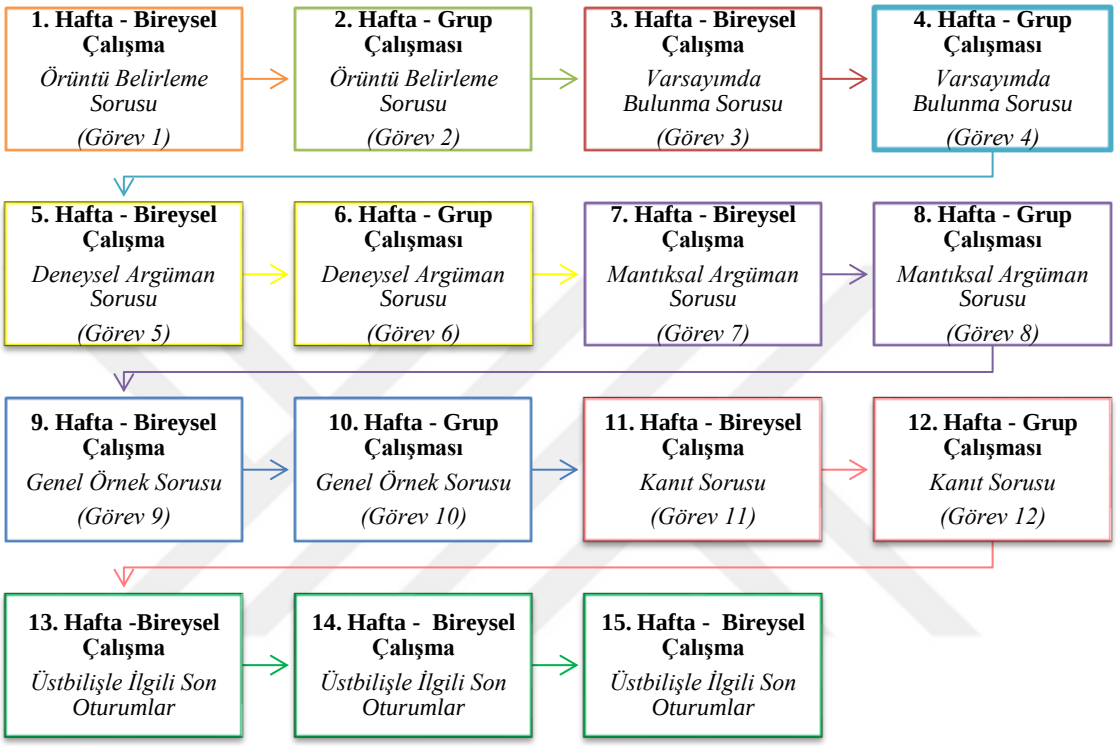
3.4.5.2. Pilot Uygulama

Pilot uygulama ile birer sorudan oluşan bireysel ve grup uygulaması gerçekleştirilmiştir. İlk olarak bireysel uygulama yapılmıştır. Masanın birbirinden uzak üç köşesine öğretmen adayları oturtularak, uygulama üç öğretmen adayı için aynı anda başlatılmıştır. Bu uygulama ile araştırmacının öğretmen adayları ile yaptığı konuşmalar ya da sorularına verdikleri cevaplar (kısık sesle olsa dahi) nedeniyle birbirlerinden etkilenerek çözümlerine yön verebildikleri gözlemlenmiştir. Gözlemlenen bu durum ile bireysel uygulamaların her bir öğretmen adayı için ayrı ayrı yapılmasına karar verilmiştir. Grup çalışması uygulaması ile MÖA'nın soruya ilişkin çözümlerini başlangıçta bireysel olarak çözüp sonradan çözümlerini karşılaştırdıkları ve ortak çözüm geliştirmeye çalıştıkları belirlenmiştir. Bu şekilde grup çalışması yapma konusunda deneyimlerinin eksik olduğu tespit edilerek grup çalışması konusunda araştırmacı yönlendirmesine ihtiyaç duydukları gözlemlenmiştir.

Sonuç olarak, pilot uygulama ile MÖA, araştırma uygulamasının nasıl gerçekleştirileceği ve kendilerinden beklenilenin ne olduğu konusunda fikir sahibi olmuşlardır. Araştırmacı da uygulamanın sürecinin nasıl olması gerektiğine dair planını gözden geçirme imkanı bulmuştur. Pilot uygulamadan elde edilen deneyimler sonucunda uygulama sürecine dair iyileştirmeler yapılmış ve araştırmacı tarafından oluşturulan uygulama takvimi katılımcıların istekleri ve önerileri doğrultusunda son halini alarak uygulamaya hazır duruma gelinmiştir.

3.4.5.3. Uygulama Süreci

Araştırmanın uygulama süreci, 2017 yılının Aralık ayının üçüncü haftasında başlamış 2018 yılının Nisan ayının son haftasında son bulmuştur. Araştırmanın uygulanma süreci Şekil 3. 3. deki gibi özetlenebilir.



Şekil 3. 3. Araştırmanın Uygulama Süreci

Uygulamalar bireysel ve grup oturumları ile ardışık olarak gerçekleştirilmiştir. Bireysel çalışmalar için haftanın iki günü, grup çalışmaları için haftanın bir günü uygulama yapılmıştır. Bireysel çalışmalarda adaylar birbirlerinden bağımsız olarak uygulamaya alınmıştır.

3.4.6. Uygulama Sırasında Araştırmacının Rolü

Nitel araştırmalarda araştırmacı, ikinci elden ve uzaktan bilgilere erişen bir kişiden ziyade konusuyla ilgili alanda zaman harcayarak alanı yakından tanıyamaya çalışan, araştırmaya dahil olan katılımcılarla yakından iletişim kuran, olup bitenleri alanda yaşayan kişidir. Yani araştırmacının gözlemleri ve yorumları, araştırmanın sonucunu belirleyen önemli bir faktör olarak ortaya çıkabilir. Nitel araştırmalarda araştırmacılara verilen bu esneklik,

araştırmacı rolünün araştırmalarda açık bir şekilde belirlenmesi gereğini ortaya çıkarmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2013).

Bu araştırmada araştırmacı, uygulama sürecini planlayan ve uygulama sürecinde gözlem yapan bir kişi rolündedir. Araştırmacı genel uygulama planını temele alarak uygulama sürecini her hafta ayrıntılı bir şekilde planlamıştır. Uygulama sırasında hazırladığı planlara uygun olarak hareket etmiş ve uygulama ortamına yönelik gerekli veri toplama araçlarını ve teknik işlemleri (video-ses kayıt cihazlarının kurulması ve kontrolü) hazır duruma getirmiştir. Uygulama sonrasında toplanan verileri haftalık olarak gözden geçirmiştir. Uygulama sürecinde, gerekli olmadıkça MÖA, çözümlerini bitirene kadar yönlendirme yapmamak için onlarla iletişim kurmamaya dikkat etmiştir. Bireysel uygulamalarda, çözüm sürecini sesli olarak dile getirmeyen öğretmen adaylarına "sesli olarak düşünmeye devam et" uyarısında bulunmuştur. Gerçekleştirilen ilk iki grup uygulamalarında, MÖA'nın grup olarak soruyu çözmeye çalışmayıp daha çok bireysel olarak hareket ettiklerini gözlemlemiştir. Bu durumda grup olarak soruyu çözebilmeleri için gerekli uyarılarda bulunmuştur. MÖA'nın çözüm süreçleriyle ilgili sormak istedikleri sorularının olması halinde, vereceği cevabın onları yönlendirmemesi gerektiğine dikkat etmiştir. Çözüm sürecini bitiren MÖA'ya görüşmeler kapsamında soracakları soruların önceden hazırlanmış şekillerine bağlı kalmaya özen göstermiştir.

Nitel araştırmacılar her ne kadar katılımcılarını etkilememek için çaba gösterseler de belirli bir ölçüde etkilerin olacağı kaçınılmazdır. Uygulama sürecinde, çeşitli tavır ve ifadelerinin (gülümseme, göz göze gelme, çok ciddi durma, başını sallama vb.) katılımcılar üzerindeki etkilerinin varlığını kabul etmek gerekir. Katılımcılar, araştırmacıların, bu tavır ve ifadelerinden az ya da çok etkilenebilir. Bu noktada araştırmacının yapması gereken, bu etkinin farkında olarak, araştırma bulgularını etkileyen kısımlarını raporunda okuyuculara açıklamaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Bu araştırmada da bahsedilen bu hususlara dikkat edilerek bulgular raporlanmıştır.

3.5. Verilerin Analizi

Nitel analiz, verileri bulgulara çevirme işlemidir ama bu işlemi yapmanın bir formülü yoktur. İşlem sürecinde rehberlik sağlanabilir ama bunun bir reçetesi yoktur. Yön gösterilebilir ve gösterilecektir de, ama varılacak son nokta her bir araştırmacı için

özgünlüğünü korur ve bu noktanın ne olduğu sadece oraya varıldığı zaman bilinebilir (Patton, 2018, s. 432).

Nitel analizin zorluğu, hacimli verilerin anlamlandırılmasında yatar. Bu zorluklar; ham bilginin hacminin azaltılmasını, gerekli bilginin gereksizden ayırt edilmesini, bir çerçeve oluşturulmasını içerir ve nitel araştırma da amaçlı örneklem seçmenin temeli haline gelir. Durum analizi de, derinlemesine çalışma ve karşılaştırma yapmak için verinin özel durumlara göre düzenlenmesini içerir (Patton, 2018).

Araştırma sonucunda elde edilen veriler betimsel ve içerik analizi yaklaşımlarına göre çözümlenmiştir. Yıldırım ve Şimşek (2013), Strauss ve Corbin (1990)'nin çalışmalarından yararlanarak bu yaklaşımlara açıklık getirmeye çalışmışlardır (s. 255):

> Betimsel analiz, içerik analizine göre daha yüzeyseldir ve daha çok araştırmanın kavramsal yapısının önceden açıkça belirlendiği araştırmalarda kullanılır. İçerik analizi, toplanan verilerin derinlemesine analiz edilmesini gerektirir ve önceden belirgin olmayan temaların ve boyutların ortaya çıkarılmasına olanak tanır.

Betimsel analizde amaç, verileri düzenli bir şekilde yorumlarla bütünleştirmektir. Bu nedenle öncelikli olarak, elde edilen veriler sistematik bir şekilde betimlenir. Daha sonra yapılan betimlemeler yorumlanarak açıklanır. Neden-sonuç ilişkileri incelenir ve çeşitli sonuçlara ulaşılır. Ortaya çıkan temaların ilişkilendirilerek anlamlandırılması ve ileriye yönelik tahminlerde bulunması da araştırmacının yapacağı yorumların boyutları arasında yer alabilir. İçerik analizinde ise amaç, elde edilen verilere açıklık getirebilecek kavramlara ve ilişkilere ulaşmaktır. Bu amaç doğrultusunda öncelikli olarak elde edilen verilerin kavramsallaştırılması gerekir. Daha sonra ortaya çıkan kavramlar mantıklı bir şekilde düzenlenir ve bunlara göre verileri açıklayan temaların tespit edilmesi gerekir (Yıldırım ve Şimşek, 2011).

Araştırma sürecinde elde edilen bulgular matematiksel, psikolojik, pedagojik ve üstbilişsel düzenleme süreçleri bağlamında analiz edilmiştir. Matematiksel, psikolojik ve pedagojik bileşen analizleri Stylianides (2008)'in M-İ Analitik Çerçevesi temele alınarak yapılmış ve bu araştırmada Tablo 3.4. de görüldüğü şekliyle kullanılmıştır.

Tablo 3. 4. M-İ Analitik Çerçevesi

Muhakeme ve İspatlama (Stylianides, 2008)

Matematiksel Bileşen	Matematiksel genelleme yapma		Matematiksel iddialara destek sağlama	
	Örüntü belirleme	Varsayımda bulunma	İspat	İspatlanmamış argüman
	*Makul örüntü *Kesin örüntü	*Varsayım	*Genel örnek *Kanıt	*Deneysel argüman *Mantıksal argüman
Psikolojik Bileşen	Çözüm yapan kişinin ispata ilişkin matematiksel algısı nedir?			
Pedagojik Bileşen	İspatın matematiksel doğası çözüm yapan kişinin bu nitelikteki algısı ile nasıl kıyaslanıyor? İspatın matematiksel doğası çözüm yapan kişi için anlaşılır duruma nasıl gelebilir?			

3.5.1 M-İ Odaklı Görev Sorularına İlişkin Matematiksel Bileşen Analizi

1. ***Araştırma Sorusu**: M-İ sürecine yönelik farklı kategorilerdeki ispat görevleri matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerini nasıl etkilemektedir?*

Tablo 3. 5. Birinci Araştırma Sorusunun Veri Analiz Bilgileri

Alt Sorular	Veri Toplama Araçları	Veriler	Kodlama	Analiz
Bireysel çalışmalarda bu süreçler nasıl ortaya çıkmıştır?	* M-İ Odaklı Görev Soruları * Görüşme * Video-Ses Kaydı	* Matematik Öğretmen Adaylarının Çözümleri * Video-Ses Kaydı Transkriptleri	M-İ Analitik Çerçevesi (Stylianides, 2008)	Betimsel Analiz
Grup çalışmalarında bu süreçler nasıl ortaya çıkmıştır?	* M-İ Odaklı Görev Soruları * Görüşme * Video-Ses Kaydı	* Matematik Öğretmen Adaylarının Çözümleri * Video-Ses Kaydı Transkriptleri	M-İ Analitik Çerçevesi (Stylianides, 2008)	Betimsel Analiz
Bireysel çalışmalarda matematik öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar M-İ Analitik Çerçevesindeki hangi kategorilerle uyuşmaktadır?	* M-İ Odaklı Görev Soruları * Görüşme * Video-Ses Kaydı	* Matematik Öğretmen Adaylarının Çözümleri * Video-Ses Kaydı Transkriptleri	M-İ Analitik Çerçevesi (Stylianides, 2008)	Betimsel Analiz
Grup çalışmalarında matematik öğretmen adaylarının verdikleri cevaplar M-İ Analitik Çerçevesindeki hangi kategorilerle uyuşmaktadır?	* M-İ Odaklı Görev Soruları * Görüşme * Video-Ses Kaydı	* Matematik Öğretmen Adaylarının Çözümleri * Video-Ses Kaydı Transkriptleri	M-İ Analitik Çerçevesi (Stylianides, 2008)	Betimsel Analiz

Matematik öğretmen adaylarının muhakeme ve ispat yapma süreçlerinin matematiksel perspektiften incelenmesi amacıyla geliştirilen birinci araştırma sorusuna cevap bulabilmek için M-İ Odaklı görev sorularına verilen cevaplar ve yarı yapılandırılmış görüşmeler incelenmiştir. Yapılan incelemeler sonucunda verileri analiz etmek amacıyla takip edilen süreç şu şekilde gerçekleştirilmiştir:

Betimsel analiz amacıyla çerçeve oluşturulması: MÖA'nın matematiksel muhakeme ve ispat yapma süreçlerini matematiksel perspektiften inceleyebilmek için Stylianides (2008) tarafından geliştirilen M-İ Analitik Çerçevesinin matematiksel bileşen bölümünden faydalanılmıştır. Çerçevenin matematiksel bileşen kapsamındaki kategorilere ilişkin araştırmada karşılığı bulunan tanımlar ifade edilerek analiz için Muhakeme ve İspat Yapma Sürecine İlişkin Matematiksel Bileşen Çerçevesi oluşturulmuştur (Bkz. Tablo 3.8). Bu çerçeve oluşturulurken; Stylianides (2008) tarafından ortaya konulan kategorilerin yanı sıra araştırma verileri doğrultusunda ihtiyaç duyulan; çözüm yok ve sınıflandırılmamış çözüm kategorileri eklenmiştir. Oluşturulan çerçeve ve MÖA'nın çözümlerinin kategorilere uygunluğunu incelemek amacıyla alanında uzman iki öğretim üyesinin görüşlerine başvurulmuştur. Her iki uzmanla yapılan görüşme neticesinde, araştırmacı ve uzmanlar arasındaki uyum yüzdesi Miles ve Huberman (1994)'a göre % 97 bulunmuştur.

Verilerin işlenmesi: Bu aşamada, Muhakeme-İspatlama Sürecine İlişkin Matematiksel Bileşen Çerçevesine göre veriler okunmuş ve düzenlenmiştir. Veriler tanımlama amacıyla seçilerek anlamlı ve mantıklı bir şekilde bir araya getirilmeye çalışılmış ve eş zamanlı olarak bulguların yazımında kullanılacak doğrudan alıntılar belirlenmiştir.

Katılımcıların muhakeme ve ispat yapma süreçlerini incelemeye yönelik sorular oluşturulurken her ne kadar M-İ Analitik Çerçevesindeki kategoriler dikkate alınmış olsa da analiz sırasında, MÖA'nın verdikleri cevapların ilgili kategoride bulunan tanımlardan hangisine girebileceğine dikkat edilmiştir. Örneğin, deneysel argüman kategorisine uygun olarak hazırlanan bir soruda katılımcının cevabı kanıt kategorisine girecek tanıma uygunsa kanıt kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu nedenle bulgu yazımında, M-İ odaklı görev sorularına uygulamanın şekli ve sırasına göre Tablo 3.6. da ki gibi isimler verilmiştir. Bu değerlendirme yöntemine göre örüntü belirleme, varsayımda bulunma, deneysel argüman sağlama, mantıksal argüman, genel örnek ve kanıt kategorilerine

uygun olan MÖA'nın cevapları değerlendirilmiştir. Bu kategorilere ek olarak, alınan uzman görüşleri doğrultusunda; matematiksel olarak kabul edilebilir olmayan çözümler için çözüm yok kategorisi ve matematiksel anlamda kabulü olan ancak belirlenen kategorilerden hiçbirine uygun olmayan çözümler için ise sınıflandırılamamış çözüm kategorisi eklenerek değerlendirilmiştir.

Tablo 3. 6. M-İ Odaklı Görev Sorularının Veri Analizinde Kullanılan İsimlendirmeleri

Bireysel Uygulamalar			**Grup Uygulamaları**		
Görev 1	**BU 1**	Bireysel Uygulama 1. Soru	**Görev 2**	**GU 1**	Grup Uygulaması 1. Soru
Görev 3	**BU 2**	Bireysel Uygulama 2. Soru	**Görev 4**	**GU 2**	Grup Uygulaması 2. Soru
Görev 5	**BU 3.1**	Bireysel Uygulama 3. 1. Soru	**Görev 6**	**GU 3.1**	Grup Uygulaması 3.1. Soru
Görev 7	**BU 3.2**	Bireysel Uygulama 3.2. Soru	**Görev 8**	**GU 3.2**	Grup Uygulaması 3.2. Soru
Görev 9	**BU 4.1.**	Bireysel Uygulama 4.1. Soru	**Görev 10**	**GU 4.1**	Grup Uygulaması 4.1. Soru
Görev 11	**BU 4.2**	Bireysel Uygulama 4.2. Soru	**Görev 12**	**GU 4.2**	Grup Uygulaması 4.2. Soru

Sınıflandırılamamış ve çözüm yok kategorisi kapsamına giren çözümler "0" puan ile derecelendirilmiştir. Ayrıca çözümler, gerek kategori tanımlarına uygunlukları gerekse de matematiksel nitelikler (gerekçelendirme, ilişkilendirme, temsiller) ile bütünlenmiş bir şekilde açıklanmışsa beklenen tam çözüm olarak değerlendirilmiş ve "3" puan ile derecelendirilmiştir. Kategoriye uygunluğu bulunan ancak çözümde matematiksel nitelikler kısmi eksiklikler bulunması halinde yeterli çözüm olarak değerlendirilmiş ve "2" puan ile derecelendirilmiştir. Çözümün kategoriye uygunluğu mevcut ancak büyük oranda eksiklikler taşıyorsa geliştirilebilir çözüm olarak değerlendirilmiş ve "1" puan ile derecelendirilmiştir. Bu derecelendirmeye ait bilgiler Tablo 3.7 de verilmiştir.

Tablo 3. 7. M-İ Odaklı Görev Sorularına İlişkin Geliştirilen Çözümlerin Derecelendirme Ölçütleri

Ölçütler	Çözüm Yok & Sınıflandırılamamış Çözüm	Geliştirilebilir Çözüm	Yeterli Çözüm	Beklenen Tam Çözüm
	"0" Puan	**"1" Puan**	**"2" Puan**	**"3" Puan**
Çözümde Kullanılan Bilgilerin Kabul Edilebilirliği	Matematiksel anlamda kabul edilebilir bilgiler içermeyen çözüm.	Matematiksel anlamda kabul edilebilir bilgiler içeren çözüm.	Matematiksel anlamda kabul edilebilir bilgiler içeren çözüm.	Matematiksel anlamda kabul edilebilir bilgiler içeren çözüm.
Çözümün M-İ Çerçevesi Kategorilerine Uyumu	Kategorilerden herhangi birine uymayan çözüm.	Kategorilerden herhangi birine uyan çözüm.	Kategorilerden herhangi birine uyan çözüm.	Kategorilerden herhangi birine uyan çözüm.
Çözümün Matematiksel Niteliği	Matematiksel nitelik anlamında eksiklik taşıyan çözüm.	Matematiksel nitelik anlamında eksiklik taşıyan çözüm.	Matematiksel nitelik anlamında eksiklik taşımayan çözüm.	Matematiksel nitelik anlamında eksiklik taşımayan çözüm.
Çözüme İlişkin Açıklamaların Durumu	Açıklamaların eksik olduğu çözüm.	Açıklamaların eksik olduğu çözüm.	Açıklamaların eksik olduğu çözüm.	Açıklamaların tam olduğu çözüm.

Matematiksel bileşen kapsamında toplanan verilerin analizi ve raporlaştırılmasında, MÖA'nın muhakeme ve ispat yapma süreçlerine yönelik bilgilerin verilmesi amaçlanmıştır. Bu kapsamda, matematiksel perspektiften yapılan incelemeler ile hem bireysel hem de grup uygulamalarında MÖA'nın hangi kategorilerde ne şekilde çözümler geliştirdikleri, muhakeme ve ispat yapma süreçlerinin nasıl gerçekleştiği ve ispat yapma becerilerinin nasıl olduğuna ilişkin incelemeler yapılmıştır.

Verilerin tanımlanması: Bu aşamada, düzenlenen veriler tanımlanarak gerekli görülen yerlerde doğrudan alıntılarla desteklenmiştir.

Verilerin yorumlanması: Bu aşamada, tanımlanan bulgular açıklanmış, ilişkilendirilmiş ve anlamlandırılmıştır. Bulgular arasındaki neden-sonuç ilişkileri açıklanarak, gerekli görülen yerlerde katılımcıların farklı çözümleri arasında karşılaştırmalar yapılmıştır.

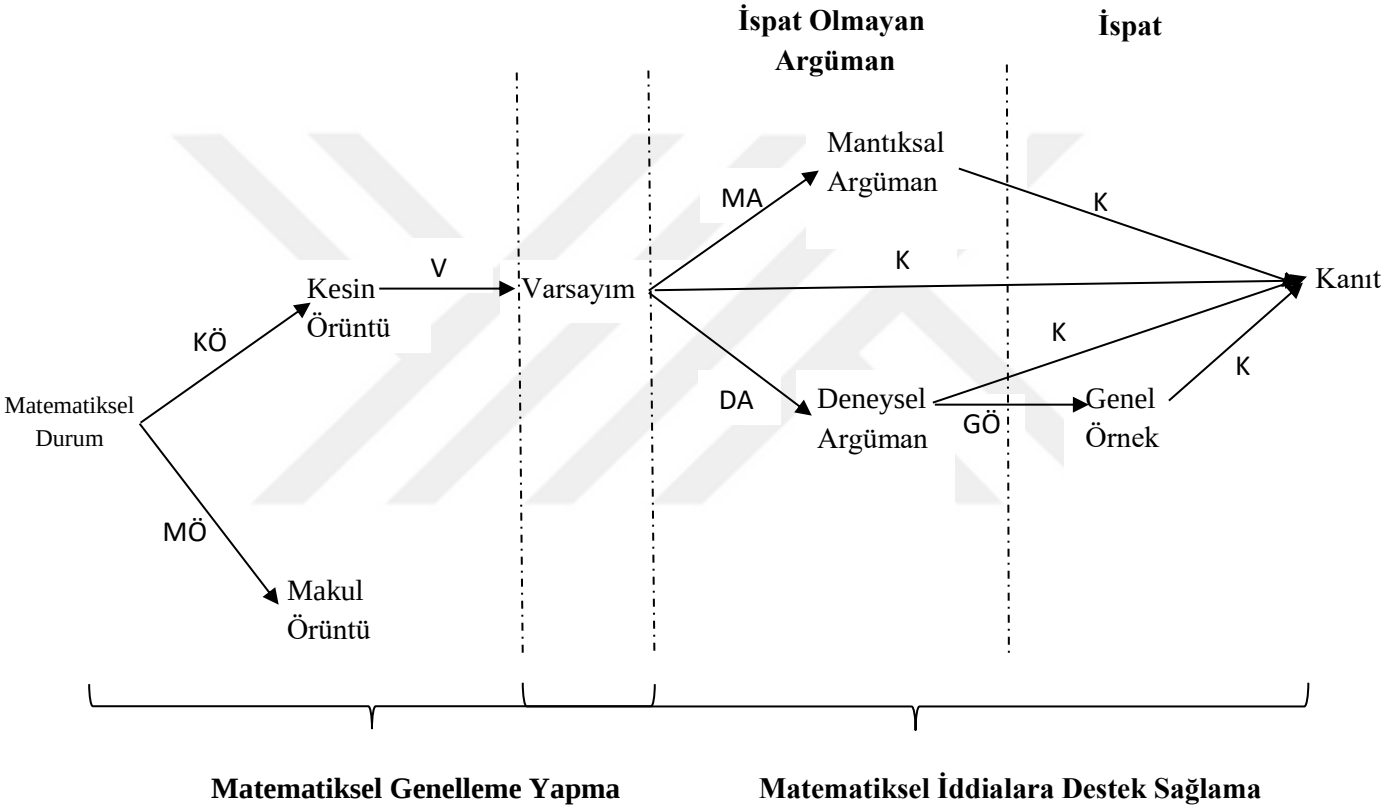
Matematiksel bileşen kapsamında toplanan verilerin analizi ve raporlaştırılmasında, MÖA'nın muhakeme ve ispat yapma süreçlerine yönelik bilgilerin verilmesi amaçlanmıştır. Bu kapsamda, matematiksel perspektiften yapılan incelemeler ile hem bireysel hem de grup uygulamalarında MÖA'nın hangi kategorilerde ne şekilde çözümler

geliştirdikleri, muhakeme ve ispat yapma süreçlerinin nasıl gerçekleştiği ve ispat yapma becerilerinin nasıl olduğuna ilişkin incelemeler yapılmıştır.

Tablo 3. 8. Muhakeme ve İspat Yapma Sürecine İlişkin Matematiksel Bileşen Çerçevesi

Kategori Sınıflaması		Kodlar	Tanım
Çözüm Yok		**ÇY**	Kabul edilebilir düzeyde herhangi bir çözüm sunulmadı.
Sınıflandırılamamış çözüm		**SÇ**	Bir genelleme ya da ispatlanması gereken bir çözüm sunulmadı.
Örüntü	**Makul Örüntü**	**MÖ**	Veri setine uyan ancak kesin deliller sağlamayan bir örüntü sağlandı.
	Kesin Örüntü	**KÖ**	Veri setine uyan ve kesin deliller sağlayan örüntü, genelleme ve gerekçelendirme bilgisi içerecek şekilde sağlandı.
Varsayım		**V**	Tam bir delile dayanan genel bir ilişki hakkında muhakeme edilmiş bir hipotez sağlandı.
Deneysel Argüman		**DA**	Bir iddianın temelde doğruluğunu göstermek için olası tüm durumların uygun bir alt kümesinin incelenmesi sağlandı.
Mantıksal Argüman		**MA**	Veri setine uyan uygun bir genelleme sağlandı. Ancak argümanda kullanılan bir veya daha fazla durum doğrulanmadı ve kabul edilmiş önemli tüm matematiksel gerçeklere açık bir referans olamadı.
Genel Örnek		**GÖ**	Bir iddianın temelde doğruluğunu göstermek için olası tüm durumların temsilcisi olarak görülen genel bir argüman sağlandı.
Kanıt		**K**	Bir iddianın temelde doğruluğunu göstermek için belirli bir örneğin ya da durumun temsiline dayanmayan ispat sağlandı.

Her bir MÖA ve grup uygulamaları için Tablo 3.8. de verilen çerçeve dikkate alınarak yapılan çözümler değerlendirilmiştir. Yapılan değerlendirmeler sonucunda uygulama süresi boyunca çözümü yapılan her bir M-İ görev sorusu için MÖA'nın muhakeme ve ispat yapma süreçlerinin nasıl olduğuna ilişkin daha net bilgilerin verilmesi önemli bir ihtiyaç olarak görülmüştür. Bu ihtiyaca cevap bulması amacıyla Şekil 3.4 de hazırlanan *Muhakeme ve İspat Yapmaya İlişkin Süreç Akışı* ile MÖA için bu sürecin nasıl gerçekleştiğinin bilgisi verilmeye çalışılmıştır.



Şekil 3. 4. Muhakeme ve İspat Yapmaya İlişkin Süreç Akışı

* **MÖ:** Gerekçelendirilmemiş örüntüler

* **KÖ:** Gerekçelendirilmiş örüntüler

*** V:** Muhakeme edilmiş hipotez

*** DA:** Olası tüm durumların uygun alt kümesi

*** MA:** Kabul edilmiş tüm matematiksel gerçekliklerin uygum bir alt kümesi

* **GÖ:** Olası tüm durumların temsilcisi olarak görünen genel bir argüman

*** K:** Belirli bir örnek ve durumun temsiline dayanmayan, kabul edilmiş tüm matematiksel gerçekleri içeren argüman

3.5.2 M-İ Yapma Sürecinde Psikolojik, Pedagojik Bileşen ve Üstbilişsel Düzenleme Süreçlerinin Analizi

Tablo 3. 9. İkinci, Üçüncü ve Dördüncü Araştırma Sorularının Veri Analiz Bilgileri

Araştırma Soruları	Veri Toplama Araçları	Veriler	Kodlama	Analiz
2. Araştırma Sorusu M-İ sürecine yönelik kategorilerdeki ispat görevleri matematik öğretmen adaylarının algılarını nasıl etkilemektedir?	*M-İ Odaklı Görev Soruları *Yarı Yapılandırılmış Görüşme *Video-Ses Kaydı	* Matematik Öğretmen Adaylarının Çözümleri * Video-Ses Kaydı Transkriptleri	*M-İ Analitik Çerçevesi (Stylianides, 2008) *Gray (2006)	İçerik Analizi
3. Araştırma Sorusu M-İ sürecine yönelik kategorilerdeki ispat görevlerinin matematiksel nitelikleri matematik öğretmen adaylarının algıları ile nasıl kıyaslanmaktadır?	*M-İ Odaklı Görev Soruları *Yarı Yapılandırılmış Görüşme *Video-Ses Kaydı	* Matematik Öğretmen Adaylarının Çözümleri * Video-Ses Kaydı Transkriptleri	*M-İ Analitik Çerçevesi (Stylianides, 2008)	İçerik Analizi
4. Araştırma Sorusu: Matematik öğretmen adaylarının M-İ sürecine yönelik kategorilerdeki ispat görevlerini yaparken ortaya çıkan üstbilişsel süreçler nelerdir ve ispat yapma sürecini nasıl etkilemektedir?	* Matematik Öğretmen Adaylarının Sesli Düşünmeleri * Davranış Kartı Sıralamaları *Yapılandırılmış Görüşmeler * Video-Ses Kaydı Transkriptleri	* Matematik Öğretmen Adaylarının Sesli Düşünmeleri * Davranış Kartı Sıralamaları *Yapılandırılmış Görüşmeler * Video-Ses Kaydı Transkriptleri	*Üstbilişsel Düzenleme Kategorileri (Schraw ve Dennison, 1994)	İçerik Analizi

MÖA'nın muhakeme ve ispat yapma süreçlerinin psikolojik ve pedagojik perspektiften incelenmesi amacıyla geliştirilen ikinci ve üçüncü araştırma sorularına cevap bulabilmek için M-İ Odaklı görev sorularına verilen cevaplar ve yarı yapılandırılmış görüşmeler incelenmiştir. Ayrıca, MÖA'nın muhakeme ve ispat yapma sürecinde sergiledikleri üstbilişsel düzenleme süreçlerinin incelenmesi amacıyla geliştirilen dördüncü araştırma sorusuna cevap bulabilmek için MÖA'nın sesli düşünmeleri, davranış kart sıralamaları ve seçtikleri her bir karta yönelik oluşturulan yapılandırılmış görüşme sorularına verdikleri cevaplar incelenmiştir. Yapılan incelemeler sonucunda verileri analiz etmek amacıyla takip edilen süreç şu şekilde gerçekleştirilmiştir:

Verilerin kodlanması ve temaların bulunması: Bu aşamada, elde edilen bilgiler incelenerek anlamlı bölümlere ayrılmış ve her bölümün kavramsal olarak ifade ettiği anlam bulunmaya çalışılmıştır.

İkinci araştırma sorusuna ilişkin veriler analiz edilmeden önce; M-İ Analitik Çerçevesindeki (Stylianides, 2008) psikolojik bileşen tanımı ile Gray (2006) tarafından öğretmen adaylarının ispat algılarına yönelik geliştirdiği tanımlamalarından yararlanılmıştır. Bu kapsamda matematiksel muhakeme ve ispat yapma sürecine yönelik algıların incelenmesi amacıyla; farklı çözüm geliştirme, çözüm niteliği, çözüm geçerliliği ve çözüm doğruluğundan oluşan sorulara verilen yanıtlar incelenerek elde edilen veriler incelenmiştir. Sıklıkla tekrarlanan veriler kod olarak belirlenmiştir. Belirlenen kodlar neticesinde; strateji, çözüm niteliği ve bilginin niteliği temalarının ortaya konulmuştur.

Üçüncü araştırma sorusuna ilişkin veriler analiz edilmeden önce; M-İ Analitik Çerçevesindeki (Stylianides, 2008) pedagojik bileşen tanımından yararlanılmıştır. Bu kapsamda matematiksel muhakeme ve ispat yapma sürelerinde ispatın doğasına ve ispata ilişkin pedagojik alan bilgileri bakış açısına göre elde edilen veriler incelenmiştir. Bu kapsamda elde edilen kodlar neticesinde; içerik, öğretim, öğrenci ve müfredat bilgisinden oluşan temalar geliştirilmiştir.

Dördüncü araştırma sorusuna ilişkin veriler analiz edilmeden önce; Schraw ve Dennision (1994) tarafından ortaya koyulan planlama, bilgi yöntemi, izleme, hata ayıklama ve değerlendirmeden oluşan üstbilişsel düzenleme süreçlerine yönelik kategoriler dikkate alınarak veri toplama araçlarının hazırlanma prosedürü takip edilmiştir. Bu prosedüre bağlı olarak davranış kartları ve her bir karta yönelik yapılandırılmış görüşme soruları oluşturulduğu için temalarda bu kategorilere bağlı kalınmıştır. Bu kapsamda MÖA'nın matematiksel muhakeme ve ispat yapma süreçlerinde sergiledikleri üstbilişsel düzenleme süreçlerine yönelik olarak elde edilen veriler, bu temalara karşılık gelen kodlar ile belirlenmiştir.

İkinci, üçüncü ve dördüncü araştırma soruları kapsamına giren ve transkripti yapılan veriler okunarak, kendi içinde anlamlı bir bütün oluşturan bölümler araştırmacı tarafından kodlanmıştır. Araştırmacı tüm verileri kodladıktan sonra bir kod listesi geliştirilmiş ve anlam bakımından ilişkili olan verileri bir araya getirerek ilişkilendirilmiştir. İlişkilendirmiş olduğu kodları bir araya getirerek incelemiş ve kodlar arasındaki ortak yönleri bularak temalar kategorize edilmiştir (psikolojik ve pedagojik bileşen analizlerinde). Ayrıca üstbilişsel süreçlerin analizi için de önceden oluşturmuş olduğu temalarla karşılaştırarak kategorize etmiştir. Tematik kodlama yapılan bu aşamada ortaya

çıkan kodların benzerlik ve farklılıkları saptanmış ve buna göre birbiriyle ilişkili kodlar bir araya getirilerek önceden oluşturulmuş olan temalar genişletilmiştir. Tematik kodlama yaparken, ortaya konulan temanın altında yer alan verilerin anlamlı bir bütün oluşturup oluşturmadıklarına dikkat edilmiştir. Dikkat edilen bir diğer husus ise ortaya koyulan temaların, araştırmada ortaya çıkan verileri tümüyle açıklayabilecek olmaları olmuştur.

Verilerin kodlara ve temalara göre düzenlenmesi ve tanımlanması: Bu aşamada verilerin anlaşılır bir dille açıklanarak sunulmasına önem verilmiştir. Bunu sağlayabilmek için birbirileriyle ilişkili tema ve kodları elde edilen bulgular aracılığıyla doğrudan sunulmuştur. Ayrıca araştırmacı, görüş ve yorumlarını yer vermeden ortaya çıkan bulguları işlenmiş bir şekilde raporlaştırmıştır.

Psikolojik bileşen kapsamında toplanan verilerin analizi ve raporlaştırılmasında, MÖA'nın muhakeme ve ispat yapma süreçlerinde geliştirdikleri çözümlere ilişkin algılarının incelenmesi hedeflenmiştir. Bu kapsamda, MÖA'nın matematiksel muhakeme ve ispat yapma sürecinde farklı çözümler geliştirme, çözüm doğruluğu, çözüm niteliği ve çözüm geçerliğine ilişkin algı bileşenlerine yönelik olarak yarı yapılandırılmış görüşmelerde sorulan sorulara ilişkin alınan cevaplar incelenmiştir. İncelenen cevaplar doğrultusunda belirlenen algı temaları ve kodları doğrultusunda Muhakeme ve İspat Yapma Sürecine İlişkin Psikolojik Bileşen Çerçevesi oluşturulmuştur (Bkz. Tablo 3.10.). Bu doğrultuda, M-İ kategorilerinin her biri için belirlenen kodların hangilerinin sıklıkla kullanıldığı tespit edilerek karşılaştırmalar yapılmıştır. Böylece M-İ odaklı görev sorularının her birinde MÖA'nın hangi algılarının baskın ya da düşük olduğu, sorulara ilişkin bakış açıları ve var olan ispat yapma becerileri yardımıyla değerlendirilerek karşılaştırılmıştır.

Pedagojik bileşen kapsamında toplanan verilerin analizi ve raporlaştırılmasında, MÖA'nın muhakeme ve ispat yapma süreçlerinde geliştirdikleri çözümlere ilişkin ispatın doğasını ve ispata ilişkin pedagojik alan bilgilerinin incelenmesi hedeflenmiştir. Bu kapsamda, MÖA'nın matematiksel muhakeme ve ispat yapma sürecinde ispatın doğası ve ispata ilişkin pedagojik alan bilgilerinin incelenmesine yönelik olarak yarı yapılandırılmış görüşmelerde sorulan sorulara ilişkin alınan cevaplar incelenmiştir. İncelenen cevaplar doğrultusunda belirlenen pedagoji temaları ve kodları doğrultusunda Muhakeme ve İspat Yapma Sürecine İlişkin Pedagojik Bileşen Çerçevesi oluşturulmuştur

(Bkz. Tablo 3.11.). Bu doğrultuda, M-İ kategorilerinin her biri için belirlenen kodların hangilerinin sıklıkla kullanıldığı tespit edilerek karşılaştırmalar yapılmıştır. Böylece M-İ odaklı görev sorularının her birinde MÖA'nın hangi algılarının baskın ya da düşük olduğu, sorulara ilişkin bakış açıları ve var olan ispat yapma becerileri yardımıyla değerlendirilerek karşılaştırılmıştır.

Üstbilişsel düzenleme süreçleri kapsamında toplanan verilerin analizi ve raporlaştırılmasında, MÖA'nın muhakeme ve ispat yapma süreçlerinde sergiledikleri üstbilişsel düzenlemelerinin nasıl ortaya çıktığının incelenmesi hedeflenmiştir. Bu kapsamda MÖA'nın sıraladıkları davranış kartları ve seçim yapıp sıraladıkları her bir karta yönelik olarak hazırlanan soruların yöneltilmesini içeren yapılandırılmış görüşmeler ile muhakeme ve ispat yapma sürecinde sergiledikleri üstbilişsel düzenleme süreçlerinin nasıl olduğu belirlenmiştir. Yapılan incelemeler sonucunda üstbilişsel düzenleme süreçlerine ilişkin üstbilişsel düzenleme süreç temaları (planlama, bilgi yöntemi, izleme, hata ayıklama ve değerlendirme) ve üstbilişsel düzenleme süreç kodlarının (Bkz. Şekil 3.5. ve Tablo 3.12.) neler olduğu belirlenmiştir. Belirlenen üstbilişsel süreç temaları ile her bir MÖA için muhakeme ve ispat yapma sürecinde sergiledikleri üstbilişsel düzenleme süreçlerinin hangi aşamalarda gerçekleştiğinin bilgisi verilmiştir. Ayrıca bu aşamalara ilişkin bilgiler sunulurken; her bir MÖA'nın, M-İ odaklı görev sorularının çözümü sırasındaki araştırmacı gözlemleri ve video-ses kayıtlarından transkripti yapılan sesli düşünme protokolleri aracılığıyla düşünme süreçlerine ilişkin verilerden yararlanılmıştır. Böylece MÖA adaylarına göre ortaya konulan üstbilişsel düzenleme süreçleri ile M-İ odaklı görev sorularının çözüm süreci içindeki eylemleri karşılaştırılarak aradaki uyuşma ve tutarsızlıkların nedenleri üzerinde yorumlarda bulunulmuştur. Daha sonra bu aşamaların, M-İ kategorilerinin her biri için belirlenen üstbilişsel düzenleme süreç kodları çerçevesinde hangilerinin sıklıkla kullanıldığı tespit edilerek karşılaştırmalar yapılmıştır. Böylece M-İ odaklı görev sorularının her birinde MÖA'nın sergiledikleri üstbilişsel düzenleme süreçleri tema ve kodlarından hangilerinin baskın ya da düşük olduğu ve var olan ispat yapma becerileri yardımıyla değerlendirilerek karşılaştırılmıştır.

Bulguların yorumlanması: Bu aşamada, toplanan verilere anlam kazandıracak açıklamalar yapılmaya çalışılmıştır. Bu kapsam da; bulgulara arasındaki ilişkiler

açıklanmış, bulgulardan bir takım sonuçlar çıkarılarak neden-sonuç ilişkisi kurulmuş ve elde edilen sonuçların önemine ilişkin açıklamalar yapılmıştır.

Tablo 3. 10. Muhakeme ve İspat Yapma Sürecine İlişkin Psikolojik Bileşen Çerçevesi

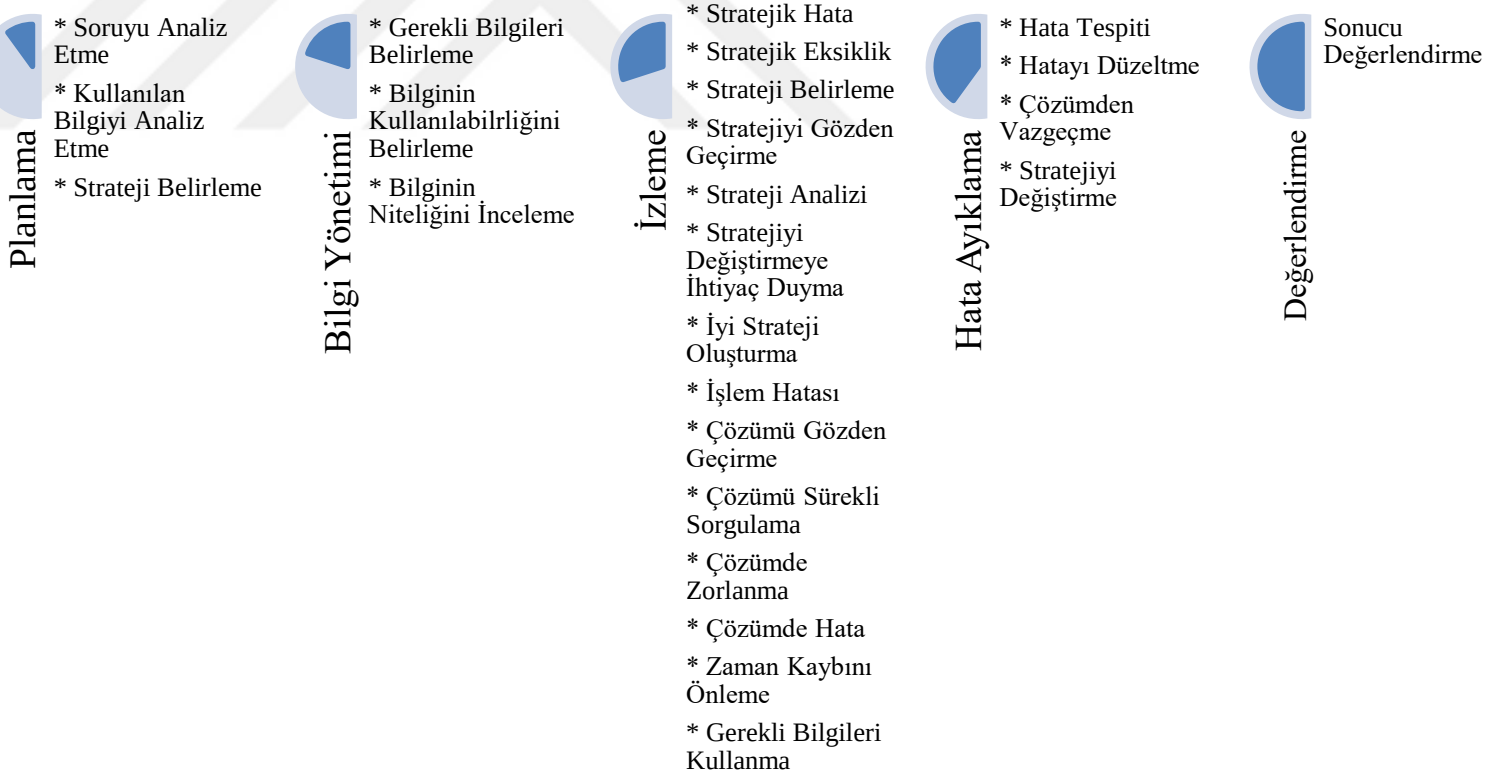
Temalar	Kodlar	Uygulamadan Örnek İfadeler
Strateji	**Farklı Temsil**	[...] sözel açıklama, [...] farklı modeller,
	Temsilin Güçlendirilmesi	[...] sözel ifadelerle destekleme, [...] farklı şekillerinde kullanımı, [...] harf temsili, [...] benzer temsili kullanma, [...] eksik kalan, [...] ekleme, [...] stratejimi açıklayabilmem lazım [...]açıklama eklemem lazım, [...]dikkatimden kaçanları eklemem lazım
	Bilgi	[...] tüm üçgen durumları, [...] çok uğraştım, [...] ilişkilendirdim, [...] tüm durumlar, [...] buldum, [...] en iyi, [...] hata yapmadık, [...] en gelişmiş, [...] her şey, [...] iki farklı çözüm, [...] bilgi, [...] düşünme, [...] işlem adımı, [...] kolay olması, [...]aşinayım, [...]bilgimden emin olamıyorum, [...] ifade ettim, [...]aklıma ilk gelen, [...] hatalı olabilir, [...]deneyim
	Farklı Strateji Seçme	[...] bir yol daha, [...] farklı yol, [...] farklı üçgen seçme, [...] farklı formül, [...] çözüm yolu, [...] genel kuralı bularak çözerdim
	Özel Durumları İnceleme	[...] her sütun için farklı
Çözümün Niteliği	**Geçerli Olma**	[...] dayanak, [...] sağladı, [...] dayandırdım, [...] ispat, [...] kural, [...] uygun örüntü, [...] temellendirdim, [...] doğrulayarak, [...] sağlam temeller, [...] verilenlerden yararlanarak oluşturdum, [...] denedim, [...] aynı sonuç, [...] sağlam temeller, [...] kesin bilgiler, [...]matematiksel bilgilerle temellendirdik, [...] geçerli olan bilgiler, [...] her durumda uygulanır [...] matematiksel temellere dayandırdık, [...] matematiksel olarak ifade ettim, [...] örneklerle destekledim
	Uygun Olma	[...] istenene cevap veriyor, [...] istenilen duruma uygun, [...] gösterdim, [...] gerekli olanı yaptım, [...] soru ne istediyse ona ulaştım, [...] benden istenileni gösterdim, [...] ulaştım
	Genellenebilir Olma	[...] örüntü, [...] genel kural, [...] genelleme, [...] tüm durumlar, [...] yargı, [...] genelleyemedim

Tablo 3. 11. Muhakeme ve İspat Yapma Sürecine İlişkin Pedagojik Bileşen Çerçevesi

Temalar		Kodlar	Uygulamadan Örnek İfadeler
İçerik Bilgisi	Geçerli İspat Oluşturabilme	Formül/Kural	[…] *formülle sağlama,* […] *genel formülü olması,* […] *genel ifadeye dayanan formül,* […] *dörtgen oluşturma kuralları*
		Strateji	[…] *sözel açıklama,* […] *cebirsel olarak uygulandığı tüm durumları gösterme,* […] *kullanılan temsillere netlik kazandırma*
		İspat	[…] *ispat yapma,* […]*çözümü ispat olarak kabul etme* […] *ispat olmasını gerektiren durumlar: doğru olması, kesin olması, hata olmaması,* […] *ispatsa her durumda doğrudur*
			[…] *genel ifade,* […] *genellemeye ulaşma,* […]*genelleme yapılabiliyorsa ispatta yapabilme* […] *genel bir duruma ulaşılırsa*
		Geçerli Olma	[…]*her zaman doğruya ulaştırma,* […] *her durumda geçerli,* […] *tüm durumları inceleme* […] *her durumda sağlanma,* […] *her durumda uygulanma,* […] *genellemeye ulaştığımız için her durumda uygulanır*
	İspatın Zorlukları	Bilgi Eksikliği	[…] *bilmeme,* […] *formülün akla gelmemesi,* […] *bilgi eksikliği,* […] *konuda sıkıntı varsa,* […] *önermeyi iyi anlayamama*
		İlişkilendirme Eksikliği	[…] *bölüm ile kalanı ilişkilendiremem,* […] *kenarlar arasındaki bağıntıyı bulamama,* […] *ilişkiyi görememe,* […] *genelliğe ulaşamama,* […] *genel kuralı bulamama,* […] *var olan durumların hepsini düşünmeme,* […] *sütun ilişkisini tanımlayamama*
		Stratejide Zorluk Yaşama	[…] *soru türüne hakim olmama,* […] *iki üçgeni birleştirip dörtgen oluşturamama* […] *kullanılacak dörtgeni belirleyememe,* […] *tüm seçenekleri deneme* […] *dikkatsizlik kaynaklı işlem hatası yapma,* […] *örüntü bulamama* […] *çözümlenmiş ifadeyi bütün olarak yazamama,* […] *hata yapmama,* […] *çözümde zorlanma,* […] *maksimum bölge şartına karar verememe,* […] *doğruları kesiştirememe,*
Öğretim Bilgisi	Açıklık		[…] *açık açık yazma,* […] *iyi tanımlama,* […] *konuyu iyi anlatabilme* […] *uygun olduğu ve olmadığı durumları ilişkin kavram tanımını tam oluşturma*
	Öğrenmeyi Destekleme		[…] *uygulama,* […] *yönlendirici soru sorma,* […] *uygun olduğu ve olmadığı durumların ayırımını yapabileceği ortamlar hazırlama,*

		[...] *uygun olduğu ve olmadığı durumların ayırımını önceden öğrenciye aşılamak, öğrencinin düşünmesini sağlamak,* [...] *kılavuzluk etmek, modelleme yaptırma* [...] *kavramsal eksikliği giderecek çalışmalar yapmak,* [...] *cevabı direkt söylememek,* [...]*öğrencinin keşfetmesini sağlamak,* [...] *ispat yapma becerisini geliştirmeye yönelik çalışmalar yaptırma,* [...] *etkinlik yaptırmak,* [...] *materyal üzerine ders anlatmak,* [...] *yaparak yaşayarak öğrenmeyi sağlaması,* [...] *yaptıklarını analiz etme becerisini geliştirmek,* [...] *düşünmeyi alışkanlık haline getirmek,* [...] *düşünebileceği ortam hazırlama*, [...] *tekrar etmek*, [...] *anlatmak,*
	Sorgulama	[...] *sorgulama yaptırma*, [...] *bir çözümün ispat olduğunu sorgulama* [...] *sorgulaması için fırsat tanıma*, [...] *eleştirel düşünmesini sağlamak ,* [...] *analiz etmesi için fırsat sunma,* [...] *analiz etme becerisin geliştirme*
	Dikkat Çekme	[...] *hissettirme*, [...] *merak oluşturabilme,* [...] *keşfettirme,* [...] *ilgisini arttırma*
Öğrenci Bilgisi	**Sezgi**	[...] *sezme*
	Genelleme	[...] *ortak farkı görme,* [...] *ilişki bulma,* [...] *genel formüle ulaşma,* [...] *genel ilişki,* [...] *genellemeye giden adımları oluşturma,* [...] *ispat yapma becerisine sahip olma,* [...] *genelliğe ulaşarak keşfetme*, [...] *tüm durumlarda sağlama*
	İşlem Bilgisi	[...] *Sayıyı bölme cebirsel ifadeyi tam açma,* [...] *üç sayının karesini alma,* [...] *çözümlemeden geri dönme*, [...] *deneyerek test etme,* [...]*çözümü analiz etme*
	Konu/Kavram Bilgisi	[...] *konuya ilişkin kavramlarda eksik olma*, [...] *bilgisinin tam olmaması,* [...] *deneyim eksikliği, seviye yetersizliği,* [...] *ispatını bilmezse formülü bilmezse yapamaz,* [...] *bilgiyi anlamlandırma,* [...] *çözümleme konusunda bilgi eksikliği,* [...] *kavramsal bilgi eksikliği,* [...] *basamak kavramı,* [...] *basamak kavramını tam oturtmaması*
	Konuya İlgi Duyma	[...] *ilgisini çekmeli,* [...] *istekli olmalı* [...] *sevdiği için öğretmen olmadan da kendisi uğraşabilmeli*
	Öğrenci Faaliyetleri	[...] *çok çalışması,* [...] *üzerine çok gitmesi,* [...] *eksik bilgisini tamamlaması,* [...] *çok örnek çözmesi,* [...] *tekrar etmesi*, [...] *bildiği bilgiyi anlamlandırması,* [...]*konu anlatımı sırasında etkin olması,* [...] *sorgulaması,* [...] *derse katılması,*

Müfredat Bilgisi	**Ortaokul Seviyesi**	*6-7-8. sınıf* *Tek sayıların genel formülü, Cebir, Döndürme, Çözümleme, Çarpanlara ayırma, Cebirsel ifadeler, Örüntü, Dörtgenler, Üçgenler, Örüntü, Denklem çözme*
	Lise Seviyesi	*9-10. sınıf* *Modüler aritmetik, Kenarortay, Benzerlik teoremi, Binom,* $(a+b+c)^2$
	Üniversite Seviyesi	*Üst düzey düşünme, sembolik işlem*



Şekil 3. 5. Muhakeme ve İspat Yapma Sürecinde Sergilenen Üstbilişsel Düzenleme Süreçlerine İlişkin Çerçeve

Tablo 3. 12. Muhakeme ve İspat Yapma Sürecinde Sergilenen Üstbilişsel Düzenleme Süreç Teması ve Kodlarına İlişkin Örnek İfadeler

Temalar	**Kodlar**	**Örnek İfadeler**
Planlama	Soruyu Analiz Etme	*Soruda verilenleri ve istenilenleri analiz etmek, Soruda istenilenleri anlamak, İlk olarak soruda verilenleri ve istenilenleri yazmak, Kişide var olan (ya da eski) bilgilerle soruyu analiz ederek anlamaya çalışmak, Soruya farklı bakış açıları ile bakarak soruyu anlamaya çalışmak, Soruyu anlamak için okumak ve tekrar okumak*
	Kullanılan Bilgiyi Analiz Etme	*İşlem ya da dikkatsizlik kaynaklı bilgileri gözden geçirmek*
	Strateji Belirleme	*Soruda istenilenler ile var olan bilgilerin ilişkisine dayanan stratejiyi belirlemek*
Bilgi Yönetimi	Gerekli Bilgileri Belirleme	*Soruda istenilene ulaşmak için gerekli bilgileri düşünmek, Soruda kullanılacak bilgilerin belirlenmesi için soruyu analiz etmek, Soruyu daha iyi çözmek için gerekli bilgileri belirlemek, Soruda kullanılacak stratejiyi belirlemek için gerekli bilgileri tespit etmek*
	Bilginin Kullanılabilirliğini İnceleme	*İşlem hatasının olup olmadığını incelemek, Sorunun çözümü sırasında elde edilen bilgilerin sonuca ulaşmada bir basamak oluşturup oluşturmayacağını incelemek*
	Bilginin Niteliğini İnceleme	*Çözümün doğru ve geçerli olmasında bir aşama olması için elde edilen bilgileri anlamak, Elde edilen bilgiyi anlamlandırmak, Elde edilen bilgiyi var olan (ya da eski) bilgilerle ilişkilendirmek*
İzleme	Stratejik Hata	*Hata yapılıp yapılmadığını incelemek, Hata olup olmadığını incelemek*
	Stratejik Eksiklik	*Çözümün bir aşamasından diğerine geçerken gözden kaçırılan bir şey olup olmadığını incelemek*
	Strateji Belirleme	*Strateji belirlemek*
	Stratejiyi Gözden Geçirme	*İstenilen sonuca ulaşmak için stratejinin uygunluğunu analiz etmek, Stratejiyi devam ettirsem bir sonuca varır mıyım?*
	Strateji Analizi	*Stratejiyi sorgulamak*
	Stratejiyi Değiştirmeye İhtiyaç Duyma	*Çözüm sırasında zorlanıldığında strateji değişikliğine ihtiyaç duymak, Çözüm sırasında tıkanıldığında strateji değişikliğine ihtiyaç duymak, Çözüm devam ettirilemediğinde strateji değişikliğine ihtiyaç duymak, Soru çözülemediğinde farklı yollar düşünmek*
	İyi Strateji Oluşturma	*Kullanılan stratejinin iyi olmasına dikkat etmek*
	İşlem Hatası	*İşlem hatasının olup olmadığını incelemek*

	Çözümü Gözden Geçirme	*Soru çözülemediğinde tüm aşamaları tekrar gözden geçirmek*
	Çözümü Sürekli Sorgulama	*Sorunun çözüm aşamaları arasında sürekli sorgulama yapmak*
	Çözümde Zorlanma	*Çözüm sırasında duraksamak, Çözüm sırasında tıkanmak, Çözüm sırasında zorlanmak*
	Çözümde Hata	*Çözümde hata olup olmadığını geriye dönüp incelemek*
	Zaman Kaybını Önleme	*Stratejiyi zaman kaybını önlemek için gözden geçirmek*
	Gerekli Bilgileri Kullanma	*Çözülen sorularda gereksiz bilgilerin bulunmamasından dolayı verilen tüm bilgileri kullanmak, Gerekli tüm bilgileri doğru çözüme ulaşmak için kullanmak*
Hata Ayıklama	Hata Tespiti	*Çözümün bir yerinde tıkanmak, Tıkanmak, Çözümün istenildiği gibi ilerlemediğini düşünmek Dikkatsizlik kaynaklı hata olup olmadığını incelemek, Çözümü yapamıyorum diye düşünmek Çözümde yanlış strateji kullanıldığını düşünmek, Çözümde hataya düşülüp düşülmediğini sorgulamak, Çözümün bütün aşamalarını tekrar gözden geçirmek, İşlem hatası olup olmadığını incelemek, Hata olup olmadığını incelemek, Çözüm sırasında öngörülmeyen durumlarla karşılaşıldığında hata olup olmadığını kontrol etmek*
	Hatayı Düzeltme	*Hatayla karşılaşıldığında hatayı düzeltmeye çalışmak*
	Çözümden Vazgeçme	*Hataya dayalı çözümden vazgeçmek, Hata tespiti yapılamadığında çözümden vazgeçmek*
	Stratejiyi Değiştirme	*Çözüm için yanlış bir yol seçildiği tespit edildiğinde başka strateji aramak, , Çözümü devam ettirememek*
Değerlendirme	Sonucu Değerlendirme	*Kontrol etmek, Elde edilen bilgilerin çözümü nasıl yönlendirdiğini incelemek, Elde edilen bilgilerin ulaşılmak istenen sonuca etkisini incelemek, , , Elde edilen bilgileri örnekler yardımıyla denemek, Elde edilen bilgileri sorgulamak, Elde edilen bilgilerin doğruluğunu kontrol etmek, Kontrol etmek, Elde edilen bilgilerin çözüm sürecinde var olan bilgilerle uyuşup uyuşmadığını kontrol etmek, Elde edilen bilgilerin gereksiz olup olmadığını incelemek, Elde edilen bilgileri çözüm sürecinde var olan bilgilerle doğrulamak, Çözümün hangi durumlarda doğru olup olmadığını sorgulamak*

3.6. Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

3.6.1. Geçerlik

Geçerlikte amaç, araştırma sonuçlarının doğruluğundan emin olmaktır. Araştırmalarda iç ve dış geçerlik olarak ele alınan bu kavramların araştırmada nasıl sağlandığı hususlarına açıklık getirelim.

İç geçerlik, araştırma sonuçlarına ulaşırken izlenen sürecin çalışılan gerçekliği ortaya çıkarmadaki yeterliğine ilişkindir. Lincoln ve Guba (1985) iç geçerliğin (inandırıcılık) sağlanabilmesi için uzun sureli etkileşim, derin odaklı veri toplama, çeşitleme, uzman incelemesi, katılımcı teyidini önermektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2013).

Bu araştırmada iç geçerliği sağlamak için 16 hafta boyunca (pilot uygulama dahil) katılımcılarla etkileşim içerisinde olunmuştur. Araştırmacı bu süreç boyunca topladığı verilere eleştirel bir gözle bakmıştır. Bunun neticesinde, araştırma sorularına yeterli cevap bulup bulamadığını, ulaştığı sonuçların gerçeğe uygun olup olmadıklarını sürekli sorgulamıştır. Bu sorgulamaları sağlayabilmek için farklı veri toplama araçları ile (M-İ odaklı görev soruları, sesli düşünme protokolleri, davranış kartları, görüşmeler, video-ses kayıtları, araştırmacı gözlem notları) elde ettiği verileri birbirlerini teyit etme amacıyla kullanarak çeşitlemeye gitmiştir. Elde ettiği verileri uzman görüşlerinden geçirerek veri toplama araçları, veri analizlerine ulaşma ve yorum aşamalarının geçerli ve tutarlı olmasını sağlamaya çalışmıştır.

Dış geçerlik, elde edilen sonuçların benzer ortamlara ya da gruplara aktarılabilirliğine ilişkindir. Erlandson vd. (1993) dış geçerliliği (aktarılabilirlik) arttırmak için ayrıntılı betimleme ve amaçlı örnekleme yöntemlerini önermişlerdir (Yıldırım ve Şimşek, 2013).

Bu araştırmada dış geçerliği sağlamak için, elde edilen veriler ortaya konulan tema ve kodlara göre bağlı kalınarak, yorum katılmadan ve doğrudan alıntılarla aktarılmıştır. Aynı zamanda çalışma amacına uygun verileri elde edebilmek ve araştırma sorularına cevap verecek bilgisel zenginliği sağlamayabilmek amacıyla katılımcılar, amaçlı örnekle yöntemiyle seçilmiştir (Bkz. 3.3.)

3.6.2. Güvenirlik

Güvenirlikte amaç, bir araştırmacı daha önce farklı bir araştırmacı tarafından açıklanan yöntemleri izler ve aynı durum çalışmasını tekrar yürütürse araştırmacının aynı bulgu ve sonuçlara ulaşabileceğinden emin olmaktır (Yin, 2014). Bu araştırma da, gerek araştırma kurgusunun (uygulama süreci, yazım hiyerarşisi ve düzeni dahil) gerek yöntem gerekse de elde edilen sonuçların bir kısmının ya da tamamının tekrarlanarak kullanılması araştırmacının hassasiyeti nedeniyle titizlik gösterdiği bir konudur. Dolayısıyla Yin (2014) tarafından yapılan güvenirlik tanımındaki vurgulanan noktanın, durum çalışmasına dair takip edilen yöntemlerin veya sonuçların başka bir durum çalışmasında gerek yazım aşaması gerekse araştırma kurgusunun bir yönüyle değiştirilerek "tekrarlanması" değil; aynı durum çalışmasının tekrar tekrar uygulanabilmesi olduğuna dikkat etmek gerekir. Güvenirliğin bir diğer amacı da bir araştırmadaki hataları ve önyargıları olabildiğince en aza indirmektir**.**

İç güvenirlik, bir araştırmaya ilişkin birden fazla araştırmacının aynı fikirde olup olmadığıyla ilgilidir (LeCompte ve Goetz, 1982). Bir başka deyişle, bir duruma ilişkin farklı araştırmacılar tarafından bulunan sonuçların uyumlu olmasıdır. İç güvenirliği sağlamak için:

- Toplanan veriler yorum katılmadan doğrudan sunulabilmeli,
- Araştırmaya birden fazla uzmanın görüşü dahil edilebilmeli,
- Araştırma kapsamında elde edilen verilerin analizine ilişkin uzman görüşlerinin sağlanabilmesi,
- Önceden oluşturularak daha önceden ayrıntılı olarak tanımlanmış veri analizinin yapılmasının gerekliliğidir.

Bu araştırmada iç güvenirliği sağlamak için, toplanan veriler yorum katılmadan doğrudan sunulmuştur. Ayrıca toplanan verilere ilişkin gerekli analizler önceden belirlenen çerçeveler temele alınarak yapılmış ve araştırma bulguları doğrultusunda genişletilmiştir. Toplanan verilerin analizleri sonucunda belirlenen tema ve kodlara ilişkin uzman görüşü değerlendirmeleri ile tutarlılıkları teyit edilmiştir. Alınan görüşler doğrultusunda önerilen düzeltmeler yapılarak analiz süreci sonlandırılmıştır.

Dış güvenirlik, araştırmacının hem araştırmanın temel aşamaları hem de araştırma sürecindeki konumu ve yaklaşımı konusunda açıkça ve ayrıntılı bir şekilde bilgi vermesidir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Dış güvenirliği sağlamak için:

- Araştırmacı, araştırma sürecindeki rolünü açıklayabilmeli,
- Çalışma grubunda bulunan bireyleri açıkça tanımlanabilmeli,
- Veri toplama yöntemleri ile ilgili ayrıntılı açıklamalar yapılabilmeli,
- Araştırma sürecinin gerçekleştirildiği ortam tanımlanabilmeli,
- Veri analizi için kullanılan kavramsal veya teorik çerçevelerin tanımı yapılabilmelidir (LeCompte ve Goetz, 1982).

Bu araştırmada dış güvenirliği sağlamak için LeCompte ve Goetz (1982) tarafından ifade edilen hususlara dikkat edilmiştir. Bu kapsamda;

- Araştırmacının araştırma sürecindeki rolü "Veri toplama süreci" (Bkz. 3.4.6.),
- Çalışma grubuna dair ayrıntılı bilgiler "Çalışma grubu" (Bkz. 3.3.),
- Araştırmada kullanılan veri toplama araçlarına ilişkin detaylı bilgiler "Veri toplama araçları" (Bkz. 3.4.),
- Araştırma sürecinin gerçekleştiği ortama ilişkin bilgiler "Verilerin toplanma süreci" (Bkz. 3.4.5.1.),
- Veri analizinin nasıl yapıldığına ilişkin ayrıntılı bilgiler "Veri analizi" (Bkz. 3.5.) başlıkları altında verilmiştir.

3.7. Araştırmanın Etik Konuları Ele Alışı

İnsanların dahil olduğu her araştırmada izlenmesi gereken bazı kurallar ve ihlal edilmemesi gereken bazı etik ilkeler vardır. Bunlar bilinçli onay, gizlilik, özel hayata saygı ve zarar vermemek, aldatmama ve yanıltmama ve verilere sadık kalmadır (Yıldırım ve Şimşek, 2013).

Bilinçli onay ilkesinin bu araştırmada sağlanabilmesi için, araştırma başlamadan önce çalışma grubunda yer alacak katılımcılarla bir araya gelinmiştir. Araştırma hakkında detaylı bilgiler verilerek araştırmaya kendi rızaları ile gönüllü olarak katılmalarına dikkat edilmiştir. Bu aşamalar "Verilerin toplanma süreci" başlığı altında detaylı olarak açıklanmıştır (Bkz. 3.4.5.1.).

Gizlilik, özel hayata saygı ve zarar vermeme ilkesinin bu araştırmada sağlanabilmesi için, çalışma grubunda yer alan katılımcıların gerçek isimleri yerine araştırmacı tarafından belirlenen takma isimler kullanılmıştır. Aynı zamanda katılımcıların kimliklerine özgü doğrudan veya dolaylı olarak bilgilerin verilmemesine dikkat edilmiştir. Bunun sağlanabilmesi için "Çalışma grubu" başlığı altında (Bkz. 3.3.) katılımcılara ait bilgiler yazıldıktan sonra, her bir matematik öğretmen adayına kendisiyle ilgili kısımlar okutularak görüşlerine ve onaylarına başvurulduktan sonra yazıma dahil edilmiştir.

Aldatmama ve yanıltmama ilkesinin bu araştırmada sağlanabilmesi için çalışma grubunda yer alan katılımcılar ile araştırma başlamadan önce ve araştırma süresince onlardan beklenenler araştırma amacı doğrultusunda sürekli açıklanmıştır. Araştırmanın uygulama sürecine ilişkin kendilerini iyi hissetmelerine yönelik olarak fikirlerini paylaşmalarına önem verilmiştir.

Verilere sadık kalma ilkesinin bu araştırmada sağlanabilmesi için verilerin özenle toplanmasına ve sistematik bir şekilde analiz edilmesine önem verilmiştir. Veri analizleri sonucunda ortaya çıkan bulguların ve sonuçların yazımında, verilerin olduğu gibi doğrudan aktarılmasına özen gösterilmiştir. Hem bilimselliğe hem de araştırma etiğine gölge düşürecek; verilerin çarpıtılarak olmayan verilerin uydurulması, verilerin bir kısmının bilerek ya da bilmeyerek kapsam dışı bırakılması gibi durumlardan kaçınılmaya çalışılmıştır. Bu süreçler Şekil 3.6. da özetlenmiştir.



Şekil 3. 6. Araştırma Süreçlerinde Ele Alınan Etik Konular

BÖLÜM IV: BULGULAR

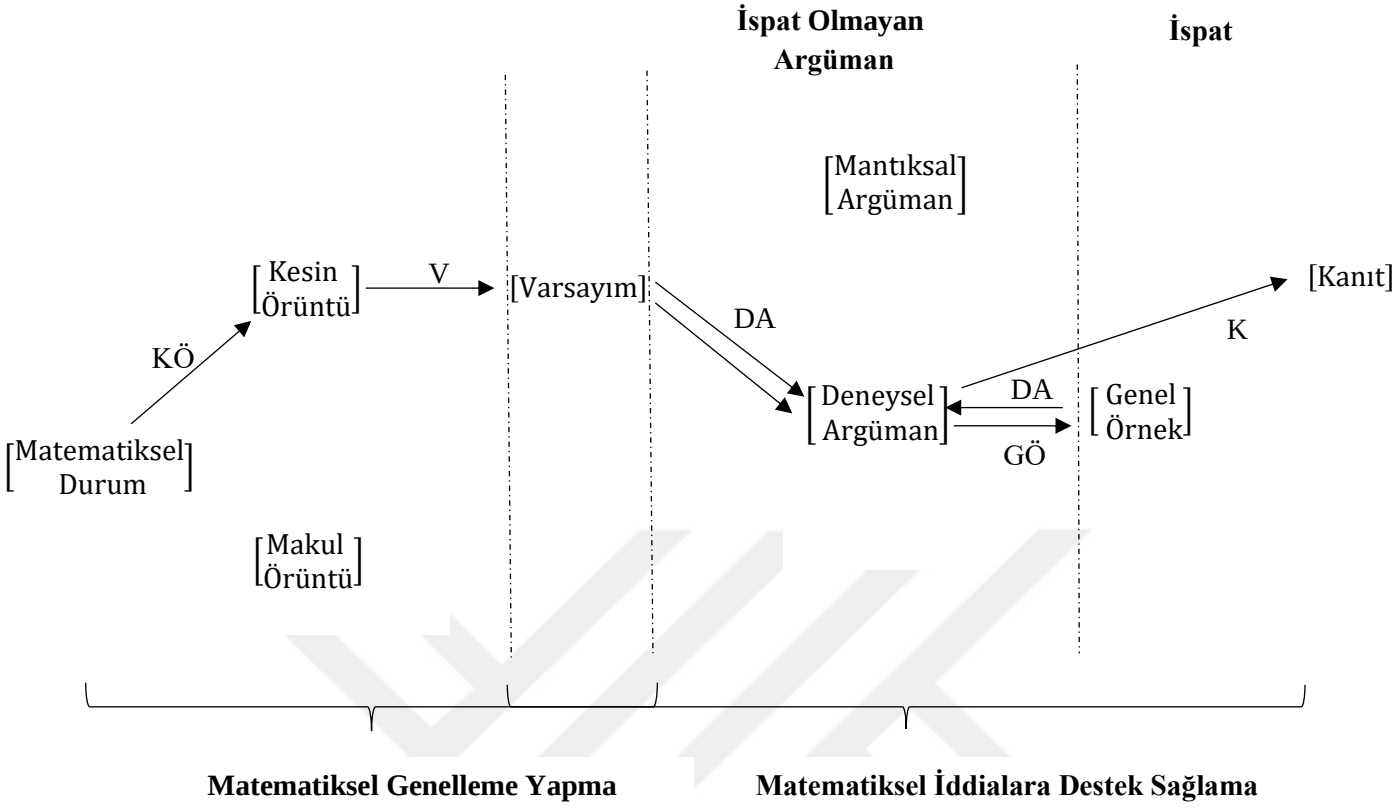
Bu başlık altın da araştırma sorularına cevap veren bulgular, MÖA'dan bireysel ve grup çalışmaları sırasında toplanan veriler yardımıyla verilmiştir.

4.1. Erdem'in M-İ Bileşenleri ve Üstbiliş Kapsamında Elde Edilen Bulguları

Erdem'in M-İ odaklı görev sorularına ilişkin çözümlerini yaparken muhakeme ve ispatlama süreçlerinin nasıl ortaya çıktığı ve verdiği cevapların M-İ Analitik Çerçevesindeki kategorilerden hangileri ile uyuştuğuna yönelik elde edilen bulgular "Matematiksel Bileşen" başlığı altında verilmiştir. Bu başlık altında ayrıca M-İ odaklı görev sorularını çözerken zorlandığı noktalar ortaya konulmuştur. M-İ odaklı görev sorularının çözümlerine ilişkin algıları ise "Psikolojik Bileşen" başlığı altında verilmiştir. Çözümlerinin matematiksel niteliği ile çözümlerine ilişkin algılarının karşılaştırılarak, ispat kavramının doğasına ilişkin bakış açısı "Pedagojik Bileşen" başlığı altında verilmiştir. Pedagojik bileşen bulguları kapsamında, ispat kavramının doğasını daha açık duruma getirebilmesi amacıyla; içerik, öğrenci, öğretim ve müfredat bilgisi hakkındaki bilgileri açıklanmıştır. Tüm bu süreçleri gerçekleştirirken sergilediği üstbilişsel düzenleme süreçleri ise "Üstbilişsel Düzenleme Süreci" başlığı altında verilmiştir.

4.1.1. Erdem'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Matematiksel Bileşen Kapsamında Elde Edilen Bulgular

Erdem'in M-İ odaklı görev sorularındaki çözümleri incelediğinde, Muhakeme ve İspat Yapma Sürecine İlişkin Matematiksel Bileşen Çerçevesindeki kategorilerden; kesin örüntü, varsayım, deneysel argüman, genel örnek ve kanıt kategorilerine uygun çözümler geliştirdiği tespit edilmiştir. Mantıksal argüman kategorisine uygun çözüm sunamamıştır. Erdem'in Muhakeme ve İspat Yapmaya İlişkin Süreç Akışı ise Şekil 4.1. de özetlenmiştir.



BU 1 → BU 2 → BU 3.1 → BU 3.2 → BU 4.1-a → BU 4.1-b → BU 4.2
KÖ → V → DA → DA → GÖ → DA → K

Şekil 4. 1. Erdem'in Muhakeme ve İspat Yapmaya İlişkin Süreç Akışı

Erdem'in M-İ odaklı görev sorularına ilişkin çözümleri genel olarak Tablo 4.1'e göre değerlendirildiğinde adım adım niteliği artan çözümler geliştirdiği söylenebilir. Geliştirdiği çözümler ise çoğunlukla "2" puan ile derecelendirilmiştir. Bunun nedeninin; çözümlerinin beklenen tam çözüm olarak kabul edilmelerini sağlayan yeterliklere (sözel açıklamalar veya çözümü içerisine alan uygun tüm durumların incelenmesi) ilişkin eksiklikler taşımasına bağlı olduğu gözlemlenmiştir. Muhakeme ve İspat Yapma Sürecine İlişkin Matematiksel Bileşen Çerçevesindeki kategorilere göre ise çözümlerini en çok deneysel argüman olarak geliştirdiği bu nedenle de örneklere bağlı kaldığı sonucuna ulaşılmıştır.

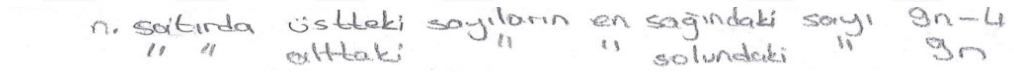
Tablo 4. 1. Erdem'in M-İ Odaklı Görev Çözümlerinin Derecesi

M-İ Kategorileri		BU 1			BU 2		BU 3.1				BU 3.2	BU 4.1		BU 4.2
		a	b	c	a	b	1.Soru		2.Soru			a	b	
							a	b	a	b				
Çözüm Yok														
Sınıflandırılamamış Çözüm														
Örüntü	**Makul Örüntü**													
	Kesin Örüntü	1	1	1										
Varsayım					2	1								
Deneysel Argüman							2	2	2	2	3		3	
Mantıksal Argüman														
Genel Örnek												3		
Kanıt														3

Çözüm Derecesi: Geliştirilebilir Çözüm (1) Yeterli Çözüm (2) Beklenen Tam Çözüm (3)

Erdem'in birinci bireysel uygulama kapsamında M-İ odaklı görev sorusuna verdiği cevabın kategorisi, veri kümesine uyan genel bir matematiksel ilişki bularak kesin delil sunmaya imkan verdiği için kesin örüntü olarak değerlendirilmiştir. Bu soru kapsamında ilk olarak, tek ve çift satırlarda bulunan sayılar arasında bir ilişki bulmaya çalışmıştır.

Genel Kuralı:

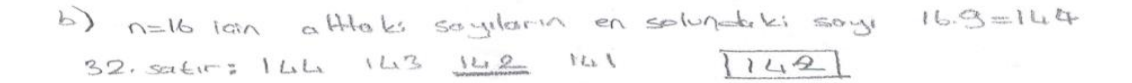


Erdem: *İkisi arasında birinci ve ikinci satırı göstererek bir ilişki kurmaya çalıştım.* [...]. *Bir örüntü kurmaya çalışırsam birincisinde 4'ü 0 olarak alırım. (5x1)+(4x0) olarak alırım. İkincisinde şurada. Ee önce şuradakileri* [birinci satırı gösteriyor] *bulmaya çalışayım. Şu sayıyı* [üçüncü satırı gösteriyor] *bulmaya çalışırken de (5x2)+(4x1) bulurum. Bunları* [5 ve 4'ü çarptığı sayıları gösteriyor] *1'er 1'er arttırırım. Sonra (5x3)+(4x2) bana şuradaki sayıyı verir. O da 21, 22, 23 büyük bir ihtimalle aynıdır,* [kontrol ediyor] *aynen. Buradan en sağdakileri bulabiliyoruz. En sağdakileri genellemeye çalışırsak, satır sayısını. Satır sayısı değil de* [yazıyor] *n. satır sayısı için en sağda bulunan sayı; n tek ise* [düşünüyor] *(5xn)+(4x(n-1)) oluyor. Aynı işlemleri burada da* [çift satırları gösteriyor] *yaparsak* [...] *aynı işlemi 9'u bulmak için (5x1)+(4x1). Burada da bir 5'lik daha geleceği için (5x2) burası da ekleneceği için (4x2). Burada da n çift ise 5n+4n oluyor. 9n oluyor.*

Genel Kuralına Göre Cevapladığı a ve b soruları:



Erdem*: n eşittir 28 için sayı 28x9 olacak* [birşeyleri düzeltip sildi] *bu da 252 olacak. 252, 251, 250, 249* [yaptığı çözüme ve verilen örüntüye baktı]. *Şurası 250 de yok zaten. Burası satır, 28x2 den 56. satır.*



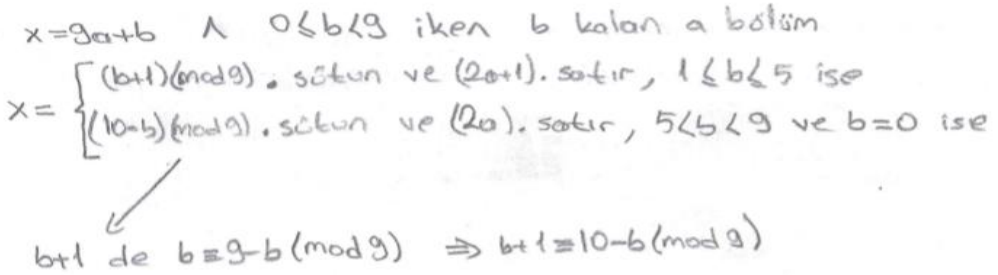
Erdem*: Bunu* [b şıkkını gösteriyor] *bulmak için de n'i 16 alırım b için. n eşittir 16 için yine alttaki sayıların* [çift satırları gösteriyor], *solundaki sayı 16x9 olur. O da 144 olur. 16, 3. sütunun 2 katı zaten 32. satır oluyordu. 144, 143, 142, 141. 3. satırda olan 142 sayısıdır.*

Şekil 4. 2. Erdem'in BU 1-a ve BU 1-b Sorularına İlişkin Çözümleri

Sorunun a ve b şıklarına dayalı bir çözüm geliştirirken, satırlarda bulunan en büyük sayıları dikkate alarak genel bir ilişki bulmaya çalışmıştır. Bu amaçla, satırlarda bulunan sayıların yerlerini bulmaya yönelik genel bir ifade yazmıştır. Satırları ikişerli olarak gruplamış ve "n" ile temsil etmiştir. Böylece tek satırlarda bulunan toplam sayıyı "n-1", çift satırlarda bulunan toplam sayıyı "n" ile çarpmıştır.

Sonuç olarak, tek satırlarda bulunan sayıların yerini bulmak için (5xn)+(4x(n-1)) genel kuralını, çift satırlarda bulunan sayıların yerini bulmak için de 5n+4n genel kuralını geliştirmiştir. Satırlarda bulunan diğer sayılar için de belirlediği kural üzerinden, sayarak ilerlemeye dayalı bir çözüm yolu takip etmiştir. Böylece geliştirdiği genel kural yardımıyla sorunun a şıkkını test etmiştir. Sorunun b şıkkının çözümünde ise "n" temsilini 32'nin 2 ile bölümünden 16 olarak almış ve çift satırlar için geliştirdiği kuralı uygulayarak sonuca ulaşmıştır. Ancak çözümü matematiksel nitelik anlamında eksiklik taşımaktadır. Bu eksiklik; satır sayılarının yerini belirlemeye yönelik olarak oluşturduğu genel kuralda sadece satırlarda bulunan en büyük sayılara odaklanması ve geri kalan sayıları kapsayan bir genel kural geliştirmeden bu sayıları sayarak ilerleyerek bulmasıdır.

Genel Kuralı:



Erdem: *Sayının 9 ile bölümünden kalana bakıyorum. 9 ile bölümünden kalan 1 ve 5 arasındaysa tek satırda oluyor, 6 ile 9 arasında ya da 0 ise ikinci satırda yani çift satırlarda bulunuyor. Buna göre (2a). satır bunları* [$satır\ için\ yazdığı\ (2a)\ ve\ (2a+1).\ ifadeleri\ gösteriyor$] *yazdım. Buna göre ee bunun bulunduğu sütunu da yazmam gerekiyor.* [...]. *Bu b olsun* [$sütunu\ gösteriyor$]. *b sonuçta 1 ile 5 arasında değişen bir şey, 1 ve 5'e eşit de olabilir. 1 olduğunda ikinci sütunda, 2 olduğunda üçüncü sütunda, 3 olduğunda dördüncü sütunda, 4 olduğunda beşinci sütunda, 5 olduğunda altıncı sütunda. Buna göre* ($b+1$). *sütunda olması gerekiyor. Aşağıdakine baktığımda* [$satırı\ gösteriyor$] *7 için mesela* $10-7$*'den üçüncü sütunda, 8 için mesela* $10-8$*'den ikinci sütunda, 9 için mesela* $10-9$*'dan birinci sütunda.*

Şekil 4. 3. Erdem'in. BU 1-c Sorusuna İlişkin Çözümü

Sorunun c şıkkı kapsamında yapmış olduğu çözümde, genel olarak herhangi bir sayının örüntüdeki yerini satır ve sütunu içerek şekilde genel bir kural geliştirmeye çalışmıştır. Bu kapsamda, satırlarda bulunan sayıların yerini bulmak için iki satır sayısını bir grup olarak belirlediği "n" temsili yerine tek satırlar için "2a+1", çift satırlar için "2a"

ifadelerini kullanarak, 9 ile bölümünü gösteren “a” temsilini kullanmıştır. Sütunlarda bulunan sayının yerini bulmak için ise 9 ile bölümden kalanı gösteren “b” temsilini kullanmıştır. Böylece tek satırlar için “b” ve çift satırlar için “9-b” ifadelerini oluşturmuştur. Ayrıca tek satırlarda bulunan sayılar 2. sütundan itibaren yerleştiği için bu ifadeyi tek satırlar için “b+1” olarak almış ve çift satırlar için geliştirdiği “9-b” ifadesinde yerine yazarak “10-b” olarak bulmuştur. Ancak geliştirdiği genel kuralda bir yanlışlık yapmıştır.

Şekil 4.3. de görüldüğü üzere, sayının 9 ile tam bölünmesi durumunda çift satırlara dayalı genel kuralı:

$$x= (10-b)(\text{mod}9).\ \text{sütun ve 2a. satır},\ 5<b<9 \text{ ve } b=0$$

şeklindedir. Bu genel kurala göre b=0 olarak alındığında, x=10 (mod9) olacağı görülür. Gerek ikişerli olarak grupladığı satırlardaki toplam sayının 9 olması gerekse de mod9’a göre incelenen bir sayının 9’dan büyük olamayacağından kaynaklanan hatasını çözümünde fark edememiştir.

Tablo 4. 2. Erdem’in Çözüm Sırasında Zorlandığı Noktalar

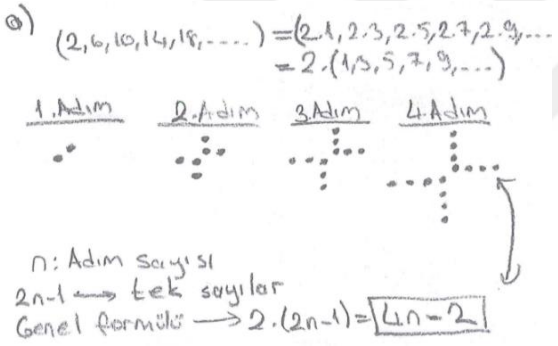
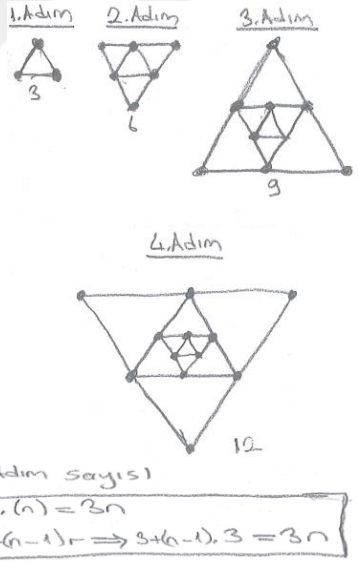
Erdem ve Araştırmacı Arasında Gerçekleşen Diyaloglar
[...] ***Erdem:*** *Onu yazamıyorum.* ***Araştırmacı:*** *Yazarken neyde zorlanıyorsun?* ***Erdem:*** *“a” burada grupladığımızda “n” i temsil edecek.* ***Araştırmacı:*** *“n” dediğin ne?* ***Erdem:*** *İkili grup satırlar.*
[...] ***Erdem:*** *Bana göre genellenebilir örüntüyü geçerli yapan şey ortak özelliğin bulunmasıdır.* ***Araştırmacı:*** *Senin ürettiğin genel kuralda ortak özellik nedir?* ***Erdem:*** [biraz düşündü] *ortak özelliği şu, aynı sütunda bulunanların 9 ile bölümünden kalan toplamı* [biraz düşündü] *yok.* [...] ***Erdem:*** *Ne ortaklık var* [kendine sordu] *aslında ortaklık yok.* ***Araştırmacı:*** *Senin tanımladığın örüntü tanımına göre o zaman geçerli bir örüntü mü, ortaklık şartını sağlamıyor? Ya da ortaklık varda sen mi göremiyorsun?* ***Erdem:*** *Bilmiyorum.*
[...] ***Araştırmacı:*** *Genelleme yapmada zorluk yaşamanın sebebi ne sence o zaman?* ***Erdem:*** *Ben hep genelleme yaparken aralarında bir ilişki olması gereken durumlarda iki ya da üç farklı ilişki bulup onların içinden bir şeyler bulmaya çalışıyorum. Bu da işi biraz zorlaştırıyor.*

Tablo 4.2. de görüldüğü üzere Erdem’in sorunun çözümü sırasında çeşitli noktalarda zorlandığı tespit edilmiştir. Bunlardan birincisi, ürettiği genel kuralda kullandığı temsilleri sözel olarak açıklamakta zorluk yaşamasıdır. İkincisi, genelleme ve örüntü

kavramına ilişkin gerekli hususları çözüm yaparken dikkate almamasıdır. Üçüncüsü ise, çözüm geliştirirken birden fazla durumun ilişkilendirmesini tek duruma indirgemekte zorlanmasıdır.

Sonuç olarak; Erdem'in BU 1 de bulunan M-İ sorusuna ilişkin geliştirdiği çözümler, kesin örüntü kategorisiyle ilgili tanım şartlarını sağladığı ancak matematiksel nitelik anlamında eksiklik ve yanlışlara sahip olduğu temele alınarak geliştirilebilir çözüm olarak "1" puan ile derecelendirilmiştir.

Erdem'in ikinci bireysel uygulama kapsamında M-İ odaklı görev sorusuna verdiği cevabın kategorisi, genel matematiksel ilişki hakkında muhakeme edilmiş bir hipotez ürettiği için varsayım olarak değerlendirilmiştir. Bu soru kapsamında ilk olarak, verilen sayılardan faydalanarak bir kural üretmiş ve ürettiği bu kural üzerinden bir örüntü modeli geliştirmiştir.

Genel Kuralı ve Oluşturduğu Model:	**Genel Kuralı ve Oluşturduğu Model**
	
Genel Kuralı ve Oluşturduğu Modele İlişkin Açıklaması: **Erdem:** [...] *sayıları 2 çarpım olarak yazdığımda tek sayılar olarak gidiyor galiba.* [...]. *Bunları* [*noktaları gösteriyor*] *simetrik yapacağım, tek sayılarla ilgili bir örüntü oluşturacağım. Şöyle* [*çizimini yaptı*] *dördünü alayım. Tek sayıları burada 2 ile çarpmış o zaman şöyle simetriğini alırım, aynı şekilde. Sonra tek sayıların genel formülü 2n-1 olduğundan dolayı bunu da 2 ile çarpacağız 2x(2n-1) den 4n-2.*	**Genel Kuralı ve Oluşturduğu Modele İlişkin Açıklaması:** ***Erdem:*** *Üçgenle ilişkilendirdim üçgen oluşturacak şekilde doğru parçalarını birleştiririz. Doğru parçalarının kesiştiği noktaları, nokta sayısı bizim şeyimiz olsun, ikinci adımda üçgenin içine bir üçgen yerleştirelim üçgenin içine değilde üçgeni içine alacak üçgen dışında bir üçgen çizelim. Üçgen zaten vardı, bu noktadan geçen bir doğru parçası çizelim, doğru parçalarının kesiştiği noktaları da alalım. Şurda* [*birinci üçgeni gösteriyor*]. *3 tane var şurda* [*ikinci üçgeni gösteriyor*]. *6 tane*

	var, üçüncü adımda bunu içine alacak bir üçgen çizmeye çalışarak yani şunu içine alan herhangi bir şöyle bir üçgen alabilir ama alan yetmiyor. Yine doğru parçalarının kesiştiği noktalar 3 olacak hep 3 er 3 er artacak 3, 6, 9 olacak, böyle böyle gidecek.

Şekil 4. 4. Erdem'in. BU 2-a ve BU 2-b Sorularına Uygun Çözümleri

Model geliştirebilmek için verilen şekil örüntülerinden bir kural üretmiştir. Birinci şekil örüntüsünde, sayıları 2 parantezine alıp tek sayılar formülünden faydalanarak bir kural geliştirmiştir. Bu kural doğrultusunda birbirine simetrik olan noktaların yerleşimine ilişkin bir örüntü modeli geliştirmiştir. Sayıları verilen ikinci şekil örüntüsünde ise benzer mantıktan hareket ederek, sayıların 3'er 3'er arttığını fark etmiştir. Bu kapsamda bir üçgeni referans alıp, bu üçgenin köşe noktalarının bir sonraki üçgenin kenarının orta noktası olmasına ilişkin bir örüntü modeli geliştirmiştir. Sorunun b şıkkında ise bulduğu kuralları birbirine eşitleyerek, şekiller arasında bir ilişki kurmadan, örüntünün sadece 2 noktasında aynı olacağını söylemiştir.

Tablo 4. 3. Erdem'in BU 1-a Sorusuna İlişkin Çözüm Süreci ve Zorlandığı Noktalar

Çözüm Sürecinde Araştırmacı İle Arasında Geçen Bir Diyalog:
[…] ***Araştırmacı:*** *Ben senden verilenlere uygun bir model geliştirip bu modele uygun bir kural oluşturmanı istedim. Sen ise önce kuralı yazdın; bu çözüm sürecini, çözüm aşamalarını nasıl gerçekleştirdin?* ***Erdem:*** *Önce kuralı düşündüm. Yani şöyle ikisini birbirinden bağımsız olarak düşündüm ben; birbirlerine bağımlı ve sonuç olarak aynı şeyi veriyorlar da ben birbirinden bağımsız olarak düşündüm. Yani çizdiğim modellemeye göre bir formül oluşturmadım; direkt verilenlerden bir kural oluşturdum, modellemeyi model geliştirin dediğiniz için geliştirdim.* ***Araştırmacı:*** *Ürettiğin kural ile model arasında bir bağ kurdun mu?* ***Erdem:*** *Şuradan olabilir, aritmetik dizinin formülünden olabilir; sonuçta belli zaten şuraya hep bir tane geliyor. Şuraya bir tane şuraya bir tane şuraya bir tane şuraya bir tane gelecek. Yani toplamda dört tane nokta geliyor, burada da 4 nokta geliyor. Yani hep dört tane olduğundan dolayı ve sabit bir artış olduğundan dolayı aritmetik dizi olduğunu gördüm. Onu da aritmetik dizinin genel formülünden yaparım.*

Varsayım kavramının doğası M-İ Analitik Çerçevesine göre beraberinde "muhakeme edilmiş bir hipotezi" getirir. Böylece varsayım olarak kabul edilecek bir çözümün; tahmin ve önsezilere dayanmayacak şekilde gerekli ilişkilendirmeleri içermesi beklenir. Bu doğrultuda çözümünün varsayım kategorisine uygun olduğunu gözlemleyen araştırmacı; çözümüne dayalı yeterli açıklamaları yapmaması ve ürettiği kural ile oluşturduğu model arasında ne şekilde bir ilişki kurduğunu ifade etmemesi üzerine Tablo 4.6. de bulunan

diyalogdaki soruları Erdem'e sormuştur. Gerçekleşen diyalog; aslında ürettiği kural ve model arasında aritmetik dizilerin genel kuralına dayanan bir ilişkiyi temele alarak çözüm yaptığını ancak bu süreçlerin farkında olmadığını ve ilişkilendirerek açıklama yapma konusunda zorluk yaşadığını göstermiştir. Bu zorluğu yaşamasının bir diğer nedeni ise sorunun b şıkkında gözlemlenmiştir.

Tablo 4. 4. Erdem'in BU 1-b Sorusuna İlişkin Çözüm Süreci ve Zorlandığı Noktalar

Çözüm Sürecinde Araştırmacı İle Arasında Geçen Bir Diyalog:
[…] ***Erdem:*** *Birinci şekilde bunda* [birinci şekil örüntüsünü gösteriyor] *2 tane, bunda* [ikinci şekil örüntüsünü gösteriyor] *3 tane var, herhalde eşit olma ihtimalini soruyor değil mi, tamam. O zaman genel kurallarını birbirinden çıkarıp sıfıra eşitleyelim. Böylece birbirinden çıkarırsak her adımdaki birbirinden farklarını buluruz, farklarıyla ilgili bir formül bulmuş oluruz "n-2". Bunların birbirine eşit olması için de n-2'nin 0'a eşit olması lazım. Böylece n=2 de gerçekleşir, diğer türlü gerçekleşmez.* ***Araştırmacı:*** *Neden böyle düşünüyorsun?* ***Erdem:*** *Başka türlü gerçekleşmez ki.* ***Araştırmacı:*** *Neden böyle düşündüğünü tam olarak açıklar mısın?* ***Erdem:*** *Bunun genel formülünü "n-2" olarak bulduk. "n" yerine bir değer yazdığımızda bunların farkı 0'a eşit olmazsa, eşit oldukları değer de birbirine eşit olmaz. Ee bunların farkının 0'a eşit olduğu tek değer 2'dir. Tek değeri 2 olduğundan 2'den başka bir yerde eşit olamazlar.*

Tablo 4.4. de görüldüğü üzere, geliştirdiği çözüme ilişkin yeterli gerekçesi yoksa ve sadece sayısal işleme dayalı bir sonuca ulaşıyorsa, ilişkilendirerek açıklama yapma konusunda zorluk yaşamaktadır.

Erdem'in çözüm sürecinde karşılaşılan bir diğer nokta ise çözüm süreçlerini almış olduğu derslere dayalı olarak geçmişteki deneyimlerine dayandırmasıdır.

Tablo 4. 5. Erdem'in BU 2 Sorusuna İlişkin Çözüm Süreci

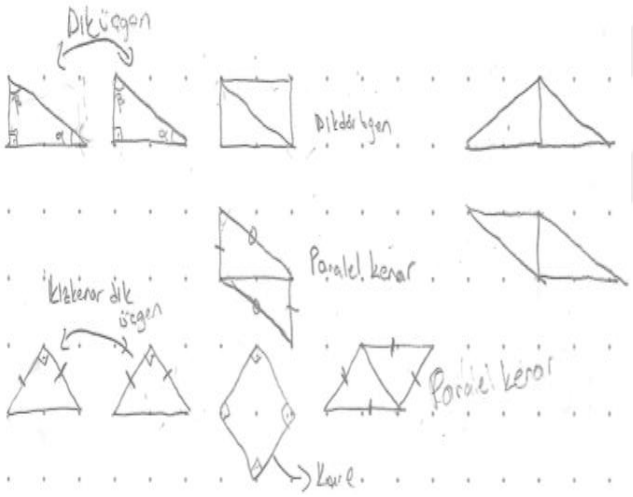
Çözüm Sürecinde Araştırmacı İle Arasında Geçen Bir Diyalog:
[…] ***Araştırmacı:*** *Çözüme dayalı açıklamalarında sürekli "oluşturuyorduk, yapıyorduk" ifadelerini kullanıyorsun. Nerede yapıyordunuz, nereden aklına geldi bu yol?* ***Erdem:*** *Tek sayıların modellenmesini göstermede. "Matematiğin Doğası" dersinde yaptık.* ***Araştırmacı****: Yani derslerde yaptınız?* ***Erdem:*** *Evet. Bir de "Matematik Öğretimi" dersinde yaptık.*

Sonuç olarak; Erdem'in BU 2 de bulunan M-İ sorusuna ilişkin a şıkkı kapsamında geliştirdiği çözümler, varsayım kategorisiyle ilgili tanım şartlarını sağladığı ve matematiksel nitelik anlamında bir eksiklik bulunmadığı ancak çözüme dayalı

açıklamalarda eksiklikler taşıdığı temele alınarak yeterli çözüm olarak "2" puan ile derecelendirilmiştir. Sorunun b şıkkında ise ulaştığı çözümü yeterli gerekçe ile açıklayamadığı için geliştirilebilir çözüm olarak "1" puan ile derecelendirilmiştir.

Erdem'in üçüncü bireysel uygulamanın birinci aşaması kapsamında M-İ odaklı görev sorusuna verdiği cevabın kategorisi, iddianın kapsadığı olası tüm durumların uygun bir alt kümesini sağlayabilen bir çözüm geliştirdiği için deneysel argüman olarak değerlendirilmiştir. Bu soru kapsamında ilk olarak, soruda verilen üçgen durumlarını temele alarak, bir kenarları ortak olacak şekilde özel üçgenleri kullanarak birleştirmeler yapmıştır.

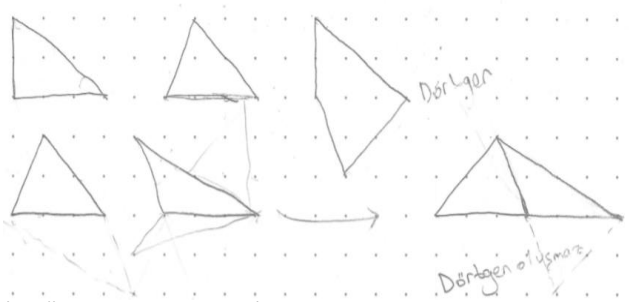
Eş Üçgenleri Birleştirmesine İlişkin Bir Örnek:



Çözümüne İlişkin Açıklaması:

Erdem: *Dik üçgeni düşünürsek, sonuçta bu iki üçgeni birleştirebilmek için yani bir dörtgen elde etmek için bu üçgenin üç kenarından bir tanesini çakıştıracak şekilde birleştirmemiz lazım. Bu kenar, dik üçgen için hipotenüs olursa karşılıklı açılar dik olacak. Dörtgen olduğu için geriye kalan iki açıyı birleştirebilmemiz için burası dik burası dik olduğunda karşılıklı açılar yani farklı açılar* [α veβ açılarını gösteriyor]*birbirleriyl e eşleşmiş oluyor. Farklı açılar toplamının zaten* 90^0 *olduğunu biliyorduk, dikdörtgen oluşuyor. Hipotenüsü sabit tutunca dikdörtgen oluşuyor.* [...]. *Şu uzun kenar sabit tutulduğundaysa paralelkenar oluşuyor. Diğer kenarda da üçgen oluşuyor.*

Eş Olmayan Üçgenleri Birleştirmesine İlişkin Bir Örnek:



Çözümüne İlişkin Açıklaması:

Erdem: *Eş olmayan dediği için üçgenler eşit olamıyor; ya iki kenarı birbirine eşit olmak zorunda ya da bir kenarı birbirine eşit olmak zorunda. Bir kenarı birbirine eşit olunca bir tane dörtgen oluşuyor. İki kenarı birbirine eşit olunca üçgen oluşuyor. Dörtgende normal dörtgen oluyor yani herhangi bir özelliği olmayan dörtgen oluyor*

İki Üçgen Durumuna İlişkin Ulaştığı Genel Sonuç:

Erdem: *İki tane eş üçgenden bir dörtgen oluşturabildiğimiz için eşit kenarlarını çakışacak şekilde birleştirme yapmamız gerektiğini düşündüm. Bu şekilde bir çözüm yaptım. Burada da aynı düşünceyi eş olmayan iki tane eş üçgene uyarladım. Ortak yani eşit uzunluktaki iki kenar üzerinde birleştirme yapmayı düşündüm.*

Şekil 4. 5. Erdem'in BU 3-1 Sorusuna İlişkin Çözümleri

Eş üçgenler ile birleştirmeler yaparken bir kenarları ortak alarak birleştirmeler yapmıştır. Bu kapsamda, ilk olarak iki dik üçgeni kenarları boyunca birleştirerek dikdörtgen, paralelkenar elde etmiştir. İkinci olarak ikizkenar dik üçgenleri bileştirerek kare ve dikdörtgen elde etmiştir. Çeşitkenar iki üçgeni birleştirerek eşkenar dörtgen; ikizkenar dik üçgeni birleştirerek paralelkenar ve eşkenar dörtgen elde etmiştir. Eş üçgenleri birleştirirken düzgün dörtgen çeşitlerini oluşturmaya yönelik bileştirmeler yapmıştır. Bu doğrultuda, sadece bir kenarı ortak olan eş üçgenleri birleştirmiştir. Ancak üçgenleri birleştirirken düzgün olmayan dörtgen elde etmeyi göz önünde bulundurmamıştır. Çözümü bu anlamda eksiklik taşımaktadır.

Eş olmayan dörtgenleri birleştirdiğinde ise ilk olarak bir kenarı ortak olan bir üçgen almış, karşılıklı olacak şekilde birleştirmiş ve bir dörtgen elde etmiştir. Ancak dörtgenin özel duruma sahip olan bir dörtgen olup olmadığını açıklamamıştır. Üçgenleri yan yana getirerek birleştirdiğinde ise bir dörtgen elde edemeyeceğini, eş olmayan üçgenlerden dörtgen elde edilmek isteniyorsa çakışacak şekilde birleştirmelerin yapılması gerektiği sonucuna ulaşmıştır.

Tablo 4. 6. Erdem'in BU 3.1 Sorusuna İlişkin Çözüm Süreci

Çözüm Sürecinde Araştırmacı İle Arasında Geçen Bir Diyalog:
[...] ***Erdem:*** *Üç kenar birbirine eşit olursa eş olurlar. Eş olmayan dediği için üçgenler eşit olamıyor; ya iki kenarı eşit olmak zorunda ya da bir kenarı birbirine eşit olmak zorunda. Bir kenarı birbirine eşit olunca bir tane dörtgen oluşuyor. Dörtgende, normal dörtgen oluyor yani herhangi bir özelliği olmayan dörtgen oluyor.* ***Araştırmacı:*** *Herhangi bir özelliği olmayan dörtgen.* ***Erdem:*** *Evet.*

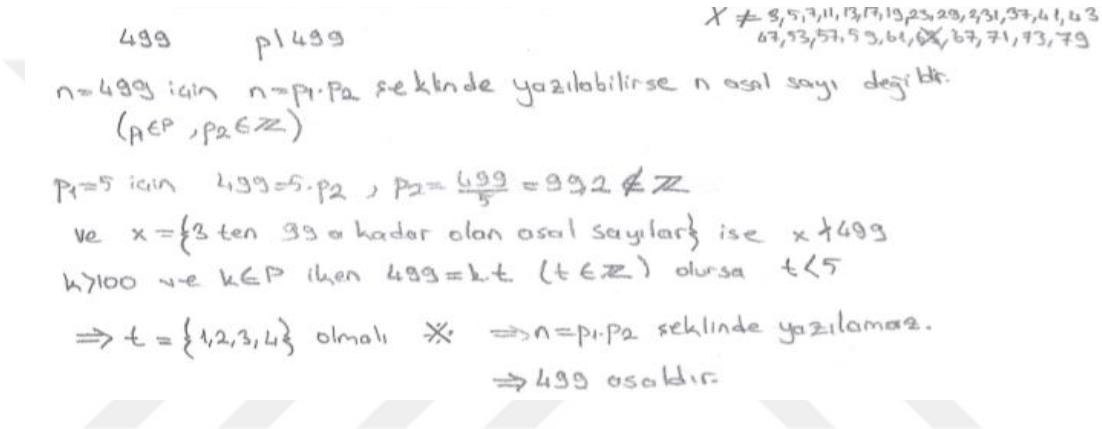
Tablo 4.6 da görüldüğü üzere üçgenlerde birleştirmeler yaparken, düzgün dörtgenlerin oluşmasına dikkat etmiştir.

Erdem'in BU 3.1 da bulunan M-İ sorusuna geliştirdiği çözümler, deneysel argüman kategorisiyle ilgili tanım şartlarını sağladığı ve yaptığı çözümlerde matematiksel nitelik anlamında ulaştığı genel sonuçlara engel olacak büyük eksiklikler taşımadığı görülmüştür. Ancak sorunun birinci şıkkı, düzgün olmayan dörtgenlere dayalı birleştirmelerin çözümde eksik olması nedeniyle yeterli çözüm olarak "2" puan ile derecelendirilmiştir. Sorunun ikinci şıkkında ise oluşturduğu dörtgen çeşidine ilişkin bilgi

vermemesi eksiklik olarak görülmüş ve yeterli çözüm olarak "2" puan ile derecelendirilmiştir.

Erdem'in üçüncü bireysel uygulamanın ikinci aşaması kapsamında M-İ odaklı görev sorusuna verdiği cevabın kategorisi, iddianın kapsadığı olası tüm durumların uygun bir alt kümesini sağlayabildiği için deneysel argüman olarak değerlendirilmiştir. Bu soru kapsamında ilk olarak, 100' kadar olan asal sayıların kendinden ve birden başka sayıya bölünemeyeceğini kontrol etmiştir.

Geliştirdiği Çözüm:



Geliştirdiği Çözüme İlişkin Açıklaması ve Araştırmacıyla Arasında Geçen Bir Diyalog:

Erdem: *Bu bir asal sayıysa* [499 *sayısını gösteriyor*] *iki asal sayının çarpımı şeklinde yazılabilir. İki asal sayının çarpımı şeklinde değil de bir asal böleni var bunun. Bir asal böleni varsa, o asal bölene bölündüğünde bir tam sayı elde etmeye çalışıyoruz biz. Bu asal 5 olamaz ama ben hep 5'e böldüm bu sayıyı, yani 499'u. Onu da 99,2 buldum. Demek ki ben bu sayıyı 99'a kadar olan asallara bölemiyorsam 99'dan büyük olan asallara bölemem. Çünkü 99'dan büyük olan asallara bölersem eğer sonuçta elde ettiğim şey 2, 3 ve 4 olacak. Ki bu sayılara yani 2, 3 ve 4 e böldüğümde tamsayı elde edemiyorum. Tam sayı elde edemediğime göre 499'u bir asalla bölememişim. Bu yüzden 99 a kadar olan bütün asalları denedim, bölünüyor mu diye. Bölünmüyor. Bölünmediğinden dolayı asaldır dedim.*

Araştırmacı: *99'a kadar olan bütün asalları denedim, dedin. Peki neden deneme yoluna başvurdun?*

Erdem: *Başka türlü nasıl yapacağım ki?*

Araştırmacı: *Başka bir çözüm yolu aklına gelmediği için denemek senin için kolay oldu.*

Erdem: *Evet.*

Şekil 4. 6. Erdem'in BU 3.2 Sorusuna İlişkin Çözümleri

499 sayısı ile çözüme başlamıştır. "499 eğer asalsa kendisinden küçük bütün asallara bölünmez." fikrinden hareket ederek, bu doğrultuda 2'den başlayarak asal sayılarla bölümünü incelemiştir. Yaptığı denemelerle 100'e kadar olan asal sayıları denedikten sonra, genel bir durum oluşturmaya çalışmıştır. Bu kapsamda 100'den büyük sayılar için, çarpımın diğer değerinin 5'ten küçük olacağını düşünerek 499'u; 5'ten küçük 2 ve 3 asal sayıları ve 4 sayısı ile bölümünü incelemiştir. Bölemeyeceği sonucuna ulaşmıştır.

Böylece 499'un asal sayı olduğunu deneme yoluyla bulmaya çalışmış sonrasında genel bir ifade oluşturmaya çalışmıştır.

Tablo 4.7 de yer alan diyalogda görüldüğü üzere, 499 sayısı ile çözüme başlama nedenini hem 500'den büyük en küçük sayı olması hem de önceden asal olduğunu bilmesine dayandırmıştır.

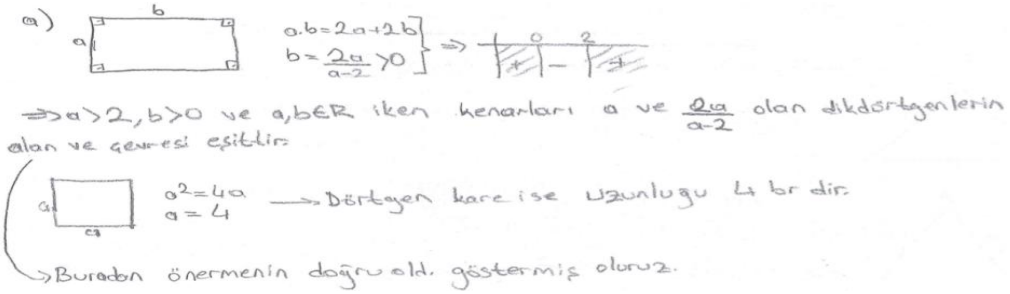
Tablo 4. 7. Erdem'in BU 3.2 Sorusuna İlişkin Çözüm Süreci

Çözüm Sürecinde Araştırmacı İle Arasında Geçen Bir Diyalog:
[…]
Araştırmacı: *Direkt neden 499 ile başladın?*
Erdem: *500'den küçük en büyük dediği için 499 ile başladım. Bir de asal olduğunu biliyordum, hatırlıyordum.*
Araştırmacı: *Nerden biliyordun?*
Erdem: *Kitabın arkasında görmüştüm.*
Araştırmacı: *Hangi kitabın arkasında görmüştün?*
Erdem: *Elemanter Sayı Kuramı.*
Araştırmacı: *Peki, önceden kitapta görmeseydin yine 499 ile mi çözüme başlardın?*
Erdem: *Evet.* […]. *Şimdi benden 500'den küçük en büyük asal sayıyı istiyor. Ben bunu 450'den başlayarak yapmam.*

Erdem'in BU 3.2 de bulunan M-İ sorusuna ilişkin geliştirdiği çözüm, deneysel argüman kategorisiyle ilgili tanım şartlarını sağladığı ve matematiksel nitelik anlamında bir eksiklik bulunmaması nedeniyle beklenen tam çözüm olarak "3" puan ile derecelendirilmiştir.

Erdem'in dördüncü bireysel uygulamanın birinci aşaması kapsamında M-İ odaklı görev sorusuna verdiği cevabın kategorisi, a şıkkı için belirli bir durumda tüm sınıfı temsil eden genel bir argüman sağladığı için genel örnek kategorisinde değerlendirilmiştir. Sorunun b şıkkında ise iddianın kapsadığı olası tüm durumların uygun bir alt kümesinin incelenmesine dayalı bir çözüm geliştirdiği için genel örnek kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu soru kapsamında ilk olarak, özel durumu temsil edecek bir dikdörtgen çizerek, kenarlar arasında bir ilişki bulmaya çalışmıştır.

Geliştirdiği Çözüm:



Geliştirdiği Çözüme İlişkin Açıklaması:

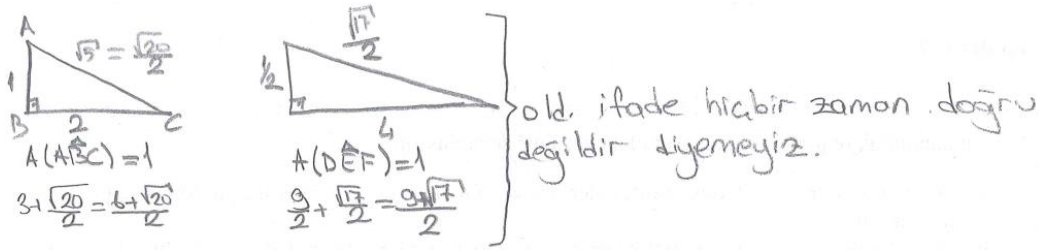
Erdem: *Bir uzunluğu a bir uzunluğu b olan bir dikdörtgen düşündüm. O zaman alanı a.b olur, çevresi de a+b'nin 2 katı olur. (a.b=2a+2b) olur. Buradan "b"yi çekersem* $\frac{2a}{a-2}$ *olur. Kenar uzunluğu olduğu için "a" ve "b"nin 0'dan büyük olması gerekiyor. 0'dan büyük olma durumunu incelediğimde "a "değerleri ya 0'dan küçük olacak ya da 2'den büyük olacak. Yanlış yaptım* [yanlışını düzeltti] *"a" değerleri 2'den büyük olduğunda bu durumda şu şartı sağlayan bütün dikdörtgenlerin alanı ile çevre uzunluğu aynıdır.*

Şekil 4. 7. Erdem'in BU 4.1-a Sorusuna İlişkin Çözümü

Temsili olarak aldığı dikdörtgenin kısa kenarını a ve uzun kenarını b ile isimlendirerek, dikdörtgenin çevre ve alan formülünden (a.b=2a+2b) ilişkini bulup, uzun ve kısa kenar arasında genel bir ifade bulmaya çalışmıştır. Bulduğu "$\frac{2a}{a-2}$" genel ifadesine uyum sağlayan dörtgenlerin çevre uzunluklarının eşit olduğu sonucuna ulaşmıştır. Diğer taraftan özel bir dikdörtgen olması nedeniyle temsili olarak aldığı bir karenin kenar uzunluklarını "a" alarak karenin çevre ve alan formülünden kenar uzunluğu "4" olan kareler içinde bu önermenin doğru olduğunu göstermiştir.

Sorunun a şıkkının çözümünde herhangi bir noktada zorlanmamış ve yaptığı çözümde her şeyi açık olarak yazmaya çalışmıştır. Buna karşılık b şıkkının çözümünde tüm durumları içerisine alan genel bir üçgen göstermekte zorlanmış, özel üçgenler üzerinde önermeyi denemeye çalışmıştır.

Geliştirdiği Çözüm:

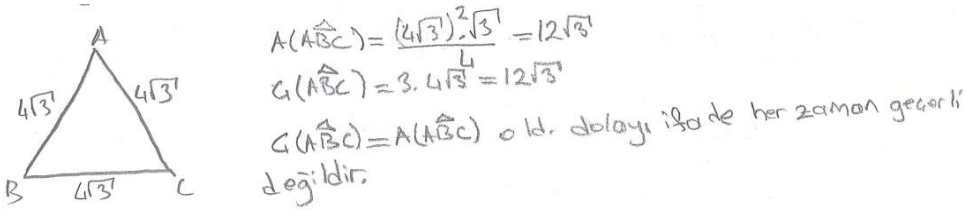


Geliştirdiği Çözüme İlişkin Açıklaması ve Araştırmacı İle Arasında Geçen Diyalog:

Erdem: *Alan ve çevre uzunlukları farklı iki üçgen var herhalde. Bir üçgen için bu durum sağlanamaz, yani, tamam* [min olmayacak şekilde kendine sordu ve düşündü].
Araştırmacı: *Erdem, sesli düşünüyoruz.*

Erdem: *Tamam. Özel bir durum inceliyorum. Bir tane dik üçgen aldım. Kenarları 1, 2 ve* $\sqrt{5}$ *olan. Bunun alanı A(ABC)=1 oluyor. Alanı 1 olacak şekilde aynı üçgeni değiştirdim. A(DEF)=1 oluyor. Buradan çevre uzunluklarına bakacağım. Bunun ki* $(3+\sqrt{5})$*, bununki* $\left(\frac{9+\sqrt{17}}{2}\right)$*. O zaman bu 4 ile 5 arasında, bu 9 ile 10 arasında. Bunların eşit olma gibi bir ihtimali yok. Bunlar eşit olmuyor.*

[*uzun süre geliştirebileceği çözüm için denemeler yapıyor ve düşünüyor*]



Erdem*: Aksine bir örnek göstersem. Şurası* $4\sqrt{3}$ *olduğunda eşkenar üçgen oluyor. Eşkenar üçgenin alanı* $\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$ *idi. Kenar uzunluğunu bu formüle yerleştirdiğimizde alanı* $12\sqrt{3}$ *olur. Çevresi de* $12\sqrt{3}$ *olur. Ç(ABC)=A(ABC) olur. Söylenilen durumun aksine bir örnek gösterdiğimizden dolayı her durumda geçerli değildir, bazen geçerli olabiliyor onu da şurada gördük. Alan uzunluğu eşit olan üçgenler olduğu hadle olmayan üçgenler de vardır.*

Şekil 4. 8. Erdem'in BU 4.1-b Sorusuna İlişkin Çözümü

Özel üçgenler üzerinde yaptığı denemelerde durumları temsil edecek sayılar üzerinden bir çözüm geliştirmiştir. Verilen önermenin yanlışlığını, doğrudan ispat yöntemi; doğruluğunu ise aksine örnek vermek olarak isimlendirdiği çelişki yöntemiyle ispatlamaya çalışmıştır. Yaptığı çözümler sonucunda genel bir duruma ulaşmaktan ziyade önermenin hangi durumlarda doğru ve yanlış olacağına odaklanmıştır. Çözüm sırasında ise önermeyi test edeceği üçgenlerin seçiminde ve neyi inceleyeceği konusunda yaşadığı zorluk Tablo 4.8 de yer alan diyalogdaki gibi gözlemlenmiştir.

Tablo 4. 8. Erdem'in BU 4.1 Sorusuna İlişkin Çözüm Süreci

Çözüm Sürecinde Araştırmacı İle Arasında Geçen Bir Diyalog:

[…]

Erdem: *O zaman özel bir durum için şey, hiçbir durum için şey geliştirmek lazım ama genel kanıya nasıl varacağız ben onu şey yapamadım.*

Araştırmacı: *Biraz önce ne söylemek istedin. Bir daha söyle.*

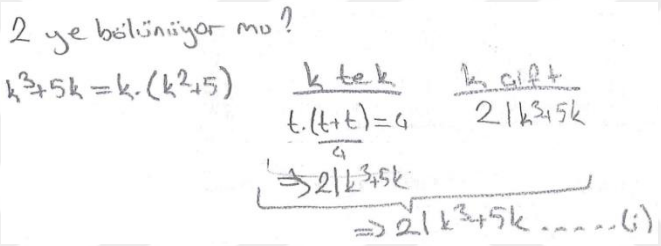
Erdem: *Alanları eşit olduğunda çevre uzunlukları eşit olmayabiliyor. Bu yüzden bu yargı; ya hiçbir zaman, hani şey diyor ya " alan ölçüleri eşit çevre uzunlukları farklı üçgen vardır", özel durumlarda oluyor. Ama her zaman oluyor mu ona bakmak lazım.*

Sorunun a şıkkı kapsamında genel bir durum oluşturabilen Erdem, Tablo 4.11 de yer alan çözüm sürecinde görüldüğü üzere b şıkkı için de benzer durumdan çözüm geliştirmeye çalışmıştır. Tüm durumları içerisine alan genel bir temsil oluşturmanın gerekliliğinin farkında olmuş ancak bu temsili bulmakta zorlanınca örnek durumlar üzerinden önermeyi incelemiştir.

Erdem'in BU 4.1 de bulunan M-İ sorusunun a şıkkına ilişkin geliştirdiği çözüm, genel örnek kategorisiyle b şıkkına ilişkin geliştirdiği çözümler ise deneysel argüman kategorisi ile ilgili tanım şartlarını sağladığı ve matematiksel nitelik anlamında bir eksiklik bulunmaması nedeniyle beklenen tam çözüm olarak "3" puan ile derecelendirilmiştir.

Erdem'in dördüncü bireysel uygulamanın ikinci aşaması kapsamında M-İ odaklı görev sorusuna verdiği cevabın kategorisi, belirli bir örneğin veya durumun temsiline dayanmayan ispat sağlayabildiği için kanıt kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu soru kapsamında ilk olarak, verilen önermenin 6 ile bölünebilip bölünemediğini kontrol etmek için 2 ile bölümünü sonrada 3 ile bölümünü kontrol etmiştir.

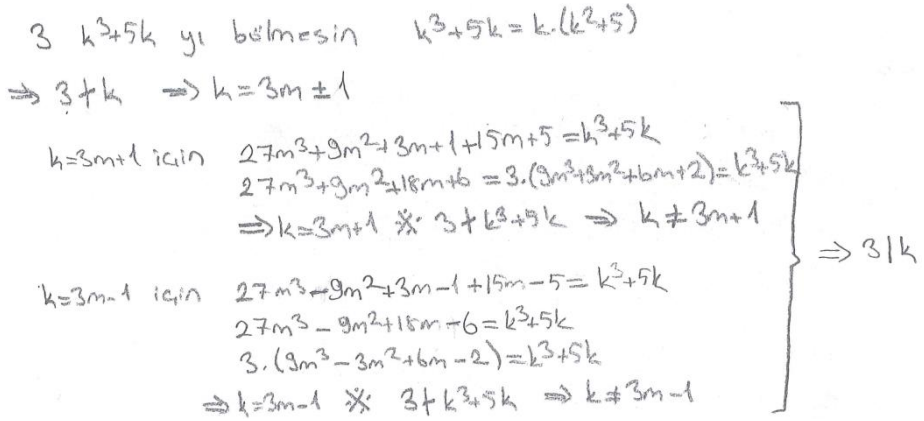
2 İle Bölünebilmeyi Kontrol Etmesi:



Çözümüne İlişkin Açıklaması:

Erdem: *Bir sayının 6 ya bölünebilmesi için hem 2'ye hem de 32e bölünmesi gerekiyor. 2'e bölünebildiğini gösterebilmek için çift sayı olduğunu göstermek gerekiyor. Sayının çift olması için de tek formunun dışında olması gerekiyor. Bu durumda "k" doğal sayı olduğundan dolayı ya tekdir ya da çifttir. "k" tek olduğu durumda (k^3+5k) çift oluyor. Bu durumda $2 \mid k^3+5k$ olur. "" çift olduğundaysa (k^3+5k) çift oluyor. Bu durumda da $2 \mid k^3+5k$ oluyor. k'nın hem tek hem de çift olma durumunu incelediğimizde "k"nın doğal sayı olduğu bütün durumlar için 2'nin (k^3+5k)'yı böldüğünü söyleyebiliriz.*

3 İle Bölünebilmeyi Kontrol Etmesi:



Geliştirdiği Çözüme İlişkin Açıklaması:

Erdem: *3 içinde; 3 sayısı (k^3+5k)'yı bölmesin dedim. Böyle ise (k^3+5k) ya (3m+1) formunda veya (k^3+5k), (3m+2) formundadır "m" burada doğal sayı. Böyle ise (k^3+5k-2), (3m) olur. ($k^3+5k-2=3m$)… (3m+2) değil de (3m-1) olarak düşünsek bunu da karşıya attığımızda (3m+1) olur. Bu durum da $k^3+5k+1=0(mod3)$ olur o da $k^3+5k+1=0(mod3)$ e denktir. k^2 değil*

miydi ya [*düzeltmeler yaptı*]. *Böyle ise 3 sayısı k'yı bölmez. (k=3m+1) için* $1m^3+9n^2+3m+1+15m+5$ *olur* k^3+5k $27m^3+..+6$*'dır. O da* $3.(9m^3+3m^2+6m+2)$ *olur. Bunun* (k^3+5k)*'ya eşit olması gerekiyor. 3 sayısı bunu bölmesin dedik, böldü. O zaman (k=3m+1)'e* (k^3+5k)*'yi bölmez ifadesi ile çeliştiğinden "k" sayısı (3m+1) olamaz. (3m-1) içinde aynı şeyleri düşündüm ve olamayacağını gördüm.* [...]. *Eğer bu iki forma da uymuyorsa 3 sayısının k ifadesini bölmeyeceği durumunun yanlış olduğunu gördüm. O zaman* $3 \mid k^3+5k$*' dir.*

Şekil 4. 9. Erdem'in BU 4.2 Sorusuna İlişkin Çözümü

Geliştirdiği çözümde; 2 ile bölümünü incelerken, "k"nın tek ve çift olma durumlarını incelemiştir. Bu kapsamda verilen önermedeki ifadeyi çarpım durumuna getirmek için "k" parantezine almış ve $k.(k^2+5)$ olarak yazmıştır. Böylece "k"nın tek olması durumunda "tek.çift=çift" , "k"nın çift olması durumunda "çift.tek=çift" olacağını böylece k^3+5k ifadesinin 2 ile tam bölünebileceği sonucuna ulaşmıştır. 3 ile bölüm durumunu incelemek içine çelişki yönteminden faydalanmıştır. Önermenin 3 ile bölünmemesi için "k"nın (3m+1) veya (3m-1) formlarından biri olabileceğini temele alıp, önermede yerine yazmış ve 3 ile bölünebildiği sonucuna ulaşmıştır. Böylece önermenin, 3 ile bölünmediğini temele alarak yaptığı çözümünün tersini vermesi sonucu, önermenin 3 ile bölünebildiği sonucuna ulaşmıştır. Hem 2 hem de 3' e bölüm durumlarını sağlayan önermenin 6 ile de tam bölünebileceğini göstermiştir.

Tablo 4. 9. Erdem'in BU 4.2 Sorusuna İlişkin Çözüm Süreci

Çözüm Sürecinde Araştırmacı İle Arasında Geçen Bir Diyalog:

[...]

Erdem: *3'ün* k^3+5k*'yı bölüp bölmediğini, olmayana ergi miydi çelişki miydi tam hatırlamıyorum o yoldan giderek bölmesin dedim.*

Araştırmacı: *Olmayana ergi veya çelişki olmasını gerektiren durum senin için nedir?*

Erdem: *Aksini göstermek.*

Erdem'in çözümü sırasında kullandığı ispat yöntemiyle alakalı bilgilerinde eksiklik olduğu ve ispat yöntemlerini birbirlerinden ayıramadığı gözlemlenmiştir.

Erdem'in BU 4.2 de bulunan M-İ sorusuna ilişkin geliştirdiği çözüm, kanıt ilgili tanım şartlarını sağladığı ve matematiksel nitelik anlamında bir eksiklik bulunmaması nedeniyle beklenen tam çözüm olarak "3" puan ile derecelendirilmiştir.

4.1.2. Erdem'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Psikolojik Bileşen Kapsamında Elde Edilen Bulgular

Erdem M-İ odaklı görev sorularına ilişkin yaptığı çözüm süreçlerine ilişkin algılarını; strateji ve çözüm niteliğine dayandırarak açıklamıştır. M-İ sorularının çözümüne ve M-İ

yapma sürecine ilişkin algılarını sıklıkla stratejilerine dayandırmıştır. Stratejisine ilişkin algıları ise farklı temsiller, temsilin güçlendirilmesi ve bilgi olarak değişkenlik göstermiş ve en çok bilgisine dayalı açıklamalarda bulunmuştur. Bunu takiben çözümünün niteliğine ilişkin algılarının da sıklık gösterdiği gözlemlenmiştir. Çözümünün niteliğine ilişkin algılarını ise sıklıkla geçerli olmaya dayandırarak açıklamıştır.

Tablo 4. 10. Erdem'in M-İ Sürecine İlişkin Algıları

	Strateji					**Çözümün Niteliği**		
Çözüm Kategorileri	**Farklı Temsil**	**Temsilin Güçlendirilmesi**	**Bilgi**	**Farklı Stratejileri Seçme**	**Özel Durumları İnceleme**	**Geçerli Olma**	**Uygun Olma**	**Genellenebilir Olma**
***Örüntü**	**1**	**2**	**4**			**2**		
***Varsayım**	**1**		**1**			**2**		
***Deneysel Argüman**		**4**	**6**			**1**		**1**
***Genel Örnek**			**3**			**2**	**1**	**1**
***Kanıt**			**5**		**1**	**1**	**2**	
Toplam	**2**	**6**	**19**	**0**	**1**	**8**	**3**	**2**
			28				**13**	

Erdem BU 1 sorusu kapsamında geliştirdiği örüntü çözümüne ilişkin algılarını strateji ve çözüm niteliğine dayandırarak açıklamıştır. Örüntü sorusuna ilişkin geliştirmiş olduğu çözüme dayalı stratejik algısı kapsamında; çözümünün sözel açıklama eklenerek geliştirilebileceğini ifade etmiştir. Bunun nedenini ise çözümüne ilişkin açıklama yapma konusunda eksik olduğunu ifade ederek, matematiksel sembolleri kullanarak çözüm yapmayı daha çok tercih etmesine dayandırmıştır. Bundan dolayı çözümünde geliştirilebilecek nokta olarak açıklama eklemeye ihtiyaç duyduğunu ifade etmiştir. Her adımını ilişkilendirerek yaptığını ifade etmiş ve çözümünü doğru olarak kabul etmiştir. Çözüm niteliği algısı kapsamında ise ürettiği kuralın sağlamasını yaptığını ve bu kuralı verilen sayılardan yararlanarak oluşturduğunu belirterek çözümünün her zaman doğru olacağını ifade etmiştir.

Erdem'in örüntü çözümü kapsamında tespiti yapılan algılarına ilişkin açıklamalarından örnekler Tablo 4.11 de verilmiştir.

Tablo 4. 11. Erdem'in M-İ Sürecinde BU 1 Sorusunun Örüntü Çözümüne İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar

Tema	Kod	Örnek Diyalog
Strateji	**Farklı Temsil**	[...] ***Araştırmacı:*** *Farklı çözümler geliştirilebilir miydi?* ***B1-E3****:Farklı çözümler geliştirilebilirdi. Daha çok sözel olarak açıklansa daha iyi olurdu.* ***Araştırmacı:*** *Sen neden matematiksel olarak gösterdin?* ***B1-E5:*** [...] *bir tamsayı verdiğinde bize onu 9'a böldüğümüzde direkt yerini vermesini istedim. Onu da kafamda sözel olarak ifade edemediğimden dolayı matematiksel olarak yazdım.* ***Araştırmacı:*** *Sözel olarak ifade edebilsen onu mu yapacaktın?* ***B1-E6:*** *Evet.* ***Araştırmacı:*** *Farklı çözümler arasından sen neden bu çözümü seçtin?* ***B1-E7:*** *Daha çok bu tür çözümleri yapmaya yatkın olduğum için. Yani matematiksel sembolleri kullanarak çözümleri daha iyi yapıyorum.*
	Temsilin Güçlendirilmesi	
	Bilgi	[...] ***Araştırmacı:*** *Sence çözümün doğru mu?* ***B1-E11:*** *Doğru.* ***Araştırmacı:*** *Neden böyle düşünüyorsun?* ***B1-E12:*** *Çünkü her şeyi ilişkilendirerek yaptım.*
Çözümün Niteliği	**Geçerli Olma**	[...] ***Araştırmacı:*** *Yaptığın çözüm her zaman doğru olacak mı, seni her zaman doğruya ulaştıracak mı?* ***B1-E14:*** *Evet.* ***Araştırmacı:*** *Neden böyle düşünüyorsun?* ***B1-E15:*** *Çünkü doğru olduğunu düşünüyorum. Yani şöyle ürettiğim kuralda verilen sayıları yerine yazdığımda sağlıyor, ürettiğim kuralı da kafama göre yapmadım verilen sayılardan yararlanarak yaptığım için doğrudur.*

Erdem BU 2 sorusu kapsamında geliştirdiği varsayım çözümüne yönelik algılarını, strateji ve çözüm niteliğine dayandırarak açıklamıştır. Varsayım sorusuna ilişkin geliştirmiş olduğu çözüme dayalı stratejik algısı kapsamında; çözümünde kullandığı modellemenin değiştirilerek farklı bir çözüm oluşturulabileceğini ifade etmiştir. Bunun nedenini ise iki farklı şekilde çözüm geliştirdiği için çözümünde geliştirilebilecek bir kısım bulunmamasına, değişiklik yapılacaksa sadece oluşturulan modellemenin farklı şekilde oluşturulabileceğine dayandırmıştır. Ürettiği modelde bir hata olmadığını düşünmesinden dolayı çözümünü doğru kabul etmiştir. Bununla birlikte, oluşturduğu modele ilişkin geliştirdiği kuralda tek sayıların formülüne dayalı bilgisinden faydalanması ve yazdığı her şeyin bir dayanağı olduğunu düşündüğünden dolayı çözümünü doğru kabul etmiştir. Çözüm niteliği algısı kapsamında ise ürettiği kuralı aritmetik dizinin genel formülünden yararlanarak gösterdiğini, çözümlediğini ve ürettiği kural ile verilen sayı örüntüsünü ilişkilendirdiği için çözümünde geliştirilebilecek bir yön bulunmadığını ifade etmiştir. Yaptığım her şeyi kesin bir nedene dayandırdığı için ulaştığı sonucun her zaman doğru olacağını ifade etmiştir.

Erdem'in varsayım çözümü kapsamında tespiti yapılan algılarına ilişkin açıklamalarından örnekler Tablo 4.12 de verilmiştir.

Tablo 4. 12. Erdem'in M-İ Sürecinde BU 2 Sorusunun Varsayım Çözümüne İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar

Tema	Kod	Örnek Diyalog
Strateji	**Farklı Temsil**	[…] ***Araştırmacı:*** *Farklı çözümler geliştirilebilir miydi?* ***B2-E2****: Farklı çözüm nasıl geliştirilir, genel formülü bulmada farklı bir çözüm geliştirilebileceğini pek sanmıyorum.* […]*. Zaten sayılar "(tek sayılar)x2" olduğundan dolayı genel kural 2x(2n-1)'den (4n-2) oluyor, bununda farklı bir yolu var mıdır, bilmiyorum. Sadece modellemeleri farklı olabilir.*
	Bilgi	[…] ***Araştırmacı:*** *Farklı modeller arasından sen neden bu model gösterimini seçtin?* ***B2-E4:*** *Birinci şekil örüntüsünün 1, 3, 5, 7 olarak devam ettiğini gördükten sonra bildiğim bir modelleme ile ilişkilendirdim. İkinci şekil örüntüsünde 3'ün katları şeklinde devam ettiğini gördükten sonra 3'ü üçgenin köşeleri olarak kodladım aklımda. 1, 2 ve 3'ü de üçgen sayısı olarak kodladım aklımda. Buna göre de bir modelleme yaptım.*
Çözümün Niteliği	**Geçerli Olma**	[…] ***Araştırmacı:*** *Yaptığın çözüm her zaman doğru olacak mı, seni her zaman doğruya ulaştıracak mı?* ***B2-E9:*** *Evet.* ***Araştırmacı:*** *Neden böyle düşünüyorsun?* ***B2-E10:*** *Yaptığım her şeyi kesin bir nedene dayandırdığım için ulaştığım sonucun doğru olduğunu düşünüyorum. Doğru olduğundan dolayı da bütün ifadeler için doğru olduğunu düşünüyorum.* ***Araştırmacı****: Bütün ifadeler derken ne demek istiyorsun?* ***B2-E11:*** *Yani "n" yerine herhangi bir sayı yazdığımda n. şekilde oluşan modelde nokta sayısının gösterilmesi.*

Erdem BU 3.1 ve BU 3.2 soruları kapsamında geliştirdiği deneysel argüman çözümlerine yönelik algılarını, strateji ve çözüm niteliğine dayandırarak açıklamıştır. Üçüncü bireysel uygulamanın birinci sorusu kapsamında iki üçgeni birleştirerek dörtgen elde etmeye dayalı çözümünde, tüm üçgen durumlarını incelediğini bu nedenle de çözümünde geliştirebileceği bir yönün olmadığını ifade etmiştir. Eş olmayan üçgenleri birleştirirken bir hata yapması dışında çözümünün doğru olduğunu ifade etmiş, bu hata dışında çözümünde geliştirilebilecek bir yön olmadığını düşünmüştür. Var olan hatası dışında bütün üçgen durumlarını incelediğini ve genel bir sonuca bu açıdan yaklaştığını düşündüğü için çözümünün her zaman doğru ve geçerli olacağını ifade etmiştir. Üçüncü bireysel uygulamanın ikinci sorusu kapsamında ise oluşturduğu çözümde geliştirilebilecek bir yön bulunmadığını ifade etmiş ve nedenini çözümü oluşturmak için çok uğraşmasına dayandırmıştır. Asal olduğunu bildiği bir sayının asal olma durumunu

incelediği için çözümünün doğru olduğunu ifade etmiştir. Doğruluğun nedenini ayrıca, matematiksel olarak kabul edilmiş bir tanımı kullanarak çözüm yapmasına dayandırmıştır. Çözümünde kullandığı temsillere ilişkin sözel açıklamaların ve matematiksel eşitliklerin daha net yazılarak, çözümünün geliştirilebileceğini ifade etmiştir. Bu düşüncesinin nedenini ise, ifadeleri açık olarak yazmak kendi aklına geliyorsa, başka birinin de çözümünde baktığında aklına gelebileceğine dayandırmıştır. Böylece çözümü, hem daha açık şekilde yazacağını hem de okuyana fazladan iş çıkarmamış olacağını düşünmüştür. Yaptığı işlemlerle çözümlerini doğruladığını bu nedenle de çözümünün her durumda doğru ve geçerli olacağını ifade etmiştir.

Erdem'in deneysel argüman çözümleri kapsamında tespiti yapılan algılarına ilişkin açıklamalarından örnekler Tablo 4.13 de verilmiştir.

Tablo 4. 13. Erdem'in M-İ Sürecinde BU 3.1 ve BU 3.2 Soruları Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar

Tema	Kod	Örnek Diyalog
Strateji	**Bilgi**	[...] ***Araştırmacı:*** *Farklı çözümler geliştirilebilir miydi?* ***B3-E26****: Farklı çözümler geliştirilebilir mi, yok gibi. Geliştirilebilir de benim aklıma şu anda hiçbir şey gelmiyor. Bu sonuca ulaşabilmek için çok uğraştım zaten.*
		[...] ***Araştırmacı:*** *Çözümün sence doğru mu?* ***B3-E3:*** *Doğru.* *Araştırmacı: Neden böyle düşünüyorsun?* ***B3-E4:*** *499 un asal olduğunu biliyorum.* ***Araştırmacı:*** *Çözümün peki?* ***B3-E5:*** *Çözümde de bir hata olduğunu düşünmüyorum. Zaten bir sayının asal olabilmesi için 1'e ve kendisine bölünmesi yani hiçbir asal sayıya bölünmemesi gerektiğini biliyorum. Bunu düşünerek yaptığım için doğrudur*
	Temsilin Güçlendirilmesi	[...] ***Araştırmacı:*** *Çözümün sence doğru mu?* ***B3-E8:*** *Şurada bir hata var, onu düzeltebilirim. Onun dışında doğru.*
		[...] ***Araştırmacı:*** *Çözümün geliştirilebilir bir yönü var mı?* ***B3-E31:*** *"k"nın ne anlam ifade ettiği daha açık yazılabilir.* ***Araştırmacı:*** *Çözüm yaparken bunu düşünmedin mi?* ***B3-E33:*** *Çözüm yaparken direkt yazdım, hiç düşünmedim.* ***Araştırmacı:*** *Neden aklına böyle bir durum geldi?* ***B2-E34:*** *Benim aklıma geldiği için başka birinin de aklına gelebileceğini düşündüm.* ***Araştırmacı:*** *Sonradan fikrin niye değişti?* ***B3-E35:*** [...] *bunu böyle yazmak yerine direkt "k"nın 499'dan büyük olan asal sayı olduğunu söylesem hem okuyana iş çıkarmam hem de daha açık şekilde yazmış olurum. Belki yanlış anlamaları da önler.*

Çözümün Niteliği	**Genellenebilir Olma**	[…] ***Araştırmacı:*** *Yaptığın çözüm her zaman doğru olacak mı, seni her zaman doğruya ulaştıracak mı?* ***B3-E10:*** *Şuradaki hatam olmasa evet.* ***Araştırmacı:*** *Neden böyle düşünüyorsun?* ***B3-E11:*** *Çünkü bütün üçgen durumlarını inceledim. Bütün üçgen durumlarını incelediğim için de beni her zaman doğruya ulaştırır.*

Erdem dördüncü bireysel uygulamanın birinci çözümü kapsamında genel örnek çözümlerine yönelik algılarını, strateji ve çözüm niteliğine dayandırarak açıklamıştır. Soruda verilen önermeyi gösterebilmek için genel bir temsil durumuna ulaştığını ve bu durumu örnekler ile sağladığını belirterek çözümünün her zaman doğru olduğunu ifade etmiştir. Örnekler üzerinden durumları sağlayarak göstermesinin, tüm durumları incelemek yerine daha kolay bir düşünme gerektirdiğini ifade etmiştir. Üçgenin ve dörtgenin alan ve çevre bilgilerini kullanarak bir çözüm geliştirdiğini ve genel bir yargıya ulaştığını belirterek çözümünün her zaman doğru ve geçerli olacağını ifade etmiştir.

Erdem'in deneysel argüman çözümleri kapsamında tespiti yapılan algılarına ilişkin açıklamalarından örnekler Tablo 4.14 de verilmiştir.

Tablo 4. 14. Erdem'in M-İ Sürecinde BU 4.1 Sorusu Genel Örnek ve Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar

Tema	Kod	Örnek Diyalog
Strateji	**Geçerli Olma**	[…] ***Araştırmacı:*** *Sence çözümünün geliştirilebilir bir yönü var mı?* ***B4-E6:*** *Gerek yok geliştirilmesine. İki tane örnek vererek aslında bu ifadenin sağlanmış olduğunu gördüm. Ne olabilir, bütün durumlar için nasıl olabilir şeklindeki düşüncelere pek gerek olduğunu düşünmüyorum.* ***Araştırmacı:*** *Neden böyle düşünüyorsun?* ***B4-E7:*** *Zaten iki örnek vererek açıklamış oluyorsun. İki örnek vererek açıklamak yerine o kadar düşünmeyi gerektiren bir şeye ihtiyaç duymadım.*
Strateji	**Bilgi**	[…] ***Araştırmacı:*** *Yaptığın çözüm her zaman doğru olacak mı, seni her zaman başarıya ulaştıracak mı?* ***B4-E9****: Alan ve çevre bilgilerimden yararlanarak bir yargıya ulaştığıma göre tüm durumlarda geçerlidir.*
Çözümün Niteliği	**Genellenebilir Olma**	

Erdem dördüncü bireysel uygulamanın ikinci çözümü kapsamında genel örnek ve deneysel argüman çözümlerine yönelik algılarını, strateji ve çözüm niteliğine dayandırarak açıklamıştır. Çözüm yaparken kullandığı bilgilerin kesin bilgiler olduğunu ve gerekli durumları gösterebildiğini ifade ederek çözümü doğru olarak kabul etmiştir. Çözümünde geliştirilebilir bir yönün genel olarak olmadığını sadece çözümü

güçlendirmek amacıyla özel durumların farklı ispat yöntemleri ile incelemesinin yapılabileceğini belirtmiştir. Kullandığı bilgilerin kesin olması, hata yapmaması ve istenilen durumları gösterebilmesi düşüncelerinden ötürü çözümünü ispat olarak kabul etmiş ve her zaman doğru olacağını belirtmiştir.

Erdem'in kanıt çözümleri kapsamında tespiti yapılan algılarına ilişkin açıklamalarından örnekler Tablo 4.15 de verilmiştir.

Tablo 4. 15. Erdem'in M- İ Sürecinde BU 4.2 Sorusu Kanıt Çözümüne İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar

Tema	Kod	Örnek Diyalog
Strateji	**Özel Durumu İnceleme**	[...] ***Araştırmacı:*** *Sence çözümünün geliştirilebilir bir yönü var mı?* ***B4-E34:*** *Mesela şöyle yazılabilirdi. 2 ile bölünmesin derdim ve 2'e bölünebildiğini gösterip çelişki ile de gösterebilirdim. Tek olma durumu bu şekilde birden fazla durumla inceleme ile yapılabilirdi.*
Çözümün Niteliği	**Uygun olma**	[...] ***Araştırmacı:*** *Yaptığın çözüm her zaman doğru olacak mı, seni her zaman başarıya ulaştıracak mı?* ***B4-E36:*** *Yaptığım çözüm ispat olduğundan dolayı beni her zaman doğruya ulaştırır.* ***Araştırmacı:*** *Neden ispat olduğunu düşünüyorsun?* ***B4-E37:*** *Bu sonuca ulaşırken kullandığım bilgiler kesin bilgiler. Ayrıca çözüme ulaşırken bir hata yapmadım, bir eksiğim filan da yok. Çözüme ulaşırken 6 ile bölünebildiğini göstermem için 2 ve 3'e bölünebildiğini göstermem gerekiyordu, bunu da gösterdim.*

4.1.3. Erdem'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Pedagojik Bileşen Kapsamında Elde Edilen Bulgular

Tablo 4. 16. Erdem'in BU 1 Sorusunun Örüntü Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları

Matematiksel Bileşen	**Psikolojik Bileşen**	**Matematiksel ve Psikolojik Bileşen Karşılaştırması İle Belirlenen Pedagojik Bileşen Sonuçları**	
Çözümün Matematiksel Niteliği	**Çözüme İlişkin Algısı**	**Çözümün Matematiksel Niteliğine İlişkin Algısıyla Karşılaştırma**	**İspat Kavramının Doğası İle Erdem'in Kavrama Bakış Açısını Karşılaştırma**
Çözüm Kategorisi: Kesin Örüntü **Çözüm Derecesi:** Geliştirilebilir	**Farklı Çözüm Geliştirmeye İlişkin Algısı:** **Strateji:** Farklı temsil & Temsilin Güçlendirilmesi	Matematiksel açıklamalara dayalı eksiklik taşıyan çözümünün, açıklama eklenerek geliştirilebileceğini algılıyor.	*Netlik *İlişkilendirme *Doğrulama *Genelleme *Verilenlerden Yararlanma

Çözümün Değerlendirilmesi: Matematiksel nitelik açısından yanlışlar var. Çözümde sözel açıklamalar eksik.	**Çözüm Doğruluğuna İlişkin Algısı:** **Strateji:** Bilgi	Matematiksel nitelik açısından yanlış ve eksiklikler taşıyan çözümünü doğru algılıyor.
	Çözümün Geliştirilebilirliğine İlişkin Algısı: **Strateji**: Temsilin Güçlendirilmesi	Matematiksel açıklamalara dayalı eksiklik taşıyan çözümünün, sözel açıklamaların eklenmesi ile geliştirilebileceğini algılıyor.
	Çözümün Geçerliğine İlişkin Algısı: **Çözüm Niteliği:** Geçerli Olma	Matematiksel nitelik açısından eksik olan çözümünün, verilenlerden yararlanarak ürettiği kuralın doğrulamasını yapmasından dolayı geçerli olacağını algılıyor.

Erdem'in örüntü çözümüne ilişkin görüşleri pedagojik açıdan incelendiğinde, çözümünün matematiksel yeterlikleri ile çözümüne dayalı algıları arasında kısmi açıdan uyum ve kısmi açıdan uyumsuzluk taşıdığı görülmektedir. Matematiksel nitelik ve kullanılan temsillere dayalı sözel açıklamaların olmaması anlamında eksiklik taşıyan çözümünün, sözel temsil ve açıklamaların kullanımı ile geliştirilebileceğini düşünmektedir. Pedagojik açıdan bu yaklaşımı ele alındığında, çözümündeki sözel açıklama eksikliğini tespit edebildiği ancak matematiksel nitelik açısından yaptığı hatayı fark etmediği görülmektedir. İlişkilendirme yaptığı için doğru olduğunu düşündüğü çözümündeki matematiksel nitelik açısından var olan hatanın farkına varmamıştır. Üretmiş olduğu kuralı doğrulamak ile çözümünün her zaman doğru ve geçerli olacağını algılamış, çözümdeki eksikliklerin farkına varmadığı için bu durumun geçerli olmaya etkisini yorumlamamıştır. Sonuç olarak, örüntü çözümünü değerlendirirken; ilişkilendirme yapmaya, genellemeye ulaşmaya, verilenlerden yararlanarak kural üretmeye, ürettiği kuralı doğrulamaya ve çözümlerine netlik kazandırmaya dayalı bir yaklaşım içinde olmuştur.

Tablo 4. 17. Erdem'in BU 1 Sorusunun Örüntü Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri

Temalar	Kodlar	Örnek İfadeler
İçerik Bilgisi	**Geçerli İspat Oluşturabilme Formül - Kural**	***B1-E17**: 9 ile bölme kuralını uyguladığımızda* [...] *tüm durumlarda uygulanır.*
	Geçerli İspat Oluşturabilme Strateji	***B1-E17:** Sözel olarak yani daha açıklayıcı biçimde ifade edilse uygulandığı ve uygulanamadığı durumları ayırmak daha net olur.*
	İspatın Zorlukları İlişkilendirme Eksikliği	***B1-E27:*** [...] *9 ile bölüm ve kalanı ilişkilendirememe.*
	İspatın Zorlukları Stratejide Zorluk Yaşama	***B1-E28:*** [...] *direkt çözümde zorlanır.*
Öğretim Bilgisi	**Açıklık**	***B1-E20:*** [...] *her şeyi açık açık yazmak ve iyi tanımlamak zorunda.*
	Öğrenmeyi Destekleme	***B1-E29:*** [...] *sayılar arasında ilişki bulmasını isterim.* ***B1-E31:*** [...] *uygulama yaparım.*
Öğrenci Bilgisi	**Öğrenci Faaliyetleri**	***B1-E20:*** [...] *tüm durumlara bakmak zorunda.*
	Genelleme	***B1-E20:*** *"x" ve "y" sayılarının ikisini de ek bir sayı olarak gördüğü zaman tüm durumlarda geçerli olduğunu kabul eder.*
	İşlem Bilgisi	***B1-E20:*** *"a" ve "b" ye bir değer verdiğimizde "x" sayısı birden fazla değer alabiliyor mu, incelemesi lazım.*
Müfredat Bilgisi	**Lise Seviyesi**	***B1-E24:*** [...] *modüler aritmetik, 9-10.*

Örüntü çözümüne ilişkin sahip yaklaşımların temelindeki pedagojik bilgiler incelendiğindeyse, Tablo 4.17 de ki sonuçlar elde edilmiştir. Bu kapsamda, geliştirdiği çözümün her durumda uygulanabilir olacağını belirtmiş ve bunun nedenini ise çözüm sürecinde kullanmış olduğu kural bilgisine dayandırmıştır. Çözümünün uygulandığı ve uygulanmadığı durumların ayırımını net yapabilmek için, çözümünün daha açıklayıcı bir şekilde yazılabilmesi gerektiğini ifade etmiştir. Yapmış olduğu çözüm kapsamında, her durumda uygulanabilir bir sonuç elde etmek için öğretmen ve öğrenciye düşen bir takım faaliyetlerden bahsetmiştir. Öğretmenlerin bu durumu sağlayabilmeleri için, örüntü çözümlerinde her şeyi iyi tanımlamalarını ve net bir şekilde yazmaları gerektiğini ifade etmiştir. Öğrencilerin ise tüm durumları içine alan bir çözüm oluşturmaya çalışmaları gerektiğini belirtmiştir. Bu türden bir sorunun "x=9a+b" durumunun sağlanması ve modüler aritmetik bilgilerinin kullanılmasının gerekliliği nedeniyle lise seviyesinde sorulabileceğini belirtmiştir. Çözüm sürecinde zorlanılacak noktaların, 9 ile bölme kuralında kalan ile böleni ilişkilendirememe, dolayısıyla satır ve sütunlarda bulunacak sayıları tanımlayamamak olduğunu ifade etmiştir. Öğrencilerinde bu türden zorlukları

görmesi durumundaysa, öğrenimlerini destekleme kapsamında temel uygulamalar yaptırabileceğini ifade etmiştir.

Tablo 4. 18. Erdem'in BU 2 Sorusunun Varsayım Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları

Matematiksel Bileşen	**Psikolojik Bileşen**	**Matematiksel ve Psikolojik Bileşen Karşılaştırması İle Belirlenen Pedagojik Bileşen Sonuçları**	
Çözümün Matematiksel Niteliği	**Çözüme İlişkin Algısı**	**Çözümün Matematiksel Niteliğine İlişkin Algısıyla Karşılaştırma**	**İspat Kavramının Doğası İle Erdem'in Kavrama Bakış Açısını Karşılaştırma**
Çözüm Kategorisi: Varsayım **Çözüm Derecesi:** Yeterli Çözüm **Çözümün Değerlendirilmesi:** İşlem sonuçlarını ilişkilendirme ve gerekçelendirmeye dayalı açıklamalar eksik.	**Farklı Çözüm Geliştirmeye İlişkin Algısı:** **Strateji:** Farklı Temsil	İlişkilendirme ve gerekçelendirmenin eksik olduğu çözümünde, kullanmış olduğu modeli değiştirmek dışında geliştirilebilecek farklı bir çözüm olmadığını algılıyor.	*Doğrulama *Genelleme *İlişkilendirme *Kesin Bilgileri Kullanma *Kural
	Çözüm Doğruluğuna İlişkin Algısı: **Çözüm Niteliği:** Geçerli Olma	Matematiksel nitelik açısından doğru olan çözümünü, kullanmış olduğu bilgilerin kabul edilmiş temelleri olduğu için doğru olarak algılıyor.	
	Çözümün Geliştirilebilirliğine İlişkin Algısı: **Çözüm Niteliği:** Geçerli Olma	İşlem sonuçlarını ilişkilendirme ve gerekçelendirmeye dayalı açıklamaları eksik olan çözümünde, geliştirilebilecek bir nokta olmadığını algılıyor.	
	Çözümün Geçerliğine İlişkin Algısı: **Çözüm Niteliği:** Geçerli Olma	Matematiksel nitelik açısından doğru olan çözümünün, yapmış olduğu her şeyi kesin bir nedene dayandırdığı için doğru olduğunu düşünüyor.	

Erdem'in varsayım çözümüne ilişkin görüşleri pedagojik açıdan incelendiğinde, çözümünün matematiksel yeterlikleri ile çözümüne dayalı algıları arasında büyük oranda uyum olduğu, bazı noktalarda uyumsuzluk taşıdığı görülmektedir. Yapmış olduğu işlem sonuçlarını ilişkilendirerek ve gerekçelendirerek açıklama konusunda eksik olan çözümünün farkına varmamış ve sadece farklı modellerin kullanılması ile farklı çözüm geliştirilebileceğini ifade etmiştir. Bu düşüncesi doğrultusunda çözümünde geliştirilebilir bir yön olmadığını ifade etmiştir. Çözümünde kullandığı bilgilerin kabul edilmiş matematiksel gerçekliklere dayandığını ve işlemlerinin tamamını doğruladığını ifade

ederek çözümünün doğru ve her zaman geçerli olacağını ifade etmiştir. Sonuç olarak, varsayım çözümünü değerlendirirken; doğrulama, genelleme, ilişkilendirme, kesin bilgileri kullanma ve kurala dayalı bir yaklaşım içinde olmuştur.

Tablo 4. 19. Erdem'in BU 2 Sorusu Varsayım Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri

Temalar	Kodlar	Örnek İfadeler
İçerik Bilgisi	**Geçerli İspat Oluşturabilme Formül - Kural**	***B2-E12****:* […] *genel formülü olduğuna göre bütün durumlarda uygulanır.*
	Geçerli İspat Oluşturabilme Geçerli Olma	***B2-E13:*** […] *genel ifadeye dayanan bir formülü yazdığımız zaman bunun bütün durumlar için geçerli olacağını söylemiş oluyoruz.*
	İspatın Zorlukları İlişkilendirme Eksikliği	***B2-E22:*** *Sayılar arasında ilişki bulmak.*
Öğretim Bilgisi	**Öğrenmeyi Destekleme**	***B2-E18:*** […] *öğretmene düşen görev uygulama yaptırmak olabilir.*
		B2-E18: *Öğrenci zora düştüğünde, "Sayılar arasında bir ilişki görüyor musun?" gibisinden yönlendirici sorular sorulabilir.*
		B2-E24: *Sayılar arasındaki ilişkiyi bulmaya yönelik uygulamalar yaptırırım.*
Öğrenci Bilgisi	**Sezgi**	***B2-E17:*** […] *verilen ifadelerin tek sayıların iki katı şeklinde devam ettiğini sezebilmesi gerekiyor.*
	Genelleme	***B2-E18:*** […] *sayılarla bir ilişki bulup, bu ilişkiyi genellemesi gerekiyor.*
	İşlem Bilgisi	***B2-E18:*** […] *sayılar üzerinde çalışarak aralarındaki ne kadarlık artış olduğunu bulması gerekiyor.*
Müfredat Bilgisi	**Ortaokul Seviyesi**	***B2-E20:*** […] *tek sayıların genel formülü, cebir 6. Sınıfta görülüyor, 6-7. sınıftır.*

Varsayım çözümüne ilişkin sahip olduğu yaklaşımların temelindeki pedagojik bilgiler incelendiğindeyse, Tablo 4.19 da ki sonuçlar elde edilmiştir. Bu kapsam da, geliştirdiği çözümün her durumda uygulanabilir olacağını belirtmiş ve bunun nedenini ise örüntünün var olan genel kuralına dayandırmıştır. Genel kurala dayanan formülün her durumda geçerli olma şartını sağlayabileceğini ifade etmiştir. Yapmış olduğu çözüm kapsamında, her durumda uygulanabilir bir sonuç elde etmek için öğretmen ve öğrenciye düşen bir takım faaliyetlerden bahsetmiştir. Öğrencilerin tüm durumlarda geçerli olacak bir sonuç elde etmek için; sayılar arasında bir ilişki bulmaya çalışmasını ve buldukları ilişkiyi genellemelerini bunun için de öncelikle sayılar arasında nasıl bir ilişki olacağını sezmeleri gerektiğini ifade etmiştir. Öğretmenlerin ise bu durumu sağlamak için uygulamalar yapabileceklerini ve öğrencilerin zorlandıkları noktalarda yönlendirici sonuçlarla onlara

destek olabileceklerini ifade etmiştir. Bu türden bir sorunun "tek sayıların genel formülü" ve Cebir bilgisini gerektirmesinden dolayı 6. veya 7. Sınıf seviyelerinde sorulabileceğini ifade etmiştir. Çözüm sürecinde zorlanılacak noktaların ise sayılar arasında var olan ilişkileri bulmak olduğunu ifade etmiştir. Öğrencilerinde bu türden zorlukları görmesi durumundaysa sayılar arasındaki ilişkiyi bulmaya yönelik uygulamalar yaptırabileceğini ifade etmiştir.

Tablo 4. 20. Erdem'in BU 3.1 Sorusu Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları

Matematiksel Bileşen	**Psikolojik Bileşen**	**Matematiksel ve Psikolojik Bileşen Karşılaştırması İle Belirlenen Pedagojik Bileşen Sonuçları**	
Çözümün Matematiksel Niteliği	**Çözüme İlişkin Algısı**	**Çözümün Matematiksel Niteliğine İlişkin Algısıyla Karşılaştırma**	**İspat Kavramının Doğası İle Erdem'in Kavrama Bakış Açısını Karşılaştırma**
Çözüm Kategorisi: Deneysel Argüman **Çözüm Derecesi:** Yeterli Çözüm **Çözümün Değerlendirilmesi:** Eksik üçgen birleştirmeleri mevcut ve sadece düzgün dörtgenler temele alınmış.	**Farklı Çözüm Geliştirmeye İlişkin Algısı:** **Strateji:** Bilgi	Eksik üçgen birleştirmelerinin olduğu çözümünde, tüm üçgen birleştirmelerini yaptığı için farklı bir çözüm geliştirilmeyeceğini algılıyor.	*Tüm Durumları İnceleme
	Çözüm Doğruluğuna İlişkin Algısı: **Strateji**: Temsilin Güçlendirilmesi	Eksik üçgen birleştirmelerinin olduğu çözümünü, eş olmayan üçgenlerden birini yanlış birleştirmesi dışında doğru olduğunu algılıyor.	
	Çözümün Geliştirilebilirliğine İlişkin Algısı: Strateji – Çözüm Niteliği	Eksik üçgen birleştirmelerinin olduğu çözümünde, aklına geliştirilebilecek bir kısım gelmediği için çözümünün geliştirilemeyeceğini algılıyor.	
	Çözümün Geçerliğine İlişkin Algısı: Çözüm Niteliği	Eksik üçgen birleştirmelerinin olduğu çözümünün, tüm üçgen durumlarını incelediğini belirterek geçerli olduğunu algılıyor.	

Erdem'in deneysel argüman çözümüne ilişkin görüşleri pedagojik açıdan incelendiğinde, çözümünün matematiksel yeterlikleri ile çözümüne dayalı algıları arasında uyumsuzluk olduğu görülmektedir. Çözümünde eksik üçgen birleştirmelerinin olması ve sadece düzgün dörtgenleri temele alarak bir çözüm geliştirdiğinin farkına varmamış dolayısıyla bu durumu algılarına dayalı açıklamalarında yansıtmamıştır. Eksik üçgen birleştirmeleri mevcut olan çözümünde; tüm üçgen durumlarını göz önüne alarak birleştirmeler yaptığını bu nedenle farklı bir çözüm geliştirilmeyeceğini ve çözümünün her zaman geçerli

olacağını ifade etmiştir. Sonuç olarak, deneysel argüman çözümünü değerlendirirken; tüm durumları göz önüne alarak yaptığı denemelere ilişkin bir yaklaşım içinde olmuştur.

Tablo 4. 21. Erdem'in BU 3.1 Sorusunun Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri

Temalar	Kodlar	Örnek İfadeler
İçerik Bilgisi	**Geçerli İspat Oluşturabilme Geçerli Olma**	***B3-E12****: Beni her zaman doğruya ulaştırıyorsa her zaman uygulanır.*
	İspatın Zorlukları Bilgi Eksikliği	***B3-E20:*** [...] *dörtgen oluşturmak için gereken şartı görememe.*
Öğretim Bilgisi	**Öğrenmeyi Destekleme**	***B3-E21:*** [...] *"İki üçgenin kaç kenarı var?", "Altı tane kenardan dört tane kenar elde etmek için ne yapılması gerekir?"* [...] *şeklinde sorular sorarım.*
Öğrenci Bilgisi	**İşlem Bilgisi**	***B3-E16:*** [...] *tüm üçgenleri birleştirerek çözüm yapar.*
Müfredat Bilgisi	**Lise Seviyesi**	***B3-E18/E19:*** [...] *üçgen ve dörtgen çeşitlerini bilmeli 7. veya 8. sınıf.*

Deneysel argüman çözümüne ilişkin sahip olduğu yaklaşımların temelindeki pedagojik bilgiler incelendiğindeyse, Tablo 4.21 de ki sonuçlar elde edilmiştir. Bu kapsam da, geliştirdiği çözümün her durumda uygulanabilir olacağını belirtmiş ve bunun nedenini ise her zaman doğru çözüme ulaşmaya imkan vermesine dayandırmıştır. Bunun sağlanması için de tüm üçgen durumlarının incelenmesine ihtiyaç olduğunu belirtmiştir. Yapmış olduğu çözüm kapsamında, her durumda uygulanabilir bir sonuç elde etmek için öğretmen ve öğrenciye düşen bir takım faaliyetlerden bahsetmiştir. Öğrencilerin tüm üçgen durumlarını birleştirmeleri, öğretmenlerin de bu işlemlerini kontrol etmeleri gerektiğini belirtmiştir. Bu türden bir sorunun üçgen ve dörtgen çeşitlerini bilmeyi gerektirdiği için 7. veya 8. sınıfta sorulabileceğini belirtmiştir. Çözüm sürecinde zorlanılacak noktaların ise bir dörtgen oluşturmak için gereken şartı görebilmek olduğunu ifade etmiştir. Öğrencilerinde bu türden zorlukları görmesi durumundaysa öğrenimlerini destekleme amaçlı sorular sorabileceğini belirtmiştir.

Tablo 4. 22. Erdem'in BU 3.2 Sorusunun Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları

<table>
<tr><th>Matematiksel Bileşen</th><th>Psikolojik Bileşen</th><th colspan="2">Matematiksel ve Psikolojik Bileşen Karşılaştırması İle Belirlenen Pedagojik Bileşen Sonuçları</th></tr>
<tr><th>Çözümün Matematiksel Niteliği</th><th>Çözüme İlişkin Algısı</th><th>Çözümün Matematiksel Niteliğine İlişkin Algısıyla Karşılaştırma</th><th>İspat Kavramının Doğası İle Erdem’in Kavrama Bakış Açısını Karşılaştırma</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Çözüm Kategorisi: Deneysel Argüman

Çözüm Derecesi: Beklenen Tam Çözüm

Çözümün Değerlendirilmesi: Beklenen Çözüm</td><td>Farklı Çözüm Geliştirmeye İlişkin Algısı:

Strateji: Bilgi</td><td>Matematiksel nitelik anlamında eksiklik taşımayan çözümüne ulaşabilmek için çok uğraştığını belirterek geliştirilemeyeceğini algılıyor.</td><td rowspan="4">*Doğrulama
*Kesin Bilgileri Kullanma
*Genelleme
*Hata İçermeme</td></tr>
<tr><td>Çözüm Doğruluğuna İlişkin Algısı:

Strateji: Bilgi</td><td>Matematiksel nitelik anlamında eksiklik taşımayan çözümünün, tüm durumları incelemesi ve asal sayı bilgisinden dolayı doğru olarak algılamıştır.</td></tr>
<tr><td>Çözümün Geliştirilebilirliğine İlişkin Algısı:

Strateji: Temsilin Güçlendirilmesi</td><td>Matematiksel nitelik anlamında eksiklik taşımayan çözümünün, kullandığı temsillere ait ifadelerin daha net yazılarak geliştirilebileceğini algılıyor.</td></tr>
<tr><td>Çözümün Geçerliğine İlişkin Algısı:

Çözüm Niteliği: Geçerli Olma</td><td>Matematiksel nitelik açısından eksiklik taşımayan çözümünde, işlemlerini doğruladığı için geçerli olduğunu algılıyor.</td></tr>
</table>

Erdem’in deneysel argüman çözümüne ilişkin görüşleri pedagojik açıdan incelendiğinde, çözümünün matematiksel yeterlikleri ile çözümüne dayalı algıları arasında uyum olduğu görülmektedir. Deneysel argüman kategorisi kapsamında, 499 sayısının asal olduğunu gösterebilmek için gerekli yeterlikleri sağladığı çözümünde geliştirilebilecek bir yön olmadığını belirtmiştir. Bunun nedeninin ise çözüme ulaşmak için çok fazla uğraştığını belirterek aklına başka bir çözüm gelmemesine dayandırmıştır. Asal sayı bilgisi ve tüm durumları göz önüne alarak bir çözüm geliştirdiği için çözümünün doğru olacağını ifade etmiştir. Matematiksel nitelik açısından doğru olan çözümünde kullandığı temsillerin daha net yazılması ile çözümünün geliştirilebileceğini ifade etmiştir. Yaptığı işlemlerin tamamını doğruladığı için de çözümünün her zaman geçerli olacağını belirtmiştir. Sonuç olarak, deneysel argüman çözümünü değerlendirirken; doğrulama ve kabul edilmiş matematiksel bilgileri kullanmaya dayalı bir yaklaşım içinde olmuştur.

Tablo 4. 23. Erdem'in BU 3.2 Sorusunun Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri

Temalar	Kodlar	Örnek İfadeler
İçerik Bilgisi	**Geçerli İspat Oluşturabilme İspat**	***B3-E39****:* [...] *ispat yaptığım için her durumda uygulanacak. 499'un asal olduğu kesindir, 499'un da asal olduğunu gösterdiysem ki gösterdim ve hata yapmadığımı düşünüyorum.*
		B3-E40: [...] *tüm durumlarda uygulandığı için ispat oluyor.* [...]*. Bir şeyin ispat olmasını gerektiren durumlar: doğru olması, kesin olması ve hata içermemesine bağlıdır.*
	İspatın Zorlukları Stratejide Zorluk Yaşama	***B3-E45:*** [...] *hata yapmamak gerekiyor.* [...] *birçok işlemi yaparken kafaları karışabilir.*
Öğretim Bilgisi	**Öğrenmeyi Destekleme**	***B3-E41:*** [...] *belirli bir yere kadar incelendikten sonra artık sayıların incelenmesine imkan veren tarzda soruların sorulması gerekiyor.*
	Sorgulama	***B3-E41:*** [...] *bir ispatın ispat olduğunu öğrenciye sorgulatmalı.*
Öğrenci Bilgisi	**Öğrenci Faaliyetleri**	***B3-E41:*** [...] *bu tür çözümlerin ispat olduğunu sorgulamalı.*
Müfredat Bilgisi	**Üniversite Seviyesi**	***B3-E42/E43:*** [...] *üst düzey düşünme gerektiriyor ve sembolik çözüm istiyor bu sebeple üniversite seviyesi.*

BU 3.2 kapsamında oluşturduğu deneysel argüman çözümüne ilişkin sahip olduğu yaklaşımların temelindeki pedagojik bilgiler incelendiğinde, Tablo 4.23 de ki sonuçlar elde edilmiştir. Bu kapsam da, asal sayı olma bilgisini kullanarak, zaten asal olduğunu bildiği bir sayının doğru olduğunu gösterdiği için çözümünü ispat olarak değerlendirmiş ve her durumda uygulanabilir bir çözüm geliştirdiğini ifade etmiştir. Her durumda uygulanabilir bir sonuç elde edebilmek için o sonucun ispat olmasına dayalı gerekliliklerin görülmesi gerektiğini belirtmiştir. Bu gerekliliklerin ise; bir şeyin doğruluğunu incelemek, bir hata içerip içermediğini incelemekten geçtiğini belirtmiştir. Yapmış olduğu çözüm kapsamında, her durumda uygulanabilir bir sonuç elde etmek için öğretmen ve öğrenciye düşen bir takım faaliyetlerden bahsetmiştir. Öğretmenlerin bir ispatın, nasıl ispat olduğunu öğrencilere sorgulatması gerektiğini belirtmiştir. Öğrencilerinde hangi çözümlerin ispat olabileceğini sorgulamaları gerektiğini ifade etmiştir. Bu türden bir sorunun üst düzey düşünme gerektirdiği ve sembolik çözümü içerdiğini düşünmesinden dolayı üniversite seviyesinde sorulabileceğini belirtmiştir. Çözüm sürecinde zorlanılacak noktalarda ise sorunun genelinde zorluk yaşanacağını ifade ederek açıklamıştır. Bu durumun nedenini ise birçok işlemin olduğu çözümde hata yapılmaması, belirli bir noktadan sonra sayıların incelememesi için genel bir sonuç

bulunması olarak açıklamıştır. Öğrencilerinde bu türden zorlukları görmesi durumundaysa öğrenimlerini destekleme amaçlı sorular sorabileceğini belirtmiştir.

Tablo 4. 24. Erdem'in BU 4.1 Sorusunun Genel Örnek ve Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları

<table>
<tr><th rowspan="2">Matematiksel Bileşen</th><th rowspan="2">Psikolojik Bileşen</th><th colspan="2">Matematiksel ve Psikolojik Bileşen Karşılaştırması İle Belirlenen Pedagojik Bileşen Sonuçları</th></tr>
<tr><th>Çözümün Matematiksel Niteliğine İlişkin Algısıyla Karşılaştırma</th><th>İspat Kavramının Doğası İle Erdem'in Kavrama Bakış Açısını Karşılaştırma</th></tr>
<tr><td>Çözümün Matematiksel Niteliği</td><td>Çözüme İlişkin Algısı</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Çözüm Kategorisi:
Genel Örnek
&
Deneysel Argüman

Çözüm Derecesi:
Beklenen Tam Çözüm

Çözümün Değerlendirilmesi:
Beklenen çözüm</td><td>Farklı Çözüm Geliştirmeye İlişkin Algısı:

Strateji: Bilgi
Çözüm Doğruluğuna İlişkin Algısı:

Strateji: Bilgi
Çözüm Niteliği: Uygun Olma & Genellenebilir Olma
Çözümün Geliştirilebilirliğine İlişkin Algısı:

Strateji: Bilgi
Çözüm Niteliği: Uygun Olma & Genellenebilir Olma
Çözümün Geçerliğine İlişkin Algısı:

Strateji: Bilgi
Çözüm Niteliği: Uygun Olma & Genellenebilir Olma</td><td>Matematiksel nitelik anlamında eksiklik taşımayan çözümünün, gerekli durumları gösterebildiği için farklı çözüme ihtiyaç oluşturmadığını, geliştirilebilecek bir yönü olmadığını, doğru olduğunu ve her zaman geçerli olacağını algılıyor.</td><td>*İstenen Durumları Gösterebilme</td></tr>
</table>

Erdem'in genel örnek çözümüne ilişkin görüşleri pedagojik açıdan incelendiğinde, çözümünün matematiksel yeterlikleri ile çözümüne dayalı algıları arasında uyum olduğu görülmektedir. Alan ölçüleri ve çevre uzunluğu eşit olan dörtgenlerin var olduğunu, tüm durumları içerisine alacak bir ifadeyle belirttiği ve soruda istenilen durumu gösterebildiği için; çözümünün doğru olduğunu ve her zaman geçerli olacağını ifade etmiştir. Bu nedenle farklı çözüm geliştirilmeye gerek olmadığını ve çözümünde geliştirilebilecek bir yön olmadığını belirtmiştir. Sonuç olarak, genel örnek çözümünü değerlendirirken; istenilen durumları gösterebilmeye dayalı bir yaklaşım içinde olmuştur.

Tablo 4. 25. Erdem'in BU 4.1 Sorusunun Genel Örnek ve Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri

Temalar	Kodlar	Örnek İfadeler
İçerik Bilgisi	**Geçerli İspat Oluşturabilme Geçerli Olma**	***B4-E14:*** [...] *tüm durumlarda uygulanır.*
	İspatın Zorlukları Bilgi Eksikliği	***B4-E16:*** [...] *önermeyi iyi anlayamamak.*
Öğretim Bilgisi	**Öğrenmeyi Destekleme**	***B4-E17:*** [...] *"Dörtgenlerin alan ve çevre uzunlukları eşittir, gösteriniz.", "Alanı ve çevresi birbirine eşit olan dörtgen yoktur, gösteriniz." ya da " Alanı ve çevresi birbirine eşit dörtgen yoktur, gösteriniz." şeklinde önerme cümlesini değiştirerek 3 farklı şekilde sorabilirim.*
Öğrenci Bilgisi	**İşlem Bilgisi**	***B4-E20:*** [...] *alan ve çevre bilgilerini kullanarak eşitliği gösterebilmeli.*
Müfredat Bilgisi	**Lise Seviyesi**	***B4-E25:*** *alan formüllerini ilişkilendirmeye dayalı olduğu için lise.*

Genel örnek ve deneysel argüman çözümüne ilişkin sahip olduğu yaklaşımların temelindeki pedagojik bilgiler incelendiğindeyse, Tablo 4.25 de ki sonuçlar elde edilmiştir. Bu kapsam da, geliştirdiği çözümün her durumda uygulanabilir olacağını belirtmiş ve bunun nedenini ise her zaman doğru çözüme ulaşmaya imkan vermesine dayandırmıştır. Çözüm sürecinde zorlanılacak noktaların ise önermeyi iyi anlamak olduğunu belirtmiştir. Öğrencilerinde bu türden zorlukları görmesi durumundaysa öğrenimlerini destekleme amaçlı sorular sorabileceğini ifade etmiştir.

Tablo 4. 26. Erdem'in BU 4.2 Sorusunun Kanıt Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları

Matematiksel Bileşen	Psikolojik Bileşen	Matematiksel ve Psikolojik Bileşen Karşılaştırma İle Belirlenen Pedagojik Bileşen Sonuçları	
Çözümün Matematiksel Niteliği	**Çözüme İlişkin Algısı**	**Çözümün Matematiksel Niteliğine İlişkin Algısıyla Karşılaştırma**	**İspat Kavramının Doğası İle Erdem'in Kavrama Bakış Açısını Karşılaştırma**
Çözüm Kategorisi: Kanıt	**Farklı Çözüm Geliştirmeye İlişkin Algısı:** **Strateji:** Bilgi	Matematiksel nitelik açısından, eksiklik taşımayan çözümünde geliştirilebilecek farklı bir çözüm olmadığını algılıyor.	*Hata İçermeme *Kesin Bilgileri Kullanma *Netlik *İstenilen Durumu Gösterme
Çözüm Derecesi: Beklenen tam çözüm	**Çözüm Doğruluğuna İlişkin Algısı:** **Strateji:** Bilgi	Matematiksel nitelik anlamında eksiklik taşımayan çözümünde, işlem hatası yapmadığı ve kesin bilgileri kullandığı için doğru olduğunu algılıyor.	

Çözümün Değerlendirilmesi: Beklenen çözüm	**Çözümün Geliştirilebilirliğine İlişkin Algısı:** **Strateji:** Özel Durumları İnceleme	Matematiksel nitelik anlamında eksiklik taşımayan çözümünde, her şeyi açık olarak yazdığı için geliştirilebilecek bir yönü olmadığını algılıyor.
	Çözümün Geçerliğine İlişkin Algısı: **Çözüm Niteliği**: Geçerli Olma	Matematiksel nitelik anlamında eksiklik taşımayan çözümü ispat olarak gördüğü için her durumda geçerli olacağını algılıyor.

Erdem'in kanıt çözümüne ilişkin görüşleri pedagojik açıdan incelendiğinde, çözümünün matematiksel yeterlikleri ile çözümüne dayalı algıları arasında uyum olduğu görülmektedir. Geliştirmiş olduğu çözümün ispat olduğunu, kullanmış olduğu bilgilerin kesin bilgiler olduğunu, istenilen durumu gösterebildiğini ve işlemlerinde bir hata olmadığını ifade ederek çözümünün her zaman doğru ve geçerli olacağını ifade etmiştir.

Tablo 4. 27. Erdem'in BU 4.2 Sorusunun Kanıt Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri

Temalar	Kodlar	Örnek İfadeler
İçerik Bilgisi	**Geçerli İspat Oluşturabilme İspat**	***B4-E29:*** [...] *ispat olduğu için her durumda uygulanır.*
	İspatın Zorlukları Bilgi Eksikliği	***B4-E38:*** [...] *6 ile bölünmenin ne olduğunu bilmiyorsa zorlanır.*
Öğretim Bilgisi	**Öğrenmeyi Destekleme**	***B4-E40:*** [...] *3'ün kuvveti şeklinde olan bir sayının 3 ile bölümünden kalanın 0 olduğunu gösterecek uygulamalar yaparım.*
Öğrenci Bilgisi	**Konu Bilgisi**	***B4-E39:*** [...] *ispat yöntemlerini bilmesi lazım.*
Müfredat Bilgisi	**Üniversite Seviyesi**	***B4-E44:*** [...] *üst düzey düşüne gerektiriyor, üniversite seviyesi.*

Kanıt çözümüne ilişkin sahip olduğu yaklaşımların temelindeki pedagojik bilgiler incelendiğinde Tablo 4.27 de ki sonuçlar elde edilmiştir. Bu kapsamda, verilen önermenin doğruluğunu hata yapmadan ve kesin bilgileri kullanarak göstermesi nedeniyle çözümünün ispat olduğunu ve her durumda uygulanabilir bir çözüm geliştirdiğini ifade etmiştir. İspat yöntemlerini uygulayarak öğretme konusunda öğretmenlerin etkin rol oynayabileceğini, öğrencilerin ise bu yöntemleri öğrenmeye yönelik çabalarının olması gerektiğini ifade etmiştir. Bu türden bir sorunun üst düzey düşünme gerektirdiği için üniversite seviyesinde sorulabileceğini belirtmiştir. Çözüm sürecinde zorlanılacak noktaların ise 6 ile bölünmeyi bilememekten kaynaklanacağını, öğrencilerinde bu türden zorlukları görmesi durumundaysa öğrenimlerini destekleme amaçlı sorular sorabileceğini

ifade etmiştir.

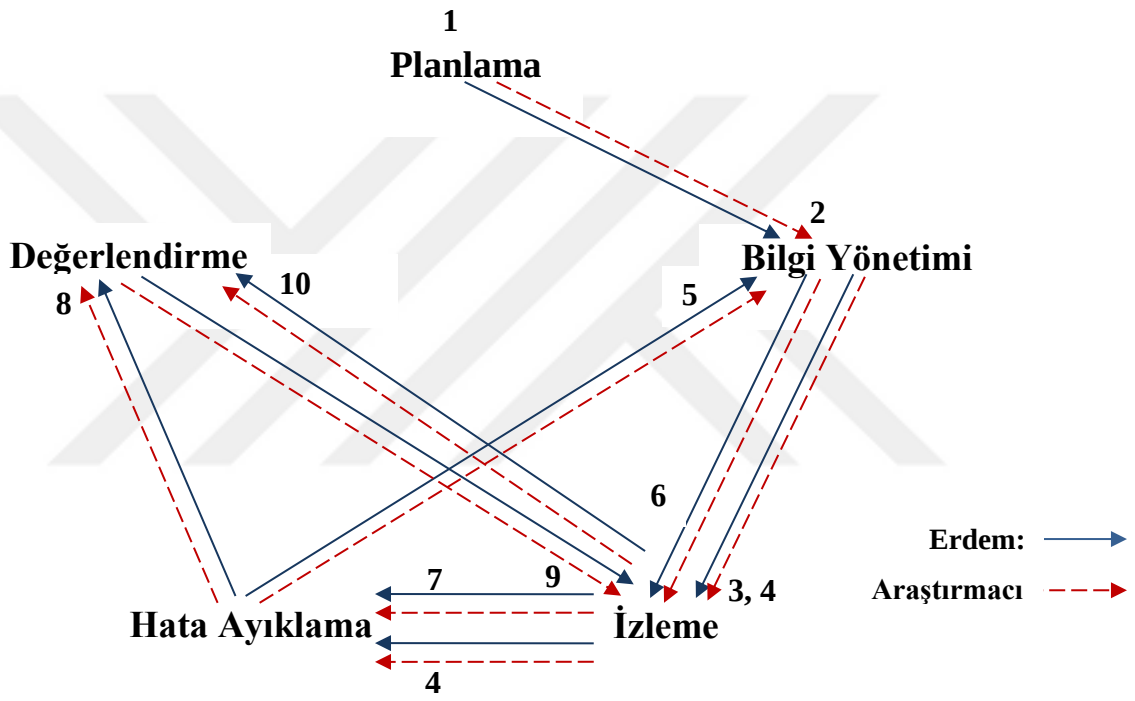
Sonuç olarak, Erdem'in M-İ sürecine dayalı çözümlerinde, ispatın doğasına ilişkin bakış açısının genel olarak "kesin bilgileri kullanma" bakış açısına dayalı olduğu tespit edilmiştir. Çözümlerini, içeriğe dayalı pedagojik bilgileri kapsamında en çok "ispat" ile ilişkilendirilmiştir. Çözüm sürecinde zorluk yaşanacak noktaların ise çoğunlukla "stratejide zorluk yaşamadan" kaynaklanabileceğini belirtmiştir. M-İ sürecinde bir öğretmenlerin çoğunlukla "öğrenmeyi destekleme" faaliyetlerini yürütebileceklerini ifade etmiştir. M-İ sürecinde "öğrenci faaliyetleri "ne dayalı açıklamalarıyla öğrencilere düşen görevlerden bahsetmiştir. Araştırma kapsamında sorulan soruların ise çoğunlukla "ortaokul" seviyesinde sorulabileceğini belirtmiştir.

Tablo 4. 28. Erdem'in M-İ Sürecine Yönelik Pedagojik Bilgileri ve Dağılımları

	İspatın Doğasına İlişkin Bakış Açısı		**İçerik Bilgisi**	**Öğretim Bilgisi**	**Öğrenci Bilgisi**	**Müfredat Bilgisi**
M-İ Sürecine İlişkin Pedagojik Bilgileri	Kesin Bilgileri Kullanma **(7)** İlişkilendirme **(7)** Net Olma **(6)** Genelleme **(6)** Doğrulama **(5)** İstenileni Gösterme **(3)** Hata yapmama **(2)** Kural **(2)** Tüm Durumları İnceleme **(2)**	**Geçerli İspat Oluşturabilme**	İspat **(8)** Formül / Kural **(3)** Geçerli Olma **(3)**	Öğrenmeyi Destekleme **(24)** Açıklık **(4)** Sorgulama **(1)**	Öğrenci Faaliyetleri **(16)** İşlem Bilgisi **(5)** Genelleme **(3)** Konu/Kavram Bilgisi **(2)** Sezgi **(1)**	Ortaokul Seviyesi **(3)** Lise Seviyesi **(2)** Üniversite Seviyesi **(2)**
		İspatın Zorlukları	Stratejide Zorluk Yaşama **(7)** Bilgi Eksikliği **(6)** İlişkilendirme Eksikliği **(4)**			

4.1.4. Erdem'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Üstbiliş Kapsamında Elde Edilen Bulgular

M-İ odaklı görev sorularının çözümü sırasında Erdem'in sergilediği üstbilişsel düzenleme süreci Şekil 4.11. deki gibi gerçekleşmiştir. Erdem'in muhakeme ve ispat yapma sürecindeki üstbilişsel düzenleme süreçlerinde, en fazla izleme en az ise planlama sürecine ilişkin davranışlar sergilediği tespit edilmiştir. Şekil 4.11. ile ayrıca Erdem'in geliştirdiği çözümlerde, seçim yaptığı davranış kartlarının bilgisi de verilmiştir.



Şekil 4. 10. Erdem'in Muhakeme ve İspat Yapma Sürecinde Sergilediği Üstbilişsel Düzenleme Süreç Akışı

Erdem'in muhakeme ve ispat yapma süreçlerinde sergilediği üstbilişsel düzenleme süreçlerinin nasıl ortaya çıktığını gösteren bilgiler Şekil 4.11 de verilmiştir.

Erdem'in Seçim Yaptığı Davranış Kart Sıralaması			BU 1 Örüntü	BU 2 Varsayım	BU 3.1 Deneysel Argüman	BU 3.2 Deneysel Argüman	BU 4.1 Genel Örnek ve Deneysel Argüman	BU 4.2 Kanıt
1.Kart	**P**	Soruyu iyi anladım ve benden istenilenleri tam olarak belirledim.	E A	E A	E A	E A	E A	E A
2.Kart	**BY**	Çözüm aşamasında hangi bilgilerin benim için gerekli / önemli olduğunu belirledim.	E A	E A	E A	E A	E A	E A
3.Kart	**İ**	Çözüm aşamasında yaptıklarımı zaman zaman kontrol ettim.			E A	E A	E A	E A
4.Kart	**İ&HA**	Çözüm aşamasında duraksadım ve hatam olup olmadığına odaklandım. & Dikkatsizlik kaynaklı bir hatam olup olmadığını inceledim.	E A	E A	E A	E A		E A
5.Kart	**BY**	Çözüm aşamasında bir bilgi elde ettiğimde onu anlamlandırmaya çalıştım.	E A	E A	E A	E A	E A	E A
6.Kart	**İ&İ**	Çözümü yapamıyorum diye düşündüğüm zamanlar oldu. & Soruyu çözerken kullandığım stratejiyi zaman zaman gözden geçirdim.	E A		E A	E A	E A	E A
7.Kart	**HA**	Zorlandığım yerde çözüm stratejimi değiştirmeyi düşündüm.	E A		E A	E A	E A	E A
8.Kart	**D**	Sorunun çözümünde ortaya çıkan bilgileri gözden geçirdim.	E A	E A	E A	E A	E A	E A
9.Kart	**İ**	Soruda verilenlerin tamamını kullanarak çözümü tamamladım.	E A	E A	E A	E A	E A	E A
10.Kart	**D**	Çözümün doğru olup olmadığını kontrol ettim.	E A	E A	E A	E A	E A	E A

E: Erdem davranışı gösterdiğini düşünüyor - **A:** Araştırmacı davranışın olduğunu gözlemliyor

Şekil 4. 11. Erdem'in Muhakeme ve İspat Yapma Sürecinde Sergilediği Üstbilişsel Düzenleme Süreçleri

Tablo 4. 29. Erdem'in BU 1 Sorusu Örüntü Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci

Seçim Yapılan Kartlar	Üstbilişsel Düzenleme Sürecine İlişkin Açıklama	Erdem'in Sesli Düşünmeleri ve Araştırmacı Gözlemleri
1.Kart: Soruyu iyi anladım ve benden istenilenleri tam olarak belirledim.	***Erdem:*** *Soruda benden istenilenleri iyi anlayıp belirlediğimi düşünüyorum.*	**Araştırmacı**: Soruyu okudu ve verilen örüntüyü inceledi.
2.Kart: Çözüm aşamasında hangi bilgilerin benim için gerekli / önemli olduğunu belirledim.	***Erdem:*** *Tek satırlarda sayıların nasıl olduğu çift satırlarda sayıların nasıl olduğuna baktım.*	***Erdem:*** *Verilen örüntüdeki satırlarda kaç sayı olduğuna bakıyorum. Çift satırlarda 5'er ve tek satırlarda 4'er sayı var. Bu iki satır arasında ilişki kurmaya çalışıyorum.*
3.Kart: Çözüm aşamasında yaptıklarımı zaman zaman kontrol ettim.	***Erdem:*** *Bu soruda yapmadım.*	**Araştırmacı**: Çözümlerini kontrol etmedi. Stratejisinde zorluk yaşayınca düşündü özel olarak uygulamadı.
4.Kart: Çözüm aşamasında duraksadım ve hatam olup olmadığına odaklandım. & Dikkatsizlik kaynaklı bir hatam olup olmadığını inceledim.	***Erdem:*** *Genel kuralı oluştururken, hata yapıp yapmadığımı inceledim. Satır ve sütunlara ilişkin oluşturduğum değerlerde de.*	***Erdem:*** *"n" çift ise 9n ve sayı solda. Çift satırlar 9'un katları olduğu için 9'un 7. katı ama 7. katı da bu çift satıra gelmiyor işte, sıkıntı oluyor (bir süre düşündü) demek ki şu yazdığım ifadelerle verilemeyecek bir şey.*
5.Kart: Çözüm aşamasında bir bilgi elde ettiğimde onu anlamlandırmaya çalıştım.	***Erdem:*** *Soldakiler 9, 18, 27, 36 bunlar nasıl gidiyor, 9n şeklinde gidiyor. Bunlarda 5, 14 yani bunları böyle şey yaptım tamam da mesela şurası 1 yani hangi sütunda olduğunu belirlemek için 1, 2, 3, 4, 5 diye gidiyor ama 1 için 2, 2 için 3, 3 için 4 yani bunun 1 fazlası olduğuna dayalı bir anlamlandırma yaptım.*	***Erdem:*** *1 olduğunda 2. sütunda, 2 olduğunda 3. sütunda, 3 olduğunda 4. sütunda, 4 olduğunda 5. sütunda. Yani (b+1). sütun da olması gerekiyor.*
6.Kart: Çözümü yapamıyorum diye düşündüğüm zamanlar oldu. & Soruyu çözerken kullandığım stratejiyi zaman zaman gözden geçirdim.	***Erdem:*** *Bu soru zaten şunları yazarken acaba bu yöntemi kullansam mı kullanmasam mı gibi şeyler düşündüm.*	***Erdem:*** *Direkt "n" tek ise en son yazılan sayı şudur; "n" çift ise en son yazılan sayı şu bölgededir, şeklinde ifade mi etsek ya da başka bir yazım mı denesek?*
7.Kart: Zorlandığım yerde çözüm stratejimi değiştirmeyi düşündüm.	***Erdem:*** *Mesela şu soruda 32. satırda şurası mesela b ve b+1 de bunu yazmaya çalıştım bunu yazdım ama pek şey olmadı. Bunu sonradan şöyle düşündüm b sonuçta 1 ile 9 arasında bir şey. 5 ile 9 arasında olduğu zaman mod9'daki değerinin şu olacağının yani b=1 olduğunda 9, 2 olduğunda 8 olduğunu gördüm ona göre (10-b) yazdım.*	***Erdem:*** *(b=1) olduğunda b=y için ve "b" 6 ile 9 arasında olduğunda ve (b=0) için "9-y". Sütun burada da satır yok işte acaba başka bir şey mi baksam?*
8.Kart: Sorunun çözümünde ortaya çıkan bilgileri gözden geçirdim.	***Erdem:*** *Mesela şu şunları yazdım burada da n. satırda en sağdaki sayılar 9n-4. Yani buradan bir bilgi edindim. Bu bilgileri gözden geçirerek şu sonuca ulaştım*	***Erdem:*** *"n" tek olmak üzere n. satırda en sağdaki sayı (9n-4) ve en solundaki sayı (9n). Bunlarla düşünsem sonuç çıkıyor başka şeye gerek kalmıyor. Mesela (n=7) alsam…*
9.Kart: Soruda verilenlerin tamamını kullanarak çözümü tamamladım.	***Erdem:*** *Burada zaten bir örüntü verilmiş örüntüyü kullanmadan çözüme ulaşamayız*	**Araştırmacı:** Soruda verilen değerleri kullanarak kural geliştirdi.
10.Kart: Çözümün doğru olup olmadığını kontrol ettim.	***Erdem:*** *Hepsinde ettim.*	***Erdem:*** *Satır ve sütunu bulduğum formüle göre (formüllerini açıklıyor) yaparım. Yanlışlık yok gibi duruyor.*

Örüntü sorusunun çözümüne ilişkin seçim yaptığı kartlardan çoğunu uyguladığını ifade etmiştir. Sadece "izleme" kategorisinde bulunan "yaptıklarımı zaman zaman kontrol ettim" kartına ilişkin davranışları çözüm sürecinde göstermediğini ifade etmiştir. Bu süreçleri araştırmacı tarafından da, sesli düşünmeleri ve çözüm süreçler ile gözlemlenmiştir.

Tablo 4. 30. Erdem'in BU 2 Sorusu Varsayım Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci

Seçim Yapılan Kartlar	Üstbilişsel Düzenleme Sürecine İlişkin Açıklama	Erdem'in Sesli Düşünmeleri ve Araştırmacı Gözlemleri
1.Kart: Soruyu iyi anladım ve benden istenilenleri tam olarak belirledim.	***Erdem:*** *Soruda benden istenilenleri iyi anlayıp belirlediğimi düşünüyorum.*	**Araştırmacı**: Soruyu okudu ve verilen şekil örüntülerini inceledi.
2.Kart: Çözüm aşamasında hangi bilgilerin benim için gerekli / önemli olduğunu belirledim.	***Erdem:*** *Gerekli olan bilgiler direkt uygulamanın kendisi. Bir de 1, 3, 5 şeklinde giden sayılar tek sayıların (2n-1) formunda olduğu, bilgisi.*	***Erdem:*** *Bu örüntüyü bir dizi olarak düşündüm; 2x(1, 3, 5, 7, 9) şeklimde gidiyor. Buradan (tek sayılarx2) şeklinde gittiğini gördüm.*
3.Kart: Çözüm aşamasında yaptıklarımı zaman zaman kontrol ettim.	***Erdem:*** *Pek yapmadım yani çözüm aşamasında yaptıklarımı zaman zaman kontrol etmedim. Yani şurada mesela bunun 2, 2+4, 2+4+6'nın şuna eşit olup olmadığını kontrol ettim ve eşit olmadığını gördüm.*	***Erdem:*** *Geliştirdiğim iki farklı kuralın birbirine eşit olup olmadığını inceliyorum; eşit değiller.*
4.Kart: Çözüm aşamasında duraksadım ve hatam olup olmadığına odaklandım. & Dikkatsizlik kaynaklı bir hatam olup olmadığını inceledim.	***Erdem:*** *Burada nasıl diyeyim duraksadığım için şunun şuna eşit olmadığını göremedim. Farklı olmadıklarını gördüğüm için tekrar bir hatam olup olmadığına baktım.*	***Erdem:*** *Geliştirdiğim iki kural birbirine eşit çıkmadı çünkü (2+4+6) yazmışım bu olmaz ki toplam 12 oluyor ama soruda o adımda 10 yazıyor.*
5.Kart: Çözüm aşamasında bir bilgi elde ettiğimde onu anlamlandırmaya çalıştım.	***Erdem:*** *Burada (1, 3, 5, 7, 9) bildiğim bir dizi bu tek sayıların bir dizisi bu. Tek sayıların da modellemesini bildiğimden dolayı yani onu önceden anlamlandırdığımdan dolayı 2x(1, 3, 5, 7) şeklinde gidiyor. Bunu simetri olarak düşündüm. Onu öyle anlamlandırdım. Öyle bir çalışma yürüttüm.*	***Erdem:*** *Tek sayılar olarak gidiyor galiba evet, tek sayıların modellenmesini kullanacağım. 2 ile çarpmada olduğu için tek sayılarla ilgili oluşturduğum örüntü modelinin simetriğini alacağım.*
6.Kart: Çözümü yapamıyorum diye düşündüğüm zamanlar oldu. & Soruyu çözerken kullandığım stratejiyi zaman zaman gözden geçirdim.	***Erdem:*** *Bunda böyle bir şeyi aslında fazla yapmadım. Olmadı böyle bir şey.*	**Araştırmacı:** Soruyu süreç boyunca sadece çözmeye çalıştı. Çözümü yapamadığı zamanları veya stratejisini gözden geçirmeyi düşünmedi. Bu nedenlerle stratejisini değiştirmeyi de düşünmedi.
7.Kart: Zorlandığım yerde çözüm stratejimi değiştirmeyi düşündüm.	***Erdem:*** *Burada çözüm stratejimi değiştirmedim.*	
8.Kart: Sorunun çözümünde ortaya çıkan bilgileri gözden geçirdim.	***Erdem:*** *Burada 1, 3, 5, 7'i kullanarak bunun simetriği olacak modeli uygulayarak bir sonuca ulaşmaya çalıştım. Yani bilgimi gözden geçirmeden modeli oluşturmaya geçemezdim.*	***Erdem:*** *Tek sayıların genel formülünü deneyerek kuralı (4n-2) buldum. Şimdi modele geçebilirim.*
9.Kart: Soruda verilenlerin tamamını kullanarak çözümü tamamladım.	***Erdem:*** *Aynı şekilde burada da bir örüntü verilmiş, bu örüntüyü kullanmadan sonuca ulaşamayız.*	**Araştırmacı:** Soruda verilen değerleri kullanarak kural ve model geliştirdi.
10.Kart: Çözümün doğru olup olmadığını kontrol ettim.	***Erdem:*** *Hepsinde ettim.*	***Erdem:*** *Oluşturduğum iki kuralı "b" şıkkı sorusu için eşitlersem, elde ettiğim sayıyla kuralları doğru bulduğumu anlarım. Modeller de doğru hata yok, çözümümün tamam.*

Varsayım sorusunun çözümüne ilişkin seçim yaptığı kartlardan çoğunu uyguladığını ancak seçim yaptığı 3., 6. ve 7. Kartları çözüm sürecinde uygulamadığını ifade etmiştir. Bu süreçleri araştırmacı tarafından da, sesli düşünmeleri ve çözüm süreçleri ile gözlemlenmiştir.

Tablo 4. 31. Erdem'in BU 3.1 Sorusu Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci

Seçim Yapılan Kartlar	Üstbilişsel Düzenleme Sürecine İlişkin Açıklama	Erdem'in Sesli Düşünmeleri ve Araştırmacı Gözlemleri
1.Kart: Soruyu iyi anladım ve benden istenilenleri tam olarak belirledim.	***Erdem**: Soruda benden istenilenleri iyi anlayıp belirlediğimi düşünüyorum.*	***Erdem**: İki tane eş ve eş olmayan üçgen alarak, kenarları boyunca birleştirme yaptığımız zaman kaç tane dörtgen oluşturabileceğimizi soruyor.*
2.Kart: Çözüm aşamasında hangi bilgilerin benim için gerekli / önemli olduğunu belirledim.	***Erdem**: İki üçgeni birleştirirken bir dörtgen oluşturulabilmesi için gereken bilginin ne olduğunu araştırdım ona baktım.*	***Erdem**: İlk olarak eş üçgenler alacağım ve bütün özel üçgen çeşitleri ile incelemeyi düşünüyorum. Sonrada eş olmayan üçgenler alırım.*
3.Kart: Çözüm aşamasında yaptıklarımı zaman zaman kontrol ettim.	***Erdem**: Sadece paralelkenardan başka bir şey oluşabiliyor mu ona bakmak için bir daha geri döndüm.*	***Erdem**: Çeşitkenar üçgen için sürekli paralelkenar oluşuyor. Çünkü çeşitkenar üçgen her türlü paralelkenara dönüşüyor. Acaba başka bir dörtgen oluşur mu bakayım.*
4.Kart: Çözüm aşamasında duraksadım ve hatam olup olmadığına odaklandım. & Dikkatsizlik kaynaklı bir hatam olup olmadığını inceledim.	***Erdem**: İkizkenar üçgenden eşkenar dörtgen oluşuyor ya aynı şekilde eşkenar üçgenden de bir eşkenar dörtgen oluşuyor. Acaba bunda bir yanlışlık mı yaptım diye tereddüt ettim tekrar oradan geri döndüm.*	***Erdem**: İncelediğim zaman ikizkenar ve eşkenar üçgen için eşkenar dörtgen elde ediliyor.*
5.Kart: Çözüm aşamasında bir bilgi elde ettiğimde onu anlamlandırmaya çalıştım.	***Erdem**: Hangi kenarın üzerinde birleştirirsek diğer kenarların nasıl değişeceğini yani şu iki kenar üzerinden birleştirdiğimizde şu iki kenarın birbirinden farklı olacağını onları kafamda oturtamaya çalıştım.*	***Erdem**: İki üçgeni birleştirirken, ortak kenarlar üzerinde birleştirme yaptığımda doğru sonuçlar elde ediyorum.*
6.Kart: Çözümü yapamıyorum diye düşündüğüm zamanlar oldu. & Soruyu çözerken kullandığım stratejiyi zaman zaman gözden geçirdim.	***Erdem**: Ortak kenar üzerinden birleştirme yaparken şunların paralellik yani şunların nasıl olacağını falan kestiremedim. Kestiremediğimden dolayı stratejiyi gözden geçirdim gibisinden bir şey düşündüm ama yine de değiştiremedim aynen bıraktım.*	***Erdem**: İkizkenar dik üçgen olduğunda değişen tek şey dikdörtgen ve kare oluyor. Çeşitkenarda da paralelkenar ve eşkenar dörtgen olacak. Çünkü şu kenarlar birbirine eşit oluyor, yok bu paralelkenar oluyor.*
7.Kart: Zorlandığım yerde çözüm stratejimi değiştirmeyi düşündüm.	***Erdem**: Çözüm stratejimi değiştirmedim bir bilgi doğrultusunda üçgenleri birleştirdim ve bir çözüm yaptım.*	***Erdem**: "İki tane eş üçgenden bir dörtgen oluşturabilmemiz için eşit kenarları çakışacak şekilde birleştirme yapmak gerekir." bu bilgiyle üçgenleri birleştirdim.*
8.Kart: Sorunun çözümünde ortaya çıkan bilgileri gözden geçirdim.	***Erdem**: Ortak kenarlar üzerinden birleştirme yapmaya dayalı bir bilgi elde ettim.*	
9.Kart: Soruda verilenlerin tamamını kullanarak çözümü tamamladım.	***Erdem**: İki eş üçgen diyor, verdiği bilgi eş olmaları ve eş olmamaları. Bu bilgileri kullanmadan zaten çözüme ulaşamayız.*	**Araştırmacı:** Soruda verilen bilgileri kullanarak üçgenleri birleştirdi.
10.Kart: Çözümün doğru olup olmadığını kontrol ettim.	***Erdem**: Hepsinde ettim.*	**Araştırmacı:** İkizkenar dik üçgenler birleşince kare ve paralelkenar oluştuğunu çözümünü tamamladıktan sonra incelerken fark etti. Tüm durumları tekrar inceleyerek doğruluğu kontrol etti.

Deneysel argüman çözümüne ilişkin seçim yaptığı kartlardan hepsini uyguladığını ifade etmiştir. Bu süreçleri araştırmacı tarafından da, sesli düşünmeleri ve çözüm süreçleri ile gözlemlenmiştir.

Tablo 4. 32. Erdem'in BU 3.2 Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci

Seçim Yapılan Kartlar	Üstbilişsel Düzenleme Sürecine İlişkin Açıklama	Erdem'in Sesli Düşünmeleri ve Araştırmacı Gözlemleri
1.Kart: Soruyu iyi anladım ve benden istenilenleri tam olarak belirledim.	***Erdem:*** *Soruda benden istenilenleri iyi anlayıp belirlediğimi düşünüyorum.*	***Erdem****: 500'den küçük en büyük asal sayıyı soruyor.*
2.Kart: Çözüm aşamasında hangi bilgilerin benim için gerekli / önemli olduğunu belirledim.	***Erdem:*** *499'un asal sayı olabilmesi için herhangi bir asal sayıya bölünmemesi gerektiğini düşündüm. Bu bilginin önemli olduğunu gerekli olduğunu düşündüm.*	***Erdem:*** *499'dan küçük asal sayıların onu bölüp bölmediğine baktım. Çünkü asal olabilmesi için hiçbir asal bölenle bölünmemesi lazım.*
3.Kart: Çözüm aşamasında yaptıklarımı zaman zaman kontrol ettim.	***Erdem****: Asal sayılarda zaten sürekli yaptıklarımı kontrol ettim yani bunları da bulurken falan.*	***Erdem:*** *499'u önceki asal bölenlerin bölüp bölmediğini incelediğimde bunlar; bölmeyen değerler. Tek tek deneyerek nereye kadar varabilirim* [*düşünüyor*].
4.Kart: Çözüm aşamasında duraksadım ve hatam olup olmadığına odaklandım. & Dikkatsizlik kaynaklı bir hatam olup olmadığını inceledim.	***Erdem:*** *499 sayısını kendisinden küçük asal sayılara bölerken her sayıyı en az iki ya da üç defa denedim. Mesela 499'u 47'e bölerken birçok kez böldüm. Orada baktım dikkatsizlik kaynaklı bir hatam olup olmadığına.*	**Araştırmacı:** 499'u bölebileceği her sayıya birkaç kez bölüyor.
5.Kart: Çözüm aşamasında bir bilgi elde ettiğimde onu anlamlandırmaya çalıştım.	***Erdem:*** *Burada t'nin 5'ten küçük olması gerekirdi burada "k" denen asal sayı 100'den büyük olduğunda t'nin 5 ten küçük olması gerektiğini ve bir tamsayı olmasını gerektiğini 1, 2, 3 veya 4 olması gerektiğini biliyoruz. Ama bunun nasıl bir ilişki olduğunu gösterebilmek için iyi bir şekilde anlamlandırmam gerekiyordu. Yani bunların 499'u tam bölmediğini göstermem gerekiyordu. Onu da yaptım.*	**Araştırmacı:** Çözümüyle ilgili genel bir kural oluşturdu ve 100'den büyük asal sayıların durumunu bu kural üzerinden yorumladı.
6.Kart: Çözümü yapamıyorum diye düşündüğüm zamanlar oldu. & Soruyu çözerken kullandığım stratejiyi zaman zaman gözden geçirdim.	***Erdem:*** *Bu zaten en başta şey olarak başladım asal sayılarla başladım tek tek bölüp bölmediğine bakarak başladım. Bir süre sonra artık o stratejinin işe yaramayacağını anladım.*	***Erdem:*** *499'un asal olup olmadığını tek tek bölerek inceliyorum ama sonrası için bu şekilde devam etmek zor olacak gibi.*
7.Kart: Zorlandığım yerde çözüm stratejimi değiştirmeyi düşündüm.	***Erdem:*** *Burada çözüm stratejimi değiştirmeyi düşündüm. Yani asal sayıları tek tek bölüp bölmediğini incelemek bir yerden sonra zor gelmeye başladı. 499'dan küçük asal sayıların 499'u bölüp bölmediğini tek tek incelemek yerine sonradan genel bir ifade oluşturup yazmayı düşündüm.*	
8.Kart: Sorunun çözümünde ortaya çıkan bilgileri gözden geçirdim.	***Erdem****: Burada da 5 için 99,2 olduğunu bu 99,2 sayısını arttırıp bu sayıdan sonraki sayılar için ne olacağına baktım yani gözden geçirdim. Böylece diğer sayıların 5'ten küçük olacağını anladım.*	***Erdem:*** *499'u 5'e böldüğümde 99,2 oluyor. Bu durumda* p_2 *sayısını arttırırsam* p_1*'in 5'ten küçük olması gerekiyor.*
9.Kart: Soruda verilenlerin tamamını kullanarak çözümü tamamladım.	***Erdem:*** *Burada da bir sayı var bu sayının 500'den küçük olması gerektiğini ve 500'den küçük en büyük sayı olması gerektiğini, bununda asal sayı olması gerektiğini kullandım.*	**Araştırmacı:** Soruyu çözerken asal sayı bilgisini, 499'un da 500'den küçük en büyük asal olduğu bilgisini kullanıyor.
10.Kart: Çözümün doğru olup olmadığını kontrol ettim.	***Erdem:*** *Hepsinde ettim.*	**Araştırmacı:** Çözümü kontrol ederken, çözümüne dahil etmediği işlemleri sildi ve çözümünü tekrar kontrol etti.

Deneysel argüman çözümüne ilişkin seçim yaptığı kartlardan hepsini uyguladığını ifade etmiştir. Bu süreçleri araştırmacı tarafından da, sesli düşünmeleri ve çözüm süreçleri ile gözlemlenmiştir.

Tablo 4. 33. Erdem'in BU 4.1 Sorusu Genel Örnek ve Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci

Seçim Yapılan Kartlar	Üstbilişsel Düzenleme Sürecine İlişkin Açıklama	Erdem'in Sesli Düşünmeleri ve Araştırmacı Gözlemleri
1.Kart: Soruyu iyi anladım ve benden istenilenleri tam olarak belirledim.	***Erdem:*** *Soruda benden istenilenleri iyi anlayıp belirlediğimi düşünüyorum.*	***Erdem:*** *Tek bir dikdörtgen için düşüneyim; bunların alan ve çevre uzunluğu durumunu inceleyeyim.*
2.Kart: Çözüm aşamasında hangi bilgilerin benim için gerekli / önemli olduğunu belirledim.	***Erdem:*** *Alanı ve çevresi eşit olan dörtgenler vardır diyor. Yani burada diyor ki bu dörtgenler en az bir tane olsa yani burada gerekli olan bilgi en az bir tane olduğunu gösterebilmek. Bir de bir dörtgen var bunun alanı ve çevresi birbirine eşit.*	
3.Kart: Çözüm aşamasında yaptıklarımı zaman zaman kontrol ettim.	***Erdem:*** *Uygulama 4a'da bu soruda şöyle bir şey yaptım bunu yazdıktan sonra b'nin ve anın değeri ne olacak tekrardan bir hata olmasın diye.*	***Erdem:*** *Kenar uzunluğu olduğu için "a" ve "b" nin 0'dan büyük olması gerekiyor. 0' dan büyük olma durumunu incelediğimde "a" değerleri ya 0'dan küçük olacak ya da 2'den büyük olacak.*
4.Kart: Çözüm aşamasında duraksadım ve hatam olup olmadığına odaklandım. & Dikkatsizlik kaynaklı bir hatam olup olmadığını inceledim.	***Erdem:*** *Burada pek geriye dönük bir şey yapmadım.*	**Araştırmacı:** *Sadece çözümüne odaklandı, herhangi bir inceleme yapmadı.*
5.Kart: Çözüm aşamasında bir bilgi elde ettiğimde onu anlamlandırmaya çalıştım.	***Erdem:*** *(2a) ya (a-2) olan dikdörtgenlerin alan ve çevresi birbirine eşittir dedim. Bunu nasıl diyeyim özel şeyler vererek, değerler vererek gerçekten sağlayıp sağlamadığına baktım.*	***Erdem:*** *Kenar uzunlukları farklı dikdörtgenleri düşündüm mesela "a" ve "b" aldım. "a" yı 3 aldığımızda ve "b" yi 3 aldığımızda bu forma uymuyor. Bu forma uyan bütün dikdörtgenleri belirlediğimizde alan ölçüleri ve çevre uzunlukları eşit dikdörtgenleri bulmuş oluyoruz.*
6.Kart: Çözümü yapamıyorum diye düşündüğüm zamanlar oldu. & Soruyu çözerken kullandığım stratejiyi zaman zaman gözden geçirdim.	***Erdem:*** *Burada da ortak özellikten gitmeye çalıştım. Buradan çok değişken geleceğini mesela şuradan çok değişken geleceğini biliyorum. O stratejiyi gözden geçirerek kullanmamaya çalıştım.*	***Erdem:*** *Dik üçgen aldım "a" ve "k" uzunluklarını kullandım ama çok değişken oldu buradan çıkmayacak galiba.*
7.Kart: Zorlandığım yerde çözüm stratejimi değiştirmeyi düşündüm.	***Erdem:*** *Burada da birçok değişken işin içine gireceği için tüm durumlar için hiç düşünmeden direkt bölme özelliğini uyguladım.*	***Erdem:*** *Söylenilen durumun aksine bir örnek vererek direkt uygulama yolunu tercih edeyim.*
8.Kart: Sorunun çözümünde ortaya çıkan bilgileri gözden geçirdim.	***Erdem:*** *Mesela şurada a ya 2a/a-2 ya burada a'nın yerine bir değer verdim. Mesela 4 gibi 4 verdiğimde bu oldu.*	***Erdem:*** *Bulduğum genel formülde 4 değerini denersem sağlıyor.*
9.Kart: Soruda verilenlerin tamamını kullanarak çözümü tamamladım.	***Erdem:*** *Burada da herhangi bir dörtgen var, bunun alanı ve çevre uzunluğu eşit bilgisini kullandım.*	**Araştırmacı:** Soruyu çözerken asal üçgenler ve dörtgenlerle ilgili alan ve çevre uzunluğu bilgisini kullandım.
10.Kart: Çözümün doğru olup olmadığını kontrol ettim.	***Erdem:*** *Hepsinde ettim.*	**Araştırmacı:** Çözümü tüm işlemlerini gözden geçirerek kontrol etti.

Genel örnek ve deneysel argüman çözümüne ilişkin seçim yaptığı kartlardan çoğunu uyguladığını ancak 4. karta ilişkin davranışları göstermediğini ifade etmiştir. Bu süreçleri araştırmacı tarafından da, sesli düşünmeleri ve çözüm süreçleri ile gözlemlenmiştir.

Tablo 4. 34. Erdem'in BU 4.2 Sorusu Kanıt Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci

Seçim Yapılan Kartlar	Üstbilişsel Düzenleme Sürecine İlişkin Açıklama	Erdem'in Sesli Düşünmeleri ve Araştırmacı Gözlemleri
1.Kart: Soruyu iyi anladım ve benden istenilenleri tam olarak belirledim.	***Erdem**: Soruda benden istenilenleri iyi anlayıp belirlediğimi düşünüyorum.*	***Erdem**: Verilen önermenin 6 ile bölünebilir durumunu inceleyeceğim.*
2.Kart: Çözüm aşamasında hangi bilgilerin benim için gerekli / önemli olduğunu belirledim.	***Erdem**: Verilen önerme için 6 ile tam bölünebilmesini istiyor. Bunun için gerekli olan bilgi 2 ve 3'e bölünebildiğini gösterebilmek. Bunu düşündüm.*	***Erdem**: 6 ile bölünebilmesi için 2 ve 3'e bölünebilmesi gerekiyor. 2'e bölünebildiğini gösteriyorum da 3 ile bölünebildiğini nasıl göstereceğim onu bilmiyorum.*
3.Kart: Çözüm aşamasında yaptıklarımı zaman zaman kontrol ettim.	***Erdem**: İşlemlerde bir yanlışlık var mı diye kontrol ettim.*	**Araştırmacı:** İşlem hatası yapıp yapmadığını kontrol etti.
4.Kart: Çözüm aşamasında duraksadım ve hatam olup olmadığına odaklandım. & Dikkatsizlik kaynaklı bir hatam olup olmadığını inceledim.	***Erdem**: Bunda da işlemlerimi kontrol ettim.*	
5.Kart: Çözüm aşamasında bir bilgi elde ettiğimde onu anlamlandırmaya çalıştım.	***Erdem**: (k=3m+1) için mesela bu yazdığımızda 3'ün (k^3+5k)'yı böldüğünü gördüm. Bunu anlamlandıramasaydım yani bunu böyle yapıp bir çelişki oluştuğunu göremeseydim bu sonuca varamayacaktım, "k"nın (3m+1) olmayacağı sonucuna varamayacaktım. Bunu da burada kulandım.*	***Erdem**: 3'ün (k^3+5k)'yı bölüp bölmediğini olmayana ergi miydi çelişki miydi, tam hatırlamıyorum o yoldan giderek bölmesin dedim*
6.Kart: Çözümü yapamıyorum diye düşündüğüm zamanlar oldu. & Soruyu çözerken kullandığım stratejiyi zaman zaman gözden geçirdim.	***Erdem**: Nasıl diyeyim bunu gözden geçirdim derken, duraksamadım ama aklımda hep vardı acaba bir sonuca ulaşabilecek miyim diye, bunu kullanmasam mı gibisinden. Aklımda hep bu vardı doğru sonuca ulaşınca onu artık hiç düşünmedim.*	**Araştırmacı:** Çözümünü sürekli gözden geçirdi ve emin adımlarla ilerlemeye çalıştı.
7.Kart: Zorlandığım yerde çözüm stratejimi değiştirmeyi düşündüm.	***Erdem**: Aklımda çözümü değiştirmek vardı ama sonuca ulaşınca vazgeçtim.*	
8.Kart: Sorunun çözümünde ortaya çıkan bilgileri gözden geçirdim.	***Erdem**: "k"nın (3m+1) ve (3m-1) şeklinde olması gerektiğine ilişkin bilgileri kullandım.*	***Erdem**: Çelişki m olmayana ergi mi, o yönteme göre bu ifade 3 ile bölünmesin dedim. "k"yı bu nedenle (3m+1) ve (3m-1) şeklinde aldım.*
9.Kart: Soruda verilenlerin tamamını kullanarak çözümü tamamladım.	***Erdem**: Bu soruda çok fazla bir bilgi vermemiş zaten sadece "k"nın doğal sayı olduğunu söylemiş onu da şurada kullandım.*	***Erdem**: 2 ve 3 ile bölmede "k"nın doğal sayı olduğuna dikkat etmem lazım.*
10.Kart: Çözümün doğru olup olmadığını kontrol ettim.	***Erdem**: Hepsinde ettim.*	**Araştırmacı:** Çözümünü kontrol etti ve bir hata olmadığı sonucuna vardı.

Kanıt çözümüne ilişkin seçim yaptığı kartların hepsini uyguladığını ifade etmiştir. Bu süreçleri araştırmacı tarafından da, sesli düşünmeleri ve çözüm süreçleri ile gözlemlenmiştir.

Tablo 4. 35. Erdem'in Seçim Yapmadığı Kartlara İlişkin Açıklamaları

Seçim Yapmadığı Kartlar	Bu Kartları Seçmeme Nedenleri
Çözümü en iyi şekilde yapmak için zaman planlaması yaptım.	***Erdem:*** *Yaptığım bütün çözümlerde, aklıma gelen ilk strateji ile uygulamaya hemen geçtiğim için zaman planlaması hiç yapmadım. Bütün çözümlerim için geçerli.*
Soruyu daha kolay nasıl çözerdim diye düşündüm.	***Erdem:*** *Düşünmedim bir çözüme ulaştıktan sonra gerisini incelemem.*
Kullandığım stratejinin etkililiğini kontrol ettim.	***Erdem:*** *Bir sonuca ulaştığımda ne kadar etkilidir bu önemli olmadı benim için.*
Çözümü en iyi şekilde yapmak için bir strateji belirledim.	***Erdem:*** *Aklıma gelen ilk stratejiyi hemen uyguladım. O yüzden bunu hiç yapmadım.*
Bu soru daha farklı nasıl sorulabilir diye düşündüm.	***Erdem:*** *Hiç düşünmedim. Zaten çözüme zor ulaşıyorum bir de onun nasıl daha farklı sorulabileceğini de mi düşünecektim ☺ hiç düşünmedim.*

Tablo 4.35 de Erdem'in seçim yapmadığı kartlara ilişkin açıklamalarının tamamı araştırmacı tarafından da gözlemlenmiştir.

Sonuç olarak, Erdem'in seçmiş olduğu davranış kartlara uygun süreçleri sergilediği ve bu süreçlerin araştırmacı tarafından gözlemlendiği görülmüştür. Erdem'in M-İ yapma sürecinde sergilediği üstbilişsel düzenleme süreçleri Tablo 4.36'a göre değerlendirildiğindeyse, en fazla "izleme" kategorisine uygun süreçleri sergilediği tespit edilmiştir. "Bilgi yönetimi" ve "hata ayıklama" süreçlerinin de sıklıkta olduğu tespit edilmiştir. Bunlara karşılık olarak "planlama" kategorisine uygun süreçleri az seviyede sergilediği belirlenmiştir.

Tablo 4. 36. Erdem'in Muhakeme ve İspat Yapma Sürecinde Sergilediği Üstbilişsel Düzenleme Süreç Kategorileri ve Sıklıkları

	Planlama	**Bilgi Yönetimi**	**İzleme**	**Hata Ayıklama**	**Değerlendirme**
M-İ Sürecindeki Üstbilişsel Düzenleme Süreçleri	Soruyu Analiz Etme **(2)**	Bilginin Kullanılabilirliğini İnceleme **(7)** Gerekli Bilgileri Belirleme **(6)** Bilginin Niteliğini İnceleme **(1)**	İşlem Hatası **(5)** Stratejiyi Gözden Geçirme **(3)** Stratejik Hata **(2)** Stratejik Eksiklik **(1)** İyi Strateji **(1)** Stratejiyi Değiştirmeye İhtiyaç Duyma **(1)** Gerekli Bilgileri Kullanma **(1)** Zaman Kaybını Önleme **(1)**	Hata Tespiti **(6)** Çözümden Vazgeçme **(5)** Hatayı Düzeltme **(3)**	Sonucu Değerlendirme **(4)**
Toplam	**2**	**14**	**15**	**14**	**4**

Erdem'in üstbilişsel düzenleme süreçlerinin muhakeme ve ispat yapma sürecinde ne şekilde gerçekleştiğine ilişkin uygulamalarından örnek ifadeler ise Tablo 4.37 de verilmiştir

Tablo 4. 37. Erdem'in Üstbilişsel Düzenleme Sürecine İlişkin Örnek İfadeler

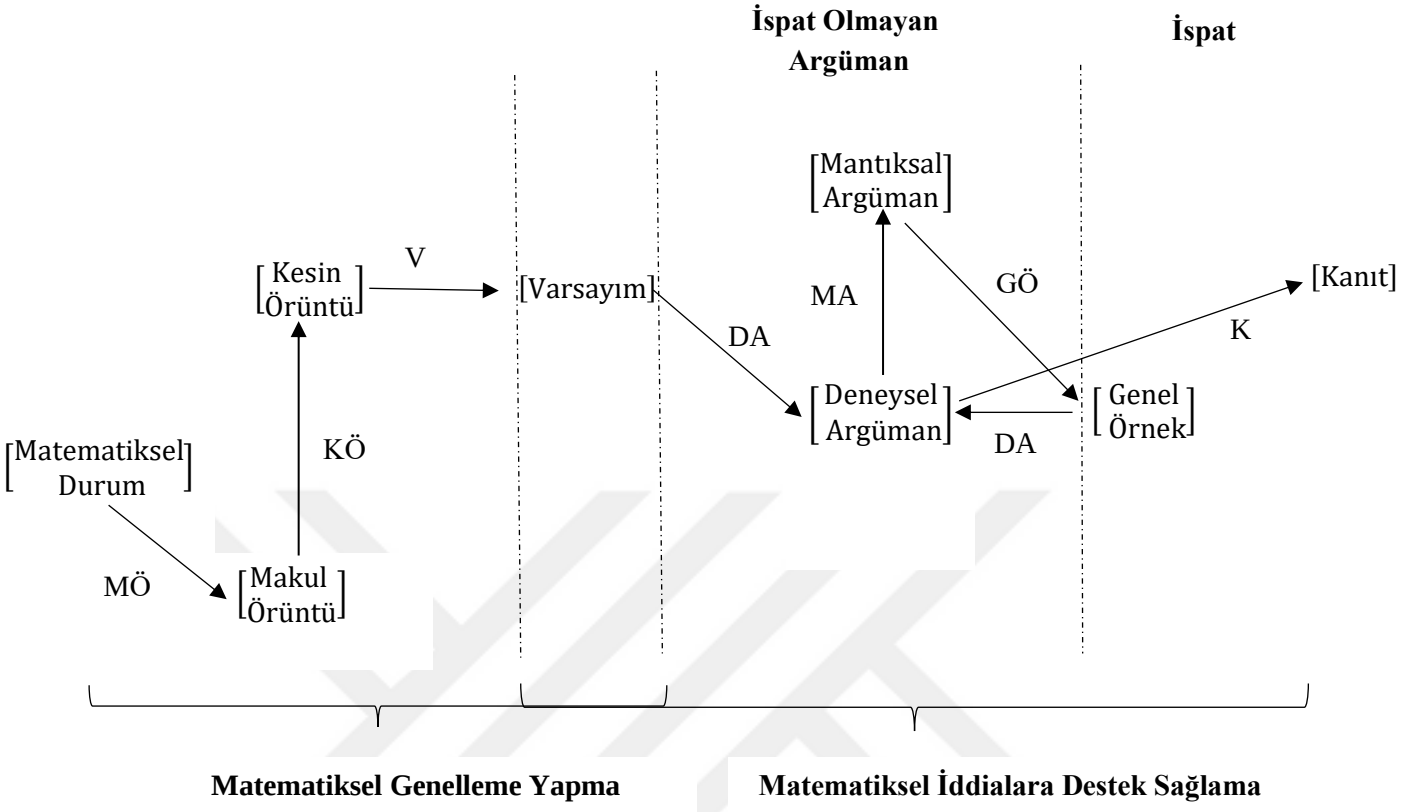
Temalar	Kodlar	Örnek ifadeler
Planlama	***Soruyu Analiz Etme**	***Erdem:*** [...] soru bana ne vermiş ne istemiş bunları ilk önce analiz ettim.
Bilgi Yönetimi	***Gerekli Bilgileri Belirleme**	***Erdem:***[...] benden istenilen şeye ulaşmak için bana gereken bilgileri düşünüyorum, belirliyorum.
	***Bilginin Kullanılabilirliğini Belirleme**	***Erdem:*** [...] *işlem hatası olup olmadığına* [...] *elde etmek istediğim sonuca ulaşabilmek için bana bir basamak oluşturuyor mu* [...] *o basamağı oluştururken yanlış bir şeyin üzerine mi kurulmuş ona bakıyorum.*
İzleme	***Stratejik Hata** ***Stratejik Eksiklik** ***İşlem Hatası**	***Erdem:*** [...] *hata yaptım mı* [...] *çözümün bir kısmından diğer kısma geçerken gözden kaçırdığım bir şey var mı* [...] *işlem hatası yapmış mıyım ona bakıyorum.*
	***Çözümde Zorlanma** ***Çözümde Hata** ***İşlem Hatası**	***Erdem:*** *Çözüm aşamasında duraksamamın nedeni bir yerde tıkandıysam* [...] *geriye dönüp hatamın olup olmadığına* [...] *işlem hatası yapıp yapmadığıma bakıyorum.*
	***Stratejik Hata** ***Strateji Belirleme**	***Erdem:*** [...] *hatam olup olmadığına bakıyorum, hatam yoksa strateji belirliyorum. O da olmadığı zaman çözümü genelde bırakıyorum.*
	***Çözümde Zorlanma** ***Stratejiyi Değiştirmeye İhtiyaç Duyma**	***Erdem:*** [...] *zorlanıyorum, tıkanıyorum bir nevi oradan ileri götüremediğim zaman farklı bir strateji belirleme ihtiyacı duyuyorum.*
	***Stratejiyi Gözden Geçirme** ***Zaman Kaybını Önleme** ***İyi Strateji Oluşturma**	***Erdem:*** *Stratejimin istenilen sonuca ulaşabilmem için ne kadar uygun olup olmadığına bakıyorum. Yani şöyle beni çok uğraştırıyor mu, ya da az çok bilirsiniz bunun sonucunda ben bir şey elde edebilir miyim? Bunun gibi şeyler düşünüp gözden geçiriyorum.* [...] *bunu hem zaman kaybını önlemek için hem de sonuca ulaşırken kullandığım yöntem biraz o stratejinin iyi bir strateji olmasını istiyorum aslında.*
	***Gerekli Bilgileri Kullanma**	***Erdem:*** [...] *tüm verilenleri kullanmak beni için fazla önemli değil aslında. Gerekli olan bilgileri kullanıp bir sonuca ulaşmaya çalışıyorum genelde ama sorulara hiç gereksiz bir bilgi olduğunu hatırlamıyorum böyle olduğundan dolayı da tüm verilenleri kullanarak çözümü tamamladım.*
Hata Ayıklama	***Hatayı Düzeltme** ***Çözümden Vazgeçme**	***Erdem:*** *Hatayla karşılaştığımda, hatayı düzeltme çalışıyorum. Yüzeysel duruyorsa çok bariz bir hata değil düzeltilebilir bir hataysa onu düzeltiyorum Düzeltemeyeceğim bir şeyse yani soruda yanlış bir şey yaptıysam onu kullanmaktan vazgeçiyorum başka bir şeye geçiyorum.*
	***Hata Tespiti** ***Stratejiyi Değiştirme**	***Erdem:*** [...] *hatam olup olmadığına bakıyorum, hatam yoksa başka bir yöntem arıyorum yani başka bir yöntem arıyorum başka bir strateji belirliyorum.*
Değerlendirme	***Sonucu Değerlendirme**	***Erdem:*** [...] *bilgileri ben gözden geçirsem yani bu bilgilerin doğruluğuna yani örtüşüp örtüşmediğine bakmasam bir sonuca ulaşamayacağım.*
		Erdem: [...] *kontrol ettim.*

4.2. İpek'in M-İ Bileşenleri ve Üstbiliş Kapsamında Elde Edilen Bulguları

İpek'in, M-İ odaklı görev sorularına ilişkin çözümlerini yaparken muhakeme ve ispat sürecinin nasıl ortaya çıktığı ve verdiği cevapların M-İ Analitik Çerçevesindeki kategorilerden hangileri ile uyuştuğuna yönelik elde edilen bulgular "Matematiksel Bileşen" başlığı altında verilmiştir. Bu başlık altında ayrıca M-İ odaklı görev sorularını çözerken zorladığı noktalar ortaya konulmuştur. M-İ odaklı görev sorularının çözümlerine ilişkin algıları "Psikolojik Bileşen" başlığı altında verilmiştir. Çözümlerinin matematiksel niteliği ile çözümlerine ilişkin algılarının karşılaştırılarak, ispat kavramının doğasına ilişkin bakış açısı "Pedagojik Bileşen" başlığı altında verilmiştir. Pedagojik bileşen bulguları kapsamında, ispat kavramının doğasını daha açık duruma getirebilmesi amacıyla; içerik, öğrenci, öğretim ve müfredat bilgisi hakkındaki bilgileri açıklanmıştır. Tüm bu süreçleri gerçekleştirirken sergilediği üstbilişsel düzenleme süreçleri ise "Üstbilişsel Düzenleme Süreci" başlığı altında verilmiştir.

4.2.1. İpek'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Matematiksel Bileşen Kapsamında Elde Edilen Bulgular

İpek'in M-İ odaklı görev sorularındaki çözümleri incelediğinde, Muhakeme ve İspat Yapma Sürecine İlişkin Matematiksel Bileşen Çerçevesindeki kategorilerden; makul örüntü, kesin örüntü, deneysel argüman, mantıksal argüman, genel örnek ve kanıt kategorilerine uygun çözümler geliştirdiği tespit edilmiştir. Birinci uygulama sorusunun bir kısmında ise çözüm sunamamıştır. İpek'in Muhakeme ve İspat Yapmaya İlişkin Süreç Akışı ise Şekil 4.12. de özetlenmiştir.



BU 1 → BU 2 → BU 3.1 → BU 3.2 → BU 4.1-a → BU 4.1-b → BU 4.2
MÖ → KÖ & V → DA → MA → GÖ → DA → K

Şekil 4. 12. İpek'in Muhakeme ve İspat Yapmaya İlişkin Süreç Akışı

İpek'in M-İ odaklı görev sorularına ilişkin çözümleri genel olarak Tablo 4.38'e göre değerlendirildiğinde adım adım niteliği artan çözümler geliştirdiği ancak örneklere dayalı olarak geliştirdiği çözümlerinde bazı durumları incelememesinden kaynaklanan eksikliğin çözümlerine yansıdığı söylenebilir. Geliştirdiği çözümler ise çoğunlukla "3" puan ile derecelendirilmiştir. Bunun nedeninin; çözümlerinin beklenen tam çözüm olarak kabul edilmelerini sağlayan yeterlikleri (sözel açıklamalar veya çözümü içerisine alan uygun tüm durumların incelenmesi) sağlamasına bağlı olduğu gözlemlenmiştir. Muhakeme ve İspat Yapma Sürecine İlişkin Matematiksel Bileşen Çerçevesindeki kategorilere göre ise çözümlerini en çok deneysel argüman olarak geliştirdiği bu nedenle de örneklere bağlı kaldığı sonucuna ulaşılmıştır.

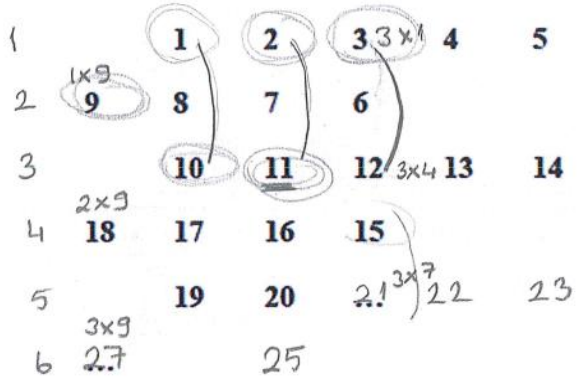
		BU 1			BU 2		BU 3.1				BU.3.2	BU.4.1		BU.4.2
		a	b	c	a	b	1.Soru		2.Soru			a	b	
							a	b	a	b				
Çözüm Yok		0		0										
Sınıflandırılamamış Çözüm														
Örüntü	Makul Örüntü		1											
	Kesin Örüntü				3									
Varsayım						3								
Deneysel Argüman							2	2	2	2			3	
Mantıksal Argüman											3			
Genel Örnek												3		
Kanıt														3

Tablo 4. 38. İpek'in M-İ Odaklı Görev Çözümlerinin Derecesi

Çözüm Derecesi: Geliştirilebilir Çözüm (1) Yeterli Çözüm (2) Beklenen Tam Çözüm (3)

İpek'in birinci bireysel uygulama kapsamında M-İ odaklı görev sorusunun b şıkkına verdiği cevabın kategorisi, veri kümesine uyan genel bir matematiksel ilişki bularak kesin delil sunmaya imkan vermediği için "makul örüntü" olarak değerlendirilmiştir. Sorunun a ve c şıklarında, bir çözüm sunamadığından "çözüm yok" kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu soru kapsamında ilk olarak, verilen sayı örüntüsündeki sayıların yerini bulabilmek için örüntüyü sayarak devam ettirmiştir.

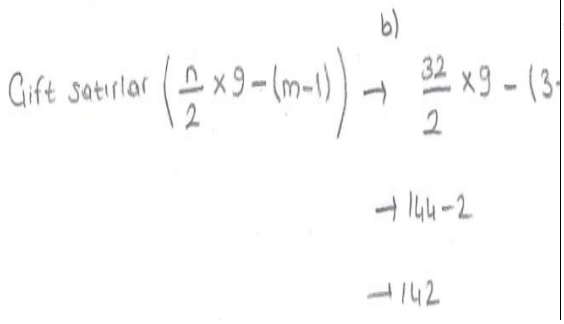
Sayılar Üzerindeki Denemeleri:



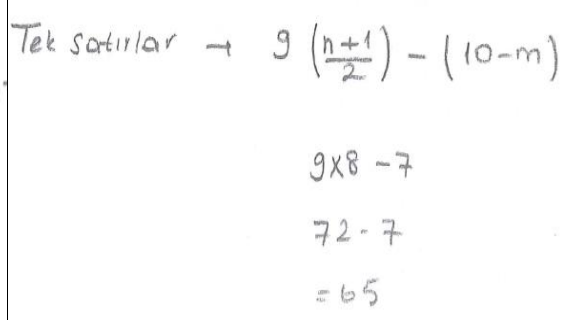
Çözümüne İlişkin Açıklaması:

İpek: *Örüntüyü devam ettirirsem, burada* [birinci satırı gösteriyor] *1'den 5'e kadar böyle devam ediyor, daha sonrasında* [ikinci satırı gösteriyor] *6, 7, 8 bir örüntü var. Bunu devam ettirerek şu satırın 3, 6, 9, 12 şeklinde 3'ün katı olarak arttığını gördüm. Buradan 65'i en yakın 3'ün katı olarak yazdım daha sonra buradan azalarak sol tarafa gideceğini gördüm, o yüzden 65'i bu şekilde buldum.*

Geliştirdiği Çözüm:



Geliştirdiği Çözüm:



Geliştirdiği Çözümlere İlişkin Açıklaması:

İpek: *Çift satırlarda hep 9, 18, 27 hep 9'un katları şeklinde gidiyor. Burada* [*birinci satırı gösteriyor*] *(9x1), (9x2), (9x3) burada* [*ikinci satırı gösteriyor*] *1 eksilerek gidiyor burayı da* [*sütunları gösteriyor*] *(n-1). sütun olarak kabul ettim. O zaman dedim ki burada 0 çıkartacağım için 9-0'dan 9 olacak, 2. sütundan 1 çıkaracağım. Bunlar* [*ard arda gelen ikili satırları gösteriyor*] *hep 9, 9 artıyor bunları* [*ard arda gelen ikili satırları gösteriyor*] *hep 1, 10, 19 bir dizi olarak düşündüm. Bunun genellemesini nasıl yazardım, "9k" ile başlamam lazım 1 sayısını elde edebilmem için 8 çıkarmam lazım, burada* [2 *sayısını gösteriyor*] *7, burada* [3 *sayısını gösteriyor*] *6 filan çıkarmam lazım. Tek satırları kullanacağım için* $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ *olacak 9'un katları şeklinde. Burada 8 çıkarmam gerekiyor kaçıncı* [*düşündü*] *ikinci sütun oluyor burası (10-m) olacak, buradan 7 çıkarmam lazım (10-3)'ten 7 olacak Burada* [*tek satırları gösteriyor*]*10'dan çıkarıyorum, azaldığı için burada da* [*çift satırları gösteriyor*] *arttığı için böyle bir şey tercih etmiştim.* [...]. *"n"i satırlar, "m"i de sütunları göstermek için kullandım.*

Şekil 4. 13. İpek'in BU 1 Sorusuna İlişkin Çözümü

Sorunun a şıkkının çözümünde sayarak devam etme stratejisini 65 için uyguladıktan sonra, soruda nerede olacağının bulunması istenen 92. ve 250. sayılar için bir sonuca ulaşamamıştır. Sorunun b şıkkı için sütun ve satır sayıları arasında bir ilişki aramıştır. Ardışık satırlarda bulunan toplam sayının 9 olmasını genel olarak "n" ile temsil etmiş; tek satırlar için $9 \times \left(\frac{n+1}{2}\right)$, çift satırlar için $9 \times \left(\frac{n}{2}\right)$ kuralını satırların yerleri için bulmuştur. Sütunlarda bulunan sayıların yerlerini bulmak için de tek satırlarda bulunan sayılar, sütunlar boyunca arttığı ve ikinci sütundan başladığı için (m-1) olarak almıştır. Çift satırlarda bulunan sayılar ise sütunlar boyunca azaldığı için (10-m) kuralını geliştirmiştir. Tek ve çift satırlar için ayrı ayrı bulduğu kuralları birleştirerek genel bir ilişki oluşturmaya çalışmıştır. Bununla birlikte, kullandığı "n" ve "m" temsillerinin çözümünde ifade ettiği anlamı çözümünü açıklarken ifade etmiş, çözüme dahil etmemiştir.

İpek'in b şıkkı kapsamında oluşturmuş olduğu çözüm, matematiksel nitelik anlamında eksiklikler taşımaktadır. Tek ve çift satırlarda bulunan sayıların konumunu bulmak için

geliştirdiği kurallarda; $9 \times \left(\frac{n+1}{2}\right)$ ve $9 \times \left(\frac{n}{2}\right)$ ifadelerini yazarken ilişkilendirmeyi nasıl yaptığı çözümde görülmemektedir. Bununla birlikte çözümlerini eşitlik sembolleri kullanmadan matematiksel gösterime uygun olmayacak şekilde yazmıştır.

Tablo 4. 39. İpek'in BU 1 Sorusuna İlişkin Zorlandığı Noktalar

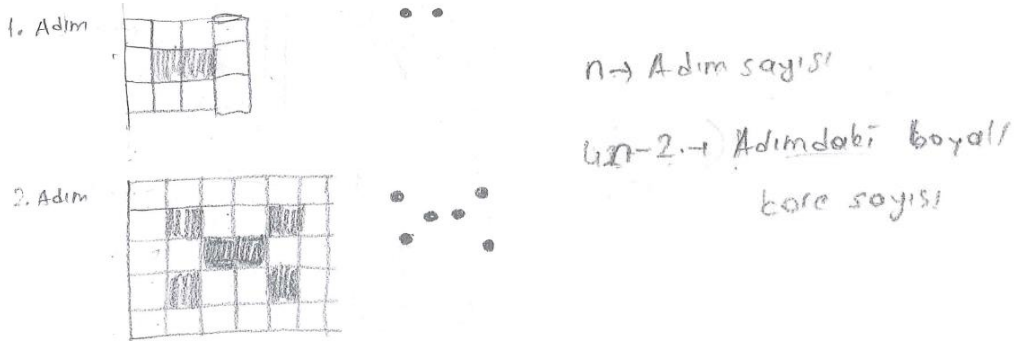
Çözüm Sürecinde Araştırmacı İle Arasında Geçen Bir Diyalog:
[...]
İpek: [...] c şıkkında bir şey bulamadım. Eğer herhangi bir sayı verdiğinde ulaşabileceğim genel bir kural, ona bir şey bulamadım, ona ulaşamadım. **Araştırmacı:** Neden ulaşamadın? **İpek:** Tamamı arasında bir bağ kuramadım.

Tablo 4.39 da yer alan diyalog, İpek'in örüntü bulurken tüm durumları içeresine alan genel bir kural oluşturmak da zorlandığı bunun nedeninin ise ilişkilendirme yapamamış olmasından kaynakladığı görülmektedir.

İpek'in BU 1'in b şıkkında bulunan M-İ sorusuna ilişkin geliştirdiği çözümler, makul örüntü kategorisiyle ilgili tanım şartlarını sağladığı ancak matematiksel nitelik anlamında eksiklikler taşıdığı temele alınarak geliştirilebilir çözüm olarak "1" puan ile derecelendirilmiştir. Sorunun a ve c şıkkı kapsamında herhangi bir çözüm geliştirmediği için çözüm yok kategorisinde değerlendirilmiş ve "0" puan ile derecelendirilmiştir.

İpek'in ikinci bireysel uygulamanın "a" şıkkı kapsamında M-İ odaklı görev sorusuna ilişkin verdiği cevabın kategorisi, veri kümesine uyan genel bir matematiksel ilişki bularak kesin delil sunmaya imkan verdiği için kesin örüntü olarak değerlendirilmiştir. Sorunun "b" şıkkına ilişkin verdiği cevap ise genel matematiksel ilişki hakkında muhakeme edilmiş bir hipotez ürettiği için varsayım olarak değerlendirilmiştir. Bu soru kapsamında ilk olarak, verilen sayılardan faydalanarak bir kural üretmiş ve ürettiği bu kural üzerinden bir örüntü modeli geliştirmiştir.

Geliştirdiği Çözüm:



Geliştirdiği Çözüme İlişkin Açıklaması:
İpek: *Genel olarak şöyle düşündüm önce 4'e 3'lük birim karelerden oluşan bir şekil düşündüm, tam ortasındaki kareyi boyayı dedim. Birer katman daha geliyor kenarlara bu sefer 5'e 6'lık oluyor diğerinde 7'e 8'lik şeklinde devam ediyor. Daha sonra ilk başta koyduğum karelerin köşelerine birer kare yerleştirerek devam ettiğimde bu sefer 2. adımda bu şekli* [ikinci şekli gösteriyor] *elde ettim. Üçüncüde bunu elde ettim* [üçüncü şekli gösteriyor] *bu şekilde devam ediyor. Bir sonraki adımda da bu sefer 9'a 10'luk olacak birim karelerden oluşan bir zeminim olacak ve ona da bu şeklin her bir köşesine birer tane kare koyarak devam edecek.*

Şekil 4. 14. İpek'in BU 2-a Sorusuna İlişkin Çözümü

Verilen sekil örüntülerinden yararlanarak bir kural oluşturmuş, daha sonra bu örüntülere uygun bir model geliştirmiştir. Birinci şekil örüntüsünde verilen sayıları 2 parantezine alarak ardışık tek sayılar şeklinde devam ettiğini belirlemiştir. 2 ile ardışık tek sayıların formülü olan (2n-1)'in çarpımı sonucunda (4n-2) kuralını elde etmiştir. Şekil örüntüsü b de ise sayıların 3'ün katları şeklinde devam ettiğini belirlemiş ve (3n) kuralını geliştirmiştir. Model geliştirme aşamasındaysa birim karelerden oluşan bir şekil örüntüsü almış ve bu şeklin ortasındaki iki kareyi boyamıştır. Şekli sağ, sol, alt ve üstünde bulunan her bir aşamasına birer sıra ekleyerek devam ettirmiştir. Böylece boyamış olduğu karelerin köşelerine temas eden kareleri de boyamıştır.

İpek: [...] *Ben b de şey diye düşündüm. Şimdi a'nın kuralı, nokta sayısı 4n-2; b'nin ki de 3n. Ortak çözüm, hani denklemmiş gibi düşünüp, bunları ortak çözüm gibi yaptığımda n buradan 2 geliyor. O yüzden sadece ikinci adımda aynı olur diye düşünüyorum.*
Araştırmacı: *Bu eşitlikten dolayı diğer durumlarda olmaz diyorsun yani?*
İpek: *Hem bu eşitlikten dolayı hem de grafiksel olarak düşündüğümüz zaman bunları bir fonksiyon olarak düşündüğüm zaman bu biraz daha hızlı ilerliyor değerleri bu biraz daha yavaş. Aynı değeri yakalamaları biraz zor gibi.*

Şekil 4. 15. İpek'in BU 2-b Sorusuna İlişkin Çözümü

Sorunun b şıkkı kapsamında da ulaştığı genel kuralları birbirine eşitleyerek "2" dışında herhangi bir noktada durumun sağlanmayacağı sonucuna ulaşmıştır. Bu cevabını ayrıca,

grafik üzerinde, verilen değerleri temsil edecek doğrusal durumlar üzerinde ilişkilendirerek açıklamıştır.

Tablo 4. 40. İpek'in BU 2 Sorusuna İlişkin Çözüm Süreci

Çözüm Sürecinde Araştırmacı İle Arasında Geçen Bir Diyaloglar:
[…]
Araştırmacı*: Bu modelden başka modeller geliştirebilir miydin? Neden ilk olarak aklına bu model geldi?* ***İpek:*** *Daha önceki uygulamalardan, aslında biraz da onun etkisi var, boyalı kare filan kullandığımız için galiba.* ***Araştırmacı:*** *Başka modeller geliştirebilir miydin?* ***İpek:*** *Başka geliştirebilir miydim, düşüneyim. Kare değil de aynı bu şekilde devam edecek mesela noktalar koyarak, 1. adımda mesela 2 noktam var sonra bu şekilde, büyüyen bir kelebek gibi düşünebiliriz aslında.*
[…]
İpek: *Şimdi ben kareli bir şey düşündüm boyayayım diye. Ama işte daha sonra nasıl aktaracağım bunları?* ***Araştırmacı:*** *Bilmiyorum, ben sana modeli sormuşum oluşturdun, model üzerinden bir kural oluşturun dedim, sende şunu yazmışsın.* ***İpek:*** *Şimdi ben bu kuralları model oluşturmadan yazdım bir dakika.*

Tablo 4.40 da yer alan diyaloglarda görüldüğü üzere İpek, soruda verilen değerlere uygun model geliştirirken geçmiş uygulamalardaki deneyimlerini dikkate almıştır. Çözümünde görülen önemli bir eksiklik ise geliştirdiği modele uygun kural oluşturmamasıdır. Verilen değerlere uygun farklı bir modeli oluşturup oluşturamayacağı sorulduğunda; oluşturmuş olduğu kuralı dikkate almadan direkt farklı bir model oluşturması bu eksiklik durumunu desteklemiştir. Benzer durum Tablo 4.41. de yer alan diyalog ile açıklanabilir.

Tablo 4. 41. İpek'in BU 2 Sorusuna İlişkin Çözüm Sürecinde Zorlandığı Noktalar

Çözüm Sürecinde Araştırmacı İle Arasında Geçen Bir Diyaloglar:
[…]
Araştırmacı*: Tamam, n nedir?* ***İpek:*** *Adım yani adım dediğim şeklim birinci şeklim bu ikinci şeklim bu, hani örüntü şeklinde devam ettiği için.* ***Araştırmacı:*** *Bir başkası belki "n" e başka bir anlam yükleyecek, onu nasıl ayırt edeceksin?* ***İpek:*** *Aaa onları belirtmem mi gerekiyor? Birinci adım diyeyim ben bunlara. Birinci adım mı diyeyim şekil mi diyeyim? Birinci şekil diyeyim. "n" şey demek, şekil sırası, adım desem* [düşündü] *"n" e daha sağlıklı bir tanım bulacağım. Şekil değil de adım sayısı olsun bu. "4n-2" de adımdaki boyalı kare sayısı.* ***Araştırmacı:*** *Tamam.*

Ürettiği kural ve geliştirdiği model arasında "n" temsilini dikkate alarak bir ilişkilendirme yapıp yapmadığını sorgulamak amacıyla araştırmacı tarafından Tablo 4. 41 de yer alan diyalogdaki sorular İpek'e yöneltilmiştir. Böylece, soruda verilen değerlere uygun kural ve modeli ayrı ayrı geliştirerek, herhangi bir ilişkilendirme yapmadığı gözlemlenmiştir.

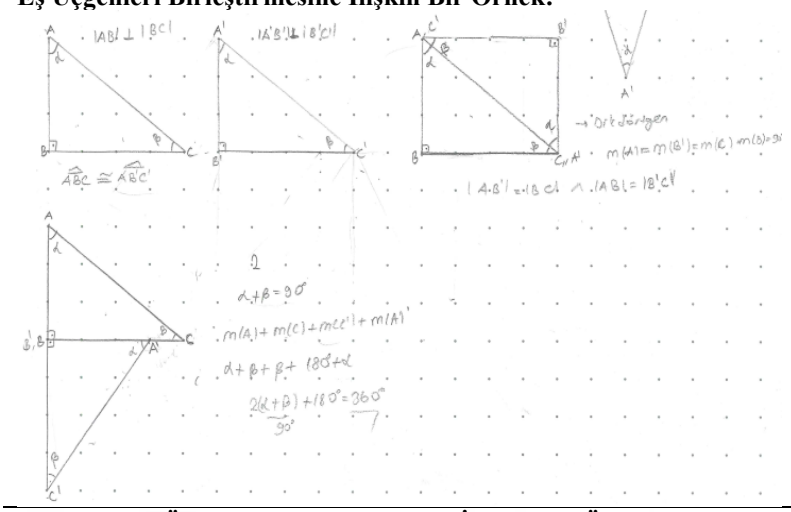
Gerçekleşen diyalog sonucunda İpek'in "n" temsilini tanımlayacak şekilde ifade etmekte zorluk yaşadığı tespit edilmiştir.

Sonuç olarak İpek, a şıkkı kapsamında oluşturmuş olduğu (4n-2) kuralı ile model arasında bir ilişkilendirme kurarak; model üzerinde adım sayısı olarak belirlediği "n" temsilini 4 ile çarpıp bu değerden 2'yi çıkarmasını modelin her bir adımıyla ilişkilendirebilseydi çözümü varsayım kategorisinde değerlendirilecekti. Ancak çözümde yer alan bu eksiklikler ve veri kümesine uyan genel ilişkileri belirlemesinden dolayı kesin örüntü kategorisinde kabul edilmiştir. Varsayım kategorisinde değerlendirilme anlamında eksiklik taşıyan ancak kesin örüntü kategorisinde değerlendirilmiş olan çözüm matematiksel nitelik anlamında bir eksiklik bulunmadığı temele alınarak beklenen tam çözüm olarak "3" puan ile derecelendirilmiştir.

Sorunun b şıkkı kapsamında geliştirmiş olduğu çözüm ise varsayım kategorisiyle ilgili tanım şartlarını sağladığı ve matematiksel nitelik anlamında bir eksiklik bulundurmadığı için beklenen tam çözüm olarak "3" puan ile derecelendirilmiştir.

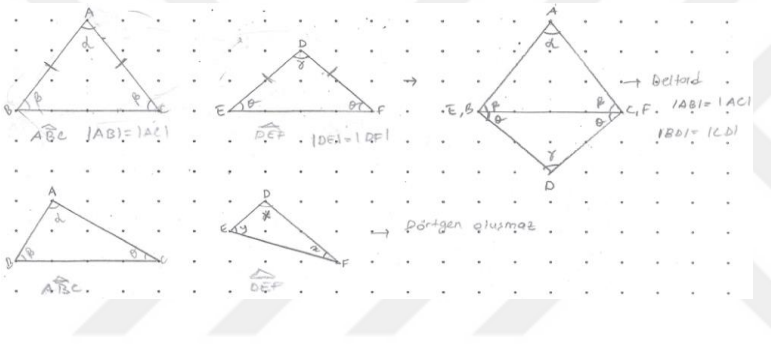
İpek'in üçüncü bireysel uygulamanın ikinci aşaması kapsamında M-İ odaklı görev sorusuna verdiği cevabın kategorisi, iddianın kapsadığı olası tüm durumların uygun bir alt kümesini sağlayabildiği için deneysel argüman olarak değerlendirilmiştir. Bu soru kapsamında ilk olarak, soruda verilen üçgen durumlarını temele alarak bir kenarları ortak olacak şekilde özel üçgenleri kullanarak birleştirmeler yapmıştır.

Eş Üçgenleri Birleştirmesine İlişkin Bir Örnek:



Çözümüne İlişkin Açıklaması:
İpek: *Birinci soruda istenilenlere uygun üçgen çeşitlerinden aklıma gelenler ile birleştirmeler yaptım. İşte paralelkenar, dikdörtgen, herhangi bir özel ismi olmayan bir dörtgen elde ettim. Bir de eşkenar dörtgen elde ettim.*

Eş Olmayan Üçgenleri Birleştirmesine İlişkin Bir Örnek:



Çözümüne İlişkin Açıklaması:
İpek: *İlk olarak bir kenarları ortak olan eş olmayan üçgenler aldım, oradan bir deltoit elde ettim. Sonra tamamen bütün kenarları birbirinden bağımsız üçgenler aldım, o zamanda bir dörtgen oluşturamadım.*

İki Üçgen Durumuna İlişkin Ulaştığı Genel Sonuç:

İpek: İki üçgenden bir dörtgen oluşabilmesi için en az bir kenarının ortak olması gerektiğine ulaştım.

Şekil 4. 16. İpek'in BU 3.1 Sorusuna İlişkin Çözümleri

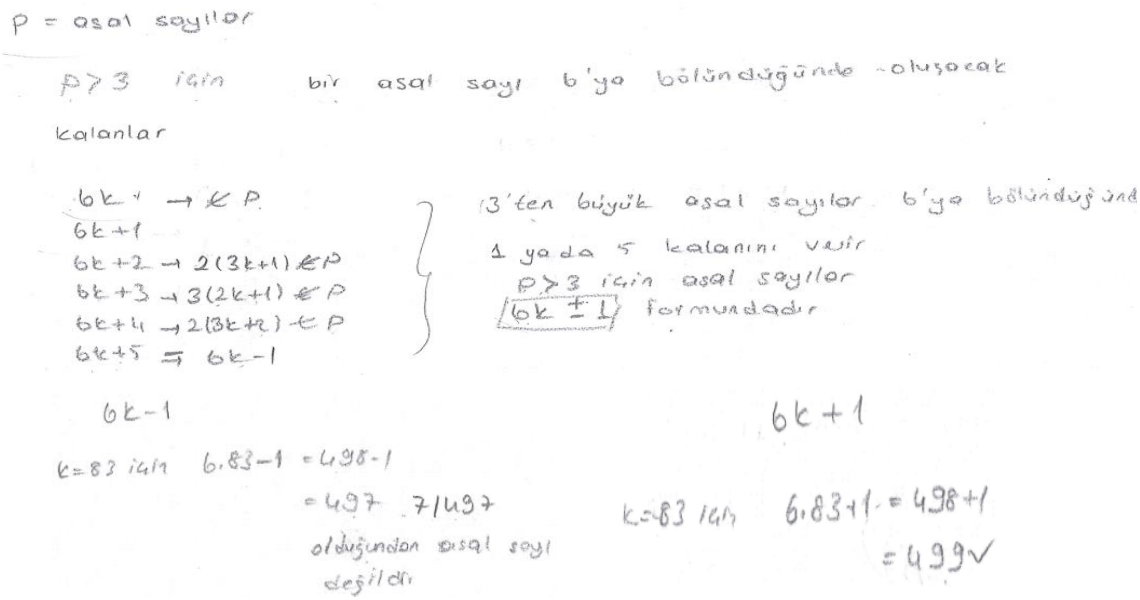
Eş üçgenler ile birleştirmeler yaparken bir kenarlarının ortak olmasına dikkat etmiştir. Bu kapsamda, ilk olarak iki ikizkenar üçgeni kenarları boyunca birleştirerek, paralelkenar ve eşkenar dörtgen elde etmiştir. İkinci olarak dik üçgenleri bileştirerek dikdörtgen ve düzgün olmayan dörtgen elde etmiştir. Ancak dik üçgenlerle yaptığı birleştirmeler de; farklı uzunluktaki kenarları birleştirmediği için paralelkenar elde etmemiştir. Çeşitkenar iki üçgeni ve eşkenar üçgenleri birleştirerek eşkenar dörtgen elde etmiştir. İkizkenar dik üçgen birleştirmesi yapmadığı için kare elde etmemiştir. Eş olmayan dörtgenleri birleştirdiğinde ise ilk olarak bir kenarı ortak olan ikizkenar üçgenler almış, karşılıklı olacak şekilde birleştirmiş ve bir deltoid elde etmiştir. Hiçbir kenar uzunluğu ortak olmayan üçgenleri birleştirdiğinde ise bir dörtgen elde edememiştir.

Sonuç olarak da, iki üçgenden dörtgen elde edilmek isteniyorsa, en az bir kenarının ortak olması gerektiği sonucuna ulaşmıştır. Ancak üçgen birleştirmeleri yaparken bazı kenarlar boyunca birleştirme yapmadığı için özel dörtgen çeşitlerinden bazılarını bulamaması (örneğin, kare) ve ikizkenar dik üçgen için birleştirmeler yapmadığından çözümü eksik kalmıştır.

İpek'in BU 3.1 da bulunan M-İ sorusuna geliştirdiği çözümler, deneysel argüman kategorisiyle ilgili tanım şartlarını sağladığı ve yaptığı çözümlerde matematiksel nitelik anlamında ulaştığı genel sonuçlara engel olacak büyük eksiklikler taşımadığı ancak yine de bazı üçgen durumlarını göz önünde bulundurmaması bir eksiklik olarak kabul edilmiştir. Bu nedenle çözümü yeterli çözüm olarak değerlendirilip "2" puan ile derecelendirilmiştir.

İpek'in üçüncü bireysel uygulamanın ikinci aşaması kapsamında M-İ odaklı görev sorusuna verdiği cevabın kategorisi, veri setine uyan bir genelleme sağladığı ancak kabul edilmiş önemli tüm gerçeklere açık bir referans olmadığı için mantıksal argüman olarak değerlendirilmiştir. Bu soru kapsamında ilk olarak, 500'den küçük her sayısının asal olup olmadığını bildiği bir kural amacıyla deneyerek bulmaya çalışmıştır.

Geliştirdiği Çözüm:



Çözümüne İlişkin Açıklaması:

İpek: *İlk olarak 500'den küçük en büyük asal sayıyı sormuş. Ben aslında burada şunu düşündüm, 500 den küçük her sayı için asal olup olmadığını denedim. Önce mesela 499'a baktım, çift sayılara bakmadım çünkü bir tane çift asal sayı var. Sonra p>3 için 6'a bölündüğünde oluşacak kalanlar 6k, 6k+1, …, 6k+5 yani 0, 1, 2, 3, 4, 5. Sonra bunların asal sayı olup olamayacağına baktım. (6k) olmaz çünkü bu bir çift sayı, yerine herhangi bir değer yazdığımızda çift sayı olacak. (6k+1) olabilir, (6k+2) olmaz 2'e bölünüyor, (6k+3) olmaz 3'e bölünüyor, (6k+4) olmaz 2'e bölünüyor, (6k+5) olabilir. Bunu da mod6 ya göre 6k-1 formunda yazdım. Sonra en büyük asal sayılar 6 ya bölündüğünde 1 ya da 5 kalanını verirler. Yani p<3 için asal sayılar (6k+1) ve (6k-1) formundadır. Bir değer yazdığımda ben şunu kabul ettim, ya (6k+1) olmalı yani ikisinden biri asal olmalıdır şeklinde yazdım. Sonra (6k+1)'e baktım, "k" yerine bir sayı yazdığımda 500'e en yakın sayıyı bulmaya çalışıyorum aslında. (6k-1)'e baktığımda 497 geldi, 7 sayısı da 497'i böldüğü için asal sayı değil bu o yüzden 499 asal sayıdır dedim .*

Şekil 4. 17. İpek'in BU 3.2 Sorusuna İlişkin Çözümleri

Soruyu çözebilmek için asal sayıların bulunmasına dayalı bildiği bir kural yardımıyla (6k+1) ve (6k-1) formatındaki sayıları kullanmıştır. Formül üzerinde "k" yerine verdiği denemeler sonucunda 499'un asal olduğu sonucuna ulaşmıştır. Ancak bu formülün tersten işleyip işlemediğini gerektiren durumları test etmemiştir. Formül bilgisi ile cevapladığı bu soruyu, formül bilgisini kullanmadan nasıl çözeceğine ilişkin yanıtını ise Tablo 4.42 de yer alan diyalog da görüldüğü üzere denemeler yaparak çözeceği yönünde vermiştir.

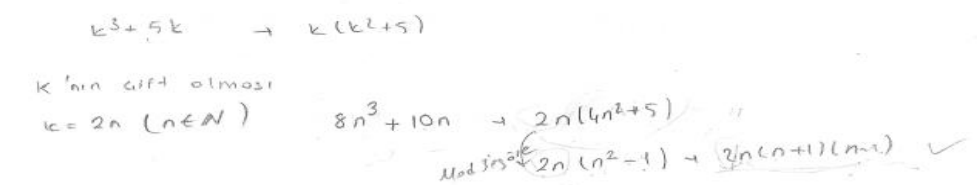
Tablo 4. 42. İpek'in BU 3.2. Sorusuna İlişkin Çözüm Süreci

Çözüm Sürecinde Araştırmacı İle Arasında Geçen Bir Diyaloglar:
[…]
Araştırmacı*: Peki bu çözümü bilmeseydin nasıl bir çözüm yapardın?*
İpek*: Deneme yanılma yapardım.*
Araştırmacı: *Nasıl deneme yanılma?*
İpek: *499'dan başlardım aşağıya doğru gidecek şekilde çiftleri eleyerek denerdim.*
Araştırmacı: *Mesela 499'dan başlardım, dedin ya ne yapardın 499'a?*
İpek: *Onu bölebilen bir sayı var mı onu ararım, asal olup olmadığını test ederdim.*

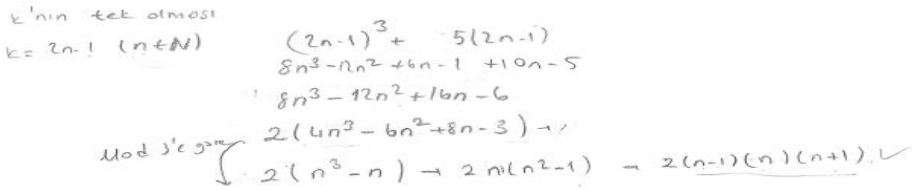
İpek'in BU 3.2 de bulunan M-İ sorusuna ilişkin geliştirdiği çözüm, deneysel argüman kategorisiyle ilgili tanım şartlarını sağladığı ve matematiksel nitelik anlamında bir eksiklik bulunmadığı için beklenen tam çözüm olarak "3" puan ile derecelendirilmiştir.

İpek'in dördüncü bireysel uygulamanın ikinci aşaması kapsamında M-İ odaklı görev sorusuna verdiği cevabın kategorisi, belirli bir örneğin veya durumun temsiline dayanmayan ispat sağlayabildiği için kanıt kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu soru kapsamında ilk olarak, verilen önermenin 2 ve 3 ile bölünme durumlarını kontrol etmiştir.

2 İle Bölünebilmeyi Kontrol Etmesi:



3 İle Bölünebilmeyi Kontrol Etmesi:



Çözümüne İlişkin Açıklaması:
İpek: *6'ya bölünmesi gerekiyorsa 2'e ve 3'e bölünmesi gerekiyordur, şeklinde düşündüm. 2'e ve 3'e tam bölünmesi gerekiyor, "k" doğal sayısı da ya çift olacaktır ya da tektir, başka olasılığı yok. Bu iki durumu inceledim. Çift olması durumunda "2n" şeklinde aldım yine "n" de doğal sayılar kümesinden bir sayı. Yazdığım zaman ($8n^3+10n$) elde ettim. Buradan da (2n) parantezine aldığım zaman buradan 2'e bölünebildiğini zaten rahatlıkla gösterdim. Tek olması durumunu da inceledim. Bu arada (2n-1) doğal sayılar kümesinden oldu. Oradan da 2 parantezine aldım, 2'e bölündüğünü rahatlıkla gösterdim. Tekrar mod3'e göre yazdım mod3'te n^3'e denk oluyor. $6n^2$' de 0'a denk oluyor. 8n'de 0'a denk oluyor yine.*

Şekil 4. 18. İpek'in BU 4.2 Sorusuna İlişkin Çözümü

Verilen önermenin 2 ile bölünme durumunu; tek veya çift olup olmadığını test ederek incelemiştir. 3 ile bölünme durumunu incelemek için ise "k" temsili yerine "2n-1" ve "2n+1" ifadelerini kullanıp önerme üzerinde kontrolünü yapmıştır. Sonuç olarak, verilen önermenin 2 ve 3 ile bölündüğü için 6 ile de tam bölünebileceği sonucuna ulaşmıştır.

İpek'in BU 4.2 de bulunan M-İ sorusuna ilişkin geliştirdiği çözüm, kanıt ilgili tanım şartlarını sağladığı ve matematiksel nitelik anlamında bir eksiklik bulunmaması nedeniyle beklenen tam çözüm olarak "3" puan ile derecelendirilmiştir.

4.2.2. İpek'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Psikolojik Bileşen Kapsamında Elde Edilen Bulgular

İpek, M-İ sorularının çözümüne ve M-İ yapma sürecine ilişkin algılarını sıklıkla çözümlerinin niteliğine dayandırarak açıklamıştır. Çözüm niteliğine ilişkin algıları ise geçerli olma, uygu olma ve genellenebilir olma olarak değişkenlik göstermiş ve en çok geçerli olmaya dayalı açıklamalarda bulunmuştur. Bunu takiben stratejilerine ilişkin algılarının da sıklık gösterdiği gözlemlenmiştir. Stratejilerine ilişkin algılarını ise bilgisine dayandırarak açıklamıştır.

Tablo 4. 43. İpek'in M-İ Sürecine İlişkin Algıları

Çözüm Kategorileri	Strateji					Çözümün Niteliği		
	Farklı Temsil	Temsilin Güçlendirilmesi	Bilgi	Farklı Stratejileri Seçme	Özel Durumları İnceleme	Geçerli Olma	Uygun Olma	Genellenebilir Olma
*Örüntü	1		3	1		8	1	3
*Varsayım			1			1	1	
*Deneysel Argüman		7	3			3	4	7
*Mantıksal Argüman			3	1		1	1	
*Genel Örnek						4	2	1
*Kanıt		1				3	2	
Toplam	2	8	10	2		20	11	11
			22			42		

İpek BU 1 sorusu kapsamında geliştirdiği örüntü çözümüne ilişkin algısını, strateji ve çözüm niteliğine dayandırarak açıklamıştır. Sorunun sadece "b" şıkkı için çözüm üretebildiği "a" şıkkı için sayarak ilerleme stratejisini uyguladığı çözümünde geliştirilebilecek nokta olarak "c" şıkkında bir çözüm oluşturmak olduğunu belirtmiştir. Sorunun "a" ve "b" şıkları için üretmiş olduğu çözümlerde genel bir kural bulabildiği, düşüncelerini matematiksel olarak ifade edebildiği ve bu ifadelerin karşılık bulduğu değerlerin sağlamasını yaptığı zaman doğru sonuçlara ulaşılabileceğini düşünmüştür. Yapmış olduğu çözümünde verilenlerden yola çıkarak bir kural geliştirdiği, bu kuralı soruda denediği zaman hata olmadığını görmesine dayalı olarak çözümünün her durumda doğru ve geçerli olacağını ifade etmiştir.

İpek'in örüntü çözümleri kapsamında tespiti yapılan algılarına ilişkin açıklamalarından örnekler Tablo 4.44 de verilmiştir.

Tablo 4. 44. İpek'in M-İ Sürecinde BU 1 Sorusu Örüntü Çözümüne İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar

Tema		Kod	Örnek Diyalog
Strateji	**Çözümün Niteliği**	**Farklı Temsil** **Genellenebilir Olma**	[...] ***Araştırmacı:*** *Çözümünün geliştirilebilir bir yönü var mı sence?* ***B1-İ8:*** *b şıkkı içinde c şıkkı için var yani çözüm yapılabilir.* ***Araştırmacı:*** *a ve b şıkları için peki yaptığın çözümlerde?* ***B1-İ9****: a şıkkında genel bir formül ile değil deneyerek buldum da, bu bulduğum sonuç geliştirilebilir mi; aslında a şıkkı için bulunacak genel kuraldan bir çözüme gidilir. Ben deneyerek buldum ama eğer herhangi bir tamsayı verildiğindeki genel kurala ulaşmış olsaydım o zaman, a şıkkını da ona göre çözerdim o şekilde geliştirilebilirdi.*
		Bilgi **Geçerli Olma**	[...] ***Araştırmacı:*** *Yaptığın kadarıyla, çözümlerin her zaman doğru olacak mı seni her zaman başarıya ulaştıracak mı?* ***B1-İ11****: Yaptığım kadarıyla evet.* ***Araştırmacı:*** *Neden böyle düşünüyorsun?* ***B1-İ12:*** *Örüntünün kuralını denedim zaten, var olan kurala ilişkin bir şeyi ben cebirsel olarak yazdım. Yani elimde olan verilerle ürettiğim bir şey bana verilen şeylerle ürettiğim bir şey olduğu için ve denediğim test ettiğim zamanda hata olmadığını gördüm o yüzden her zaman doğruya ulaştıracağını düşünüyorum.*

İpek BU 2 sorusu kapsamında geliştirdiği örüntü çözümüne ilişkin algısını, strateji ve çözüm niteliğine dayandırarak açıklamıştır. Geliştirmiş olduğu çözümde var olan genel kuralın değiştirilemeyeceğini; sadece farklı modellerin kullanılması ile farklı çözümlerin geliştirilebileceğini ifade etmiştir. Farklı modellerin arasından seçim yaptığı modele ilişkin algılarını ise deneyimlerine dayandırarak açıklamış ve var olan bilgilerini kullandığını ifade etmiştir. Bir kural ürettiği için çözümünü doğru olarak kabul etmiş ve çözümünün her durumda geçerli olacağını belirtmiştir.

İpek'in örüntü ve varsayım çözümleri kapsamında tespiti yapılan algılarına ilişkin açıklamalarından örnekler Tablo 4.45 de verilmiştir.

Tablo 4. 45. İpek'in M-İ Sürecinde BU 2 Sorusu Örüntü ve Varsayım Çözümüne İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar

Tema	Kod	Örnek Diyalog
Strateji	Farklı Temsil	[...] ***Araştırmacı:*** *Farklı çözümler geliştirilebilir mi?* ***B2-İ2:*** *"a" şıkkı için evet farklı modeller tercih edilebilir. Genel formülleri sabittir zaten bir örüntü var. Genel kuralları da bir tanedir o geliştirilemez, dediğim gibi. Modeller farklı olabilir dikdörtgen kareler değil de farklı şekiller tercih edilebilir.*
	Bilgi	[...] ***Araştırmacı:*** *Farklı modeller arasından neden bunu seçtin?* ***B2-İ3:*** *Daha önce yaptığımız uygulamalardan biraz daha birim kareler üzerinden örüntüler vardı o yüzden aklıma bu geldi. O yüzden bunu daha çok yapabileceğimi düşündüm.*
Çözümün Niteliği	Uygun Olma	[...] ***Araştırmacı:*** *Çözümün sence doğru mu?* ***B2-İ4:*** *Bir model oluşturmam isteniyor, benim bir kuralım var. Bu kurala uygun model geliştirdim. Evet, doğrudur.*

İpek BU 3.1 sorusu kapsamında geliştirdiği deneysel argüman çözümüne ilişkin algılarını, strateji ve çözüm niteliğine dayandırarak açıklamıştır. Deneysel argüman çözümünde, üçgenleri birleştirirken bazı özel üçgen durumlarını incelemediğini ve çözümünün bu noktada eksik olduğunu belirtmiştir. Eksik üçgen birleştirmelerinin eklenmesi ile çözümün geliştirilebileceğini ifade etmiştir. Ancak bu eksiklik durumunun genel bir yargıya ulaşma konusunda bir engel oluşturmadığını belirtmiştir. Üçgenleri birleştirme konusunda yaşanan eksikliğin nedenini; b şıkkı kapsamında çözüm oluştururken farklı üçgenleri birleştirme sonucunda bir dörtgen elde edememesinden kaynaklandığını ifade etmiştir. Ulaşmış olduğu genelleme nedeniyle yapmış olduğu çözümün her durumda geçerli olacağını ifade etmiştir. Çözümünün geçerli olmasını ayrıca, durumları doğrulayarak genellemeye ulaşmasına ve düşündüğünü örneklerle desteklemesine dayandırmıştır.

İpek'in deneysel argüman çözümü kapsamında tespiti yapılan algılarına ilişkin açıklamalarından örnekler Tablo 4.46 da verilmiştir.

Tablo 4. 46. İpek'in M-İ Sürecinde BU 3.1 Sorusu Deneysel Argüman Çözümlerine İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar

Tema	Kod	Örnek Diyalog
Strateji Çözüm Niteliği	Temsilin Güçlendirilmesi Uygun Olma Genellenebilir Olma	[...] ***Araştırmacı:*** *Farklı çözümler geliştirilebilir mi?* ***B3-İ2:*** *Benim eksik kaldığım yönler var, ikizkenar dik üçgeni incelemek gibi.* ***Araştırmacı:*** *Eksik yönlerinin farkına ne zaman vardın?* ***B3-İ3:*** *Şu an da gördüm, mesela ikizkenar dik üçgeni yazmamışım. Mesela ikizkenar dik üçgeni kullanarak bir kare oluştuğunu gösterebilirdim. Evet eksiğim vardı ama bu genelemeye yani bir yargıya varmamı engellemedi. Yani iki üçgenden bir dörtgen oluşturmak için en az bir kenarının ortak olmasına ulaştım ben bunu etkilemedi.*
Strateji Çözümün Niteliği	Bilgi Geçerli Olma Genellenebilir Olma	[...] ***Araştırmacı:*** *Yaptığın çözüm her durumda doğru olacak mı seni her zaman doğruya ulaştıracak mı?* ***B3-İ8:*** *Ulaştığım genelleme her zaman doğruya ulaştıracak.* ***Araştırmacı:*** *Neden böyle düşünüyorsun?* ***B3-İ9:*** *Çünkü durumları doğruladım ve genellemeye ulaştım. Diyorum ya en az bir kenarının ortak olması lazım; bir kenarının ortak olduğu durumlarda hep dörtgen oluşturabildim. En az bir tane de olsa oluşturabildim. Ama hiçbir ortak kenar yokken bir dörtgen oluşturamam. O yüzden düşündüğüm şeyi örneklerle destekledim o yüzden de her zaman doğruya ulaştıracağını düşünüyorum.* ***Araştırmacı:*** *Genellemeye ne zaman ulaştın?* ***B3-İ10:*** *Bunun bir dörtgen oluşturamayacağımı anladığım an da dedim ki iki üçgenden bir dörtgen oluşturabilmek için en az bir ortak kenara ihtiyaç var.*

İpek BU 3.2 sorusu kapsamında geliştirdiği mantıksal argüman çözümüne ilişkin algılarını, strateji ve çözüm niteliğine dayandırarak açıklamıştır. Bu çözümünde görüşme sırasında aklına gelen bir çözüm ile farklı çözüm geliştirebileceğini düşünmüştür. Çözüm sırasın da aklına bu çözümün gelmemesinin nedenini ise genelde aklına ilk çözümü uygulamaya başlamasına dayandırmıştır. Gerekli doğrulamayı yaptığı ve istenilen duruma cevap verdiği için de çözümünü yeterli görmüş, geliştirilebilecek bir yönü olmadığını düşünmüştür.

İpek'in mantıksal argüman çözümü kapsamında tespiti yapılan algılarına ilişkin açıklamalarından örnekler Tablo 4.47 de verilmiştir.

Tablo 4. 47. İpek'in M-İ Sürecinde BU 3.2 Sorusu Mantıksal Argüman Çözümlerine İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar

Tema	Kod	Örnek Diyalog
Strateji	Farklı Temsil Bilgi	[...] ***Araştırmacı:*** *Farklı çözümler geliştirilebilir mi?* ***B3-İ18:*** *Geliştirilebilir, şimdi geldi aklıma bunun için bir yöntem daha var aslında onu yapsam daha şık olabilirdi.* ***Araştırmacı:*** *Sen neden bu çözümü seçtin?* ***B3-İ20:*** *İlk olarak o gelmişti aklıma bu şimdi geldi.* ***Araştırmacı****: O zaman gelmedi mi aklına?* ***B3-İ21:*** *Evet. O zaman aklıma gelmiş olsaydı muhtemelen bunu seçerdim* ***Araştırmacı:*** *Anladım.* ***B3-İ22:*** *Aslında aklıma ilk olarak ne gelirse ben çözümde onu tercih ediyorum.*
Çözümün Niteliği	Geçerli Olma	[...] ***Araştırmacı:*** *Çözümün sence doğru mu?* ***B3-İ24****: Evet.* ***Araştırmacı:*** *Neden böyle düşünüyorsun?* ***B3-İ25:*** *Şimdi aklıma bir çözüm yolu geldi onu da uygulayınca çözümü doğrulamış oldum aslında. O yüzden doğrudur.* .
	Uygun Olma	[...] ***Araştırmacı****: Sence çözümün geliştirilebilir bir yönü var mı?* ***B3-İ26:*** *İstenilen şeye cevap veriyor. Bence yeterlidir, gerek yok geliştirilmesine.*

İpek BU 4.1 sorusu kapsamında geliştirdiği genel örnek ve deneysel argüman çözümlerine ilişkin algılarını genel olarak çözüm niteliğine dayandırarak açıklamıştır. Geliştirmiş olduğu çözümün; alan ve çevre uzunluğu olarak kesin bilgileri kullanması, ürettiği kuralı örnek vererek doğruladığı için doğru olduğunu düşünmektedir. Tek bir üçgen üzerinde alanın çevreye eşit olduğunu göstererek çözümünü geliştirebileceğini ifade etmiştir. Çözüm sürecinde düşündüklerini matematiksel olarak temellendirdiği için de çözümünün her zaman geçerli ve doğru olacağını düşünmüştür.

İpek'in genel örnek ve deneysel argüman çözümleri kapsamında tespiti yapılan algılarına ilişkin açıklamalarından örnekler Tablo 4.48 de verilmiştir.

Tablo 4. 48. İpek'in M-İ Sürecinde BU 4.1 Sorusu Genel Örnek ve Deneysel Argüman Çözümlerine İlişkin Algısından Örnek Diyalog

Tema	Kod	Örnek Diyalog
Çözüm Niteliği	Geçerli Olma	[...] ***Araştırmacı:*** *Çözümün sence doğru mu?* ***B4-İ8****: Düşündüğümü matematiksel olarak temellendirdim o da karşılık buldu, verdiğim örneklerle de destekledim, doğru.*

İpek BU 4.2 sorusu kapsamında geliştirdiği kanıt çözümlerine ilişkin algılarını genel olarak çözüm niteliğine dayandırarak açıklamıştır. Geliştirmiş olduğu çözümün;

düşündüklerini matematiksel olarak temellendirmesi nedeniyle doğru olduğunu düşünmektedir. Çözümünün açıklama eklenerek geliştirilebileceğini ifade etmiştir. Düşünme adımlarını matematiksel temellere dayandırarak açıklaması nedeniyle de çözümünü her zaman doğru ve geçerli olacağını ifade etmiştir.

İpek'in kanıt çözümleri kapsamında tespiti yapılan algılarına ilişkin açıklamalarından örnekler Tablo 4.49 da verilmiştir.

Tablo 4. 49. İpek'in M-İ Sürecinde BU 4.2 Sorusu Kanıt Çözümlerine İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar

Tema	Kod	Örnek Diyalog
Strateji		[...] ***Araştırmacı:*** *Çözümün geliştirilebilir bir yönü var mı?* ***B4-İ28:*** *Yazım konusunda geliştirilebilir. Mesela burada mod3'e göre ne yaptım, bunlar ayrıntılı olarak yazılabilir. Açıkladığım şeyleri yazarak da ifade edebilirim. O açıdan geliştirilebilir.*
Çözümün Niteliği		***Araştırmacı:*** *Yaptığın çözüm her durumda geçerli olacak mı seni her zaman doğruya ulaştıracak mı?* ***B4-İ29:*** *Evet düşünme adımlarımı matematiksel temellere dayandırarak gösterdim, onların da karşılığını gösterdim ve doğru olduğunu gördüm. O yüzden doğruya ulaştıracağını düşünüyorum.*

4.2.3. İpek'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Pedagojik Bileşen Kapsamında Elde Edilen Bulgular

Tablo 4. 50. İpek'in BU 1 Sorusu Örüntü Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları

Matematiksel Bileşen	Psikolojik Bileşen	Matematiksel ve Psikolojik Bileşen Karşılaştırması İle Belirlenen Pedagojik Bileşen Sonuçları	
Çözümün Matematiksel Niteliği	**Çözüme İlişkin Algısı**	**Çözümün Matematiksel Niteliğine İlişkin Algısıyla Karşılaştırma**	**İspat Kavramının Doğası İle İpek'in Kavrama Bakış Açısını Karşılaştırma**
Çözüm Kategorisi: "a" şıkkı: Çözüm yok "b" şıkkı: Makul Örüntü "c" şıkkı: Çözüm yok	**Farklı Çözüm Geliştirmeye İlişkin Algısı:** Çözüm geliştirilebilir	Tüm durumları içerisine alan genel bir kural oluşturamadığı "c" şıkkı için bir çözüm geliştirilebileceğini algılıyor.	*Genelleme *Doğrulama *Matematiksel Gösterim *Verilenlerden Faydalanma *Kural *Hata Olmaması
Çözüm Derecesi: Geliştirilebilir	**Çözüm Doğruluğuna İlişkin Algısı:** **Çözüm Niteliği**: Geçerli Olma & Genellenebilir Olma	Matematiksel nitelik açısından eksiklikler taşıyan çözümünün; genel kural oluşturduğu, düşündüklerini matematiksel olarak ifade ettiği ve sağlamasını yaptığını için doğru olarak algılıyor.	

Çözümün Değerlendirilmesi: Genel olarak uygun bir çözüm oluşturulamamış. Matematiksel nitelik açısından yanlışlar var. Çözümde sözel açıklamalar eksik.	**Çözümün Geliştirilebilirliğine İlişkin Algısı:** **Strateji:** Farklı Temsil **Çözüm Niteliği:** Genellenebilir Olma	Matematiksel nitelik açısından eksiklik taşıyan ve bazı şıkları için çözüm geliştiremediği çözümünün; genel bir kural bulunarak geliştirilebileceğini algılıyor.
	Çözümün Geçerliğine İlişkin Algısı: **Strateji**: Bilgi **Çözüm Niteliği**: Geçerli Olma	Matematiksel nitelik açısından eksik olan çözümünün, ürettiği kuralın doğrulamasını yapması ve hata bulmamasından dolayı geçerli olacağını algılıyor.

İpek'in örüntü çözümüne ilişkin görüşleri pedagojik açıdan incelendiğinde, çözümünün matematiksel yeterlikleri ile çözümüne dayalı algıları arasında kısmi açıdan uyum ve kısmi açıdan uyumsuzluk taşıdığı görülmektedir. "a" şıkkı için deneme yöntemine dayalı bir strateji seçmesi sonucunda çözümünü ilerletmemiş, "b" şıkkı için matematiksel nitelik açısından eksiklikler taşıyan bir kural geliştirmiş v "c" şıkkında tüm durumları içerisine alan genel bir kural oluşturamamıştır. Çözümünde tüm durumları içerisine alan genel bir kural oluşturularak çözümünün geliştirilebileceğini ifade etmiştir. "b" şıkkı için geliştirmiş olduğu çözüm, matematiksel nitelik açısından eksiklik taşımasına rağmen genel kural oluşturduğu, düşündüklerini matematiksel olarak ifade ettiği ve sağlamasını yaptığı için çözümünü doğru olarak algılamıştır. Benzer düşüncelerle çözümünün her zaman doğru ve geçerli olacağını düşünmüştür.

Sonuç olarak, BU 1 kapsamında geliştirmiş olduğu örüntü çözümünü değerlendirirken genelleme ve doğrulama yapma, matematiksel gösterim, hata olmaması, kural ve verilenlerden faydalanmaya dayalı bir yaklaşım içinde olmuştur.

Tablo 4. 51. İpek'in BU 1 Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri

Temalar	Kodlar	Örnek İfadeler
İçerik Bilgisi	**Geçerli İspat Oluşturabilme İspat**	***B1-İ13:*** *[...] genellemeye ulaşmak tüm durumlarda uygulanabildiğini gösterir*
	İspatın Zorlukları İlişkilendirme Eksikliği	***B1-İ18:*** *[...] genellemeye ulaşmak bu soru için zordur.*
Öğretim Bilgisi	**Öğrenmeyi Destekleme**	***B1-İ19:*** *[...] çözüm yolunu öğrendikten sonra kendi öğrenme adımlarım ile öğrencinin anlayabileceği bir öğretim yolu izlerim.*
Öğrenci Bilgisi	**Öğrenci Faaliyetleri**	***B1-İ15:*** *[...] uygulandığı ve uygulanmadığı durumlar arasındaki anlam farkını anlayabilmeli.*
	İşlem Bilgisi	***B1-İ15:*** *[...] önerme bellidir buna aykırı bir durum varsa test eder.*
Müfredat Bilgisi	**Üniversite Seviyesi**	***B1-İ16:*** *[...] bir öğretmen adayı olarak ben bile zorlandım lise ve ortaokul öğrencilerine sormazdım.*

Geliştirmiş olduğu örüntü çözümüne ilişkin sahip olduğu bu yaklaşımların temelindeki pedagojik bilgiler incelendiğindeyse, Tablo 4.51 de ki sonuçlar elde edilmiştir. Bu kapsam da, geliştirdiği çözümün her durumda uygulanabilir olacağını belirtmiş ve bunun nedenini ise genelleme yapabilmiş olmasına dayandırmıştır. Öğrencilerin bu durumu sağlayabilmeleri için uygulandığı durum ile uygulanamadığı durum arasındaki anlam farkını kazanmaları gerektiğini ifade etmiştir. Verilen önermeleri yanlışlayabilecek durumları değerlendirmeleri gerektiğini ifade etmekle beraber öğrencilerin yapabilecekleri fazla bir durum olmadığını ifade etmiştir. Bu türden bir soruyu, bir öğretmen adayı olarak çözüm sürecinde kendisin de zorlandığı için, üniversite seviyesindeki öğrencilere sorulabileceğini ortaokul ve lise öğrencilerinin yapabilecekleri düzeyde olmadığını belirtmiştir. Çözüm sürecinde zorlanılacak noktanın ise genel bir duruma ulaşmak olduğunu ifade etmiştir. Öğrencilerinde bu türden zorlukları görmesi durumunda da kendisinin genel bir duruma ulaşamadığı için ilk olarak bunun nasıl bulunabileceğini öğrenmesine dayandırmıştır. Kendi öğrenme adımlarından yararlanarak öğrencilerinin anlayabileceği bir öğretim yolu izleyeceğini ifade etmiştir.

Tablo 4. 52. İpek'in BU 2 Sorusu Örüntü ve Varsayım Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları

Matematiksel Bileşen	**Psikolojik Bileşen**	**Matematiksel ve Psikolojik Bileşen Karşılaştırma İle Belirlenen Pedagojik Bileşen Sonuçları**	
Çözümün Matematiksel Niteliği	**Çözüme İlişkin Algısı**	**Çözümün Matematiksel Niteliğine İlişkin Algısıyla Karşılaştırma**	**İspat Kavramının Doğası İle İpek'in Kavrama Bakış Açısını Karşılaştırma**
Çözüm Kategorisi: Kesin Örüntü & Varsayım **Çözüm Derecesi:** Beklenen tam çözüm **Çözümün Değerlendirilmesi:** Matematiksel nitelik açısında beklenen düzeyde olan çözümde kullanılan temsillerin açıklanmasında zorluk yaşanmıştır.	**Farklı Çözüm Geliştirmeye İlişkin Algısı:** **Strateji:** Farklı Temsil	Matematiksel nitelik açısından doğru olan çözümünde, farklı model kullanımı ile farklı bir çözüm geliştirilebileceğini algılıyor.	*Genelleme *Kural
	Çözüm Doğruluğuna İlişkin Algısı: **Çözüm Niteliği**: Geçerli Olma	Matematiksel nitelik açısından doğru olan çözümünü, genel kurala uygun bir model geliştirdiğinden dolayı doğru olarak algılıyor.	
	Çözümün Geliştirilebilirliğine İlişkin Algısı: **Çözüm Niteliği:** Uygun Olma	Matematiksel nitelik açısından doğru olan çözümünün istenen duruma cevap verdiğinde dolayı geliştirilebilecek bir yönü olmadığını algılıyor.	
	Çözümün Geçerliğine İlişkin Algısı: **Çözüm Niteliği:** Geçerli Olma & Genellenebilir Olma	Matematiksel nitelik açısından doğru olan çözümünün, geliştirdiği kuraldan dolayı her zaman geçerli olacağını algılıyor.	

İpek'in örüntü çözümüne ilişkin görüşleri pedagojik açıdan incelendiğinde, çözümünün matematiksel yeterlikleri ile çözümüne dayalı algıları arasında genel olarak uyum içinde olduğu görülmektedir. Çözüm sürecinde "n" temsillerine ne anlam yüklediğini açıklamakta zorlanmış ancak algılarına dayalı açıklamaların da bu durumu göz önünde bulundurmamıştır. Matematiksel nitelik açısından doğru olan çözümünü; verilen örüntüye uygun bir kural ve model ile oluşturmasından dolayı her zaman doğru ve geçerli olacağını ifade etmiştir.

Sonuç olarak, BU 2 kapsamında geliştirmiş olduğu örüntü ve varsayım çözümünü değerlendirirken genelleme ve kural oluşturma süreçlerine dayalı bir yaklaşım içinde olmuştur.

Tablo 4. 53. İpek'in BU 2 Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri

Temalar	Kodlar	Örnek İfadeler
İçerik Bilgisi	**Geçerli İspat Oluşturabilme Kural/Formül**	***B2-İ10****:* [...] *genel kural ile tüm durumlarda uygulanır.*
	İspatın Zorlukları İlişkilendirme Eksikliği	***B2-İ17:*** [...] *genel kuralı bulmak.*
Öğretim Bilgisi	**Öğrenmeyi Destekleme**	***B2-İ14:*** [...] *uygun ortam hazırlamalı, kılavuzluk etmeli.*
Öğrenci Bilgisi	**İşlem Bilgisi**	***B2-İ13:*** [...] *yaptığı çözümleri analiz etmeli, test etmeli.*
Müfredat Bilgisi	**Ortaokul Seviyesi**	***B2-İ16:*** [...] *6. Sınıfta ya model veriliyor sayı örüntülerini oluşturmaları isteniyor ya da sayılar verilip model onlardan istenebiliyor. "b" şıkkında ise denklem çözüyoruz o da 7. Sınıfta, genel olarak 7. Sınıfta sorulabilir.*

Geliştirmiş olduğu örüntü ve varsayım çözümüne ilişkin sahip olduğu bu yaklaşımların temelindeki pedagojik bilgiler incelendiğindeyse, Tablo 4.53 de ki sonuçlar elde edilmiştir. Bu kapsam da, geliştirdiği çözümün her durumda uygulanabilir olacağını belirtmiş ve bunun nedenini ise genel bir kural oluşturabilmesine dayandırmıştır. Öğrencilerin bu durumu sağlayabilmeleri için yapmış oldukları çözümleri analiz ederek, yaptıkları işlemlerin istenilen durumları karşılayıp karşılamadıklarını kontrol etmeleri gerektiğini ifade etmiştir. Öğrencilerin yapabilecekleri bu faaliyetlere ilişkin öğretmenlerin uygun ortamlar hazırlayabileceğini, öğrencilerine kılavuz olabileceklerini, öğrencilerinin sorgulaması için onlara fırsat vermeleri gerektiğini ifade etmiştir. Bu türden bir sorunun, örüntünün 6. Sınıfta konu ve uygulama olarak ele alınması ve sorunun b şıkkı kapsamında denklem bilgisinin gerekmesi nedeniyle genel olarak 7. sınıfta yani ortaokul seviyesinde sorulabileceğini belirtmiştir. Çözüm sürecinde genel kuralı bulmada zorlanılacağını ifade etmiştir. Öğrencilerinde bu türden zorlukları görmesi durumunda ise bol bol uygulama yapabileceği bir ortam sağlayabileceğini belirtmiştir. Bunun nedenini ise gerekli kuralların oluşturulabilmesi için var olan ilişkilerin belirlenmesi gerektiğini bunun da ancak çok uygulama ile mümkün olacağını ifade etmiştir.

Tablo 4. 54. İpek'in BU 3.1 Sorusu Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları

<table>
<tr><th>Matematiksel Bileşen</th><th>Psikolojik Bileşen</th><th colspan="2">Matematiksel ve Psikolojik Bileşen Karşılaştırma İle Belirlenen Pedagojik Bileşen Sonuçları</th></tr>
<tr><th>Çözümün Matematiksel Niteliği</th><th>Çözüme İlişkin Algısı</th><th>Çözümün Matematiksel Niteliğine İlişkin Algısıyla Karşılaştırma</th><th>İspat Kavramının Doğası İle İpek’in Kavrama Bakış Açısını Karşılaştırma</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Çözüm Kategorisi: Deneysel Argüman

Çözüm Derecesi: Yeterli Çözüm

Çözümün Değerlendirilmesi: Bazı özel üçgen durumları incelenmemiş ve bazı kenarlar boyunca birleştirme yapılmamış.</td><td>Farklı Çözüm Geliştirmeye İlişkin Algısı:

Strateji: Temsilin Güçlendirilmesi</td><td>Bazı özel üçgen durumlarını incelemediği çözümünün, eksik üçgen birleştirmeleri eklenerek farklı çözüm geliştirilebileceğini algılıyor.</td><td rowspan="4">*Genelleme
*Doğrulama</td></tr>
<tr><td>Çözüm Doğruluğuna İlişkin Algısı:

Çözüm Niteliği: Genellenebilir Olma</td><td>Bazı özel üçgen durumlarını incelemediği çözümünün, genel ifadeye ulaştığı için doğru olduğunu algılıyor.</td></tr>
<tr><td>Çözümün Geliştirilebilirliğine İlişkin Algısı:

Strateji: Temsilin Güçlendirilmesi</td><td>Bazı özel üçgen durumlarını incelemediği çözümünün, eksik üçgen birleştirmeleri eklenerek geliştirilebileceğini algılıyor.</td></tr>
<tr><td>Çözümün Geçerliğine İlişkin Algısı:

Strateji: Bilgi
Çözüm Niteliği: Genellenebilir Olma</td><td>Bazı özel üçgen durumlarının incelenmediği çözümünün, genelleme ve doğrulama yapması nedeniyle geçerli olarak algılıyor.</td></tr>
</table>

İpek’in deneysel argüman çözümüne ilişkin görüşleri pedagojik açıdan incelendiğinde, çözümünün matematiksel yeterlikleri ile çözümüne dayalı algıları arasında genel olarak uyum içinde olduğu görülmektedir. Çözüm sürecinde üçgen birleştirmesi yaparken bazı üçgen durumlarını göz önünde bulundurmamış ve bazı kenarlar boyunca birleştirme yapmamıştır. Çözümlerine ilişkin algılarını ifade ederken bu durumun farkına varmış ve eksik üçgen birleştirmeleri eklenerek farklı çözümler oluşturabileceğini ifade etmiştir. Çözümünün, genel ifadeye ulaştığı ve doğrulama yaptığı için her zaman doğru ve geçerli olacağını belirtmiştir.

Sonuç olarak, BU 3.1 kapsamında geliştirmiş olduğu deneysel argüman çözümünü değerlendirirken, genelleme ve doğrulamaya dayalı bir yaklaşım içinde olmuştur.

Tablo 4. 55. İpek'in BU 3.1 Sorunun Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri

Temalar	Kodlar	Örnek İfadeler
İçerik Bilgisi	**Geçerli İspat Oluşturabilme İspat**	***B3-İ7:*** […] *ulaştığım genelleme her zaman doğruya ulaştıracak.*
	İspatın Zorlukları İlişkilendirme Eksikliği	***B3-İ15:*** […] *var olan durumların hepsini düşünmek. Bende ikizkenar dik üçgeni atlamıştım çözümde. Bir öğrenci dörtgenin özelliklerini bilmiyorsa bu bir dörtgendir, demeyecek mesela. Bu bir zorluk mudur, bilemezsin zorluktur.*
	İspatın Zorlukları Bilgi Eksikliği	
Öğretim Bilgisi	**Öğrenmeyi Destekleme**	***B3-İ14:*** […] *düşünmeyi alışkanlık haline getirmek lazım. Bu soru için önemli olan tamamen görmek, ihtimalleri değerlendirmek bence. Öğrenciye bunun ortamı sağlanmalıdır.*
	Sorgulama	***B3-İ11:*** *Analiz etme becerisi geliştirilir.*
Öğrenci Bilgisi	**Öğrenci Faaliyetleri**	***B3-İ13:*** […] *çözümünü sorgulamayı alışkanlık haline getirebilmeli.*
Müfredat Bilgisi	**Lise Seviyesi**	***B3-İ12:*** […] *birçok olasılığı düşünmek, lise seviyesi.*

Deneysel argüman çözümüne ilişkin sahip olduğu bu yaklaşımların temelindeki pedagojik bilgiler incelendiğindeyse, Tablo 4.55 de ki sonuçlar elde edilmiştir. Bu kapsam da, geliştirdiği çözümün her durumda uygulanabilir olacağını belirtmiş ve bunun nedenini ise genellemeye ulaşmasına dayandırmıştır. Bu durumun sağlanabilmesi için çözümlerin analiz edilmesi gerektiğini ifade etmiştir. Yapmış olduğu çözüm kapsamında, her durumda uygulanabilir bir sonuç elde etmek için öğretmen ve öğrenciye düşen bir takım faaliyetlerden bahsetmiştir. Öğretmenlerin; öğrencilerin analiz etme becerilerini geliştirilerek; yaptığı çözümleri sorgulamalarını ve bu çözümün istenen durumu karşılayıp karşılamadığını belirleme konusunda öğrencileri teşvik edilebileceklerini ifade etmiştir. Öğrencinin de bu durumu alışkanlık haline getirmesi gerektiğini belirtmiştir. Bu türden bir sorunun, birçok olasılığı düşünmeyi gerektirmesinden dolayı lise seviyesinde sorulabileceğini ifade etmiştir. Var olan üçgen durumlarının tamamını düşünmenin çözüm sürecinde karşılaşılacak bir zorluk olduğunu ifade etmiştir. Öğrencilerinde bu türden zorlukları görmesi durumundaysa, düşünmeyi alışkanlık haline getirecek uygun ortamlar hazırlayabileceğini ifade etmiştir.

Tablo 4. 56. İpek'in BU 3.2 Sorusu Mantıksal Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları

<table>
<tr><th>Matematiksel Bileşen</th><th>Psikolojik Bileşen</th><th colspan="2">Matematiksel ve Psikolojik Bileşen Karşılaştırma İle Belirlenen Pedagojik Bileşen Sonuçları</th></tr>
<tr><th>Çözümün Matematiksel Niteliği</th><th>Çözüme İlişkin Algısı</th><th>Çözümün Matematiksel Niteliğine İlişkin Algısıyla Karşılaştırma</th><th>İspat Kavramının Doğası İle İpek’in Kavrama Bakış Açısını Karşılaştırma</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Çözüm Kategorisi: Mantıksal Argüman

Çözüm Derecesi: Beklenen Çözüm

Çözümün Değerlendirilmesi: Beklenen Çözüm</td><td>Farklı Çözüm Geliştirmeye İlişkin Algısı:

Strateji: Farklı Temsil</td><td>Matematiksel nitelik anlamında eksikli taşımayan çözümünün, farklı bir yöntemin uygulanması ile farklı çözüm geliştirilebileceğin algılıyor.</td><td rowspan="4">*İstenileni Gösterme

* Kesin Bilgileri Kullanma</td></tr>
<tr><td>Çözüm Doğruluğuna İlişkin Algısı:

Çözüm Niteliği: Geçerli Olma</td><td>Matematiksel nitelik anlamında eksiklik taşımayan çözümünün, kesin bilgileri kullandığı için doğru olduğunu algılıyor.</td></tr>
<tr><td>Çözümün Geliştirilebilirliğine İlişkin Algısı:

Çözüm Niteliği: Geçerli Olma & Uygun Olma</td><td rowspan="2">Matematiksel nitelik anlamında eksikli taşımayan çözümünde, istenilen durumları sağladığı için geliştirilecek bir yönü olmadığını ve çözümlerini doğruladığı için de her zaman geçerli olacağını algılıyor.</td></tr>
<tr><td>Çözümün Geçerliğine İlişkin Algısı:

Çözüm Niteliği: Geçerli Olma & Uygun Olma</td></tr>
</table>

İpek’in mantıksal argüman çözümüne ilişkin görüşleri pedagojik açıdan incelendiğinde, çözümünün matematiksel yeterlikleri ile çözümüne dayalı algıları arasında genel olarak uyum içinde olduğu görülmektedir. Matematiksel nitelik açısında doğru olan çözümünün, farklı bir yöntem kullanarak da çözülebileceğini ancak istenilen durumları sağladığı, çözüme ulaşırken her aşamayı gösterdiği ve çözümlerini doğruladığı için çözümünün her zaman doğru olacağını düşünmektedir.

Sonuç olarak, BU 3.2 kapsamında geliştirmiş olduğu mantıksal argüman çözümünü değerlendirirken, istenileni gösterme ve kesin bilgileri kullanmaya dayalı bir yaklaşım içinde olmuştur.

Tablo 4. 57. İpek'in BU 3.2 Sorunun Mantıksal Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri

Temalar	Kodlar	Örnek İfadeler
İçerik Bilgisi	Geçerli İspat Oluşturabilme İspat	***B3-İ27:*** [...] *kesin bilgiler kulandım.*
	İspatın Zorlukları Bilgi Eksikliği	***B3-İ31:*** [...] *hangi yöntemin seçileceği konusunda zorluk yaşanabilir. Birde asal sayı olma şartına hakim olması lazım.*
	İspatın Zorlukları Stratejide Zorluk Yaşama	
	Açıklık	***B3-İ29:*** [...] *öğretmen direkt söylemek yerine aşamalarını açık ve net bir şekilde yazması lazım.*
Öğretim Bilgisi	Öğrenmeyi Destekleme	***B3-30:*** [...] *öğretmenin öğrencisini yönlendirecek çalışmalar yapması lazım.*
Öğrenci Bilgisi	Öğrenci Faaliyetleri	***B3-İ29:*** [...] *yaptıklarını gözden geçirmesi ve alıştırma yapması lazım.*
Müfredat Bilgisi	Üniversite Seviyesi	***B3-İ31:*** [...] *üniversite derim çünkü ben bunu Elemanter Sayı Kuramı dersinde gördüm.*

Mantıksal argüman çözümüne ilişkin sahip olduğu bu yaklaşımların temelindeki pedagojik bilgiler incelendiğindeyse, Tablo 4.57 de ki sonuçlar elde edilmiştir. Bu kapsam da, geliştirdiği çözümün her durumda uygulanabilir olacağını belirtmiş ve bunun nedenini ise kesin bilgileri kullanmasına dayandırmıştır. Bu durumun sağlanabilmesi için çözümlerin analiz edilmesi gerektiğini ifade etmiştir. Yapmış olduğu çözüm kapsamında, her durumda uygulanabilir bir sonuç elde etmek için öğretmen ve öğrenciye düşen bir takım faaliyetlerden bahsetmiştir. Öğretmenlerin; öğrencileri yönlendirecek çalışmaları yapmaları gerektiğini, daha önceden bu türden sorularla karşılaşmamış öğrencilerden böyle bir çözüm beklemenin yanlış olacağını ifade etmiştir. Öğretmelerin bu durumu göz önüne alarak, bilgileri direkt söylemek yerine tüm aşamaları açık bir şekilde gösterebilmeleri gerektiğini belirtmiştir. Öğrencilerinde, kullanmış oldukları bilgileri ve yapmış oldukları çözümün her aşamasını analiz ederek, öğrendiği durumlarla ilgili alıştırma yapmaları gerektiğini ifade etmiştir. Bu türden bir soruyu, soruda kullandığı bilgileri üniversitede öğrendiği için üniversite seviyesinde sorulabileceğini ifade etmiştir. Çözüm sürecinde zorlanacak noktaların ise bu türden bir soru da hangi stratejiyi uygulamak konusunda yaşanabileceğini ve asal sayı bilgisine yeteri kadar hakim olunmazsa bununda bir zorluk oluşturabileceğini belirtmiştir. Öğrencilerinde bu türden zorlukları görmesi durumunda eğer bilgi eksiklikleri varsa bunu tamamlamaya yönelik çalışmalar yapabileceğini, gerekli düşünme adımlarını sağlama konusunda sıkıntıları varsa düşünebilecekleri örnekler sunabileceğini ifade etmiştir.

Tablo 4. 58. İpek'in BU 4.1 Sorusu Genel Örnek ve Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları

<table>
<tr><th>Matematiksel Bileşen</th><th>Psikolojik Bileşen</th><th colspan="2">Matematiksel ve Psikolojik Bileşen Karşılaştırma İle Belirlenen Pedagojik Bileşen Sonuçları</th></tr>
<tr><th>Çözümün Matematiksel Niteliği</th><th>Çözüme İlişkin Algısı</th><th>Çözümün Matematiksel Niteliğine İlişkin Algısıyla Karşılaştırma</th><th>İspat Kavramının Doğası İle İpek'in Kavrama Bakış Açısını Karşılaştırma</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Çözüm Kategorisi: Genel Örnek & Deneysel Argüman

Çözüm Derecesi: Beklenen Tam Çözüm

Çözümün Değerlendirilmesi: Beklenen Çözüm</td><td>Farklı Çözüm Geliştirmeye İlişkin Algısı:

Çözüm Niteliği: Geçerli Olma & Uygun Olma & Genellenebilir Olma</td><td rowspan="3">Matematiksel nitelik anlamında eksiklik taşımayan çözümünde, kesin bilgileri kullanarak genel bir ifadeye ulaşması ve istenilen durumu gösterebilmesi nedeniyle her zaman doğru ve geçerli olacağını, çözümünde geliştirilebilecek bir yön olmadığını algılıyor.</td><td rowspan="3">*Kesin Bilgileri Kullanma
*Doğrulama</td></tr>
<tr><td>Çözüm Doğruluğuna İlişkin Algısı:

Çözüm Niteliği: Geçerli Olma & Uygun Olma & Genellenebilir Olma</td></tr>
<tr><td>Çözümün Geliştirilebilirliğine İlişkin Algısı:

Çözüm Niteliği: Geçerli Olma & Uygun Olma & Genellenebilir Olma

Çözümün Geçerliğine İlişkin Algısı:

Çözüm Niteliği: Geçerli Olma & Uygun Olma & Genellenebilir Olma</td></tr>
</table>

İpek'in kanıt çözümüne ilişkin görüşleri pedagojik açıdan incelendiğinde, çözümünün matematiksel yeterlikleri ile çözümüne dayalı algıları arasında genel olarak uyum içinde olduğu görülmektedir. Matematiksel nitelik açısında doğru olan çözümünün, düşüncelerini matematiksel olarak temellendirdiği ve bunları örneklerle desteklediği, alan ve çevre uzunluklarına dayalı kesin bilgileri kullandığı için çözümünün her zaman doğru olacağını düşünmektedir.

Sonuç olarak, BU 4.2 kapsamında geliştirmiş olduğu kanıt çözümünü değerlendirirken, kesin bilgilerin kullanımına ve doğrulamaya dayalı bir yaklaşım içinde olmuştur.

Tablo 4. 59. İpek'in BU 4.2. Sorusu Kanıt Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları

Matematiksel Bileşen	**Psikolojik Bileşen**	**Matematiksel ve Psikolojik Bileşen Karşılaştırma İle Belirlenen Pedagojik Bileşen Sonuçları**	
Çözümün Matematiksel Niteliği	**Çözüme İlişkin Algısı**	**Çözümün Matematiksel Niteliğine İlişkin Algısıyla Karşılaştırma**	**İspat Kavramının Doğası İle İpek'in Kavrama Bakış Açısını Karşılaştırma**
Çözüm Kategorisi: Kanıt	**Farklı Çözüm Geliştirmeye İlişkin Algısı:** **Strateji:** Temsilin Güçlendirilmesi	Matematiksel nitelik anlamında eksikli taşımayan çözümünün, yazımın daha açık yapılarak farklı çözüm geliştirilebileceğini algılıyor.	*İstenileni Gösterme * Kesin Bilgileri Kullanma
Çözüm Derecesi: Beklenen Tam Çözüm	**Çözüm Doğruluğuna İlişkin Algısı:** **Çözüm Niteliği**: Geçerli Olma	Matematiksel nitelik anlamında eksiklik taşımayan çözümünün, kesin bilgileri kullandığı için doğru olduğunu algılıyor.	
Çözümün Değerlendirilmesi: Beklenen Çözüm	**Çözümün Geliştirilebilirliğine İlişkin Algısı:** **Strateji:** Temsilin Güçlendirilmesi	Matematiksel nitelik anlamında eksikli taşımayan çözümünün, yazımın daha açık yapılarak farklı çözüm geliştirilebileceğini algılıyor.	
	Çözümün Geçerliğine İlişkin Algısı: **Çözüm Niteliği:** Uygun Olma	Matematiksel nitelik anlamında eksikli taşımayan çözümünün, ulaştığı sonuçları doğruladığı için de her zaman geçerli olacağını algılıyor.	

İpek'in kanıt ilişkin görüşleri pedagojik açıdan incelendiğinde, çözümünün matematiksel yeterlikleri ile çözümüne dayalı algıları arasında genel olarak uyum içinde olduğu görülmektedir. Matematiksel nitelik açısından doğru olan çözümünün, işlem adımlarının daha net yazılarak çözüme açıklık kazandırılabileceğini düşünüyor. Çözüm yaparken kullandığı modüler aritmetik ve 6 ile bölünebilme kurallarının kesin bilgiler olması ve ulaştığı sonuçların doğrulamasını yaptığı için çözümünün her zaman doğru ve geçerli olacağını ifade etmiştir.

Sonuç olarak, BU 4.2 kapsamında geliştirmiş olduğu kanıt çözümünü değerlendirirken, istenileni gösterme ve kesin bilgilerin kullanımına dayalı bir yaklaşım içinde olmuştur.

Sonuç olarak, İpek'in M-İ sürecine dayalı çözümlerinde, ispatın doğasına ilişkin bakış açısının genel olarak "genelleme" bakış açısına dayalı olduğu tespit edilmiştir. Çözümlerini, içeriğe dayalı pedagojik bilgileri kapsamında en çok "ispat" ile

ilişkilendirilmiştir. Çözüm sürecinde zorluk yaşanacak noktaların ise çoğunlukla "ilişkilendirme eksikliği" olmasından kaynaklanabileceğini belirtmiştir. M-İ sürecinde bir öğretmenlerin çoğunlukla "öğrenmeyi destekleme" faaliyetlerini yürütebileceklerini ifade etmiştir. M-İ sürecinde "öğrenci faaliyetleri "ne dayalı açıklamalarıyla öğrencilere düşen görevlerden bahsetmiştir. Araştırma kapsamında sorulan soruların ise çoğunlukla "üniversite" seviyesinde sorulabileceğini belirtmiştir.

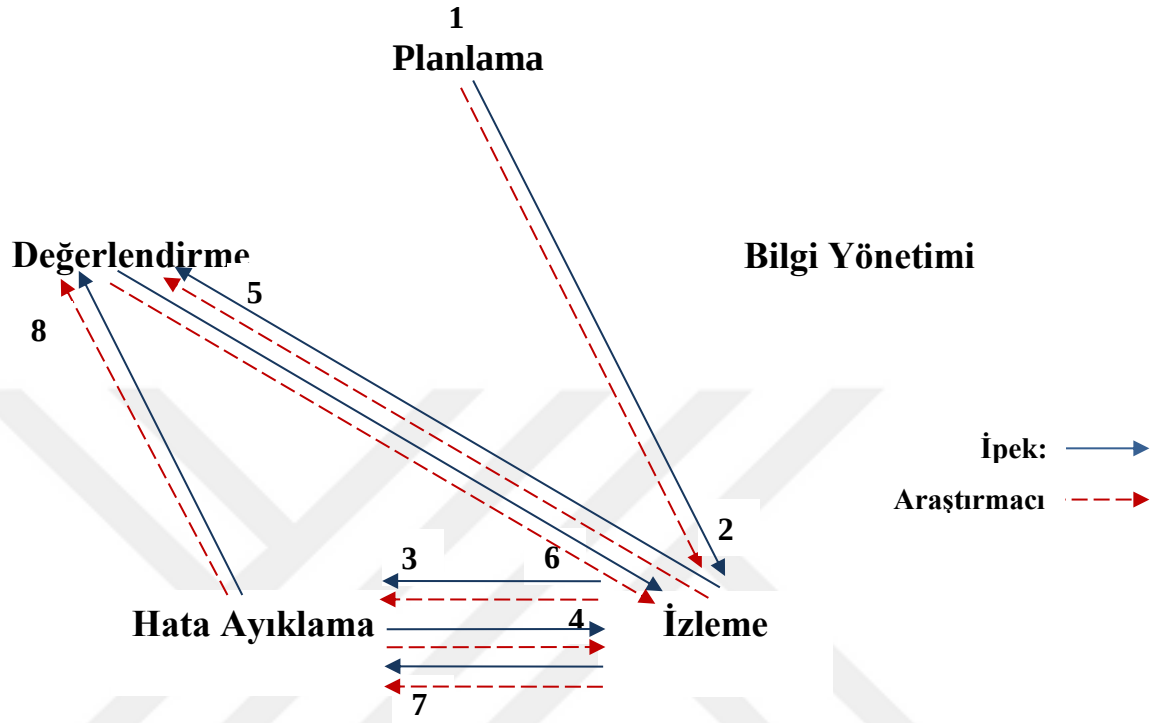
Tablo 4. 60. İpek'in M-İ Sürecine Yönelik Pedagojik Bilgileri ve Dağılımları

	İspatın Doğasına İlişkin Bakış Açısı		**İçerik Bilgisi**	**Öğretim Bilgisi**	**Öğrenci Bilgisi**	**Müfredat Bilgisi**
M-İ Sürecine İlişkin Pedagojik Bilgileri	Genelleme **(13)** Doğrulama **(9)** Kesin Bilgileri Kullanma **(7)** İstenileni Gösterme **(5)**	**Geçerli İspat Oluşturabilme**	İspat **(6)** Formül/Kural **(2)**	Öğrenmeyi Destekleme **(15)** Açıklık **(1)**	Öğrenci Faaliyetleri **(5)** İşlem Bilgisi **(2)**	Üniversite Seviyesi **(4)** Lise Seviyesi **(1)** Ortaokul Seviyesi **(1)**
	Matematiksel Gösterim **(1)** Kural **(1)** Hata Olmaması **(1)** Verilenlerden Faydalanma **(1)**	**İspatın Zorlukları**	İlişkilendirme Eksikliği **(6)** Bilgi Eksikliği **(5)**			

4.2.4. İpek'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Üstbiliş Kapsamında Elde Edilen Bulgular

M-İ odaklı görev sorularının çözümü sırasında İpek'in sergilediği üstbilişsel düzenleme süreci Şekil 4.19. da ki gibi gerçekleşmiştir. İpek'in muhakeme ve ispat yapma sürecindeki üstbilişsel düzenleme süreçlerinde, en fazla izleme ve hata ayıklama en az ise

planlama sürecine ilişkin davranışlar sergilediği tespit edilmiştir. Bilgi yönetimi kategorisine uygun davranışlar ise sergilememiştir.



Şekil 4. 19. İpek'in Muhakeme ve İspat Yapma Sürecinde Sergilediği Üstbilişsel Düzenleme Süreç Akışı

İpek'in muhakeme ve ispat yapma süreçlerinde sergilediği üstbilişsel düzenleme süreçlerin nasıl ortaya çıktığını gösteren bilgiler Şekil 4.20 de verilmiştir.

İpek'in Seçim Yaptığı Davranış Kart Sıralaması			BU 1 Örüntü	BU 2 Örüntü ve Varsayım	BU 3.1 Deneysel Argüman	BU 3.2 Mantıksal Argüman	BU 4.1 Genel Örnek ve Denevsel Argüman	BU 4.2 Kanıt
1.Kart	**P**	Soruyu iyi anladım ve benden istenilenleri tam olarak belirledim.	İ A	İ A	İ A	İ A	İ A	İ A
2.Kart	**İ**	Soruyu çözerken kullandığım stratejiyi zaman zaman gözden geçirdim.	İ A	İ A	İ A		İ A	
3.Kart	**HA**	Çözüm aşamasında duraksadım ve hatam olup olmadığına odaklandım.	İ A		İ A	İ A		İ A
4.Kart	**İ**	Dikkatsizlik kaynaklı bir hatam olup olmadığını inceledim.	İ A	İ A	İ A			
5.Kart	**D**	Sorunun çözümünde ortaya çıkan bilgileri gözden geçirdim.	İ A	İ A	İ A	İ A	İ A	İ A
6.Kart	**İ**	Çözümü yapamıyorum diye düşündüğüm zamanlar oldu.	İ A		İ A	İ A	İ A	İ A
7.Kart	**HA**	Zorlandığım yerde çözüm stratejimi değiştirmeyi düşündüm.	İ A	İ A			İ A	
8.Kart	**D**	Çözümümün doğru olup olmadığını kontrol ettim	İ A	İ A	İ A	İ A		İ A

İ: İpek davranışı gösterdiğini düşünüyor - **A:** Araştırmacı davranışın olduğunu gözlemliyor

Şekil 4. 20. İpek'in Muhakeme ve İspat Yapma Sürecinde Sergilediği Üstbilişsel Düzenleme Süreçleri

Tablo 4. 61. İpek'in BU 1 Sorusu Örüntü Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci

Seçim Yapılan Kartlar	Üstbilişsel Düzenleme Sürecine İlişkin Açıklama	İpek'in Sesli Düşünmeleri ve Araştırmacı Gözlemleri
1.Kart: Soruyu iyi anladım ve benden istenilenleri tam olarak belirledim.	***İpek:*** *Sorunun "a" şıkkında 65 sayısının nerde olduğunu istiyor benden, örüntüden faydalanarak bunu bulacağımı anladım. "b" sorusunda örüntüde olan sayıları devam ettirerek bir çözüme ulaşmamın zor olacağını düşündüm bu yüzden genel kural bulma ihtiyacı hissettim. Soruyu anlamış olsam da "c" şıkkı için bir çözüm üretemedim.*	***İpek:*** [*Soruyu okuyor*] *ilk olarak 65 sayısının nerde olacağını, sayıları ilerleterek bulacağım.*
2.Kart: Soruyu çözerken kullandığım stratejiyi zaman zaman gözden geçirdim.	***İpek:*** *Bu soruda genel bir formül elde etmem gerektiğinin farkına vardım ama bir çözüme ulaşmadım. Ulaşmadığım içinde birçok kez çözümlerimi gözden geçirme ihtiyacı hissettim. "Farklı bir yol olabilir mi, ne olabilir, nasıl olabilir?" sorularını kendime çok sordum ama ulaşamadım.*	***İpek:*** *"c" şıkkı için bir genel kural bulmam lazım ama verilenler arasında ilişki kurmaya çalışıyorum, tekrar tekrar bakıyorum olmuyor. Bir çözüm üretemiyorum.*
3.Kart: Çözüm aşamasında duraksadım ve hatam olup olmadığına odaklandım.	***İpek:*** *Bu soruda çok fazla duraksadığım için çok fazla yaşadım bunu. Bir şeye ulaşamadığım için yaptığım şeyi çok fazla sorgulama ihtiyacı hissettim. En çok bu soruda bunu yaşadım.*	***İpek:*** *Genel kuralı nasıl bulacağım* [*uzun süre düşündü*].
4.Kart: Dikkatsizlik kaynaklı bir hatam olup olmadığını inceledim.	***İpek:*** *Bunu en çok bu soruda yaptım. Çünkü çözüm yapamıyorum, durup sürekli yaptıklarım da bir hata var mı diye düşünüyorum ama pek de bir şey yapmadım zaten. O yüzden dikkatsizlikten kaynaklı mı çözüm geliştirememem diye çok düşündüm. Dikkatimden kaçan bir yer var mı yok mu diye çok düşündüm.*	**Araştırmacı:** Çözüm geliştiremediği çözümünde yaptıklarını sıklıkla gözden geçirdi, hatası var mı aradı ve bir çözüm bulmaya çalıştı.
5.Kart: Sorunun çözümünde ortaya çıkan bilgileri gözden geçirdim.	***İpek:*** *Genel bir formüle ulaştım, bu formülün soruda uygulanıp uygulanmayacağını inceledim.*	***İpek:*** *Bana satır ve sütun verilirse bunlarla ilgili genel bir şey bulmam lazım. Devam ettirerek bulamam, tek ve çift satırlar için örüntü kuralı buldum.*
6. Kart: Çözümü yapamıyorum diye düşündüğüm zamanlar oldu.	***İpek:*** *Sadece bu soruda düşündüm bunu çünkü bu soruda bir çözüm yapamadım. Birinci uygulamada sorunun birçok yerinde çözümü yapmadığımı düşündüm "c" şıkkına gelince. Genel formül bulamadım o yüzden çözümü yapamıyorum diye düşündüğüm zamanlar oldu. Şimdi bile düşünüyorum ☺.*	***İpek:*** *Genel kuralı "c" şıkkı için bulamıyorum, çözümüm tamamlanmıyor.*
7.Kart: Zorlandığım yerde çözüm stratejimi değiştirmeyi düşündüm.	***İpek:*** *Farklı sayılar arasında ilişkilendirme yaprak birinci soruda çok sık yaşadığım bir şey oldu bu durum. O yüzden farklı şekilde ilişkilendirmeye başladım. Satır ve sütunu tek bir harf ile niteleyebilecek şekilde genel bir çözüm olup olmadığını düşündüm. Bu düşündüğüm yol ile olmuyor diye sık sık düşündüm. Belki yanlış yerden baktığım için göremedim. O yüzden ulaşmadım. Stratejimi değiştirmeye çalıştım, çalışsam da bir sonuç elde edemedim. Bu yüzden galiba strateji seçimimde de uygun bir şey bulamadım.*	***İpek:*** *"a" şıkkında sayarak ilerleyip cevabı buluyorum ama bu "b" şıkkı için zor oluyor. Genel bir şey yazmam lazım sanırım.*
8.Kart: Çözümümün doğru olup olmadığını kontrol ettim	***İpek:*** *Ulaştığım sonuç ile verilen bilgilerin örtüşüp örtüşmediğine baktım. Mesela bu soruda satırı ve sütunu bilinen sayılarla ilgili bir genellemeye ulaştım. Bunu var olanlarla kontrol ettim; "Var mı yok mu, doğru mu değil mi?". Zaten "c" şıkkı içinde bulamadım.*	***İpek:*** *Tek ve çift satırlar için bulduğum örüntü kuralından; satır çift olduğu için çift örüntü kuralından 142 buldum.*

Örüntü sorusunun çözümüne ilişkin seçim yaptığı kartlardan tamamını uyguladığını ifade etmiştir. Bu süreçleri araştırmacı tarafından da, sesli düşünmeleri ve çözüm süreçleri ile gözlemlenmiştir.

Tablo 4. 62. İpek'in BU 2 Sorusu Örüntü ve Varsayım Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci

Seçim Yapılan Kartlar	Üstbilişsel Düzenleme Sürecine İlişkin Açıklama	İpek'in Sesli Düşünmeleri ve Araştırmacı Gözlemleri
1.Kart: Soruyu iyi anladım ve benden istenilenleri tam olarak belirledim.	***İpek:*** *"Ne vermiş?" ve "Ne istemiş?" bunu düşündüm. Sayı örüntüsü vermiş ve şekil örüntüsü istemiş. Bu sebeple bu şekilde bir çözüm yaptım.*	***İpek:*** *Bana iki tane sayı örüntüsü vermiş, bunları şekil örüntüsüne dönüştürmem isteniyor.*
2.Kart: Soruyu çözerken kullandığım stratejiyi zaman zaman gözden geçirdim.	***İpek:*** *İlk olarak farklı şekiller düşündüğüm oldu kareden mi yapsam şeklinde. İlk önce 3'e 4'lük bir kare aldım o şekilde çözümün ilerlemeyeceğini fark ettim. Orda gözden geçirme ihtiyacı hissettim, farklı yöntemler geliştirdim.*	***İpek:*** *Karelerle geliştirdiğim modeli aslında noktalarla da ifade edebilirim.*
3.Kart: Çözüm aşamasında duraksadım ve hatam olup olmadığına odaklandım.	***İpek:*** *Pek yapmadım yani çözüm aşamasında yaptıklarımı zaman zaman kontrol etmedim. Yani şurada mesela bunun 2, 2+4, 2+4+6'nın şuna eşit olup olmadığını kontrol ettim ve eşit olmadığını gördüm.*	**Araştırmacı:** Çözüm sürecinde zorluk yaşamadan örüntü ve kural geliştirmeye çalıştı, hatasının olduğuna veya olmadığına odaklanmadı.
4.Kart: Dikkatsizlik kaynaklı bir hatam olup olmadığını inceledim.	***İpek:*** *Örüntüyü devam ettirirken ve bir model geliştirirken çözümlerimi sorguladım.*	***İpek:*** *"Şekil örüntüsü a" 4'lük artışlarla gitmiş modelimde de boyalı kareler ve noktalar böyle mi gidiyor, evet.*
5.Kart: Sorunun çözümünde ortaya çıkan bilgileri gözden geçirdim.	***İpek:*** *İstenilen durumla oluşturduğum model uyuşuyor mu onu gözden geçirdim.*	
6. Kart: Çözümü yapamıyorum diye düşündüğüm zamanlar oldu.	***İpek:*** *Bunda böyle bir şeyi aslında fazla yapmadım. Olmadı böyle bir şey.*	**Araştırmacı**: Soruyu istenilenler doğrultusunda çözdüğünü düşündüğü için bu durum gözlemlenmedi.
7.Kart: Zorlandığım yerde çözüm stratejimi değiştirmeyi düşündüm.	***İpek:*** *3'e 3'lük bir kare durumundan 4'e 4'lük bir kare durumuna geçtim, burada istediğim şey olmadı zorlandım. O yüzden izlediğim yolu değiştirmem gerektiğini, farklı şekiller kullanmam gerektiğini düşündüm.*	***İpek:*** *3'e 3'lük karelerle verilenlere uygun bir model geliştiremiyorum, modelin ilerleyen adımlarına boyayacağım kareler bana sıkıntı çıkarıyor. Başka çizim yapayım.*
8.Kart: Çözümümün doğru olup olmadığını kontrol ettim	***İpek:*** *"Oluşturduğum şekil örüntüsü bana verilen sayı örüntüsünü karşılıyor mu?" bunu kontrol ettim.*	***İpek:*** *Oluşturduğum iki modelde şekil örüntüsünde verilen durumları sağlıyor.*

Örüntü ve varsayım sorusunun çözümüne ilişkin seçim yaptığı kartlardan çoğunu uyguladığını; ancak seçim yaptığı 3. ve 6. kartları çözüm sürecinde uygulamadığını ifade etmiştir. Bu süreçleri araştırmacı tarafından da, sesli düşünmeleri ve çözüm süreçleri ile gözlemlenmiştir.

Tablo 4. 63. İpek'in BU 3.1. Sorusu Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci

Seçim Yapılan Kartlar	Üstbilişsel Düzenleme Sürecine İlişkin Açıklama	İpek'in Sesli Düşünmeleri ve Araştırmacı Gözlemleri
1.Kart: Soruyu iyi anladım ve benden istenilenleri tam olarak belirledim.	***İpek:*** *Eş ve eş olmayan dörtgenler alarak kaç farklı dörtgen oluşturabileceğimi sormuş. O yüzden aklıma gelen üçgen durumlarını denedim. Zaten bu sorusunun görüşmeler sırasında değerlendirmesini yaparken eksik kaldığım yönleri belirtmiştim. Ona yönelik bir çözüm yaptım.*	***İpek:*** *Eş ve eş olmayan üçgenler seçerek birleştirmeler yapmam lazım.*
2.Kart: Soruyu çözerken kullandığım stratejiyi zaman zaman gözden geçirdim.	***İpek:*** *Farklı üçgen çeşitlerini düşündüm, strateji açısından. Ama değiştirmeye yönelik bir şey yapmadım.*	***İpek:*** *Özel üçgenlerin hepsi için denesem; ikizkenar, eşkenar ve çeşitkenar ile.*
3.Kart: Çözüm aşamasında duraksadım ve hatam olup olmadığına odaklandım.	***İpek:*** *Burada genel bir yargıya ulaştım. "Acaba bütün durumları gözden geçirdim mi?" diye sordum kendime. Hatadan ziyade "Gözden kaçırdığım bir şey var mı?" diye düşündüm.*	***İpek:*** *"İki üçgenden bir dörtgen oluşturmak için en az bir kenar ortak olmalı." bilgisini yaptıklarımda gözden geçireyim, hatam olmuş mu bakayım.*
4.Kart: Dikkatsizlik kaynaklı bir hatam olup olmadığını inceledim.	***İpek:*** *Bu soruda "düşünemediğim, dikkat edemediğim yönler var mıdır", diye düşündüm. Çözüm esnasında bazen hata yapabiliyorum.*	**Araştırmacı:** Belirlediği üçgenler ile birleştirmeler yaptı, hatasının olup olmadığını incelemeye çalıştı.
5.Kart: Sorunun çözümünde ortaya çıkan bilgileri gözden geçirdim.	***İpek:*** *Dörtgen oluştururken edindiğim bilgileri inceledim.*	***İpek:*** *İki üçgenden bir dörtgen oluşturmak için en az bir kenar ortak olmalı.*
6.Kart: Çözümü yapamıyorum diye düşündüğüm zamanlar oldu.	***İpek:*** *Ortak kenar üzerinden birleştirme yaparken şunların paralellik yani şunların nasıl olacağını falan kestiremedim. Kestiremediğimden dolayı stratejiyi gözden geçirdim gibisinden bir şey düşündüm ama yine de değiştiremedim aynen bıraktım.*	***İpek:*** *Eş olmayan üçgenleri nasıl birleştirsem acaba, paralelkenar oluşacak şekilde mi yapsam ya da başka bir yol mu bulsam?*
7.Kart: Zorlandığım yerde çözüm stratejimi değiştirmeyi düşündüm.	***İpek:*** *Bunda düşünmedim değiştirmeyi. Zaten aklıma ilk gelen şeyin doğru olduğunu düşündükten sonra bir daha değiştirme ihtiyacı hissetmedim.*	**Araştırmacı**: Çözüm sürecine başladığı andan çözümü sonlandırdığı ana kadar aynı yaklaşımla soruyu çözdü.
8.Kart: Çözümümün doğru olup olmadığını kontrol ettim.	***İpek:*** *"Ulaştığım genellemeyi bozan bir durum var mı?" bunu kontrol ettim. "Dörtgen oluşması için en az bir kenarının ortak olması gerekir." Genellemesine ulaştım bu soruda. Yaptığım çözümlerde bu duruma aykırı bir şey var mı, bunu kontrol ettim.*	**Araştırmacı:** "İki üçgenden bir dörtgen oluşturmak için en az bir kenar ortak olmalı." bu bilgi durumunu tüm birleştirmelerde dikkate alıp almadığını kontrol ediyor.

Deneysel argüman çözümüne ilişkin seçim yaptığı kartlardan çoğunu uyguladığını ancak seçim yaptığı 7. kartı çözüm sürecinde uygulamadığını ifade etmiştir. Bu süreçleri araştırmacı tarafından da, sesli düşünmeleri ve çözüm süreçleri ile gözlemlenmiştir.

Tablo 4. 64. İpek'in BU 3.2 Sorusu Mantıksal Argüman Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci

Seçim Yapılan Kartlar	Üstbilişsel Düzenleme Sürecine İlişkin Açıklama	İpek'in Sesli Düşünmeleri ve Araştırmacı Gözlemleri
1.Kart: Soruyu iyi anladım ve benden istenilenleri tam olarak belirledim.	***İpek:*** *Bu soru zaten oldukça açık, farklı anlamalara neden olabilecek bir soru değil. 500'den küçük asal sayıları bulacağım. O yüzden bunu da anlamlandırdım. Bu zaten anlaşılması gayet açık olan bir soru. Anlama kısmında zorlanmadım.*	***İpek:*** *500'den küçük en büyük asal sayıyı bulacağım, bildiğim bir formül var onu deneyeyim.*
2.Kart: Soruyu çözerken kullandığım stratejiyi zaman zaman gözden geçirdim.	***İpek:*** *Bunda da stratejiyi değiştirmeye yönelik çok fazla bir şey yapmadım.*	**Araştırmacı:** Asal sayılarla ilgili formül bilgisini çözüm süreci boyunca kullanarak uyguladı. Çözümü sonlandırdığında birkaç sayıyı kullandığı kuralda uygulayarak denemeler yaptı.
3.Kart: Çözüm aşamasında duraksadım ve hatam olup olmadığına odaklandım.	***İpek:*** *Kural ile bir sonuca ulaştım ama bildiğim birkaç sayı ile formülü tekrar denedim. Bu şekilde çözümde bir hatam olup olmadığını kontrol ettim.*	
4.Kart: Dikkatsizlik kaynaklı bir hatam olup olmadığını inceledim.	***İpek:*** *Bu soruda bir hatam olup olmadığını çok incelemedim.*	***Araştırmacı:*** *Bildiği kuralı soru üzerinde uyguladığı için hata incelemesi yapmadı.*
5.Kart: Sorunun çözümünde ortaya çıkan bilgileri gözden geçirdim.	***İpek:*** *Geliştirdiğim çözümde 499'un asal olduğu çıktı ortaya. Ortaya çıkan bu bilgiyi gözden geçirdim.*	***İpek:*** *499 asal oldu; kendinden küçük birkaç asala bölersem asal olmadığına bakabilirim.*
6. Kart: Çözümü yapamıyorum diye düşündüğüm zamanlar oldu.	***İpek:*** *Bu zaten en başta şey olarak başladım asal sayılarla başladım tek tek bölüp bölmediğine bakarak başladım. Bir süre sonra artık o stratejinin işe yaramayacağını anladım.*	***İpek:*** *500'den küçük her sayı için asal olup olmadığını denerim. Mesela önce 499'a bakarım çift sayılara bakmam çünkü bir tane çift asal sayı var. Ama her sayı için denemem zor olur, bildiğim kural var uygulayayım.*
7.Kart: Zorlandığım yerde çözüm stratejimi değiştirmeyi düşündüm.	***İpek:*** *Bunda düşünmedim değiştirmeyi. Zaten aklıma ilk gelen şeyin doğru olduğunu düşündükten sonra bir daha değiştirme ihtiyacı hissetmedim.*	**Araştırmacı:** Asal olmayı kural üzerinden inceledi, çözüm süreci boyunca kuralı uygulamaya çalıştı, stratejisini değiştirmedi. Sonradan birkaç sayı ile elde ettiği durumu denedi.
8.Kart: Çözümümün doğru olup olmadığını kontrol ettim.	***İpek:*** *Burada da 499'un asal olup olmadığını bildiğim asal sayılara bölerek denedim. Doğru olup olmadığını kontrol etim. Çözümümle doğru bir şeye ulaştım ama yine de kontrol etme ihtiyacı hissettim.*	

Deneysel argüman çözümüne ilişkin seçim yaptığı kartlardan çoğunu uyguladığını ancak seçim yaptığı 2., 4. ve 7. kartları çözüm sürecinde uygulamadığını ifade etmiştir. Bu süreçleri araştırmacı tarafından da, sesli düşünmeleri ve çözüm süreçleri ile gözlemlenmiştir.

Tablo 4. 65. İpek'in BU 4.1 Sorusu Genel Örnek ve Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci

Seçim Yapılan Kartlar	Üstbilişsel Düzenleme Sürecine İlişkin Açıklama	İpek'in Sesli Düşünmeleri ve Araştırmacı Gözlemleri
1.Kart: Soruyu iyi anladım ve benden istenilenleri tam olarak belirledim.	***İpek:*** *Bu soruda acaba iki tane mi dikdörtgen alacağım yoksa bir tane mi dikdörtgen alacağım, bunun kargaşasına ilk başta düştüm. Sonra birçok kez soruyu okudum ve cümleden çıkardığım anlama göre soruyu çözdüm.*	***İpek:*** *Bir dörtgen üzerinden mi bu durumu göstereceğim iki dörtgen üzerinden mi, karar veremiyorum.*
2.Kart: Soruyu çözerken kullandığım stratejiyi zaman zaman gözden geçirdim.	***İpek:*** *Bu çözümde her zaman tamsayıları kullanmaya dayalı bir çözüm yaparken tamsayı olmayan bir çözüm için ne yapılabileceğini gösterme ihtiyacı hissettim. O yüzden doğru olup olmadığını göstermeye yönelik bir strateji ihtiyacı hissettim.*	***İpek:*** *Dikdörtgenin kenar uzunluğu "4" olarak aldığımda bulduğum genelleme sağlanıyor. Kenarlardan birini "7" birini "2,8" alsam sonuç ne olur, inceleyeyim.*
3.Kart: Çözüm aşamasında duraksadım ve hatam olup olmadığına odaklandım.	***İpek:*** *Burada hatam olup olmadığına çok bakmadım.*	**Araştırmacı:** Hatası olup olmadığına odaklandığı gözlemlenmedi.
4.Kart: Dikkatsizlik kaynaklı bir hatam olup olmadığını inceledim.	***İpek:*** *Bu soruda bir hatam olup olmadığını çok incelemedim.*	
5.Kart: Sorunun çözümünde ortaya çıkan bilgileri gözden geçirdim.	***İpek:*** *Çözümde bulduğum eşitlikten yola çıkaracak var olan durumları gösterdim. Elde ettiğim bu bilgiyi gözden geçirmek için de bir örnek vererek doğruluğunu inceledim.*	***İpek***: $\left(\frac{2a}{a-2}\right)$ *eşitliğini kenar uzunluğu "4" olan bir dikdörtgen için deneyeyim.*
6.Kart: Çözümü yapamıyorum diye düşündüğüm zamanlar oldu.	***İpek:*** *Burada da ortak özellikten gitmeye çalıştım. Buradan çok değişken geleceğini mesela şuradan çok değişken geleceğini biliyorum. O stratejiyi gözden geçirerek kullanmamaya çalıştım.*	***İpek:*** *Bana"... üçgenler vardır." demiş. Var olduğunu birkaç durum üzerinden göstermem yeterli olur. Tüm durumları içine alan çözüm yapmama gerek yok.*
7.Kart: Zorlandığım yerde çözüm stratejimi değiştirmeyi düşündüm.	***İpek:*** *Bunda düşünmedim değiştirmeyi. Zaten aklıma ilk gelen şeyin doğru olduğunu düşündükten sonra bir daha değiştirme ihtiyacı hissetmedim.*	**Araştırmacı**: Önermeyi anladığı şekliyle bir çözüm geliştirdi ve çözüm süreci bunu boyunca uyguladı. Ulaştığı kuralı birkaç durum üzerinden denedi.
8.Kart: Çözümümün doğru olup olmadığını kontrol ettim.	***İpek:*** *Birer örnek vererek ulaştığım yerleri gösterdim. Zaten çözümümü de örnek vererek yaptığım için çokta örnek vererek kontrol etme ihtiyacı hissetmedim.*	

Genel örnek çözümüne ilişkin seçim yaptığı kartlardan çoğunu uyguladığını ancak seçim yaptığı 3., 4. ve 7. kartları çözüm sürecinde uygulamadığını ifade etmiştir. Bu süreçleri araştırmacı tarafından da, sesli düşünmeleri ve çözüm süreçleri ile gözlemlenmiştir.

Tablo 4. 66. İpek'in BU 4.2 Sorusunun Kanıt Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci

Seçim Yapılan Kartlar	Üstbilişsel Düzenleme Sürecine İlişkin Açıklama	İpek'in Sesli Düşünmeleri ve Araştırmacı Gözlemleri
1.Kart: Soruyu iyi anladım ve benden istenilenleri tam olarak belirledim.	***İpek:*** *Bu soruda oldukça açık bir soru. Bu ifadenin 6 ile bölünüp bölünmediğini soruyor. Bunda farklı anlaşılabilecek bir durum yoktu, direkt 6 ile bölünüp bölünmediğini inceledim.*	***İpek:*** *Önermenin 6 ile bölünme durumunu inceleyeceğim.*
2.Kart: Soruyu çözerken kullandığım stratejiyi zaman zaman gözden geçirdim.	***İpek:*** *Burada çok fazla kontrol etme ihtiyacı hissetmedim. Var olan duruma hemen ulaştığım için. Tedirgin olduğum noktalarda kullandığım bir stratejiydi, istediğim gibi işler yolunda gitmediğinde kullandığım stratejiydi. Bu soruda bunu yaşamadım.*	**Araştırmacı:** Önermenin 2 ve 3 ile bölünme durumunu inceleyerek 6 ile bölünebilirliğini çözüm süreci boyunca inceledi, çözümü gözden geçirmedi.
3.Kart: Çözüm aşamasında duraksadım ve hatam olup olmadığına odaklandım.	***İpek:*** *Burada da hata yapmamak için önceden önlem almıştım, birkaç sayı ile denedikten sonra çözümü yapmaya başlamıştım.*	***İpek:*** *Önerme doğru mu, değer vererek önce deneyeyim sonra işleme geçeyim.*
4.Kart: Dikkatsizlik kaynaklı bir hatam olup olmadığını inceledim.	***İpek:*** *Bu soruda bir hatam olup olmadığını çok incelemedim çünkü zihinden düşündüğüm ile yazdığım aynı şeye denk geldiği için gerek duymadım.*	**Araştırmacı:** Çözümü duraksamadan yapmaya çalıştı. Bu karta ilişkin bir eylem gözlenmedi.
5.Kart: Sorunun çözümünde ortaya çıkan bilgileri gözden geçirdim.	***İpek:*** *Ulaştığım sonucu gözden geçirdim. Bu sonuç ne anlama geliyor onu düşündüm.*	***İpek:*** *Ulaştığım sonucu matematiksel olarak temellendirdim, karşılığını yazdım ve doğru olduğunu böylece göstermiş oldum.*
6.Kart: Çözümü yapamıyorum diye düşündüğüm zamanlar oldu.	***İpek:*** *Burada nasıl diyeyim bunu gözden geçirdim derken, duraksamadım ama aklımda hep vardı acaba bir sonuca ulaşabilecek miyim diye, bunu kullanmasam mı gibisinden. Aklımda hep bu vardı doğru sonuca ulaşınca onu artık hiç düşünmedim.*	**Araştırmacı:** Çözüm stratejisini duraksamadan uyguladı, işlemlerinde bilinmeyenlere dayalı işlemleri yapması çözüme ulaşamayacak olma kaygısını yaşadı. Bir sonuca varınca çözümünden emin şekilde açıklamalar da bulundu.
7.Kart: Zorlandığım yerde çözüm stratejimi değiştirmeyi düşündüm.	***İpek:*** *Bunda düşünmedim değiştirmeyi. Zaten aklıma ilk gelen şeyin doğru olduğunu düşündükten sonra bir daha değiştirme ihtiyacı hissetmedim.*	**Araştırmacı:** Çözüm süreci boyunca aynı stratejiyi uyguladı.
8.Kart: Çözümümün doğru olup olmadığını kontrol ettim.	***İpek:*** *Ulaştığım sonuçtan sonra var olan durumların 2 ve 3 ile bölünüp bölünmediğini kontrol ettim.*	***İpek:*** *Mod2 ve mod3'e göre bulduğum bu eşitlikleri önermede kontrol edeyim.*

Genel örnek çözümüne ilişkin seçim yaptığı kartlardan çoğunu uyguladığını ancak seçim yaptığı 2., 4. ve 7. kartları çözüm sürecinde uygulamadığını ifade etmiştir. Bu süreçleri araştırmacı tarafından da, sesli düşünmeleri ve çözüm süreçleri ile gözlemlenmiştir.

Tablo 4.67 de yer alan açıklamalarda görüldüğü üzere; İpek'in seçim yapmadığı kartlara ilişkin açıklamalarının tamamı araştırmacı tarafından da gözlemlenmiştir.

Tablo 4. 67. İpek'in Seçim Yapmadığı Kartlara İlişkin Açıklamaları

Seçim Yapmadığı Kartlar	Bu Kartları Seçmeme Nedenleri
Çözümü en iyi şekilde yapmak için zaman planlaması yaptım.	***İpek:*** *Yapmadım. Yani nasıl yaparım, diye hiç düşünmedim bunu. Aklıma gelen ilk çözümü ne kadar süreceği hakkında hiç düşünmeden devam ettirdim.*
Kullandığım stratejinin etkililiğini kontrol ettim.	***İpek:*** *Etmedim yani bu strateji etkili mi değil mi diye. Aklıma ilk gelen çözümü direkt uyguladım, o yüzden bunu da yapmadım.*
Çözüm aşamasında yaptıklarımı zaman zaman kontrol ettim.	***İpek:*** *Sadece tıkandığım zamanlarda hatam olup olmadığına baktım, ona da daha uygun kartları seçtim. Çözümüm doğru gidince, "Acaba hata yaptım mı?" diye hiç sormadım kendime. Eğer zihnimde yazdığım şeyle düşündüğüm şey aynı yönde gidiyorsa buna bakmadım. Tıkandığım yerde de hatam olup olmadığına baktım.* ***Araştırmacı:*** *Hımm bu bahsettiğin duruma uygun seçtiğin kart hangisi, gösterir misin?* ***İpek:*** *Duraksadım ve hatam olup olmadığına odaklandım.*
Çözüm aşamasında bir bilgi elde ettiğimde onu anlamlandırmaya çalıştım.	***İpek:*** *Kendi çözümlerimde bunu yaptığımı düşünmüyorum.*
Çözüm aşamasında hangi bilgilerin benim için gerekli ve önemli olduğunu belirledim.	***İpek:*** *Belirlemedim. Aklıma bir çözüm geldi onu devam ettirdim. Hangi bilgi gerekli ve önemli bunun için bir ayrım yapmadım. Çözüme ulaşıyorsam zaten o bilgiye sahip olduğumu düşündüğümden dolayı mı acaba, bilmiyorum öyle bir kriter belirlemedim.*
Soruyu nasıl daha kolay çözerim diye düşündüm.	***İpek:*** *Çözüme ulaştıysam düşünmedim. Çözüme ulaşamadıysam farklı bir yol var mıdır diye düşündüm yine daha kolay nasıl çözerim diye düşünmedim.*
Bu soru daha farklı nasıl sorulabilir diye düşündüm.	***İpek:*** *Var olan sorunun çözümüne odaklandım, düşünmedim.*

Sonuç olarak, İpek'in seçmiş olduğu davranış kartlara uygun süreçleri sergilediği ve bu süreçlerin araştırmacı tarafından gözlemlendiği görülmüştür. İpek'in muhakeme ve ispat yapma sürecinde sergilediği üstbilişsel düzenleme süreçleri Tablo 4.68'e göre değerlendirildiğindeyse, en fazla "izleme ve hata ayıklama" kategorisine uygun süreçleri sergilediği tespit edilmiştir. "Bilgi yönetimi" kategorisine uygun süreçleri ise sergilememiştir.

Tablo 4. 68. İpek'in Muhakeme ve İspat Yapma Sürecinde Sergilediği Üstbilişsel Düzenleme Süreç Kategorileri ve Sıklıkları

	Planlama	Bilgi Yönetimi	İzleme	Hata Ayıklama	Değerlendirme
M-İ Sürecindeki Üstbilişsel Düzenleme Süreçleri	Soruyu Analiz Etme **(4)**		Çözümde Hata **(7)** Stratejiyi Gözden Geçirme **(4)** Stratejiyi Değişikliğine İhtiyaç Duyma **(2)** Strateji Analizi **(2)**	Stratejiyi Değiştirme **(9)** Hata Tespiti **(3)** Hatayı Düzeltme **(2)** Çözümden Vazgeçme **(1)**	Sonucu Değerlendirme **(10)**
Toplam	**4**	**0**	**15**	**15**	**10**

İpek'in üstbilişsel düzenleme süreçlerinin muhakeme ve ispat yapma sürecinde ne şekilde gerçekleştiğine ilişkin uygulamalarından örnek ifadeler ise Tablo 4.69 da verilmiştir.

Tablo 4. 69. İpek'in Üstbilişsel Düzenleme Sürecine İlişkin Örnek İfadeler

Temalar	Kodlar	Örnek İfadeler
Planlama	***Soruyu Analiz Etme**	İ***pek***: [...] *istenileni tam olarak anlayıp anlamadığımı sorguladım.*
		İpek: *Birkaç defa bunu yaptım, dediğim farklı anlamlar çıkar mı farklı anlamlar nasıl sonuçlar doğurur, nasıl bir çözüm yapmam gerekir* [...] *sonra ne istediğine tam karar verip belirledim.*
İzleme	***Stratejiyi Gözden Geçirme** ***Strateji Analizi**	***İpek:*** [...] *"Acaba bunun için uygun mu? Doğru mu yapıyorum?" gibi sorularla stratejimi sorguluyorum.* *Çözüme ulaşabilmek için beli çok yanlış bir şey tercih etmişimdir ki bu beni amacımdan saptırır o yüzden stratejimi gözden geçirme ihtiyacı hissediyorum* [...] *çünkü istenilen dışında bir şey yaparsam çözüme ulaşamam.*
	***Strateji Değişikliğine İhtiyaç Duyma**	*Soruyu çözemediğimde farklı yollar düşünüyorum* [...].
Hata Ayıklama	***Hata Tespiti**	***İpek:*** *Bazen çözüm bir anda tıkanıyor yada öngördüğüm şeyden farklı bir şey çıkabiliyor. Çözüm yaparken bir sonraki aşamayı önceden zihnimizde canlandırırız, hissederiz bir beklentimiz olur* [...]. *Bu yüzden farklı bir şey geliştiğinde hatam var mı diye kontrol etme ihtiyacı hissediyorum.*
	***Stratejiyi Değiştirme**	***İpek:*** *Uygun değil demek ki çünkü her strateji her soruyu çözmeye uygun değil düşüncesine sahibim ben. Bu sebepten dolayı da demek ki yanlış bir yol tercih ettim. Farklı bir yol bulabilir miyim bunu da uygulamada çok yaşadım ama farklı bir yolda bulamadım.*

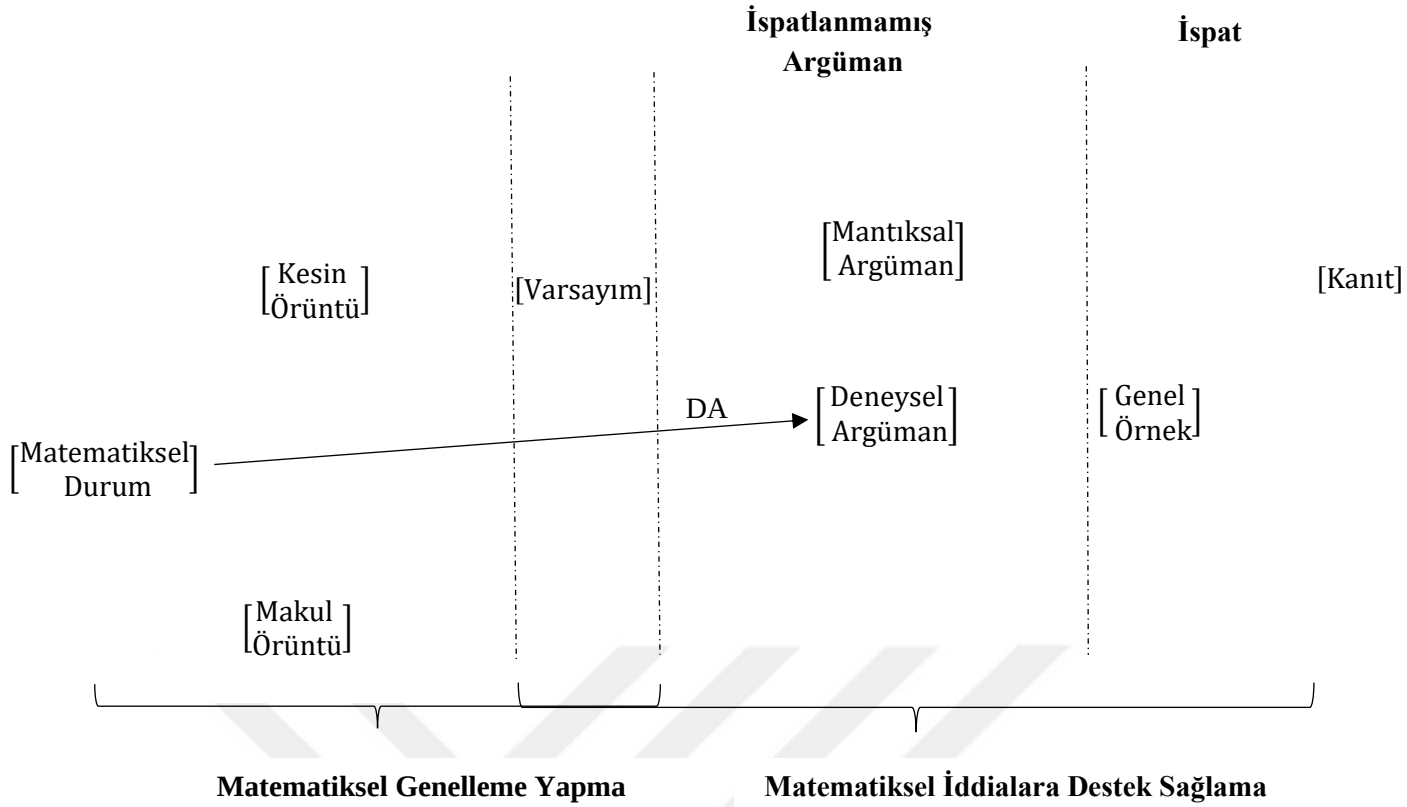
Değerlendirme	**Sonucu Değerlendirme**	***İpek:*** *Yani "Her ortaya çıkan şey doğru mu değil mi ya da beni nereye götürüyor? Ya da ulaşmak istediğim yere gidiyor mu? Bir şeyler çıkıyor ortaya ama benden istenilenleri ya da istenilen şeye ulaşmak için bir aşama mı? Yoksa çok gereksiz bir şey mi? Beni çözüme ulaştırır mı?", Bu sebepten ortaya çıkan bilgileri gözden geçirim.*
		İpek: *Mesela genel bir ifade arıyorsam bunu elimde var olan verilerle örtüşüp örtüşmediğine baktım* [...] *Aslında örneklerle sağlayarak doğru olup olmadığını yani bulduğum sonuca ulaştığım sonuca elimdeki verilerle denemeler yaptım.*

4.3. Deniz'in M-İ Bileşenleri ve Üstbiliş Kapsamında Elde Edilen Bulguları

Deniz'in, M-İ odaklı görev sorularına ilişkin çözümlerini yaparken muhakeme ve ispat yapma sürecinin nasıl ortaya çıktığı ve verdiği cevapların M-İ Analitik Çerçevesindeki kategorilerden hangileri ile uyuştuğuna yönelik elde edilen bulgular "Matematiksel Bileşen" başlığı altında verilmiştir. Bu başlık altında ayrıca M-İ odaklı görev sorularını çözerken zorladığı noktalar ortaya konulmuştur. M-İ odaklı görev sorularının çözümlerine ilişkin algıları "Psikolojik Bileşen" başlığı altında verilmiştir. Çözümlerinin matematiksel niteliği ile çözümlerine ilişkin algılarının karşılaştırılarak, ispat kavramının doğasına ilişkin bakış açısı "Pedagojik Bileşen" başlığı altında verilmiştir. Pedagojik bileşen bulguları kapsamında ayrıca, ispat kavramının doğasını daha açık duruma getirebilmesi amacıyla; içerik, öğrenci, öğretim ve müfredat bilgisi hakkındaki bilgileri açıklanmıştır. Tüm bu süreçleri gerçekleştirirken sergilediği üstbilişsel düzenleme süreçleri ise "Üstbilişsel Düzenleme Süreci" başlığı altında verilmiştir.

4.3.1. Deniz'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Matematiksel Bileşen Kapsamında Elde Edilen Bulgular

Deniz'in M-İ odaklı görev sorularındaki çözümleri incelediğinde, Muhakeme ve İspat Yapma Sürecine İlişkin Matematiksel Bileşen Çerçevesindeki kategorilerden sadece deneysel argüman kategorisine uygun çözümler geliştirdiği tespit edilmiştir. Diğer kategorilere ve iki soruya uygun çözüm sunamamıştır. İki çözümü sınıflandırılamamış çözüm kategorisinde değerlendirilmiştir. Deniz'in Muhakeme ve İspat Yapmaya İlişkin Süreç Akışı ise Şekil 4.21. de özetlenmiştir.



Şekil 4. 21. Deniz'in Muhakeme ve İspat Yapmaya İlişkin Süreç Akışı

Deniz'in M-İ odaklı görev sorularına ilişkin çözümleri genel olarak Tablo 4.70'e göre değerlendirildiğinde ispat yapma sürecinde zorluk yaşadığı söylenebilir. Geliştirdiği çözümler ise çoğunlukla "1" puan ile derecelendirilmiş ve çözümlerinin beklenen tam çözüm olarak kabul edilmelerini sağlayan matematiksel yeterlikler açısında eksiklikler taşıdığı belirlenmiştir. Muhakeme ve İspat Yapma Sürecine İlişkin Matematiksel Bileşen Çerçevesindeki kategorilere göre ise çözümleri, en çok çözüm yok ve sınıflandırılamamış çözüm kategorisinde değerlendirilmiştir. Bunun nedeninin ise çözümlerinin matematiksel bilgi anlamında ciddi eksiklikler taşıması, deneme ve yanılma yöntemlerinin sıklıkla kullanılması ve ispat yeterliklerine sahip çözümler geliştirmemesinden kaynaklandığı gözlemlenmiştir. Ayrıca birinci bireysel uygulamanın üçüncü sorusuna ilişkin deneysel argüman kategorisinde değerlendirilen çözümü kategorisinde değerlendirilen çözümü bakış açısı nedeniyle başarılı bulunmuş ancak matematiksel nitelik anlamında taşıdığı eksikler nedeniyle "1" puan ile derecelendirilmiştir.

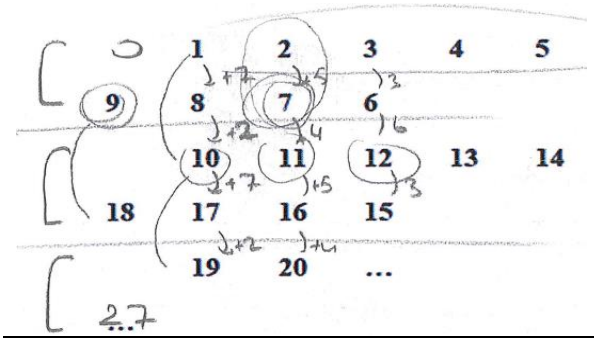
Tablo 4. 70. Deniz'in M-İ Odaklı Görev Çözümlerinin Derecesi

		BU 1			BU 2		BU 3.1				BU 3.2	BU 4.1		BU 4.2
		a	b	c	a	b	1.Soru		2.Soru			a	b	
							a	b	a	b				
Çözüm Yok											0	0	0	0
Sınıflandırılamamış Çözüm		0	0	0	0	0								
Örüntü	**Makul Örüntü**													
	Kesin Örüntü													
Varsayım														
Deneysel Argüman							1	1	1	1				
Mantıksal Argüman														
Genel Örnek														
Kanıt														

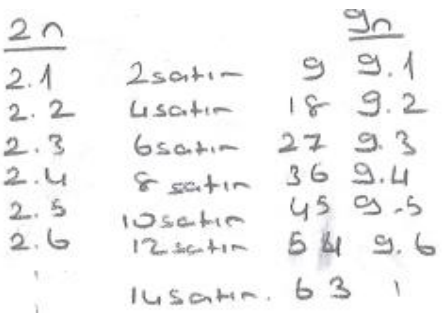
Çözüm Derecesi: Geliştirilebilir Çözüm (1) Yeterli Çözüm (2) Beklenen Tam Çözüm (3)

Deniz'in birinci bireysel uygulama kapsamında M-İ odaklı görev sorusuna verdiği cevabın kategorisi, veri kümesine uyan genel bir matematiksel ilişki bulamadığı için örüntü olarak kabul edilmemiş ve sınıflandırılmamış çözüm kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu soru kapsamında ilk olarak, sayılar üzerinde sayarak denemeler yapmıştır.

Sayılar Üzerindeki Denemeleri:



Geliştirdiği Çözüm:



Geliştirdiği Çözüme İlişkin Açıklaması:

Deniz: *Burada* [*birinci sütunu gösteriyor*] *9'un tam katları var. Evet, burada* [*ikinci sütunu gösteriyor*] *kalanı 1 olanlar, burada* [üçüncü *sütunu gösteriyor*] *2 olanlar var, 3 olan 4 olan 5 olan şeklinde devam ediyor gibi geldi bana* [*söylediklerini şekil üzerinde konrol etti*]. [...]. *65, 2 kalanının verdiği için şurada* [üçücü *sütunu gösteriyor*] *bir yerde olacak diye düşünüyorum. 65'in şu an nerede olduğunu tahmin edebiliyorum, 3. sütunda soru üzerinde uğraştı. Şimdi satırına bakacağım 65'in onu tahmin etmeye çalışıyorum. Mesela 9'un bir katı ikinci satırda yer almış. 18, 9'un iki katı dördüncü satırda yer almış. Bu şekilde devam ettiğinde 63; 7, 14 ama bu şekilde devam eder mi* [*biraz düşündü*]. *14. satırda 65.*

Çözüm Sürecinde Araştırmacı İle Arasında Geçen Bir Diyalog:

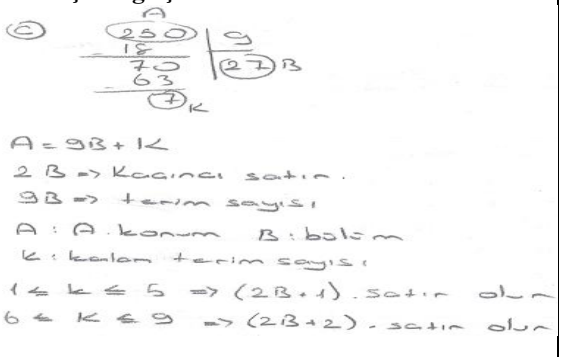
Araştırmacı: *Sana 8000 veya 10 000 gibi büyük sayılar verseydim nasıl bir çözüm yapacaktın?*
Deniz: *Mesela 8000'i önce 9'a böleceğim, tam kısmını alacağım ve daha sonra bulduğum "n" ile şuradaki satır sayısını çarpacağım. Ve bulduğum kalanı yine geri sayma işlemi yaparak, nasıl olsa en fazla 5 tane sayabileceğim o şekilde yaptıktan sonra kaçıncı satır ve kaçıncı sütun olduğunu söyleyebileceğim.*

Şekil 4. 22. Deniz'in BU 1 Sorusuna İlişkin Çözümü

Sorunun ilk seçeneği kapsamında yaptığı çözümlerde deneme yolundan sayarak gitmeyi daha çok tercih etmiştir. İlk olarak sayılar arasındaki artışlardan yararlanarak genel bir durum elde etmeye çalışmıştır. Bu durum, çözümü için mümkün olmayınca satır ve sütunlarda bulunan sayıların konumlarına dayalı tahminleri ile soruyu çözmeye çalışmıştır. Böylece sütunlarda bulunan sayıyı bulmak için 9 ile bölümden faydalanmıştır. Verilen sayınının 9 ile bölümünden kalana göre hangi sütunda yer alacağını bulmuştur. Satırlarda bulunan sayıları bulmak için de sayının 9 ile bölüm değerinden faydalanmıştır. Bölümde bulduğu değeri satırları ikişerli olarak grupladığı için 2 ile çarparak, satırların konumunu bulmuştur.

Geliştirdiği bu çözüm matematiksel nitelik anlamında eksiklikler taşımaktadır. Bunlardan biri; sayıların konumunu tahminleri ve denemeleri üzerinden bulmaya çalışması ve tüm durumları içerisine alan genel bir kural geliştirememesidir. Bir diğeri ise sayının 9 ile tam bölünebilmesi durumunda, kalanın "0" ya da "9" olmasına açıklık getirmemesidir. Kalanın "0" alması durumunda tek satırlarda bulunan ifadeler için birinci sütunda herhangi bir sayı bulunmamasına dayalı bir açıklama çözümünde görülmemektedir.

Geliştirdiği Çözüm:



Geliştirdiği Çözüme İlişkin Açıklamaları:

Deniz: *Dedim ki A benden istenen. Konum yani şunlar* [*sayıların yerlerini gösteriyor*]*, k kalan terim sayısı yani bundan sonra kalan terim sayısı, bundan sonra ilerleyeceğim terim sayısı* [*nasıl isimlendireceği konusunda düşünüyor*] *."k" 1 ile 5 arasındaysa (2b+1). terim diyoruz, satırda olabilir satır diyoruz. 6 ile 9 arasındaysa (2b+2). satır olarak düşünüyorum. B dediklerimde bölüm.*

Şekil 4. 23. Deniz'in BU 1-c Sorusuna İlişkin Çözümü

Sorunun c şıkkı kapsamında ise genel olarak verilen bir sayıyı bulmak için 9 ile bölüm ve kalan ilişkisinden bir kural geliştirip soruyu çözmeye çalışmıştır. Bu kapsamda kalanı temsil eden "k"; 1 ve 5 arasında ise (2b+1), 6 ile 9 arasında ise (2b+2). satırlarda olması üzerine bir kural geliştirmiştir.

Geliştirmiş olduğu çözüm matematiksel nitelik anlamında eksiklikler taşımaktadır. Genel olarak verilen bir sayının nerede olduğunun bulunması üzerine geliştirmiş olduğu çözümünde; verilen sayının sütun konumuna ilişkin bir açıklama bulunmamaktadır. Satır sayılarına ilişkin olarak yaptığı çözüm ise genel bir eşitlik olup, sayıların konumlarının nasıl bulunacağına dair net açıklamadan yoksundur.

Tablo 4. 71. Deniz'in BU 1 Sorusu Çözüm Sürecinde Zorlandığı Noktalar

Deniz ve Araştırmacı Arasında Gerçekleşen Diyaloglar
[...] ***Araştırmacı:*** *Bu çözümü genel olarak nasıl yazacaksın?* ***Deniz:*** *İşte benim en zorlandığım kısım orası, genel bir kural bulmak.* ***Araştırmacı:*** *Sence neden zorlanıyorsun?* ***Deniz:*** *Bir şeyi genelleme yeteneğimin düşük olduğunu düşünüyorum, tümevarım yapmakta zorlanıyorum mesela. Bunu buldum ama eşitlik oluşturma konusunda sıkıntı çekeceğim mesela neye eşitleyeceğim konusunda. Ama çözümün şuraya kadar doğru olacağını düşünüyorum.*
[...] ***Araştırmacı:*** *Tek satırlardaki sayıların konumu için nasıl bir ifade yazacaksın?* ***Deniz:*** *Kalanı kesinlikle sayacağım, bu bana 9 un katının tam olarak nerede olacağını söylüyor, kalanı da kendim sayıyorum artık nasıl ifade edebilirim, hımm* [düşünüyor]. *Sözel olarak yazsam?*
[...] ***Araştırmacı:*** *Buradaki a, b ve k nedir?* ***Deniz:*** *Açıklamam lazım hepsini, a bize verilen sayı hımm yanlış oldu, a. adımdaki sayı, konumu sorulan sayı, bu da olmadı. Konumdaki sayı bu da olmadı.*

Tablo 4.71 de görüldüğü üzere Deniz'in çözümü sırasında çeşitli noktalarda zorluk yaşadığı tespit edilmiştir. Bunlardan birincisi, genel kural bulmak ve genel eşitlik yazmakta zorlanmasıdır. Bir diğeri ise kullanmış olduğu temsillere ilişkin sözel açıklama yapamamasıdır.

Sonuç olarak, Deniz'in BU 1 de bulunan M-İ sorusuna ilişkin geliştirdiği çözüm, M-İ Analitik Çerçevesindeki kategorilerden hiçbirine girecek koşulları sağlayamadığı ve matematiksel nitelik anlamında eksiklikler taşıdığı için sınıflandırılamamış çözüm olarak değerlendirilmiş ve "0" puan ile derecelendirilmiştir.

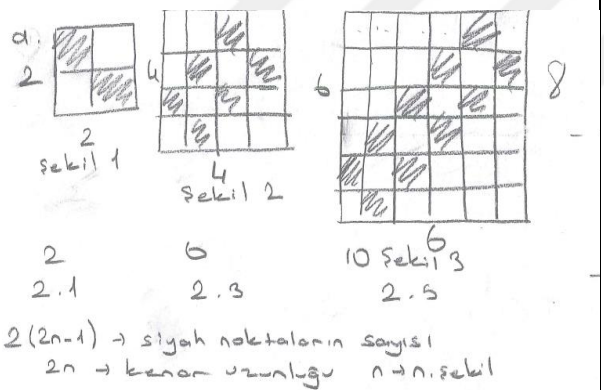
Deniz'in BU 2'de bulunan M-İ sorusuna ilişkin geliştirdiği çözüm, M-İ Analitik Çerçevesindeki kategorilerden hiçbirine girecek koşulları sağlayamadığı için sınıflandırılamamış çözüm kategorisinde değerlendirilmiştir.

Tablo 4. 72. Deniz'in BU 2 Sorusu Çözüm Sürecinde Zorlandığı Noktalar

Deniz ve Araştırmacı Arasında Gerçekleşen Diyaloglar
[...]
Deniz: *Buna uygun modellemeyi nasıl dökeceğiz ya? Hiçbir şey belirmiyor aklımda.*
Araştırmacı: *Geçen uygulamaya göre burada model istiyoruz.*
Deniz: *Evet, hiçbir şey belirmiyor aklımda. Böyle bir şeyle ilk defa karşılaşıyorum desem yalan olmaz. Şu ana kadar alıştığımız şey, şekil verilip genel formülün istenmesi.*

Deniz, Tablo 4.72'de yer alan diyalogda görüldüğü üzere, uygun bir model geliştirmekte çözüme başlangıç aşamasında çok zorlanmıştır. Bunun nedenini ise önceden bu tür sorularla karşılaşmadığına dayandırmıştır.

Geliştirdiği Çözüm:



Geliştirdiği Çözüme İlişkin Açıklamaları:

Deniz*: Baktım aradaki fark hep 4 sonrasında şöyle bir şekil oluşturdum 2'e 2 kare sonra 4'e 4, 6'a 6. köşegenleri kesen noktaları karaladım arttırdığımızda şu şekilde. Sonrasında bir genellemeye ulaştığımda siyah noktaların sayısı için 2x(2n-1) formülüne ulaştım. Buradaki önce n'i tanımlayıp n. şekil için kenar uzunluğu da 2'şerli arttığı için ona (2n) dedim, kenar uzunluğu oldu.*

Şekil 4. 24. Deniz'in BU 2 Sorusuna İlişkin Çözümü

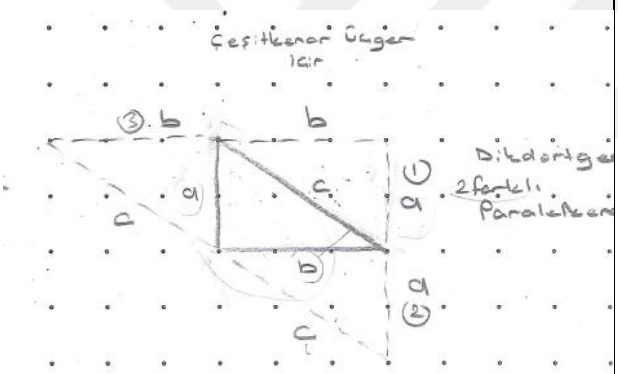
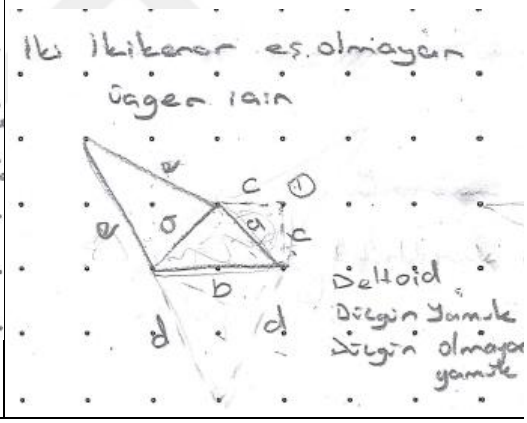
Soruya uygun model geliştirebilmek için ilk olarak verilen sayı örüntüleri üzerinden bir kural geliştirmiş sonra bu kurala uygun model geliştirmiştir. Oluşturduğu modelde kenar uzunlukları ile taranan kısım arasında bir ilişki bulmaya çalışmış ancak bu ilişkiyi kural ve şekil arasında kuramamıştır. Çözümü bu yönüyle eksik kalmıştır. Aynı zamanda Tablo 4.73 de yer alan diyalog, Deniz'in model oluştururken temele aldığı matematiksel işlemlere ilişkin kavramsal eksiklik taşıdığını göstermektedir.

Tablo 4. 73. Deniz'in BU 2 Sorusuna İlişkin Çözüm Süreci

Deniz ve Araştırmacı Arasında Gerçekleşen Diyaloglar
[...] ***Araştırmacı:*** *Nokta sayıları dediklerinde taradıkların mı?* ***Deniz:*** *Nokta sayıları şu siyah olanlar, köşegen ile teması olanlar yani nasıl anlatsam bilemedim. Aslında onun bir adı var aklıma gelmiyor.*

Deniz'in BU 2 de bulunan M-İ sorusuna ilişkin geliştirdiği çözüm, M-İ Analitik Çerçevesindeki kategorilerden hiçbirine girecek koşulları sağlayamadığı için "0" puan ile derecelendirilmiştir.

Deniz'in üçüncü bireysel uygulama kapsamında M-İ odaklı görev sorusuna verdiği cevabın kategorisi, iddianın kapsadığı olası tüm durumların uygun bir alt kümesini sağlayabildiği için deneysel argüman olarak değerlendirilmiştir. Bu soru kapsamında ilk olarak, eş üçgenlerden birini alıp kenarı boyunca yansıtmıştır.

Eş Üçgenleri Birleştirmesine İlişkin Bir Örnek:	**Eş Olmayan Üçgenleri Birleştirmesine İlişkin Bir Örnek**
	

Geliştirdiği Çözüme lişkin Açıklamaları:
Deniz: *Kendimce burada küçük denemeler yaptım, yansıtmalar yaparak yansıtmamı ekleme mi onu da tam olarak bilmiyorum aslında ama. Daha sonrasında ikizkenar üçgen için denedim; kare ile paralelkenar oluşturdum. Çeşitkenar üçgen için denedim burada da dikdörtgen ile iki farklı paralelkenar oluşturdum şu yüzüyle şu farklı. Sonra çeşitkenar üçgen eşkenar üçgen için denedim ve bütün kenarlar eşit oluştuğu için hep eşkenar dörtgen olarak oluştuğunu gördüm. Bu birinci şık içindi ikinci şık içinse, eş olmayan üçgenler dediği için iki ikizkenar üçgen için yine bir kenarlarını ortak alıp bir kenarları eşit ama, eş olmayan ikizkenar üçgenler için baktığımda deltoid oluştuğunu gördüm, yamuk oluştuğunu gördüm ve düzgün olmayan bir yamuk oluştuğunu gördüm. Yamuğun isimlendirmesinden emin değilim. Yani düzgün olmayan yamuk diye bir isimlendirme var mı bilmiyorum ama şeyde olabilir bu dörtgende olabilir. Deltoid de bir dörtgen orda bir karmaşa yaşadığım için düzgün olmayan yamuk yazdım. Daha sonra bir ikizkenar bir çeşitkenar üçgeni ele aldım. Buradan da yamuk oluştuğunu ve düzgün olmayan yamuk dediğim, yanlışta olabilir isimlendirmesi tam bilmiyorum. Daha sonrasında iki tane çeşitkenar olmayan eş üçgen aldığımda bir yamuk oluşturduğunu fark ettim.*

Şekil 4. 25. Deniz'in BU 3.1 Sorusuna İlişkin Çözümü

Eş üçgenleri bileştirirken bir üçgeni referans alarak kenarlar boyunca yansıma kuralını kullanarak; ikizkenar, çeşitkenar ve eşkenar üçgen için denemeler yapmıştır. Sonuçta,

dikdörtgen, paralelkenar, kare ve eşkenar dörtgenlere ulaşmıştır. Ancak bu durumu ikizkenar dik üçgen gibi farklı üçgen durumları üzerinde denememesi çözümünde bir eksiklik oluşturmuştur. Eş olmayan üçgenlerde ise şekli dörtgene tamamlanacak yansıtmaları yaparak deltoid ve yamuk şekillerine ulaşmıştır. Elde ettiği düzgün olmayan dörtgenlere düzgün yamuk isimlendirmesi ile yanlış tanımlamalarda bulunmuştur. Böylece dörtgenlerin türleri ve özellikleri ile ilgili bilgi eksikliğine sahip olduğu görülmektedir.

Deniz geliştirmiş olduğu çözüm ile üçgenleri birleştirme doğrultusunda dörtgen elde etmek için genel bir ifade elde edememiş; böylece oluşturmuş olduğu dörtgenlere dayalı genel bir sonuç ortaya koyamamıştır.

Deniz'in BU 3.1 de bulunan M-İ sorusuna ilişkin geliştirdiği çözüm, deneysel argüman ile ilgili tanım şartlarını sağladığı ve matematiksel nitelik anlamında genel ifadenin oluşturulmaması ve çözümün eksiklikler taşıması nedeniyle geliştirilebilir çözüm olarak "1" puan ile derecelendirilmiştir.

Deniz'in 4.1 sorusuna ilişki geliştirdiği çözüm M-İ çerçevesindeki herhangi bir kategoriye giremediği için sınıflandırılamamış çözüm olarak değerlendirilmiş ve "0" puan ile derecelendirilmiştir. BU 3.2 ve BU 4.2 sorularına ilişkin ise herhangi bir çözüm geliştirememiştir. Dolayısıyla çözüm yok kategorisinde değerlendirilmiş ve "0" puan ile derecelendirilmiştir.

4.3.2. Deniz'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Psikolojik Bileşen Kapsamında Elde Edilen Bulgular

İpek, M-İ sorularının çözümüne ve M-İ yapma sürecine ilişkin algılarını sıklıkla stratejilerine dayandırarak açıklamıştır. Stratejilerine ilişkin algıları ise farklı temsil, temsilin güçlendirilmesi, bilgi, farklı stratejileri seçme ve özel durumları inceleme olarak değişkenlik göstermiş ve en çok bilgilerine dayalı açıklamalarda bulunmuştur. Bunu takiben çözüm niteliğine ilişkin algılarının da sıklık gösterdiği gözlemlenmiştir. Çözüm niteliğine ilişkin algılarını ise sıklıkla uygun olmaya dayalı olarak açıklamıştır.

Deniz kendisine yöneltilen sorularda üç sınıflandırılamamış çözüm, iki çözüm yok ve bir deneysel argüman çözümü oluşturduğu için çözümlerine yönelik algıları; bu kategorileri

temsil eden bir soru üzerinden verilmiştir. Çözümlerine ilişkin genel algı dağılımı Tablo 4.74'te verilmiştir.

Tablo 4. 74. Deniz'in M-İ Sürecine Yönelik Algıları

	Strateji					Çözümün Niteliği		
	Farklı Temsil	Temsilin Güçlendirilmesi	Bilgi	Farklı Stratejileri Seçme	Özel Durumları İnceleme	Geçerli Olma	Uygun Olma	Genellenebilir Olma
Çözüm Yok			4					
Sınıflandırılamamış Çözüm	1	5	17		2	3	8	7
Deneysel Argüman		4	5	4		1	8	2
Toplam	1	9	26	4	2	4	16	9
			42				29	

Deniz BU 1 sorusunun sınıflandırılamamış çözüm kategorisinde değerlendirilen çözümüne ilişkin algılarını, strateji ve çözüm niteliğine dayandırarak açıklamıştır. Farklı stratejileri uygulamanın aklına geldiğini belirttiği çözümünü tercih etme nedenini, bütünden hareket etmeye imkan vermesi nedeniyle kolay olmasına dayandırmıştır. Çözümü yaparken kendince bir genel durum elde ettiğini bu nedenle çözümünün doğru olduğunu belirtmiştir. Çözümünün doğruluğunu değerlendirirken, "hata yapmadıysam", "dikkatimden kaçmış birkaç nokta olabilir" şeklinde kendinden emin olmayan bir yaklaşım içerisinde olmuştur. Çözümünde sütunlarda yer alan sayılara dayalı olarak yaptığı sözel açıklamaların çözümünde yazılı olarak var olmadığını, bunların eklenmesi ile çözümünün geliştirilebileceğini ifade etmiştir. Sütunlarda yer alan sayılara dayalı açıklamaları çözüme dahil etmeme nedenini ise herhangi bir genellemeye ulaşamamış olmasına dayandırmıştır. Bu kapsamda, çözümü için tam olarak geçerli bir strateji geliştiremediğini ifade etmiştir. Bu nedenle "a" ve "b" şıklarında geliştirmiş olduğu çözümlerin eğer bir işlem hatası yapmadıysa doğru olduğunu ancak "c" şıkkı için genel bir sonuca ulaşmadığını ifade etmiştir.

Deniz'in sınıflandırılamamammış çözümüne ilişkin algılarından örnek diyaloglar Tablo 4.75'de verilmiştir.

Tablo 4. 75. Deniz'in M-İ Sürecinde BU 1 Sorusu Sınıflandırılmamış Çözümüne İlişkin Algısından Örnekler

Tema	Kod	Örnek Diyalog
Strateji	**Özel Durumları İnceleme** **Bilgi**	[…] ***Araştırmacı:*** *Peki, farklı çözümler geliştirilebilir mi?* ***B1-D3****: Mesela burada 7'lik artış var daha sonra 2'lik artış var sonrasında 7'lik var 2'lik var. Bu şekilde giden bir örüntü. Yine şurada 5'lik, 4'lük 5'lik 4'lük; burada 3, 6, 3, 6 şeklinde, her sütun için ayrı bir kural bulup bunu ayrı ayrı çözümleyebilirdim belki. En başta aslında bunu gördüm sonra çözüm yolumu değiştirdim.* ***Araştırmacı:*** *Neden değiştirdin?* ***B1-D4:*** *Çünkü diğer yoldan daha kolay ulaşabileceğimi fark ettim, bu çözüm yolu için hepsini ayrı ayrı düşünmem gerekirdi. Ama burada bütünden yola çıkaracak çözüme ulaşabileceğimi fark ettim.*
Çözümün Niteliği	**Temsilin Güçlendirilmesi**	[…] ***Araştırmacı:*** *Peki sence çözümünün geliştirilebilir bir yönü var mı?* ***B3-D9:*** *Yani ben sütunları burada açıklamadım sözel olarak söyledim. Belki hani onu cevaplarıma yazabilirim. Aslında daha doğrusu sütunlarla ilgili düşüncelerimi nasıl dökeceğimi bilemedim o yüzden sadece satırlarla ilgili şeyleri yazdım.*
Strateji Çözüm Niteliği	**Temsilin Güçlendirilmesi** **Genellenebilir Olma**	[…] ***Araştırmacı:*** *Peki yaptığın çözüm her zaman doğru olacak mı seni her zaman doğruya ulaştıracak mı?* ***B1-D15:*** *Ben bunu şık şık olarak düşüneyim; a ve b şıkkı için beni genel bir sonuca doğru bir sonuca ulaştıracağını düşünüyorum. Ama c şıkkında dediğim gibi sütunları ifade etmediğim için tam olarak bir stratejiyi açıklayabilmiş değilim orada.*

Deniz BU 3.1 sorusunun deneysel argüman çözümüne ilişkin algılarını, strateji ve çözüm niteliğine dayandırarak açıklamıştır. Çizim kolaylığı nedeniyle dik üçgenleri seçerek oluşturduğu çözümümün, farklı üçgenlerin ele alınmasıyla farklı çözümler geliştirilebileceğini ifade etmiştir. Farklı üçgenlerin kullanılmasıyla oluşturulabilecek dörtgen durumlarının değişmeyeceğini sadece boyutsal açıdan farklılık olabileceğini aynı zamanda kenarların tanımlanmasında kullanılan harflerin değişkenlik gösterebileceğini ifade etmiştir. Bu nedenle kolay olduğu için tercih ettiği çözümünde geliştirilebilecek bir yön olmadığını ifade etmiştir. Çözümünün istenilen duruma uygun dörtgenleri gösterebildiği için doğru olduğunu ve her zaman geçerli olacağını ifade etmiştir.

Deniz'in deneysel çözümüne ilişkin algılarından örnek diyaloglar Tablo 4.76'da verilmiştir.

Tablo 4. 76. Deniz'in M-İ Sürecinde BU 3.1 Sorusu Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Algısından Örnekler

Tema	Kod	Örnek Diyalog
Strateji	**Temsilin Güçlendirilmesi**	[…] ***Araştırmacı:*** *Tamam peki farklı çözümler geliştirebilir mi?* ***B3-D2:*** *Farklı çözümler geliştirilebilir mi, aslında şuraya baktığımızda ben dik üçgenleri ele almıştım belki de çizim kolaylığı olduğu için dik üçgenleri aldım. Farklı üçgenler ele alınarak çözüm farklı şekilde yapılabilir.* ***Araştırmacı:*** *Farklı üçgenleri ele aldığında ulaştığın sonuçlar değişir mi?* [düşünüyor] ***B3-D3****: Aslında değişmez; oluşacak şekiller değişmez mesela kare, paralelkenar değişmez ama isimlendirmesi ve boyutları farklı olabilir.* ***Araştırmacı****: İsimlendirmesi derken ne demek istiyorsun?* ***B3-D4:*** *Mesela ben köşe noktalara a, b ve c demişim ya o uzunluğu başka bir şey olarak alırım ve tanımlarım.*
Çözüm Niteliği	**Uygun Olma**	[…] ***Araştırmacı:*** *Çözümün sence doğru mu?* ***B3-D8:*** *Evet, doğru olduğunu düşünüyorum.* ***Araştırmacı:*** *Neden böyle düşünüyorsun peki?* ***B3-D9:*** *çünkü bize bir soru yöneltilmiş, aslında iki farklı üçgen ele alıp iki farklı açıdan düşüneceğiz; iki eş ve iki eş olmayan üçgen düşüneceğiz. Bunlardan dörtgen oluşturup oluşturmayacağını soruyor. Ve ben durumlar için oluşabileceğini gösterdim. Onun için doğru olduğunu düşünüyorum.*

Deniz'in çözüm yok kategorisinde değerlendirilen BU 1 sorusuna ilişkin algılarını, stratejilerine dayandırarak açıklamıştır. Bir çözüm geliştirememe, oluşturulabilecek çözüm hakkında bir fikir sahibi olamama nedeninin bilgi eksikliğinden kaynaklandığını ifade etmiştir. Erdem'in bu duruma ilişkin algılarından örnek diyaloglar Tablo 4.77'de verilmiştir.

Tablo 4. 77. Deniz'in M-İ Sürecinde BU 3.2 Sorusuna İlişkin Algısından Örnek Diyaloglar

Tema	Kod	Örnek Diyalog
Strateji	***Bilgi***	***Araştırmacı:*** *Nasıl bir çözüm geliştirilebileceği hakkında bir fikrin var mı?* ***B3-D44:*** *Asal sayılar hakkında bilgim sadece bu kadar olduğu için başka bir çözüm nasıl olur, bilmiyorum. Arkadaşların çözümünü de merak ediyorum açıkçası çünkü aklıma hiçbir şey gelmedi.* ***Araştırmacı:*** *Peki çözüm yapmaya çalışırken neden böyle bir yol tercih ettin?* ***B3-D45:*** *Çünkü PHİ (fi), son zamanlarda asal sayılarla arasında ilişki kurduğumuz bir konu olduğu için dedim acaba oradan bir yola çıkabilir miyim?* ***Araştırmacı:*** *Sence çözümün neden yanlış?* ***B3-D47:*** *Bilgi eksikliğinden kaynaklanıyor olabilir. Ki öyle. Asal sayılar hakkında kısıtlı bir bilgim var aslında baya yüzeysel bir bilgi olduğunu gördüm böyle bir soruda.* ***Araştırmacı:*** *Peki çözümü ilerletip de, en azından bundan sonra şunları yaparsam çözüme doğru bir şekilde ulaşırım gibi bir düşüncen şu anda var mı?* ***B3-D48:*** *Ya en azından bir şeye ulaşmaya çalıştım ama herhangi bir şey bulamadığım için yok yani aklıma gelen herhangi bir çözüm çünkü bilgim yeterli değil.*

4.3.2. Deniz'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Pedagojik Bileşen Kapsamında Elde Edilen Bulgular

Tablo 4. 78. Deniz'in BU 1 Sorusu Sınıflandırılamamış Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları

<table>
<tr><th>Matematiksel Bileşen</th><th>Psikolojik Bileşen</th><th colspan="2">Matematiksel ve Psikolojik Bileşen Karşılaştırma İle Belirlenen Pedagojik Bileşen Sonuçları</th></tr>
<tr><th>Çözümün Matematiksel Niteliği</th><th>Çözüme İlişkin Algısı</th><th>Çözümün Matematiksel Niteliğine İlişkin Algısıyla Karşılaştırma</th><th>İspat Kavramının Doğası İle İpek'in Kavrama Bakış Açısını Karşılaştırma</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Çözüm Kategorisi: Sınıflandırılamamış Çözüm

Çözüm Derecesi: Sınıflandırılamamış Çözüm

Çözümün Değerlendirilmesi: M-İ Matematiksel Bileşen Çerçevesindeki kategorilere uygun bir çözüm sunulamamıştır.</td><td>Farklı Çözüm Geliştirmeye İlişkin Algısı:

Strateji: Özel Durumları İnceleme</td><td>M-İ Matematiksel Bileşen Çerçevesindeki kategorilerden herhangi biriyle uyum göstermeyen çözümününde, özel durumların incelenmesi ile farklı çözüm geliştirilebileceğini algılıyor.</td><td>*Genelleme</td></tr>
<tr><td>Çözüm Doğruluğuna İlişkin Algısı:

Strateji: Bilgi & Temsilin Güçlendirilmesi

Çözüm Niteliği: Genellenebilir Olma</td><td rowspan="4">M-İ Matematiksel Bileşen Çerçevesindeki kategorilerden herhangi biriyle uyum göstermeyen çözümününde, genel ifadeye sorunun bir kısmında ulaştığı için çözümünün bu kısmını doğru ve geçerli olarak algılıyor. Genel ifadeye ulaşmadığı kısımla ilgili de genel bir duruma ulaşılması gerektiğini algılıyor.</td><td></td></tr>
<tr><td>Çözümün Geliştirilebilirliğine İlişkin Algısı:

Strateji: Bilgi & Temsilin Güçlendirilmesi</td><td></td></tr>
<tr><td>Çözümün Geçerliğine İlişkin Algısı:

Strateji: Bilgi & Temsilin Güçlendirilmesi

Çözüm Niteliği: Genellenebilir Olma</td><td></td></tr>
</table>

Deniz'in sınıflandırılamamış çözümüne ilişkin görüşleri pedagojik açıdan incelendiğinde, çözümünün matematiksel yeterlikleri ile çözümüne dayalı algıları arasında genel olarak uyum içinde olduğu görülmektedir. Matematiksel nitelik açısından genel bir duruma ulaşamadığı ve daha çok deneme ve yanılma yöntemini kullandığı çözümünde, eksik noktalarının genel olarak farkındadır. Ancak çözüm ürettiği kısımlarla ilgili genel bir duruma ulaştığını düşündüğü için çözümünün doğru olduğunu düşünmekte

ve bu genellemenin tüm durumları kapsayamayabileceğini göz önünde bulundurmamaktadır.

Sonuç olarak, BU 1 sorusu kapsamında geliştirmiş çözümünü değerlendirirken, genellemeye dayalı bir yaklaşım içinde olmuştur.

Tablo 4. 79. Deniz'in BU 1 Sorunun Sınıflandırılamamış Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri

Temalar	Kodlar	Örnek İfadeler
İçerik Bilgisi	**Geçerli İspat Oluşturabilme İspat**	***B1-D18****:* [...] *genellemeye ulaşmadığım için çözümün uygulanacağı veya uygulanamayacağı durumları belirlemiyorum. Genellemeyi bulursam belirleyebilirim.*
	İspatın Zorlukları Stratejide Zorluk Yaşama	***B1-D27:*** [...] *Nasıl bir yol izleyeceği-örüntüyü görmekte zorlanabilir*
Öğretim Bilgisi	**Dikkat Çekme**	***B3-D21:*** [...] *Öğretmen daha basit daha yüzeysel öğrencinin kolay görebileceği şeylerle bunlar hissettirilir*
	Öğrenmeyi Destekleme	***B1-D29:*** *Öncesinde örüntü kavramında bir sıkıntı varsa öğrencide örüntü kavramının tekrar üzerinden geçerim, daha sonrasında buna yönelik yani buna ısındırmaya yönelik daha kolay sorular sorarım öğrencilere. En sonunda öğrencinin artık belirli bir aşamaya geldiğini hissettiğim an bu zorlukta bir soru sorarım, kendisinin çözümlemesini beklerim. Öğrenci çözümlemezse çözümlemesine yönelik sorular yöneltirim ona, yani direkt şunu yap dememde onu yol gösterici sorular sorarım. Ardından bulduğu cevapları da neden bu yolları izlediğini ve pekiştirmesi için cevabı yorumlamasını isterim.*
Öğrenci Bilgisi	**Öğrenci Faaliyetleri**	***B3-D22:*** [...] *Öğrenci fazla örnek çözerek bakış açısını geliştirebilir. Ya da öğretmenin yönlendirdiği yollarda her şeyi doğru olarak kabul etmeyip sorgulayabilir. Bu şekilde yani öğretmen bir bilgi veriyorsa onu körü körüne kabul etmesi yanlış. Neden böyle olduğunu sorgulayarak konunun temeline inmesi gerekebilir.*
Müfredat Bilgisi	**Lise Seviyesi**	***B3-İ31:*** [...] *burada kalıpsal olarak bir sürü birleşmiş şey var. Neyi kullanacağı tahmin edemeyebilir. O yüzden lise diyebiliriz buna.*

Deniz'in çözümüne ilişkin sahip olduğu bu yaklaşımların temelindeki pedagojik bilgiler incelendiğinde, Tablo 4.79 da ki sonuçlar elde edilmiştir. Bu kapsamda çözümünün her durumda uygulanabilir olduğunu belirleyebilmek için genel bir duruma ulaşmak gerektiğini ifade etmiştir. Sütunlar üzerinde çalışma yaparak genel bir durum elde edilmesi gerektiğini, bu genel durum elde edildiğindeyse örüntüde var olan büyük sayıları deneyerek doğrulamaya ihtiyaç duyulduğunu belirtmiştir. Genel bir duruma ulaşmış

olunca da çözümünün; hangi durumlarda uygulanabilir hangi durumlarda uygulanmayacağını ayırt edebileceğini ifade etmiştir. Bu durumu sağlayabilmek için öğretmen ve öğrencilerin yapmaları gereken faaliyetlerden bahsetmiştir. Öğretmenin daha basit ve yüzeysel sorularla, genel duruma ulaşmayı hissettirebileceklerini, öğrencilerinde bu durumları uygulamaları gerektiğini ifade etmiştir. Ayrıca öğrencilerin çok örnek çözerek bakış açılarını geliştirebileceğini, öğretmenlerinden gelen bilgileri olduğu gibi kabul etmeyip sorgulamayabilmeleri gerektiğini belirtmiştir. Öğretmenlerinden öğrendikleri bilgileri doğrudan kabul etmelerinin yanlış olacağını, sorgulama yaparak konunun temeline inmeleri gerektiğini ifade etmiştir. Bu türden bir sorunun genellemeye ulaşmakta kendisinin de zorluk yaşaması, kullanılacak stratejiyi tahmin etmekte zorlanılması nedeniyle 8. Sınıf sonrası seviyelerde sorulabileceğini belirtmiştir. 8. Sınıf olarak görmesinin nedenini açıklarken örüntü konusunun o sınıf seviyesinde ele alınabileceği tahminine dayandırmış genel olarak lise seviyesinde sorulabilecek bir soru olduğunu ifade etmiştir. Soruyu çözerken zorlanılacak noktaların örüntüyü görmekte yaşanabileceğini ve zorluğun, nasıl bir strateji kullanılacağını belirlemekte de söz konusu olabileceğini ifade etmiştir. Öğrencilerinde bu türden zorlukları görmesi durumundaysa, örüntü kavramına ilişkin var bilgilerinde bir eksiklik görürse bu kavramın üzerinden tekrar geçeceğini sonrasında öğrencilerinin öğrenimlerini desteklemeye yönelik basit düzeyli örüntü uygulamaları yaptırabileceğini belirtmiştir. Öğrencilerinin zorluk yaşadıkları noktalarda, onlara yönlendirici sorular sorabileceğini ifade etmiştir.

Tablo 4. 80. Deniz'in BU 3.1 Sorusu Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları

<table>
<tr><th>Matematiksel Bileşen</th><th>Psikolojik Bileşen</th><th colspan="2">Matematiksel ve Psikolojik Bileşen Karşılaştırma İle Belirlenen Pedagojik Bileşen Sonuçları</th></tr>
<tr><th>Çözümün Matematiksel Niteliği</th><th>Çözüme İlişkin Algısı</th><th>Çözümün Matematiksel Niteliğine İlişkin Algısıyla Karşılaştırma</th><th>İspat Kavramının Doğası İle İpek'in Kavrama Bakış Açısını Karşılaştırma</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Çözüm Kategorisi: Deneysel Argüman

Çözüm Derecesi: Geliştirilebilir Çözüm

Çözümün Değerlendirilmesi: Genel bir sonuç yok ve farklı üçgen durumları incelenmemiş.</td><td>Farklı Çözüm Geliştirmeye İlişkin Algısı:

Strateji: Temsilin Güçlendirilmesi</td><td>Genel bir sonuca ulaşamadığı ve özel üçgen durumlarından sadece birini incelediği çözümünün, farklı üçgen birleştirmeleriyle farklı çözüm geliştirilebileceğini algılıyor.</td><td rowspan="4">*İstenileni Gösterme</td></tr>
<tr><td>Çözüm Doğruluğuna İlişkin Algısı:

Çözüm Niteliği: Uygun Olma</td><td rowspan="3">Genel bir sonuca ulaşamadığı ve özel üçgen durumlarından sadece birini incelediği çözümünde, istenilen durumları gösterecek sonuçlar elde ettiği için geliştirilemeyeceğini, her zaman doğru ve geçerli olduğunu algılıyor.</td></tr>
<tr><td>Çözümün Geliştirilebilirliğine İlişkin Algısı:

Strateji: Bilgi & Temsilin Güçlendirilmesi</td></tr>
<tr><td>Çözümün Geçerliğine İlişkin Algısı:

Strateji: Bilgi & Temsilin Güçlendirilmesi

Çözüm Niteliği: Genellenebilir Olma</td></tr>
</table>

Deniz'in deneysel argüman çözümüne ilişkin görüşleri pedagojik açıdan incelendiğinde, çözümünün matematiksel yeterlikleri ile çözümüne dayalı algıları arasında kısmi açıdan uyum ve kısmi açıdan uyumsuzluk taşıdığı görülmektedir. Matematiksel nitelik açısından genel bir duruma ulaşamadığı çözümünde; eksik noktalarının genel olarak farkına varmış ancak genel duruma ulaşma ile ilgili herhangi bir düşünce içinde olmamıştır. İstenilen duruma örnek oluşturacak dörtgenler elde ettiği için de çözümünün her zaman doğru ve geçerli olacağını ifade etmiştir.

Sonuç olarak, BU 3.1 sorusu kapsamında geliştirmiş deneysel argüman çözümünü değerlendirirken, istenilen durumları göstermeye dayalı bir yaklaşım içinde olmuştur.

Tablo 4. 81. Deniz'in BU 3.1. Sorusunun Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Pedagojik Bilgileri

Temalar	Kodlar	Örnek İfadeler
İçerik Bilgisi	**Geçerli İspat Oluşturabilme Geçerli Olma**	***B3-D25:*** […] *her durumda uygulanabilir bir çözüm.*
	İspatın Zorlukları Stratejide Zorluk Yaşama	***B3-D35:*** […] *iki üçgeni birbirine nasıl birleştireceğimiz konusunda belki öğrenciler tereddüt yaşayabilir.*
Öğretim Bilgisi	**Hissettirme**	***B3-D21:*** […] *dörtgenlerin üçgenlerden oluştuğunu bence hissettirmesi gerekiyor.*
	Öğrenmeyi Destekleme	***B3-D31:*** […] *üçgenlerden kesilmiş birkaç tane karton getirdiğimizde, "Hadi bunları siz birleştirin" diyerek tahtada uygulamalı olarak yaptırırsak öğrencide zaten kalıcı bir öğrenme sağlamış oluruz. Bu tarz bir etkinlik yaptırabiliriz.*
Öğrenci Bilgisi	**Öğrenci Faaliyetleri**	***B3-D31:*** […] *istekli olması öğrencinin derse katılması öğretmeniyle aktif bir şekilde konuyu pekiştirmesi gerekiyor. Geometri birazda görme işi aslında. Çok farklı örnek çözerek görme yeteneğini arttırabilir.*
Müfredat Bilgisi	**Ortaokul Seviyesi**	***B3-İ40:*** […] *üçgeni zaten öncesinde bildiğini düşünüyorum. 6 da filan öğretiliyordur daha sonra üçgenler hatırlatılarak dörtgene 7. Sınıfta giriş yapılabilir.*

Deniz'in çözümüne ilişkin sahip olduğu bu yaklaşımların temelindeki pedagojik bilgiler incelendiğinde, Tablo 4.81 de ki sonuçlar elde edilmiştir. Bu kapsamda çözümünün geçerli olduğunu belirleyebilmek için her durumda uygulanabilir olması gerektiğini ifade etmiştir. Dörtgen özelliklerine hakim olunduğu zaman, elde edilen dörtgenin hangi durumlarda geçerli olduğunu hangi durumlarda geçerli olmayacağının belirlenebileceğini ifade etmiştir. Bu durumu sağlayabilmek için öğretmen ve öğrencilerin yapmaları gereken faaliyetlerden bahsetmiştir. Öğretmenlerin özellikle geometri konularını işlerken materyal kullanmaları gerektiğini, üçgenlerden dörtgen oluştuğunu hissettirmeleri gerektiğini ifade etmiştir. Öğrencilerin ise istekli olmaları gerektiğini ve geometri dersinin görme işi olduğunu düşünmesinden dolayı çok fazla örnek çözerek görme yeteneklerini arttırmaları gerektiğini ifade etmiştir. Böylece öğretmenlerin yaparak ve yaşayarak öğrenmeyi sağlamaya imkan verdikleri için doğru bilgileri öğrencilerde oluşturacaklarını ve bu soruya benzer sorularda doğru bilgilerini uygulamalarına katkı sağlayacaklarını belirtmiştir. Öğrencilerin ise bilgileri tam olarak öğrendikleri için, çözümlerinin hangi durumlarda uygulanacağı veya uygulanmayacağını kendiliğinden ayırmış olacaklarını ifade etmiştir. Bu türden bir sorunun sorulabileceği sınıf düzeyini ise, dörtgenlerin 6. Sınıfta ilk olarak öğretildiğini düşündüğü için 7. Sınıfta ele

alınabileceğini ifade etmiştir. Üçgenleri birleştirerek bir dörtgen elde etme konusunda zorluk yaşanabileceğini düşünmüştür. Öğrencilerinde bu türden zorlukları görmesi durumunda materyal kullanımı ile öğrenmelerini destekleyici çalışmalar yapabileceğini ifade etmiştir.

Deniz 3.2 sorusu kapsamında bir çözüm geliştirememiş bu durumun nedeninin bilgi eksikliğinden kaynaklandığını ifade etmiştir. Konu hakkında bilgi sahibi olmamasının nedenini almış olduğu eğitimdeki eksikliklere, ispat konusuyla ilgili çalışmaların üniversite öncesi eğitiminde olmamasına bu nedenle ispat konusuyla ilgili sıkıntı yaşamasına bağlamıştır. Formülleri ezberleyerek çözüme ulaşmaya dayalı aldığı eğitimde; formülün nereden geldiğinin bilgisini vermeye dayalı çalışmalarla karşılaşmadığını ifade etmiştir. Bu türden çalışmaları üniversite seviyesinde gördüğü zaman, adapte olmakta zorluk yaşadığını belirtmiştir. Bu açıklamalarına ilişkin var olan diyalog Tablo 4.82'de verilmiştir.

Tablo 4. 82. Deniz'in Pedagojik Bilgilerine İlişkin Bir Diyalog

[…]
Deniz: *Zorlandım en başından beri zorlandım.*
Araştırmacı: *Neden zorlandın, neden yapamadın sence?*
Deniz: *Bilgi eksikliğinden olduğunu düşünüyorum. Asal sayılar bana sadece o tanımıyla verildi ve üzerine herhangi bir uygulama yapılmadı. Direkt asal çarpanlar konusuna geçildi bilgimin bu konuda gerçekten çok kısıtlı olduğunu düşünüyorum bu konuda.*
Araştırmacı: *Bu soruyu diğer arkadaşlarınla da çözdüm onlar yapabildiler, eğitiminiz üniversitede aynı.*
Deniz*: Kendi eğitim temelimdeki eksiklikler.*
Araştırmacı: *Kendi temelindeki eksiklikler*
Deniz: *Ben zaten konuların geneline baktığımda kendimde şunu görüyorum; öğretmen sadece bize konuyu vermiş. Benim öğretmen olduğumda yapmayı düşündüğüm hedeflediğim şeylerin hiçbiri yapılmadı bana; uygulama olsun etkinlik olsun.* […]. *O yüzden temelimde bunun alt yapısının olmaması ispat aşamalarına yönelik çektiğim sıkıntıların nedeni olabilir. Temelimde hiç görmemiş olmam. Bende bunların temeli üniversitede atıldığı için yeni yeni özümsediğim şeyler, üzerine eğilim gösterip geliştirmem gereken bir alan bu yüzden.*
Araştırmacı: *Üniversitede üç yılda oturmadı mı?*
Deniz: *Hayır çünkü yavaş yavaş oluyor. Çünkü zaten iki yılım seviyeye adapte olmakla geçti. Matematik gördüm evet ama gördüğüm matematik bu değildi. Çok farkı bir matematik gördüm. Bunlar bir araya geldiğinde öğrenme konusunda çok sıkıntı yaşadım. Adapte olmaya çalışırken yavaş yavaş toparlandım ikinci sınıftan sonra anca bir şeyler olmaya başlıyor.*
Araştırmacı: *Senin lisede tanıştığın ya da öncesinde tanıştığın matematik nasıl bir matematikti?*
Deniz: *Hiç böyle değildi. Yine aynı şekilde formül verilir bir değer verilir o soruda uygulanır. Sorgulamanın olmadığı formülü bilip deneyerek yerine koymaya dayalı bir matematik. İlk defa üniversite de gördüm.*

Deniz kendisine yöneltilen sorularda üç sınıflandırılamamış çözüm, iki çözüm yok ve bir deneysel argüman çözümü oluşturduğu için pedagojik bilgileri bu kategorileri temsil eden bir soru üzerinden verilmiştir. Genel pedagojik bilgi dağılımı Tablo 4.82'te verilmiştir.

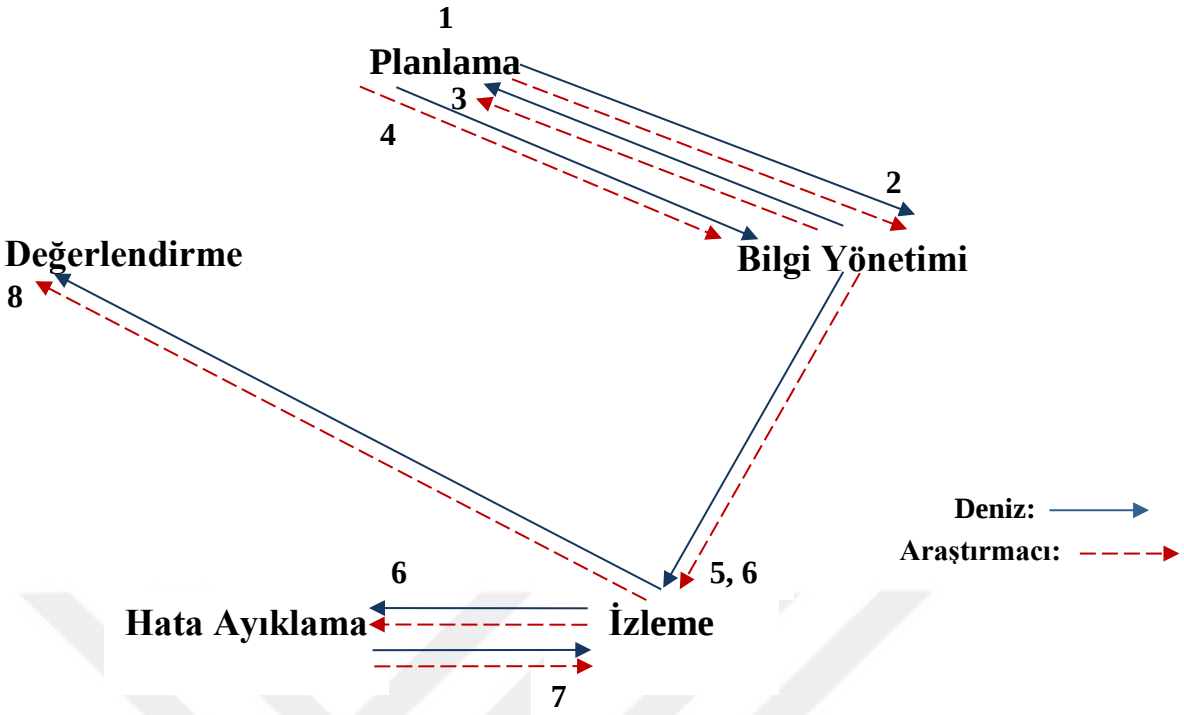
Sonuç olarak, Deniz'in M-İ sürecine dayalı çözümlerinde, ispatın doğasına ilişkin bakış açısının genel olarak "istenileni gösterme" ye dayalı olduğu tespit edilmiştir. Çözümlerini, içeriğe dayalı pedagojik bilgileri kapsamında en çok "formül/kural" ve "geçerli olma" ile ilişkilendirilmiştir. Çözüm sürecinde zorluk yaşanacak noktaların ise çoğunlukla "bilgi eksikliği" olmasından kaynaklanabileceğini belirtmiştir. M-İ sürecinde bir öğretmenlerin çoğunlukla "öğrenmeyi destekleme" faaliyetlerini yürütebileceklerini ifade etmiştir. M-İ sürecinde "öğrenci faaliyetleri "ne dayalı açıklamalarıyla öğrencilere düşen görevlerden bahsetmiştir. Araştırma kapsamında sorulan soruların ise çoğunlukla "ortaokul" seviyesinde sorulabileceğini belirtmiştir.

Tablo 4. 83. Deniz'in M-İ Sürecine Yönelik Pedagojik Bilgileri ve Dağılımları

	İspatın Doğasına İlişkin Bakış Açısı		**İçerik Bilgisi**	**Öğretim Bilgisi**	**Öğrenci Bilgisi**	**Müfredat Bilgisi**
M-İ Sürecine İlişkin Pedagojik Bilgileri	İstenileni Gösterme **(15)**	**Geçerli İspat Oluşturabilmek**	Formül/Kural **(5)**	Öğrenmeyi Destekleme **(19)**	Öğrenci Faaliyetleri **(12)**	Ortaokul Seviyesi **(3)**
	Genelleme **(6)**		Geçerli Olma **(5)**	Dikkat Çekme **(4)**	Konu/Kavram Bilgisi **(8)**	Lise Seviyesi **(2)**
	Doğrulama **(2)**			Açıklık **(2)**	Konuya İlgi Duyma **(2)**	Üniversite Seviyesi **(1)**
	Bilgi **(2)**					
		İspatın Zorlukları	Stratejide Zorluk Yaşama **(11)**			
			Bilgi Eksikliği **(9)**			
			İlişkilendirme Eksikliği **(2)**			

4.3.4. Deniz'in M-İ Odaklı Görev Sorularından Üstbiliş Kapsamında Elde Edilen Bulgular

M-İ odaklı görev sorularının çözümü sırasında Deniz'in sergilediği üstbilişsel düzenleme süreci Şekil 4.19. da ki gibi gerçekleşmiştir. Deniz'in muhakeme ve ispatyapma sürecindeki üstbilişsel düzenleme süreçlerinde, en fazla planlama ve bilgi yönetimi sürecine ilişkin davranışlar sergilediği tespit edilmiştir.



Deniz'in Seçim Yaptığı Davranış Kart Sıralaması			BU 1 Sınıflandırılamamış Çözüm	BU 2 Sınıflandırılamamış Çözüm	BU 3.1 Deneysel Argüman	BU 3.2 Çözüm Yok	BU 4-1 Sınıflandırılamamış Çözüm	BU 4-2 Çözüm Yok
1.Kart	P	Soruyu iyi anladım ve benden istenilenleri tam olarak belirledim.	D A	D A	D A	D A	D A	D A
2.Kart	BY	Çözüm aşamasında hangi bilgilerin benim için gerekli ve önemli olduğunu belirledim.	D A	D A	D A	D A	D A	D A
3.Kart	P	Çözümü en iyi şekilde yapmak için bir strateji belirledim.	D A	D A	D A	D A	D A	D A
4.Kart	BY	Çözüm aşamasında bir bilgi elde ettiğimde onu anlamlandırmaya çalıştım.	D A	D A	D A	D A	D A	D A
5.Kart	İ	Çözümü yapamıyorum diye düşündüğüm zamanlar oldu.	D A		D A	D A		D A
6.Kart	HY&İ	Çözüm aşamasında duraksadım ve hatam olup olmadığına odaklandım. & Çözüm aşamasında yaptıklarımı zaman zaman kontrol ettim.	D A		D A	D A	D A	
7.Kart	İ	Soruda verilenlerin tamamını kullanarak çözümü tamamladım.	D A	D A	D A	D A	D A	D A
8.Kart	D&D	Sorunun çözümünde ortaya çıkan bilgileri gözden geçirdim. & Çözümün doğru olup olmadığını kontrol ettim.	D A	D A	D A	D A	D A	D A

D: Deniz davranışı gösterdiğini düşünüyor - **A:** Araştırmacı davranışın olduğunu gözlemliyor

Şekil 4. 26. Deniz'in Muhakeme ve Yapma Sürecinde Sergilediği Üstbilişsel Düzenleme Süreci ve Akışı

Tablo 4. 84. Deniz'in BU 1 Sorusu Sınıflandırılamamış Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci

Seçim Yapılan Kartlar	Üstbilişsel Düzenleme Sürecine İlişkin Açıklama	Deniz'in Sesli Düşünmeleri ve Araştırmacı Gözlemleri
1.Kart: Soruyu iyi anladım ve benden istenilenleri tam olarak belirledim.	***Deniz**: Bunu tüm süreçlerimde ortak olarak gerçekleştirdim. Soruyu okumak, tüm sorular için sorunun benden ne istediğini anlamaktı. Bu soruda önce soruyu okudum, "a, b ve c" şıklarında benden ne istiyor, bunların hepsini göze aldım, sorunun benden ne istediğini anlamaya çalıştım.*	**Araştırmacı:** Soruyu okudu ve her bir soru şıkkında kendisinden ne istenildiğini belirledi.
2.Kart: Çözüm aşamasında hangi bilgilerin benim için gerekli ve önemli olduğunu belirledim.	***Deniz:** Sayıların hangi satır veya sütunda bulunduğu benim için gerekli ve önemli bir bilgiydi.2'nin ve 9'un katı olan sayılar benim için önemli bir bilgiydi, kullanmam gereken. "c" şıkı için çözüm yaparken de bölmenin kuralını bilmek benim için önemli ve gerekliydi.*	***Deniz:** Baktığımda iki uzak satır arasında 9 fark var, burada 7'lik artış burada 2'lik artış var.* [...]. *Aradığım sayıya "A" dersem 9'luk artış olduğu için 9 ile bölünebilme kuralından hareket edebilirim.*
3.Kart: Çözümü en iyi şekilde yapmak için bir strateji belirledim.	***Deniz:** Nasıl bir strateji izlemem konusunda satır üzerinden gitmem gerektiğini fark ettim. Orada 2 ile 9 arasında bir şeyler olabileceğini hissettim aslında. Daha sonra bu örüntüler arasında nasıl bir genelleme yapmam konusunda ise 1 ve 5 arasında, 6 ile 9 arasında, soruda gösterilen ipucu gibi bir şey vardı. Onu kullanarak bölme kuralından bazı şeyleri tanımlayarak gitmeyi denedim.*	***Deniz:** Dokuz sayıda bir iki satır atlıyoruz. Dokuza böldüğümüzde kaç satır atlayacağımızı bulabiliriz. İki satırda 9 sayı var, dört satırda 18 sayı var… Bunları veren bir genel kural oluşturmam gerekiyor 9 ile bölmeden gidebilirim.*
4.Kart: Çözüm aşamasında bir bilgi elde ettiğimde onu anlamlandırmaya çalıştım.	***Deniz:** "2n" ve "9n" bunlara nasıl bir anlam yüklerim diye düşündüm ve satır sayısının yarısı ile çarptım. Satır ve sütun sayısı üzerine yoğunlaşmaya çalıştım.*	***Deniz:** İkişerli satırlar 9'un katı olarak gidiyorsa bölmenin kuralından satır ve sütun sayısına dayalı bir çözüm geliştirebilirim.*
5.Kart: Çözümü yapamıyorum diye düşündüğüm zamanlar oldu.	***Deniz:** Bu soruda çözemiyorum dediğim zaman, bölme şeklinde yazarken "genel olarak herhalde yazamayacağım" diye düşündüm ama sonrasında genel sonuca ulaştım.*	***Deniz:** Satır sayısı dokuz sayıda bir iki artıyor. Bunu nasıl ifade edeceğim bilmiyorum. Benim en zorlandığım yer genel kural bulmak.*
6.Kart: Çözüm aşamasında duraksadım ve hatam olup olmadığına odaklandım. & Çözüm aşamasında yaptıklarımı zaman zaman kontrol ettim.	***Deniz:** Hatam olup olmadığı kuşkusuna düşüp onu kontrol ettim. Soruda hatam olup olmadığına bakarken yaptıklarımı zaman zaman kontrol ediyorum.*	**Araştırmacı:** Yaptığı çözümleri gözden geçirdikten sonra genel bir kural geliştirmeye odaklandı.
7.Kart: Soruda verilenlerin tamamını kullanarak çözümü tamamladım.	***Deniz:** Aslında bu tamamı için geçerli. Ben artık tamamım dediğimde ve çözümümü açıklamama başladığımda çözümüm benim için tamam oldu.*	**Araştırmacı**: Verilen tüm bilgileri sıklıkla gözden geçirdi ve çözümünde kullandı.
8.Kart: Sorunun çözümünde ortaya çıkan bilgileri gözden geçirdim. & Çözümün doğru olup olmadığını kontrol ettim.	***Deniz:** Çözümü bitirip konuşmaya başladığımda aslında çözümümü değerlendirip gözden geçiriyordum sorguluyordum. Tamamı için aynı şeyi söyleyebilirim.*	***Deniz:** Sütun sayılarına baktım oradan bulduklarımla benden istenene sayılara ulaşabilmek için bir ilerleme kaydettim. "c" şıkkı içinde genel kural geliştirmeye çalıştım bölme kuralından, doğru çözümüm.*

Sınıflandırılmamış çözümüne ilişkin seçim yaptığı kartların hepsini uyguladığını ifade etmiştir. Bu süreçleri araştırmacı tarafından da sesli düşünmeleri ve çözüm süreçleri ile gözlemlenmiştir.

Tablo 4. 85. Deniz'in BU 3.1 Deneysel Argüman Çözümüne İlişkin Üstbilişsel Düzenleme Süreci

Seçim Yapılan Kartlar	Üstbilişsel Düzenleme Sürecine İlişkin Açıklama	Deniz'in Sesli Düşünmeleri ve Araştırmacı Gözlemleri
1.Kart: Soruyu iyi anladım ve benden istenilenleri tam olarak belirledim.	***Deniz:*** *Bunu tüm süreçlerimde ortak olarak gerçekleştirdim. Soruyu okumak, tüm sorular için sorunun benden ne istediğini anlamaktı. Bu soruda, eş ve eş olmayan üçgenleri birleştirerek bir çözüme gitmem gerektiğini belirleyerek, sorunun ne istediğini anladım.*	***Deniz:*** *Eş ve eş olmayan üçgenleri birleştirerek bir çözüm oluşturmam isteniyor.*
2.Kart: Çözüm aşamasında hangi bilgilerin benim için gerekli ve önemli olduğunu belirledim.	***Deniz:*** *İki üçgeni birleştirirken bir dörtgen oluşturulabilmesi için gereken bilginin ne olduğunu araştırdım ona baktım.*	***Deniz:*** *Üçgenleri birleştirmek için kenarları boyunca ekleme yaparım, deneyeyim birkaçını.*
3.Kart: Çözümü en iyi şekilde yapmak için bir strateji belirledim.	***Deniz:*** *Ortak kenar belirleyip, bu kenarları belirleyerek onları birleştirme konusunda nasıl bir yol izleyeceğimi belirledim.*	***Deniz:*** *Ben kendimce burada küçük denemeler yaptım, yansıtmalar yaparak yansıtmamı ekleme mi onu da tam olarak bilmiyorum aslında ama. Daha sonrasında ikizkenar üçgen için denedim.*
4.Kart: Çözüm aşamasında bir bilgi elde ettiğimde onu anlamlandırmaya çalıştım.	***Deniz:*** *Bu yaptığım yansıtmaları her kenar için yapabileceğimi, onun üzerindeki düşüncelerimi yorumladım aslında.*	***Deniz:*** *Bir üçgeni tüm kenarları boyunca eklesem dörtgenler elde ederim.*
5.Kart: Çözümü yapamıyorum diye düşündüğüm zamanlar oldu.	***Deniz:*** *Bu soruda bazı üçgenleri çizerken dedim herhalde ben bunu çizemeyeğim.*	***Deniz:*** *Eşkenar üçgeni noktalı kağıtta çözmek zor.*
6.Kart: Çözüm aşamasında duraksadım ve hatam olup olmadığına odaklandım. & Çözüm aşamasında yaptıklarımı zaman zaman kontrol ettim.	***Deniz:*** *Burada ise şey oldu, adlandırmada bir hata yaptım mı diye sürekli düşündüm. Eski bilgilerimi kafamda canlandırmaya çalıştım.*	***Deniz:*** *Düzgün olmayan yamuk diye bir şey var mı yoksa direkt dörtgen mi desem?*
7.Kart: Soruda verilenlerin tamamını kullanarak çözümü tamamladım.	***Deniz:*** *Aslında bu tamamı için geçerli. Ben artık tamamım dediğimde ve çözümümü açıklamama başladığımda çözümüm benim için tamam oldu.*	**Araştırmacı**: Çözüm sürecinin tamamında aynı stratejiyi kullandı.
8.Kart: Sorunun çözümünde ortaya çıkan bilgileri gözden geçirdim. & Çözümün doğru olup olmadığını kontrol ettim.	***Deniz:*** *Ortak kenarlar üzerinden birleştirme yapmaya dayalı bir bilgi elde ettim.*	***Deniz:*** *üçgenden dörtgen elde etmek için ortak kenarlar üzerinden birleştirme yaparak bir sonuca ulaştım.*

Deneysel argüman çözümüne ilişkin seçim yaptığı kartların hepsini uyguladığını ifade etmiştir. Bu süreçleri araştırmacı tarafından da sesli düşünmeleri ve çözüm süreçleri ile gözlemlenmiştir.

Tablo 4. 86. Deniz'in Seçim Yapmadığı Kartlara İlişkin Açıklamaları

Seçim Yapmadığı Kartlar	Bu Kartları Seçmeme Nedenleri
Bu soru daha farklı nasıl sorulabilir diye düşündüm.	***Deniz:*** *Bunu gerçekten hiçbir zaman sorgulamadım hiçbir zaman aklıma gelmedi.*
Soruyu nasıl daha kolay çözerim diye düşündüm.	***Deniz:*** *Düşünmedim çünkü çözümümün en kolay çözüm olduğunu düşünüyordum. O yüzden böyle bir düşünceye girmedim.*
Dikkatsizlik kaynaklı bir hatam olup olmadığını inceledim.	***Deniz:*** *Bunu genelde incelemem. Daha sonrasında bir hatam olduğu söylenirse anca bakarım onun dışında bakmam işlem hatası yaptım mı diye incelemede bulunmam.*
Kullandığım stratejinin etkililiğini kontrol ettim.	***Deniz:*** *Kontrol etmem. Beni doğru cevaba götürüyorsa etkindir diye düşünüyorum. Bunun için kontrol etme ihtiyacı duymuyorum.*
Soruyu çözerken kullandığım stratejiyi zaman zaman gözden geçirdim.	***Deniz:*** *Stratejimi değil çözümdeki adımlarımı gözden geçirdim.*
Çözümü en iyi yapmak için zaman planlaması yaptım.	***Deniz:*** *Galiba benim yaptığım en büyük eksikliklerden biri de hiçbir zaman zamanı planlamamak.*

Tablo 4.86 da Deniz'in seçim yapmadığı kartlara ilişkin açıklamalarının tamamı araştırmacı tarafından da gözlemlenmiştir.

Deniz'in üstbilişsel düzenleme süreçlerine ilişkin bulgular sadece bir kategoriye uygun çözüm geliştirmesi nedeniyle; sınıflandırılamamış çözüm ve deneysel argüman çözümüne ilişkin iki sorusu kapsamında verilmiştir.

Sonuç olarak, Deniz'in seçmiş olduğu davranış kartlara uygun süreçleri sergilediği ve bu süreçlerin araştırmacı tarafından gözlemlendiği görülmüştür. Deniz'in muhakeme ve ispat yapma sürecinde sergilediği üstbilişsel düzenleme süreçleri Tablo 4.87'e göre değerlendirildiğindeyse, en fazla "planlama ve bilgi yönetimi" kategorisine uygun süreçleri sergilediği tespit edilmiştir. Aynı zamanda "izleme" ve "değerlendirme" süreçlerinin de sıklıkta olduğu tespit edilmiştir.

Tablo 4. 87. Deniz'in Muhakeme ve İspat Yapma Sürecinde Sergilediği Üstbilişsel Düzenleme Süreç Kategorileri ve Sıklıkları

M-İ Sürecindeki Üstbilişsel Düzenleme Süreçleri	Planlama	Bilgi Yönetimi	İzleme	Hata Ayıklama	Değerlendirme
	Soruyu Analiz Etme **(7)** Stratejiyi Belirleme **(3)**	Bilginin Kullanılabilirliğini İnceleme **(5)** Gerekli Bilgileri Belirleme **(3)** Bilginin Niteliğini İnceleme **(2)**	Çözümü Gözden Geçirme **(4)** Çözümü Sürekli Sorgulama **(2)** Stratejiyi Gözden Geçirme **(1)** Gerekli Bilgileri Kullanma **(1)**	Hata Tespiti **(5)**	Sonucu Değerlendirme **(7)**
Toplam	**10**	**10**	**8**	**5**	**7**

Deniz'in üstbilişsel düzenleme süreçlerinin muhakeme ve ispat yapma sürecinde ne şekilde gerçekleştiğine ilişkin uygulamalarından örnek ifadeler ise Tablo 4.88 de verilmiştir

Tablo 4. 88. Deniz'in Üstbilişsel Düzenleme Süreçlerine İlişkin Örnek İfadeler

Temalar	Kodlar	Örnek İfadeler
Planlama	***Soruyu Analiz Etme**	***Deniz***: [...] *başlangıç olarak soru bana ne vermiş sonuç olarak ne vermiş onları yazarım.*
		Deniz: *Soruyu eski bilgilerimden dolayı tamamen analiz etmeme yönelik anlama* [...] *birde sorunun ne istediğini, soruya farklı bakış açıları ile bakmaya yönelik soruyu anlama işlemlerini yaparım.*
	***Strateji Belirleme**	***Deniz:*** *Strateji belirlememde şu ikisi etkili oldu; sorunun benden istediği ile benim var olan bilgilerimin ilişkisi.*
Bilgi Yönetimi	***Gerekli Bilgileri Belirleme**	***Deniz:*** [...] *hangi bilgileri kullanıp kullanamayacağımı belirlemek için soruyu analiz ediyorum. Çünkü* [...] *soruyu daha iyi çözmek, soru hakkındaki stratejiyi belirlemek ve hangi bilgi gerekli bu soruyu çözmek için bunu belirlemek benim için önemli soruya başlamadan önce.*
	***Bilginin Niteliğini İnceleme**	***Deniz:*** *Elde ettiğim bilgileri anlamak çözümün doğruluğu ve geçerliği konusunda bir aşama benim için.*
	***Bilginin Kullanılabilirliğini İnceleme**	***Deniz:*** *Elde ettiğim bilgiler bilgiyi anlamlandırırsam ve bunu bilgilerimle şekillendirirsem diğer basamağa geçmem daha kuvvetli olur benim için.*
İzleme	***Çözümü Gözden Geçirme**	***Deniz:*** *Soruyu çözemediğimi düşündüğümde bir önceki bütün aşamalara tekrar dönüyorum.*
	***Çözümü Sürekli Sorgulama**	***Deniz:*** *Bir adımı tamamlayıp diğer adıma geçtiğimde aslında önceki adımı sorgulamaya devam ediyorum. Çözerken. Çünkü burada bir hatam olup olmadığı hakkında soru işareti kafamda kalmışsa bu adımda yaptıklarım zaten yanlış olacak. Bunun için orayı da sorgulamam gerektiğini düşünüyorum.*

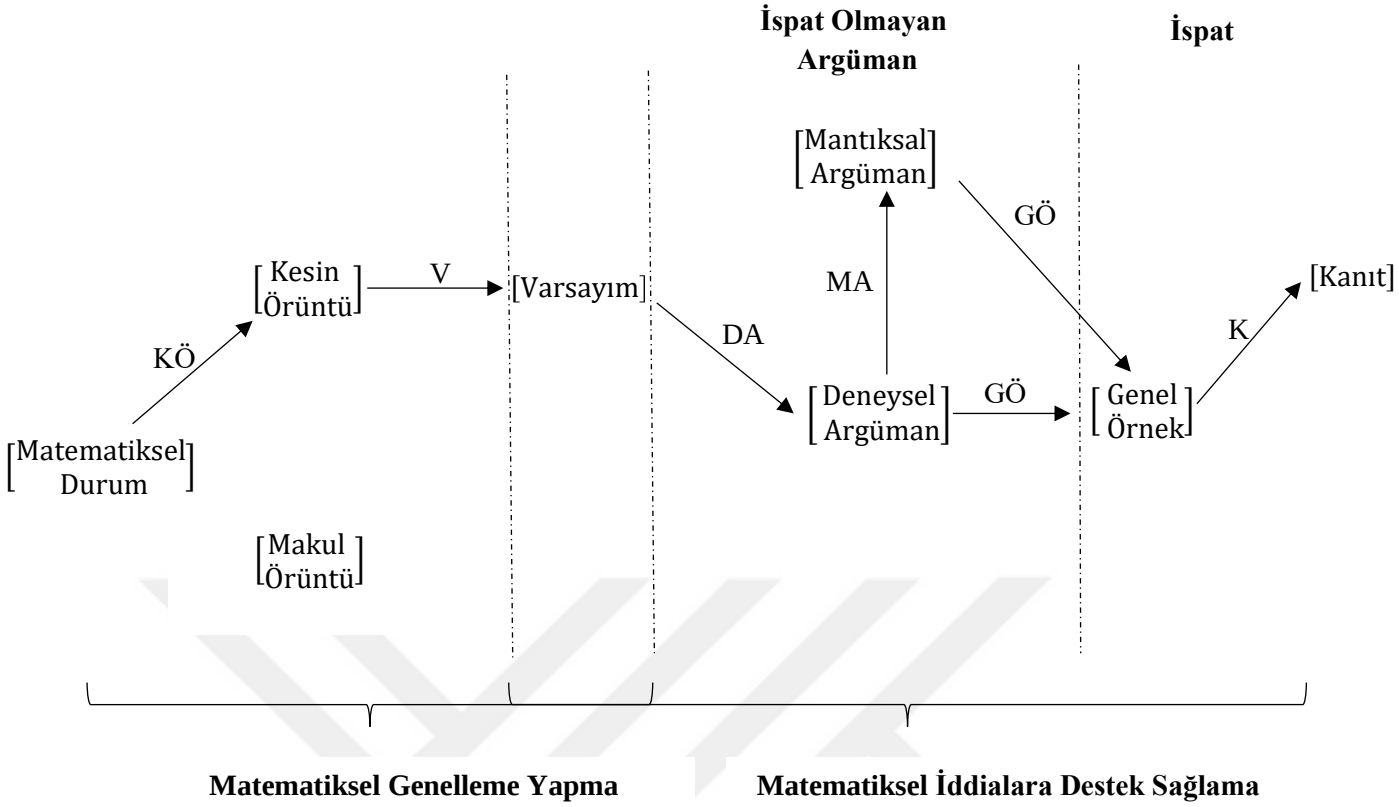
Hata Ayıklama	**Hata Tespiti**	***Deniz:*** *Çözümde tıkanmam, çözümü yapmıyorum mu acaba ya da yanlış strateji mi kullandım* [...] *bu şekilde hataya düşüp düşmediğimi sorguluyorum.*
		Deniz: *Hatam varsa çözümün hangi aşamasında hatam olduğunu tespit etmek için önceki bütün aşamaları tekrar gözden geçiriyorum.*
Değerlendirme	**Sonucu Değerlendirme**	***Deniz:*** [...] *ortaya çıkan bilgiyi tüm aşamalarda gözden geçirdim Bir cevap verdiğinde bunun nedeninin sorgulanmasının önemli olduğunu fark ettim. Bir cevabı olduğu gibi bırakmak onun içinde yaptıklarını fark etmemek oluyor. Doğru yaptıysan bile bu senin öğrenmen pekiştiriyor. Ortaya çıkan bilgileri gözden geçirmek bu sebepten önemlidir.*
		Deniz: *Çözümüm hangi durumlarda doğru hangi durumlarda değil bunu kontrol ettim yani soruyu sorgulamış oldum.*

4.4. Grup Çalışmasında M-İ Bileşenleri Kapsamında Elde Edilen Bulgular

Grup çalışmasında MÖA'nın, M-İ odaklı görev sorularına ilişkin çözümleri yaparken muhakeme ve ispatlama süreçlerinin nasıl ortaya çıktığı ve verdikleri cevapların M-İ Analitik Çerçevesindeki kategorilerden hangileri ile uyuştuğuna yönelik elde edilen bulgular "Matematiksel Bileşen" başlığı altında verilmiştir. Bu başlık altında ayrıca M-İ odaklı görev sorularını çözerken zorlandıkları noktalar ortaya konulmuştur. M-İ odaklı görev sorularının çözümlerine ilişkin algıları "Psikolojik Bileşen" başlığı altında verilmiştir. Çözümlerinin matematiksel niteliği ile çözümlerine ilişkin algılarının karşılaştırılarak, ispat kavramının doğasına ilişkin bakış açıları "Pedagojik Bileşen" başlığı altında verilmiştir. Pedagojik bileşen bulguları kapsamında ayrıca, ispat kavramının doğasını daha açık duruma getirebilmeleri amacıyla; içerik, öğrenci, öğretim ve müfredat bilgisi hakkındaki bilgileri açıklanmıştır.

4.4.1. Grup Çalışmasında M-İ Odaklı Görev Sorularından Matematiksel Bileşen Kapsamında Elde Edilen Bulgular

Grup çalışmasında MÖA'nın, M-İ odaklı görev sorularına ilişkin yaptığı çözümler incelediğinde, Muhakeme ve İspat Yapma Sürecine İlişkin Matematiksel Bileşen Çerçevesindeki kategorilerden; kesin örüntü, varsayım, deneysel argüman, mantıksal argüman, genel örnek ve kanıt kategorilerine uygun çözümler geliştirebildikleri tespit edilmiştir. Bu sürecin gerçekleşme sırası Şekil 4.27 de özetlenmiştir.



GU 1 → GU 2 → GU 3.1 → GU 3.2 → GU 4.1 → GU 4.2.
KÖ → V → DA&MA → GÖ → GÖ → K

Şekil 4. 27. Grup Çalışmasının Muhakeme ve İspat Yapmaya İlişkin Süreç Akışı

Grup çalışmasının M-İ odaklı görev sorularına ilişkin çözümleri genel olarak Tablo 4.89'a göre değerlendirildiğinde başarılı bir performans sergiledikleri söylenebilir.

Çözüm yok ve sınıflandırılmamış çözüm kategorilerinde bir çözümlerinin olmaması da bu sonucu desteklemiştir. Muhakeme ve İspat Yapma Sürecine İlişkin Matematiksel Bileşen Çerçevesindeki her kategoriye uygun çözümler sundukları belirlenmiştir. Geliştirdikleri çözümler çoğunlukla beklenen tam çözüm olarak kabul edilip "3" puan ile derecelendirilmiştir. Sadece GU 1 de grup çalışması yapmaya ilişkin uyum sağlamakta yaşadıkları zorluk çözümlerini yansımış ve "2" puan ile derecelendirilmiştir.

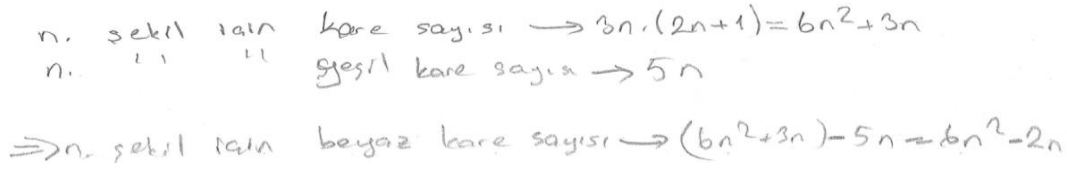
Tablo 4. 89. Grup Çalışmasının M-İ Odaklı Görev Çözümlerinin Derecesi

		GU 1			GU 2		GU 3.1			GU 3.2.	GU 4.1		GU 4.2.
		a	b	c	a	b	1.Soru a	1.Soru b	1.Soru c		a	b	
Çözüm Yok													
Sınıflandırılamamış Çözüm													
Örüntü	**Makul Örüntü**												
	Kesin Örüntü	2	2	2									
Varsayım					3	3							
Deneysel Argüman							3	3					
Mantıksal Argüman									3				
Genel Örnek										3	3	3	
Kanıt													3

Çözüm Derecesi: Geliştirilebilir Çözüm (1) Yeterli Çözüm (2) Beklenen Tam Çözüm (3)

Grup çalışmasında birinci uygulaması kapsamında MÖA'nın, M-İ odaklı görev sorusuna verdikleri cevabın kategorisi, veri kümesine uyan genel bir matematiksel ilişki bularak kesin delil sunmaya imkan verdiği için kesin örüntü olarak değerlendirilmiştir. Bu soru kapsamında ilk başta bireysel olarak, her bir adımdaki beyaz ve yeşil renkli kareler arasında bir düzen olup olmadığını aramışlardır.

Genel Kural:

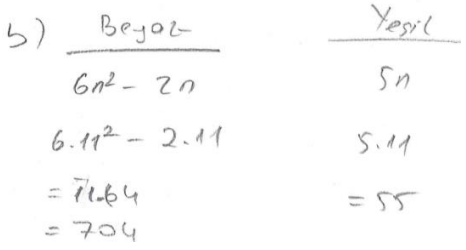


Erdem: *Önce sadece şu tarafa* [*her bir şekildeki beyaz kareleri gösteriyor*] *baktım zaten simetrik oluyor. Şuraya* [*birinci şekli gösteriyor*] *baktım. Şuradaki* [*sırasıyla her bir şekli gösteriyor*]. *beyaz kare sayısı 1, 1+3, 1+3+5 yani tek sayıların toplamı olarak gidecek. Oradan sadece şu taraftaki* [*her bir şekildeki solda bulunan beyaz kareleri gösteriyor*] *beyaz karelerin sayısı n^2 oluyor. Burada da aynı şey var; n^2 tane olacak. $2n^2$ burada var. Şu tarafta, burada da altıgen sayılar şeklinde gidiyor. 1, 6, 15 böyle gidiyor. Altıgen sayıların da kuralı, n.(2n-1) dir. İki tarafta olduğu için bunu 2 ile çarpacağız. Buradan da ($4n^2$-2n) geliyor. $2n^2$'de burada vardı ($6n^2$-2n) oldu; bu beyaz kare sayısı. Diğerleri de 5, 10, 15 diye gidiyor; bu da (5n) oluyor, yeşil kare sayısı.*

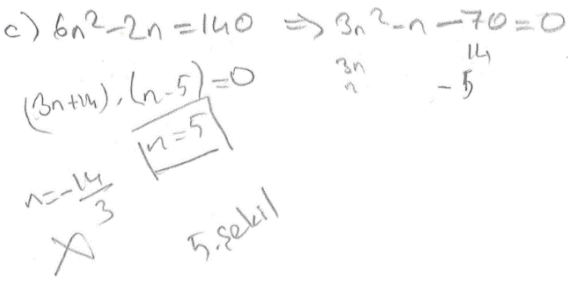
İpek: *Öncelikle beyazdan 4 tane kare var, yeşil 5 toplamda 9. Beyaz ikincide 20, 10, 30 oluyor. Sonra toplamlarının genel formülüne ulaştım. Toplamda şu kadar kare elde ediyoruz, her bir adımda: 3n.(2n+1). Sonra yeşili buldum o da 5n şeklinde devam ediyor. Sonra dedim ki toplamdan yeşil kare sayısını çıkartırsam beyaz kare sayısını bulurum dedim. Beyaz karelerin genel formülünü yazdım.*

Deniz: *Ben altıgensel sayıların formülünü bilmiyorum, açıkçası.*
Erdem: *İpek'in çözümü daha mantıklı.*
Araştırmacı*: Ortak bir çözüm oluşturun bakalım.*
Erdem, İpek'in çözümü ortak cevaplarının yer aldığı kağıda yazmaya başladı.
Erdem: *3n.*
İpek: *"2n+1" n. şekil için yeşil kare sayısı.*
Araştırmacı: *Çözümünüz bu mu?*
Erdem: *Evet.*

Genel Kurala Göre Cevapladıkları b Sorusu:



Genel Kuralına Göre Cevapladıkları c Sorusu:



Şekil 4. 28. Grup Çalışmasının GU 1 Sorusuna İlişkin Çözümleri

Erdem ve İpek'in çözümü arasında bir seçim yapmaya çalışmış, üçünün de ortak bilgileri doğrultusunda İpek'in çözümünde karar kılmışlardır. Böylece yeşil karelerin her bir adımdaki 5'er artışından "5n" kuralını geliştirmişlerdir. Şeklin tamamında bulunan kare sayısını bulabilmek için de kısa kenarlar arasındaki 3'lük artıştan "3n" kuralını, uzun kenarlar arasındaki tek sayılar kuralından (2n+1)'i kullanmışlardır. Bu kuralların birleşmesinden 3n.(2n+1) kuralını geliştirmişlerdir. Beyaz kare sayısını bulmak için ise tüm kare sayısından yeşil kare sayılarını çıkararak bir kurala ulaşmışlardır. Sorunun "b"

ve “c” şıklarında ise buldukları bu kurallar neticesinde sonuca ulaşmışlardır. Ancak geliştirdikleri bu çözümler, kullanılan temsillere ait tanımların olmaması ve çözüme dayalı yeterli gerekçelendirmelerin yapılmaması nedeniyle eksiklik taşımaktadır.

Tablo 4. 90. Grup Çalışması GU 1 Sorusu MÖA’nın Zorlandığı Noktalar

MÖA ve Araştırmacı Arasında Gerçekleşen Diyaloglar
[…] ***Araştırmacı:*** *$6n^2$-2n aynı formüle ulaştınız.* ***İpek:*** *Evet.* ***Araştırmacı****: Tamam, Saitcan sen?* ***Deniz:*** *Bende sayısal yollardan gittim ama şu yani* [*Defne'nin* çözümünü *göstererek*] *şu şekilde bir düşünceden hareket ettim de n’lere gelemedim.*

Tablo 4.90 da görüldüğü üzere grup çalışmasında Deniz’in zorlandığı bu sebeple çözüm sürecinde sessiz kaldığı ve iki MÖA’nın çözümü geliştirmeye çalıştığı tespit edilmiştir. Deniz’in zorluk yaşaması ise genel bir kural oluşturamamasından kaynaklanmıştır.

Grup çalışmasının GU 1 de bulunan M-İ sorusuna ilişkin geliştirdiği çözümler, kesin örüntü kategorisiyle ilgili tanım şartlarını sağladığı ve matematiksel nitelik anlamında bir eksiklik taşımadığı gözlemlenmiştir. Ancak geliştirdikleri çözümde; oluşturdukları kurallara ilişkin temsil tanımlarının eksikliği ve yeterli gerekçelendirmenin çözümde açıkça belirtilmemesi nedeniyle yeterli çözüm olarak “2” puan ile derecelendirilmiştir.

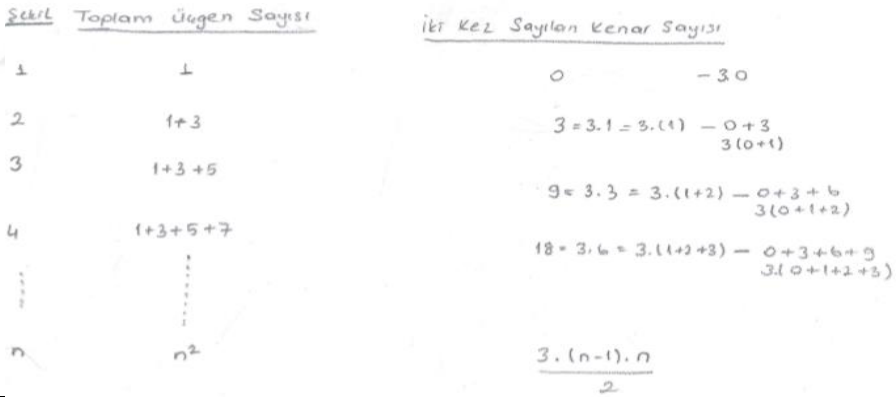
Grup çalışmasının ikinci uygulaması kapsamında MÖA’nın, M-İ odaklı görev sorusuna verdikleri cevabın kategorisi, genel matematiksel ilişki hakkında muhakeme edilmiş bir hipotez ürettikleri için varsayım olarak değerlendirilmiştir. Bu soru kapsamında ilk olarak, şekillerde bulunan çubuk ve nokta sayılarına ilişkin genel bir kural bulmaya çalışmışlardır. Ancak grup olarak çözüme başlamak yerine, ilk olarak birinci grup uygulamasında olduğu gibi bireysel bir şekilde çözümlerle uğraşmış daha sonra çözümlerini karşılaştırmışlardır. Araştırmacı, birbirlerinin çözümleri hakkındaki düşünmelerini, Tablo 4.91’de bulunan diyaloglarda görüldüğü üzere ele almıştır.

Tablo 4. 91. Grup Çalışması GU 1 Sorusu Çözüme Başlama Süreci

MÖA ve Araştırmacı Arasında Gerçekleşen Diyaloglar
[...] ***Araştırmacı:*** *Erdem ve İpek, siz şekillerle sayılar arasında bağ kurarak bir kural geliştirdiniz. Deniz ise kural bulabilmek için sayıları çözümlüyor? Hangisi daha mantıklı?* ***Erdem ve İpek:*** *Bizimkisi daha mantıklı.* ***Erdem****: Zaten kendi de gördü, sayıları çözümleyerek gittiğinden dolayı bir hata yaptı. 1, 3, 6, 9 yazdı; 9 değil 10 olması gerekiyordu. Sayıları çözümleyerek gitti aslında ama 1, 3, 6, 10 da bir örüntü 1, 3, 6, 9 şeklinde giden de bir örüntü. Ama iki farklı örüntü oluşturduğundan dolayı aklı başka örüntülere kayabilir.* ***İpek:*** *Şekilden bağımsız yani var olan örüntüden başka örüntülere sapabilir. "Sadece sayılarla ilgilendim, şekle hiç bakmadım." dedi. O yüzden şekil aslında bize var olan örüntü için yol gösteren bir şey. O yüzden şekilden yararlanmak bence daha mantıklı.* ***Deniz:*** *Bence de. Bende zaten bu şekilde düşünerek yanlış yaptığımı söyledim.*

Her bir MÖA, çözüm önerilerini birbirlerine açıklayarak en uygun çözümü geliştirmeye çalışmışlardır. Tablo 4.91 de yer alan diyalog aynı zamanda, Erdem ile İpek'in oluşturdukları kurallar ile şekil arasında bir ilişki kurarak genel bir ilişki ortaya koymaya çalıştıklarını göstermiştir. Böylece tam bir çözüm oluşturma uğraşı içinde oldukları görülmüştür.

Geliştirdikleri Genel Kural:



Geliştirdikleri Genel Kurala İlişkin Açıklamaları:

Erdem: *Bunu* [Şekil 2'i gösteriyor] *(3x1) olarak yazarız, bunu* [Şekil 3'ü gösteriyor] *(3x3) olarak yazarız bunu* [Şekil 4'ü gösteriyor] *(3x6) olarak yazarız. Bunu da* [Şekil 1'i gösteriyor] *(3x0) olarak yazalım. 0, 1, 3 ve 6 diye gidiyordu zaten.*
İpek: *Bu şekilde de düşünebiliriz. Sonra n. adımda toplam üçgen sayısı n^2 olur. Burada da burası 1, 3 ve 6 şeklinde gidiyor ama birincide 0'ı elde etmek için bu sayıların toplamın $\left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)$ idi. Birinci basamakta 0 olacak yani "n"den değil de "n-1"den başlayacak. 3 var başında $\left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)$, o zaman üçgen sayısı, toplam üçgen sayısı da değil aslında toplam üçgen sayısından oluşacak ortak kenar sayısı çıkartıldığında, yani 2 defa sayılanlar oluyor aslında toplamda kaç tane kenar yani çubuk olduğunun formülüne ulaşıyoruz.*

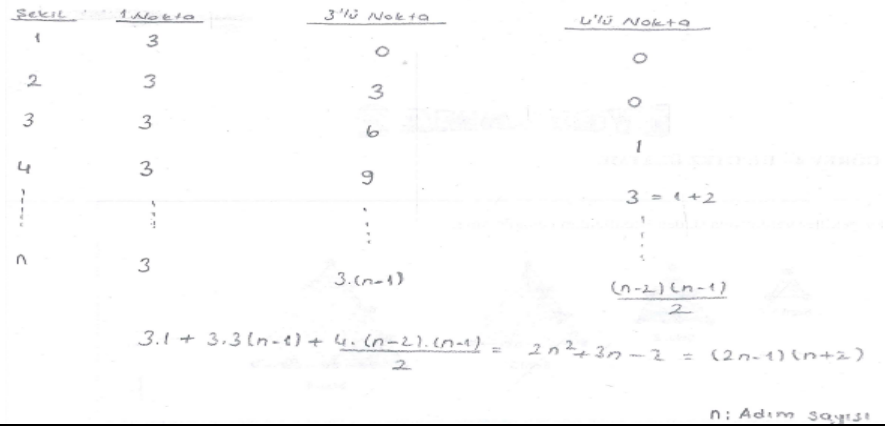
Şekil 4. 29. Grup Çalışmasının GU 2-a Sorusuna İlişkin Çözümleri

Şekillerde bulunan toplam çubuk sayısını bulabilmek için üçgen sayıları üzerinden çözüme gitmişlerdir. Bu kapsamda ilk olarak toplam üçgen sayısının, birinci şekilde 2

ikinci şekilde 1+3, üçüncü şekilde 1+3+5 şeklinde devam edeceğini tespit ederek tek sayıların toplamına dayalı kuralı kullanmışlardır. Bir üçgende üç çubuk kullanıldığından bu kuralı 3 ile çarpmışlardır. Daha sonra bu kuraldan, özellikle iç kısmında bulunan üçgenlerdeki kenarların iki kez sayılmasından faydalanarak bir kural bulup; önceden geliştirdikleri kuraldan çıkarmaya çalışmışlardır. İki defa sayılan kenarlar olarak isimlendirdikleri bu kenarlara dayalı bir kural bulabilmek için bu üçgenlerin 0, 3, 9, 18 şeklinde devam ettiğini ve bunları 3 parantezine aldıkları zaman; 3.(1), 3.(1+2), 3.(1+2+3) şeklinde devam eden ardışık sayılarının toplamının 3 ile çarpımına dayalı bir kural geliştirmişlerdir. Böylece, toplam üçgen sayısından iki defa sayılan üçgenleri çıkararak bir genel kurala ulaşmış ve bu kurala dayalı açıklamalarda bulunmuşlardır.

Toplam nokta sayısını bulmak için de şekillerde bulunan nokta sayılarını sırayla dikkate alarak bir çözüm geliştirmişlerdir. İlk olarak şekillerde bulunan bir noktanın her adımda sabit kaldığını ifade etmiş ve "3" olarak yazmışlardır. İkinci şekilden itibaren üçlü noktaların sayısının 0, 3, 6.. şeklinde devam edeceğini göz önünde bulundurarak 3.(n-1) kuralını yazmışlardır. "n-1" olarak yazma nedenlerini ise birinci şekilde üçlü nokta olmamasına dayandırmışlardır. Üçüncü şekilden itibaren var olan dörtlü nokta sayınını bulmak için de 0, 0, 3, 6, … dizisinden yararlanarak $\frac{n.(n+1)}{2}$ şeklindeki sayıların toplam formülünden yararlanmışlardır. Ancak dörtlü noktanın üçüncü şekil itibariyle başlaması nedeniyle "n" yerine "n-2" yazarak bu formülü $\frac{(n-2).(n-1)}{2}$ olarak bulduklarını ifade etmişlerdir. Buldukları formülleri kaç nokta olduğunu temsil eden sayıları çarptıktan sonra toplayarak bir sonuca ulaşmışlardır.

Geliştirdikleri Genel Kural:



Geliştirdikleri Genel Kurala İlişkin Açıklamaları:

Erdem: *n. adım için noktalara baktığımızda 2. şekilde bir tane bir kenarda var. 3. şekilde iki tane bir kenarda var. 4. Şekilde üç tane bir kenarda var. 1, 2, 3 ve ilk baştaki de 0 idi zaten 0, 1, 2 ve 3 diye gidiyor. Bu da sadece bir kenarda olan, bunu 3 ile çarptığımızda bütün şekilde olanı bulmuş oluyoruz yani bütün kenarlarda bulunan 3'lü noktaları bulmuş oluyoruz. O da 3.(n-1) oluyor. Sonra bu dörtlü noktalar ortada oluşuyor onlarda bir tane ilk olarak 3. şekilde oluşuyor. Aşağıya doğru devam ettirdiğimizde yanda bir tane daha geliyor aynı şekilde bunu aşağıya doğru devam ettirdiğimizde* [4. şekli gösteriyor] *şuraya bir tane daha gelecek. Hep birer birer artıyor. Yani 0, 0, 1, 2, 3, 4 diye artıyor. Yok 1, 3, 6, 10 yani şuna 2 tane eklendiğinde 3 tane olacak 3 tane eklenecek sonradan bundan sonra 4 tane eklenecek o da şöyle oluyor. Böylece* $\left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)$ *ama birinci adımdan başlamadık. Birinci adımdan başlamadığı için 2 adım geriye götüreceği için "n" in yerine (n-2) yazıyoruz.* $\left(\frac{(n-2).(n-1)}{2}\right)$ *olacak. Sonra, 3 nokta bulunuyorsa bunu 3 ile çarpacağız 4 nokta bulunuyorsa bunu 4 le çarpacağız sonra bunları toplayacağız.*

Şekil 4. 30. Grup Çalışmasının GU 2-b Sorusuna İlişkin Çözümleri

Özellikle soruyu ve yapılan çözümü tam olarak anlamayan Deniz'e yardımcı olabilmek için Erdem ve İpek sürekli açıklamalarda bulunmuştur. .

Tablo 4. 92. Grup Çalışmasının GU 2 Sorusunda Zorlandığı Noktalar

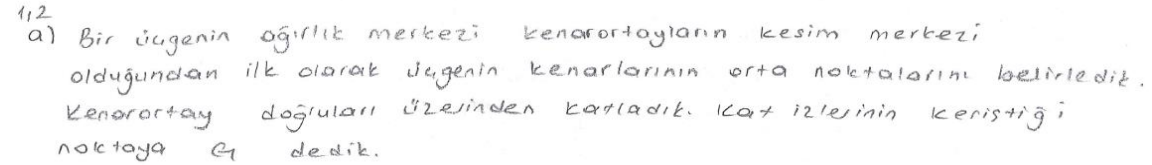
[...]
Deniz: *Bir şey soracağım bu üçüncü şekilde nasıl 9 tane üçgen oluştu? Ben halen anlamadım.*
İpek: [üçüncü şekildeki üçgenleri sayıyor] *1, 2, 3…9.*
Deniz: *Hayır, oluşan üçgen sayısı diyorsunuz ya.*
İpek: *Oluşan toplam üçgen sayısı.*
Deniz: *Hımm. Oluşanı nasıl yazacaksınız? Burada* [şekil 2'yi gösyeriyor] *bir tane oluştu değil mi?*
Erdem: *Evet, bir tane kendiliğinden oluşan üçgen.*
[...]
Deniz: *Ortak kenar dediğin ne?* [İpek'e soruyor]
İpek: *Şunlar* [kendiğinden oluşan üçgenleri gösteriyor] *ikişerli olarak sayıldığı için.*
[...]
Deniz: *Ortak kenar sayısı şimdi de ikişerli ortak kenar, bu daha iyi ifade edilmeli bence eksik kaldı.*
İpek: *İki defa sayılan, iki üçgende de kenar kabul edilen.*
Deniz: *O şekilde daha iyi bir çözüm olabilir çünkü neye göre ortak yani, belki benim algılamam farklıdır. Siz ikiniz ortak olarak çözdüğünüz için anladınız ama ben anlamadım mesela.* [...]. *Ortak kenar sayısı ama neye göre ortak kenar sayısı?*
Erdem ve İpek: *İki defa sayılan ortak kenar sayısı.*
Deniz: *Heh tamam şimdi oldu.*

Soruyu ve grup arkadaşlarının yaptıkları çözümleri anlamakta zorlanan Deniz, aklına takılan her noktayı sormuştur. Deniz'in sorgulamaları Tablo 4.92'de yer alan diyalogda görüldüğü üzere şekil ve sayılar arasında yapılan ilişkilendirmeler ve temsillerin kullanımına yönelik olmuştur. Böylece çözümlerini daha açık ve net olarak yazma imkanı bulmuşlardır.

GU 2 de bulunan M-İ sorusuna ilişkin geliştirdikleri çözümler, varsayım kategorisiyle ilgili tanım şartlarını sağladığı ve matematiksel nitelik anlamında bir eksiklik bulunmadığı temele alınarak beklenen tam çözüm olarak "3" puan ile derecelendirilmiştir.

Grup çalışmasında üçüncü bireysel uygulamanın birinci aşaması kapsamında M-İ odaklı görev sorusuna verdiği cevabın kategorisi, iddianın kapsadığı olası tüm durumların uygun bir alt kümesinin sağlanabildiği için deneysel argüman olarak değerlendirilmiştir. Bu soru kapsamında ilk olarak, verilen kağıtlar üzerinde katlamalar yaparak kenar uzunlukları arasında bir ilişki bulmaya ve ağırlık merkezini belirlemeye çalışmışlardır.

Geliştirdikleri Çözüm:


1,2
a) Bir üçgenin ağırlık merkezi kenarortayların kesim merkezi olduğundan ilk olarak üçgenin kenarlarının orta noktalarını belirledik. Kenarortay doğruları üzerinden katladık. Kat izlerinin kesiştiği noktaya G dedik.

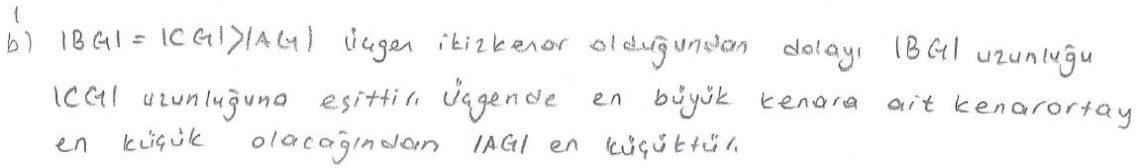
Geliştirdikleri Çözüme İlişkin Açıklamaları:

İpek: *İlk olarak kenarların orta noktalarını bulduk. Daha sonra onları köşeleri ile birleştirerek kenarortaylarını çizdik. Bu üçünün kesiştiği noktaya kenarortayların kesim merkezi olan ağırlık merkezi dedik. Bu bilgiye önceden sahiptik, kenarortayların kesim merkezine ağırlık merkezi dendiğine. O yüzden böyle bir yol izledik. G'yi bu şekilde bulduk. Daha sonrasında birinci üçgenin ikizkenar üçgen olduğuna katlayarak karar verdik. O yüzden de DG=DC eşit olduğunu daha sonrasında da AG'nin onlardan küçük olduğunu, bunu sebebinin de üçgende en büyük kenara ait kenarortayın en küçük olduğu kıyasıydı. Bir ikizkenar üçgende ikizkenarların haricindeki kenar diğerlerinden, en azından burada büyük oluyor.*
Erdem: *Neyi?*
İpek *: Bunun uzun kenar olduğunu.*
Erdem*: Uzun kenar o işte.*
İpek: *Görünüşte öyle de işte* [tereddüt ediyor].
Deniz: *Tam tersi de olabilir.*
İpek: *Görünüşte öyle de mantıklı açıklaması.*
Erdem: *Aynı şekilde işte, yaptıklarımızın aynısını yaparsak anlaşılır.*
İpek: *Aynı şekilde yaparsak, tamam* [kağıt üzerinde uzunlukları karşılaştırmaya çalıştı].
Erdem: *Hayır hayır ikizkenar olduğu için orta noktadan yine*
Araştırmacı: *Evet Deniz şu an ne yapıyorlar?*
Deniz: *Hangi kenarın büyük olduğunu göstermeye çalışıyorlar.*
Araştırmacı: *Nasıl gösteriyorlar?*
Deniz: *Kenar orta noktalarından diğer kenara bir paralel oluşturmaya çalışıyorlar*.

Şekil 4. 31. Grup Çalışmasının GU 3.1-a Sorusuna İlişkin Çözümleri

Ağırlık merkezini bulabilmek için kenarların orta noktalarını belirlemişlerdir. Bunu yapabilmek için üçgenler üzerinde katlamalar yaparak üç kenarında kenarortay noktası boyunca kesişen nokrasını ağırlık merkezi olarak almışlardır. Çözüm geliştirme sürecinde aktif rol oynayan Erdem ve İpek'e süreci dinleyerek dikkatli bir şekilde takip eden Deniz yorumlarda bulunmuştur. Araştırmacı tarafından Şekil 4.31 de yer alan diyalog da görüldüğü üzere yöneltilen soru doğrultusunda, grup arkadaşlarının çözümlerini anlamakta zorlanmadığı gözlemlenmiştir.

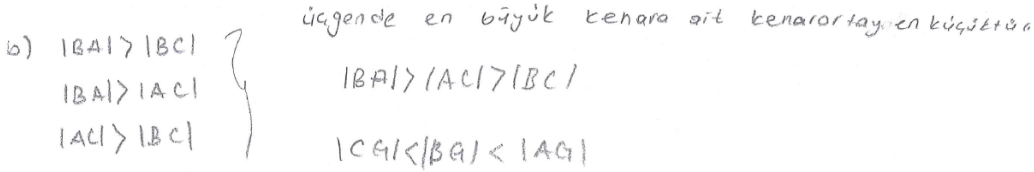
Geliştirdikleri Çözümler:



Geliştirdikleri Çözüme İlişkin Açıklamaları:

***İpek**: İkizkenar üçgende bunun uzun kenar olduğunu, bunu tam şunun üzerine getirdiğimiz zaman köşeleri üst üste gelecek şekilde tamamını örtmüyor. Demek ki bu kenar bundan büyük.*
***Araştırmacı:** Kenarlar birbiri üzerine getirerek örtme ya da eksik kalma durumuna göre karar veriyorsunuz.*
***İpek:** Evet. Ama bu ikizkenar üçgen olduğu için oluyor. Ama diğerinde bu yolla hangisinin diğerinden küçük olduğuna karar veremeyiz.*
***Araştırmacı:** Onu nasıl inceliyorsunuz?*

Geliştirdikleri Çözümler:



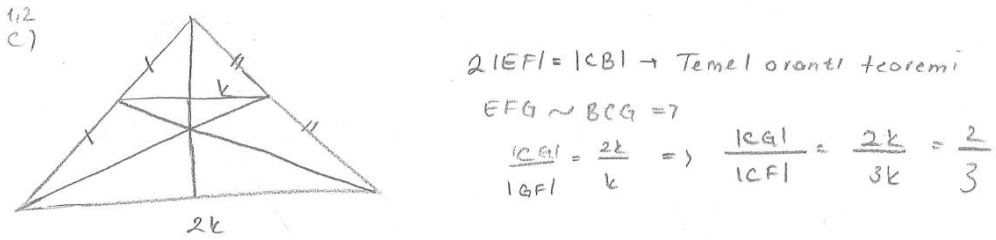
Geliştirdikleri Çözüme İlişkin Açıklamaları:

***İpek**: Az önceki yöntemle, paralelkenar oluşturduk. Orta notasından bu uzunluk şuradan daha büyük yükseklikleri aynı olacak paralelkenar olduğu için. Büyük olanın gördüğü hipotenüste büyük olacağından dolayı kenar uzunlukları büyük oluyor o şekilde karşılaşırdık.*

Şekil 4. 32. Grup Çalışmasının GU 3.1-b Sorusuna İlişkin Çözümleri

Verilen üçgenlerin kenar uzunlukları boyunca katlamalar yaparak uzunlukları hakkında bir fikir sahibi olmaya çalışmışlardır. Bu kapsamda bir üçgenin ikizkenar bir üçgenin ise çeşitkenar olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Farklı uzunluğa sahip kenarlar arasında bulunan ilişkileri de yine katlamalar sonucunda bulmuşlardır.

Geliştirdikleri Çözümler:



Çözümlerine İlişkin Açıklamaları:

İpek: *İki kenar uzunluğu eşit olduğu için tam orta noktalarından geçecek bir paralel daha çizip buradaki temel orantı teoreminden de k ve 2k oluyor. Daha sonrasında EFG ve BCG üçgenleri de benzer oluyor.*
Deniz: *Benzer.*
İpek: *Buradan CG ve GF'nin oranı 2k /k idi. O yüzden CG ve C' nin oranı da 2k/3k o da 2/3 oluyor.*

Şekil 4. 33. Grup Çalışmasının GU 3.1-c Sorusuna İlişkin Çözümleri

Sorunun "c" şıkkını ise temel orantı teoreminden yararlanarak çözmüş ve oranı 2/3 bulmuşlardır. Bu çözümleri, matematiksel olarak kabul edilmiş bir bilginin nereden geldiğini göstermeden direkt soru üzerinde uyguladıkları için mantıksal argüman kategorisinde değerlendirilmiştir.

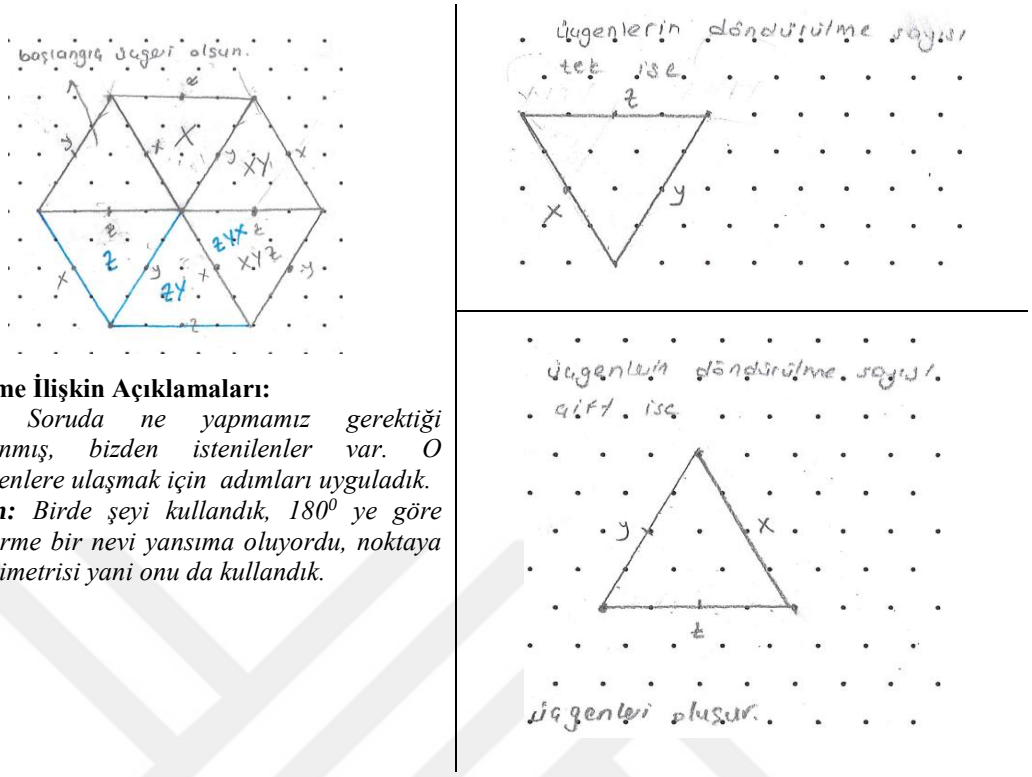
GU 3.1 de bulunan M-İ sorusuna ilişkin a ve b şıkkı kapsamında geliştirdikleri çözümler deneysel argüman kategorisi, c şıkkı ise mantıksal argüman kategorisi ilgili tanım şartlarını sağladığı ve matematiksel nitelik anlamında bir eksiklik bulunmaması nedeniyle beklenen tam çözüm olarak "3" puan ile derecelendirilmiştir.

Grup çalışmasında üçüncü bireysel uygulamanın ikinci aşaması kapsamında M-İ odaklı görev sorusuna verdikleri cevabın kategorisi, , belirli bir durumda tüm sınıfı temsil eden genel bir argüman sağladığı için genel örnek kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu soru kapsamında ilk olarak, referans olarak alacakları üçgenlere uygulayacakları döndürme sayısını belirlemeye çalışmışlardır.

Tablo 4. 93. Grup Çalışması GU 3.2 Sorusu Çözüm Süreçleri

***İpek**: 180^0 derece döndüreceğiz ve üç defa ardışık olarak döndürmemiz isteniyor*
***Hami:** İlk önce x, y, z daha sonra z, y, x yaptığımızda bunların birbirine eşit olduğunu iki taraflı olarak göstereceğiz.*
***Erdem**: x, y, z ile a, b, c; b, a, c; c, b, a diye üç farklı şeyde denememiz lazım. Üç durum mu altı durum mu?*
***Deniz:** Kenarlar eşit uzunlukta mı ben onu anlamadım.*
***Erdem:** Eşkenar üçgen ya.*
***İpek:** Eşkenar üçgen.*
***Deniz:** Eşkenar üçgen mi? Aaa yazıyormuş, okumamışım.*
***Erdem:** Eşkenar üçgen.*
***Deniz:** Tamam*
***Erdem:** Altı durumda inceleyelim mi yoksa tek durumda mı inceleyelim?*
***Deniz:** Sorduğu bu mu, yoksa?*
***Erdem:** İlk önce abc olabilir bca olabilr ya da cba olabilir yani şu sıralama xyz sıralaması.*
***Deniz:** Benim anladığım mesela buna [verilen üçgeni gösteriyor] "x" deyip burdan döndürürsek xy bunu bir de c etrafında döndürürsek xyz.*
***İpek:** Aynen.*
***Erdem:** O tamam da ben şunu soruyorum şimdi x'e "a" dersek y ile z, y "b" de olabilir "c" de olabilir iki farklı durum olur toplamda da altı farklı durum olur.*
***Deniz:** Ama eşkenar üçgen.*
***İpek:** Altı farklı duru oluyor da altı farklı durum birbirine eş olur mu acaba sıralama xyz iken tam tersine zyx iken döndüğünde mi eşitlik var onu görmek açısından bence deneyebiliriz.*
***Erdem:** Altı tanesini o zaman deneyelm bende onu diyorum işte.*
***Deniz:** Eşkenar olduğu için fark eder mi?*
***Erdem**: Efendim?*
***Deniz:** Eşkenar olduğu için fark eder mi? Denememize gerek var mı?*
***İpek:** Hımm…*
***Erdem**: O da doğru.*
***Deniz:** Bir şey değişmeyecek yani uzunluklar hep aynı diye düşünüyorum ama.*
[ ]
***Deniz:** Şu son cümleyi çok anlayamadım ben siz anladınız mı?*
***Erdem**: Mesela şunu a etrafında döndürünce a oluyordu ya bu sefer x oldu.*
***İpek:** Bu sefer x oldu.*
***Deniz:** En son dediği ne peki?*
***Erdem:** xyz birbirinden farklıdır yani x "a" iken y de "a" olamaz mesela.*
***Deniz:** Anladım*
***Erdem:** Yani x'i "a" olarak yani şöyle diyeyim x'i "a" olarak aldığımızda, x "b" olamaz. Yani bu varsa bu olmaz.*
***Deniz:** Hıı bunu mu diyor…*

Referans alacakları üçgene uygulayacakları döndürme sayısında çözümün başında kararsızlık yaşamışlardır. Ancak Deniz'in eşkenar üçgen durumuna dikkat çekmesi ile sadece üç durumu incelemeye yönelik karar vermişlerdir. Bu aşamada ayrıca Deniz'in sorunun anlamadığı kısımları sorması üzerine, MÖA açıklamalarda bulmuşlardır. Daha sonra, referans bir üçgen alarak soruda verilen bilgilerden hareketle döndürmeler yapmışlardır.



Çözüme İlişkin Açıklamaları:
İpek: *Soruda ne yapmamız gerektiği açıklanmış, bizden istenilenler var. O istenilenlere ulaşmak için adımları uyguladık.*
Erdem: *Birde şeyi kullandık, 180^0 ye göre döndürme bir nevi yansıma oluyordu, noktaya göre simetrisi yani onu da kullandık.*
İpek:

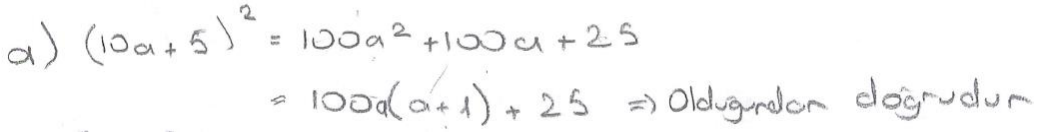
Şekil 4. 34. Grup Çalışmasının GU 3.2 Sorusuna İlişkin Çözümleri

Başlangıçta bir X üçgeni alarak bunu 180^0 döndürmüş ve XY üçgeninin geldiği konumu belirlemişlerdir. Sonrada bir Z üçgeni olarak soruda istenen döndürmeleri yapmış ve XYZ üçgenini belirlemişlerdir. Bu döndürmeler sonucunda aynı üçgen konumuna ulaştıkları için tek ve çift döndürmeler sonucunda nasıl bir gösterime ulaşacaklarını her bir üçgen için belirlemişlerdir.

Grup çalışmasında GU 3.2 de bulunan M-İ sorusuna ilişkin geliştirdikleri çözümler mantıksal argüman kategorisi ilgili tanım şartlarını sağladığı ve matematiksel nitelik anlamında bir eksiklik bulunmaması nedeniyle beklenen tam çözüm olarak "3" puan ile derecelendirilmiştir.

Grup çalışmasının dördüncü bireysel uygulamanın birinci aşaması kapsamında M-İ odaklı görev sorusuna verdiği cevabın kategorisi, belirli bir durumda tüm sınıfı temsil eden genel bir argüman sağladığı için genel örnek kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu soru kapsamında ilk olarak, verilen ifadeleri çözümleyerek önermenin doğruluğunu incelemişlerdir.

Geliştirdikleri Çözüm:



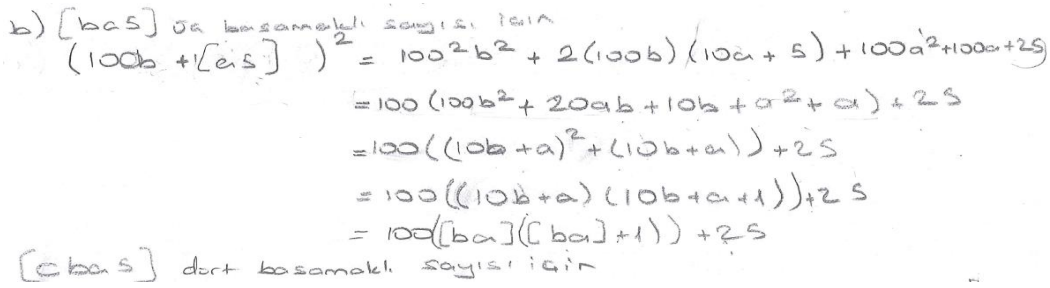
Çözüm Süreçlerine İlişkin Bir Diyalog

Deniz*: Ne yapmayı düşünüyorsunuz?*
İpek*: Çözümleyerek başlayabiliriz.*
İpek: *Aynen. $(10a+5)^2$... Karesini bu şekilde alabilir miyiz?*
Erdem: *Çözümledikten sonra alırız.*
İpek: *Alırız aynı sayı ya alırız.*
Deniz: *Bunu açayım mı?*
Erdem: *Onu açma.*
Deniz: *Ee zaten bunu açtığımızda bu gelmeyecek mi* [*eşitliğin iki tarafını gösteriyor*]**?**
İpek: *Açalım onu.*
Deniz: *Ee bunu açtık bu budur diyebilecek misin şimdi* [*Erdem'e soruyor*]*?*
Erdem: *100 parantezine al.*
Deniz: *(100a) parantezine alayım bence.*
Erdem: *Bununda buna eşit olduğunu göstermiş olduk işte bu kadar* [*Eşitliğin iki tarafını gösteriyor*].
Deniz: *Doğru, ispatlayın demiyor doğru olduğunu gösterin diyor.*
Erdem: *Bunu göstermiş olduk.*

Şekil 4. 35. Grup Çalışmasının GU 4.1-a Sorusuna İlişkin Çözümü

Soruda verilen ifadenin açılımını yaparak bir eşitlik elde etmişlerdir. Ulaştıkları bu ifadeyi soruda uygun gösterim elde edecek şekilde çözümleyerek doğruluğunu teyit etmişlerdir. Bu çözüm süreçlerinin tamamında birlikte hareket etmiş ve ortak çözüm geliştirmişlerdir.

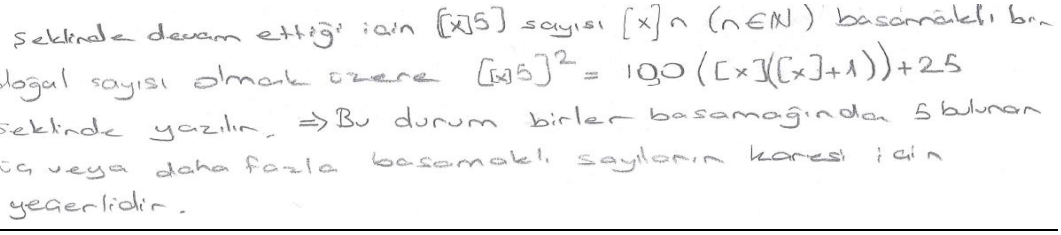
Geliştirdikleri Çözüm:



Çözümlerine İlişkin Açıklamaları:

Erdem: *Acaba ab.(ab+1) mi olacak..*
Deniz: *Şey yapsa burayı direkt şu şekilde "ba" olarak yazsak sonra bu bulduğumuzu buraya yazarız.*
Erdem: *Anlamadım.*
Deniz: *Şey diyorum mesela şuna "b" diyelim şurası aynı kalacak yani ıı..*
Erdem: *a5*
Deniz: *Burası "a5" olacak değil mi, biz bunu yine aynı şekilde alırız, bu bizim için bilinmeyen şeklinde kalır sonra bunu da biliyoruz zaten, direkt yerine yazarız.*
Erdem: *Tamam.*
Deniz: *Sen ne diyorsun?*
İpek: *Bence doğru.*
Erdem: *Ama burada a ile a+1 nasıl değişecek bu da önemli. Yani şunu diyorum; mesela sayıyı ab5 olarak alsak ab.(ab+1) mi olacak?*
İpek: *Aslında şöyle bir şey var, şurada birkaç örnek vererek deneyerek mesela 1 koyduğumuz zaman ne oluyor 225, 2 koyduğumuz zaman 625, son basamağı hep 25 ile mi bitiyor bunu mu söylüyor? Son iki basamağı.. Bununla ilgili bir şey mi acaba aramamız gerekiyor?*
Erdem: *Olabilir.*
Deniz: *Hımm.*
İpek: *Mesela işte 100 olduğu zamanda 5 ya sadece birler basamağındakinin karesi sonuna hep 25 ile biten sayılar mı olacak. Mesela 35, 35 in karesi kaç yapıyor karesini hesaplayalım bir.*
Deniz: *1125.*
Erdem: *Şu ifadeden onu anlıyorsun zaten 25 ile biteceğin anlıyorsun.*
İpek: *Ama mesela şuradan belki 25 ile bitmeyecek bir şey geliyordur.*
Erdem: *Oradan 25 ile bitmeyen bir şey gelemez ki 100 ün katı olacak.*
Deniz: *Gelemez ki.*
İpek: *Orda tamam şunu demek istiyor bence sonu 25 ile biten olur mu?*
Deniz: *Sonu 25 ile bitmeyen bir şey arayalım o zaman biz.*

Geliştirdikleri Genel Kural:



Şekil 4. 36. Grup Çalışmasının GU 4.1-b Sorusuna İlişkin Çözümü

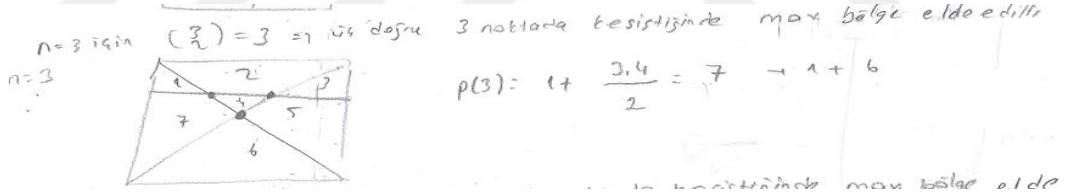
Soruda verilen durumun üç veya daha fazla basamaklı sayılar için geçerli olup olmayacağını incelemişlerdir. Bu kapsamda ilk olarak, üç basamaklı bir sayı belirlemiş ve a şıkkında bildikleri (a5) ile ilgili eşitliği kullanmak üzerinden hareket etmişlerdir. Bu kapsamda belirledikleri (ba5) sayısını (100b+a5) olarak yazıktan sonra sayının karesini

alarak çözümlemeye geçmişlerdir. Sorunun "a" şıkkında a5 ile ilgili ulaştıkları sonuçları, çözümledikleri üç basamaklı sayı için yerine yazmışlardır. Yaptıkları çözümlemelerde eşitliğe ulaşabildikleri sonucuna varmışlardır. Dört basamaklı sayılar içinde sağlanabildiğini teyit ederek ifadenin her durumda geçerli olacağı sonucuna ulaşmışlardır. Bu çözüm süreçlerinin tamamında birlikte hareket etmiş ve ortak çözüm geliştirmişlerdir.

Grup çalışmasında GU 4.1 de bulunan M-İ sorusuna ilişkin geliştirdikleri çözümler genel örnek ile ilgili tanım şartlarını sağladığı ve matematiksel nitelik anlamında bir eksiklik bulunmaması nedeniyle beklenen tam çözüm olarak "3" puan ile derecelendirilmiştir.

Grup çalışmasının dördüncü bireysel uygulamanın ikinci aşaması kapsamında M-İ odaklı görev sorusuna verdiği cevabın kategorisi, belirli bir örneğin veya durumun temsiline dayanmayan ispat sağlayabildikleri için genel örnek kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu soru kapsamında ilk olarak, verilen ifadeleri doğruların ayırdıkları bölgelere ilişkin çözümler geliştirmişlerdir.

Geliştirdikleri Çözümün Bir Kısmı:



Geliştirdikleri Çözüme İlişkin Açıklamaları:

***İpek**: İlk önce 1. yoldan maksimum bölge oluşturma şartına karar verdik. Bu da n tane doğru n'in 2 li kombinasyonu şeklinde maksimum noktada kesişir. Bu da bizim maksimum bölge elde etmemizi sağlayacak. Sonra ulaştığımız sonuçları bir tablo haline getirdik, sayılar arasındaki bir örüntüyü yakaladık. Buradan da $\frac{n.(n+1)}{2}$ olduğunu göstermiş olduk. Bizden istenilene ilişkin bir formüle ulaştık.*
***Araştırmacı**: n'in 2'li kombinasyonunu nerede kullandınız, ben onu göremedim çözümde?*
***Erdem:** n'in 2'li kombinasyonunu çözümde göremezsiniz çünkü n'in 2'li kombinasyonunu kullanarak maksimum kesişme noktalarını bulduk. Yani şu, biz biliyoruz ya maksimum noktada kesişirse maksimum noktada bölge oluşur. Bunu biz biliyoruz. 3 ün 2'li kombinasyonunun 3 olduğunu iliyoruz. O zaman 3 noktada kesişecek şekilde yaparsak maksimum bölge oluşur.*
***İpek** Şöyle diyelim mesela, n=2. 2'nin 2'li si 1, 2 doğruyu bir noktada kesişirse maksimum bölge edilir, n=2 için. Burada da n=3 için 3 doğru 3 noktada kesişirse maksimum bölge elde edilir*.

Şekil 4. 37. Grup Çalışmasının GU 4.2 Sorusuna İlişkin Kanıt Çözümleri

Maksimum bölge oluşturmak için doğruları maksimum bölgede kesiştirmeye çalışmışlardır. Böylece doğruları kombinasyondan yararlanarak belirli noktalara

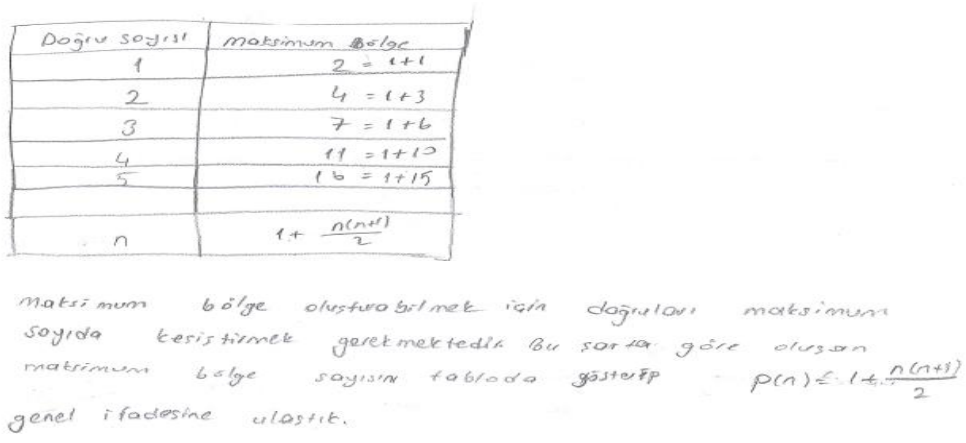
kesiştirmeye çalışmış ve oluşan bölgeleri belirlemişlerdir. Oluşan bölgelerden ve ardışık sayılar formülünden yararlanarak bir kural geliştirmişlerdir.

Sorunu çözümü sırasında, oluşan bölge sayısı ile kesişen doğrular arasında ilişki kuramayan İpek'e yardımcı olmuşlardır.

Tablo 4. 94. Grup Çalışmasının GU 4.2 Sorusu Çözüm Süreçleri

İpek: *Ama şimdi biz bildiğimiz için bunu bu şekilde yapıyoruz da, hiç vermeselerdi bununla ilgili bir formül oluşturun deselerdi biz yine de bu sonuca ulaşabilecek miydik?* ***Deniz:*** *Sonuçta örüntü hep böyle devam ediyor ki.* ***İpek****: Tüm hepsini bulmamız mümkün olacak mıydı mesela biz denedik denedik ama çok ileriki bir adımda sağlamadı mesela sağlamadığını gösterebilir miydik?* ***Deniz:*** *Benim aklıma bir şey geldi ama biz zaten şimdi mesela bunu bilmiyoruz tamam mı, n=0 için burada 1 değil mi 1 tane biz bir doğru ekliyoruz 1+1 oldu, elimizde 1+1 var, bir doğru daha 2 için diyoruz 1+1+2, 3 için bölüyor yine 1+1+2 var. n=3 için 3 ekliyoruz, yine burada 1+1+2+3 var için 4 için 4 ekliyoruz.* ***İpek****: Ama bunun bütün n değerleri içinde olabildiğini gösterebilmemiz lazım. Belki için n=500 için bu sağlanmayacak bunu öngörebiliyor muyuz?* ***Deniz****: Biz bunu görmesek sadece şurasına kadar n için bir genelliğe ulaştığımızda burada da doğru olacağını göstermiş olmuyor muyuz?* ***İpek:*** *Şunun nedenini anlamlı bir şekilde söyleyebilirsek olur ama tam bölgelerin neye göre oluştuğunu tam olarak ifade edemiyoruz.* ***Deniz:*** *Bir öncekinden doğru sayısı kadar artıyor bun dayalı bir ilişki yakaladım ama* *İpek: Tamam onun sebebini söylediğimiz zaman genelliğe de gideriz.* ***Deniz:*** *Şöyle düşündüm mesela şunun 4 tane, üzerine 5. eklediğimiz zaman şimdi 5; 4 ünü de kesecek şekilde eklediğimiz zaman hepsini kesiyor değil mi sonuçta burada bir bölge var. Şu diğer taraftaki bölgeleri önemseme yani etkilemiyor* ***İpek:*** *2 katı kadar şey oluyor yani.* ***Erdem:*** *Aynen* ***İpek:*** *Bir var olan bölge sayısı kadar bir tane daha ekliyor.* ***Erdem****: Var olan bölgeye bir tane daha ekliyor var olan bölgeye bir tane daha ekliyor.* ***İpek****: Anladım.* ***Erdem:*** *Eee bu da var olan bölge sayısı olmuyor mu?* ***İpek:*** *Tamam.*

Yaptıkları çözümleri Şekil 4.38 de görüldüğü gibi özetleyerek yazmışlardır.



Şekil 4. 38. Grup Çalışmasının GU 4.2. Sorusuna İlişkin Kanıt Çözümleri

GU 4.2. için bir başka çözümü ise tümevarımla gerçekleştirmişlerdir. GU 4.2 de bulunan M-İ sorusuna ilişkin geliştirdikleri çözümler kanıt ile ilgili tanım şartlarını sağladığı ve matematiksel nitelik anlamında bir eksiklik bulunmaması nedeniyle beklenen tam çözüm olarak "3" puan ile derecelendirilmiştir

4.4.2. Grup Çalışmasında M-İ Odaklı Görev Sorularına İlişkin Psikolojik Bileşen Kapsamında Edilen Bulgular

MÖA, M-İ odaklı görev sorularına ilişkin yaptığı çözüm süreçlerine ilişkin algılarını strateji ve çözüm niteliğine dayandırarak açıklamışlardır. Stratejik açıdan çoğunlukla bilgilerine; çözüm niteliği açısında çoğunlukla geçerli olmaya dayalı açıklamalar yapmışlardır.

Tablo 4. 95. MÖA'nın Grup Çalışmasında M-İ Sürecine Yönelik Algıları

	Strateji					**Çözümün Niteliği**		
	Farklı Temsil	**Temsilin Güçlendirilmesi**	**Bilgi**	**Farklı Stratejileri Seçme**	**Özel Durumları İnceleme**	**Geçerli Olma**	**Uygun Olma**	**Genellenebilir Olma**
***Örüntü**	**1**	**1**	**3**	**1**		**3**	**2**	**4**
***Varsayım**	**1**	**1**	**2**		**1**	**2**	**3**	**7**
***Deneysel Argüman**			**3**			**4**	**2**	**4**
***Mantıksal Argüman**			**6**			**7**	**2**	**3**
***Genel Örnek**			**5**			**6**	**3**	**2**
***Kanıt**			**6**			**7**	**3**	**2**
Toplam	**2**	**2**	**25**	**1**	**1**	**29**	**15**	**22**
			31				**63**	

Grup çalışmasında MÖA'nın çözüm süreçlerine ilişkin algılarını genel olarak strateji ve çözüm niteliğine dayandırdığı belirlenmiştir. Farklı durumları ve stratejileri göz önüne alarak geliştirdikleri çözümlerde farklı bir çözüm geliştirmeye yönelik algılarını; sorunun çözümünde kolaylık sağlamalarına, birlikte karar verdikleri bir çözüm olmalarına ve farklı yollardan çözüm yaptıkları için bu duruma gerek olmadığına dayandırmışlardır.

Farklı çözümün sadece GU 4.1 sorusunda ifadenin sözel olarak açıklanabilmesiyle geliştirilebileceğini düşünmüşlerdir. Çözümlerinin doğruluğuna yönelik algılarını ise istenilen durumları göstermiş olmalarına, matematiksel olarak kesin bilgileri kullanmalarına ve bu kesin bilgilere dayandırmalarına, genelleme yapmalarına ve çözümlerinin ispat olmasıyla ilişkilendirmişlerdir. Yapılması gereken bütün durumları yaptıklarını düşündükleri için çözümlerinde geliştirilebilir bir yön olmadığı algısı için de olmuşlardır. Çözümlerini ispat olarak kabul ettikleri için de her durumda doğru ve geçerli çözümler oluşturduklarını ifade etmişlerdir.

MÖA'nın grup çalışmasında algılarını yansıtan diyaloglar Tablo 4.96 da verilmiştir. Algılara ilişkin diyaloglar, grup çalışması yapma bilincinin daha çok ikinci uygulama ve sonrasında oluşmasından dolayı ağırlıklı olarak üçüncü ve dördüncü uygulamalardan seçilmiştir. Ayrıca kişilere ilişkin kısaltmalar kullanırken de şu yöntem takip edilmiştir:

- Örneğin; G3-D1: 3. Grup uygulamasında Deniz'in 1. açıklaması
- Örneğin; G4-E4: 4. grup uygulamasında Erdem'in 4. açıklaması

Tablo 4. 96. MÖA'nın Grup Çalışmasında M-İ Çözümlerine Yönelik Algılarından Örnek Diyaloglar

Tema	Kod	Örnek Diyalog
Strateji	**Farklı Strateji Seçme**	[…] ***Araştırmacı:*** *Farklı çözümler geliştirilebilir miydi?* ***G3-D1:*** *Şurada aslında iki farklı şey düşündük b şıkkı için* ***Araştırmacı:*** *Neydi onlar? Tekrar söyler misiniz?* ***G3-İ1:*** *kenarları kıyaslarken iki farklı yoldan gidebiliriz* ***G3-D2:*** *Evet.* ***Araştırmacı:*** *Ne onlar?* ***G3-İ2:*** *Biz ilk üçgenin ikizkenar üçgen olduğuna karar verdiğimiz için birinden birini farklı olduğunu göstermemiz yeterli olacaktı ama diğeri çeşitkenar üçgen. Burada bir kenarı diğer kenarın üzerine getirdiğimizde zaten onun ondan büyük olduğu belli oluyor ama bunda paralel oluşturacak şekilde oluşturup aralarında bir bağlantı yakaladık. Ondan sonrada hangi kenarın hangi kenardan büyük olduğunu söyledik.* ***Araştırmacı:*** *Farklı çözüm yapmış olduk yani diyorsunuz?* ***G3-İ3****: Farklı yollar kullanarak göstermiş olduk.* ***Araştırmacı:*** *Bu çözümden farklı yollar geliştirilebilir miydi?* ***G3-İ4:*** *Benim aklına gelmiyor.* ***G3-D3:*** *benimde gelmiyor* ***G3-E1:*** *Bu çözümden farklı çözüm, yok*.

	Bilgi **Temsilin Güçlendirilmesi**	[…] ***Araştırmacı****: Farklı çözüm olabilir dediniz ya peki farklı çözümler arasından neden bunu seçtiniz?* ***G4-İ6****: İlk olarak aklımıza bu geldiği için.* ***G4-E4:*** *Aklımıza ilk olarak bu geldiği için.* ***G4-D7:*** *Üçümüzün de ortak çözümü bu olduğu için devam ettik.* […] ***G4-E5****: Belki sözel bir şekilde ifade edebilirdik zaten İpek de bu şekilde söylemişti işte son ii basamağı 25 olan sayılar şeklinde bir ifade mesela.* ***G4-D8:*** *Aynen sonu hep 25 olan ifadeler* ***G4-İ9:*** *Çünkü 100 çarpanı var ve 25 artıyor 100 çarpanından dolayı hep son iki basamağı 0 olan sayılar olacağı için.*
	Bilgi **Farklı Temsil**	***Araştırmacı:*** *Farklı çözümler geliştirilebilir miydi sizce?* ***G4-D45:*** *Geliştirdik iki farklı çözüm belki daha farklı bir yol daha vardır ama zaten ikisini biz yaptık.* ***Araştırmacı:*** *Farklı yollar vardır dedin farklı yollar arasından siz neden bunu seçtiniz?* ***G1-İ44:*** *Bunları daha rahat gösterebildiğimiz için* ***G4-D46:*** *Bunları gördük.*
Çözüm Niteliği	**Geçerli Olma**	***Araştırmacı:*** *Çözümünüz sizce doğru mu?* […] ***G3-İ25:*** *Biz yaptık ☺ düşündüğümüz şeyleri matematiksel temellerle ifade ettiğimiz için o yüzden doğrudur.* ***Araştırmacı****: "Matematiksel temeller" ifadesiyle ne anlatmak istiyorsun?* ***G3-İ26:*** *Düşündüğümüzü matematik diliyle yazdık onları da bildiğimiz matematiksel bilgilerle temellendirdik ve destekledik* ***Araştırmacı:*** *"Matematiksel temellerle yaptık." ifadesiyle ne anlatmak istiyorsun?* ***G3-İ27:*** *Mesela temel orantı teoremi.* […] ***G3-E17:*** *Teoremlere dayandırdık.* ***G3-İ28:*** *Benzerlik.* ***G3-D16:*** *Kural.* ***G3-18:*** *Benzerlik teoremleri, temel orantı teoremlerine dayandırdık, işlemlerde de bir hata yapmadık ki zaten biliyorduk bir şeyin kenarortay doğrusu üzerinde 2k ya k olarak paylaştığını onu zaten bulduk biliyorduk sadece uyguladık ispatını da yaptık bence hepsi doğru.*
	Geçerli Olma **Uygun Olma** **Genellenebilir Olma**	***Araştırmacı:*** *Tamam sizce çözümünüz doğru mu?* […] ***G3-D16:*** *İstenilenleri gösterdik.* ***G3-İ13:*** *Genel sonuca ulaştık* […] ***G3-D17:*** *İspat bence, sizce?* ***G3-İ14****: İspat.* ***G3-D11:*** *İspat.* ***G3-İ15****: Genel sonuca ulaştık* ***Araştırmacı:*** *ispat olmasına nasıl bir anlam yüklediniz?* ***G3-İ16:*** *Varlığını gösterebildik ve genelledik* ***G3-D18:*** *Genelledik*
	Uygun Olma	***Araştırmacı:*** *Geliştirilebilir bir yönü var mı sizce?* ***G4-D21:*** *Bu çözüm için yapılası gereken her şeyi yaptık diye düşünüyoruz.* ***A:*** *O zaman yok mu size göre geliştirilebilir bir yönü?* ***G4-D25:*** *Yok* ***G4-E13****:Yok* ***G4-İ19:*** *Yok.*
	Geçerli Olma	***Araştırmacı:*** *Bu çözüm her durumda geçerli olacak mı sizi her zaman doğruya ulaştıracak mı?* ***G3-E23:*** *Bu bir çeşitkenar üçgen üçgen değil mi baktığımızda buraya kenarları farkı olduğundan dolayı bir çeşitkenar üçgendir. Çeşitkenar üçgen olduğundan dolayı bütün üçgenleri kapsar bütün üçgenleri kapsayacağından dolayı bütün üçgenler için bunu deneyebiliriz yani uygulanır* ***G3-D20:*** *Zaten ispat olarak kabul ediyorsak her duruda uygulandığını söylemiş oluruz.*

4.4.3. Grup Çalışmasında M-İ Odaklı Görev Sorularına İlişkin Pedagojik Bileşen Kapsamında Edilen Bulgular

Tablo 4. 97. Grup Çalışmasında MÖA'nın Çözümlerine İlişkin Pedagojik Bileşen Sonuçları

<table>
<tr><th>Matematiksel Bileşen</th><th>Psikolojik Bileşen</th><th colspan="2">Matematiksel ve Psikolojik Bileşen Karşılaştırma İle Belirlenen Pedagojik Bileşen Sonuçları</th></tr>
<tr><th>Çözümün Matematiksel Niteliği</th><th>Çözüme İlişkin Algısı</th><th>Çözümün Matematiksel Niteliğine İlişkin Algısıyla Karşılaştırma</th><th>İspat Kavramının Doğası İle İpek'in Kavrama Bakış Açısını Karşılaştırma</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Çözüm Kategorisi:
Örüntü
Varsayım
Deneysel Argüman
Mantıksal Argüman
Genel Örnek
Kanı

Çözüm Derecesi:
Geliştirilebilir Çözüm
Ö-V-DA-MA-GÖ-K:
Beklenen Tam Çözüm

Çözümün Değerlendirilmesi:
Çözümlerin tamamı matematiksel nitelik açısından istenen düzeyde sadece çözüm açıklamaları zenginleştirilebilir.</td><td>Farklı Çözüm Geliştirmeye İlişkin Algıları:

Strateji: Temsilin Güçlendirilmesi & Farklı Strateji Seçme & Bilgi</td><td>Matematiksel nitelik açıdan beklenen düzeyde olan çözümlerinin, çözüm sürecinde buldukları farklı stratejilerin tercih edilmesi ve bazı sorularda sözel açıklamaların eklenmesi ile farklı çözüm geliştirilebileceğini algılıyorlar.</td><td rowspan="4">*İstenilen Durumları Gösterme
*Kesin Bilgileri Kullanma
*Genelleme Yapma
*İspat Olma</td></tr>
<tr><td>Çözüm Doğruluğuna İlişkin Algıları:

Çözüm Niteliği: Geçerli Olma & Uygun Olma & Genellenebilir Olma</td><td rowspan="3">Matematiksel nitelik açıdan beklenen düzeyde olan çözümlerinin; istenilen durumları göstermiş olmaları, matematiksel olarak kesin bilgileri kullanmaları ve genelleme yapmaları nedeniyle geliştirilebilir yönlerinin olmadığını ve her durumda doğru olacağını algılıyorlar.</td></tr>
<tr><td>Çözümün Geliştirilebilirliğine İlişkin Algıları: Geçerli Olma & Uygun Olma & Genellenebilir Olma</td></tr>
<tr><td>Çözümün Geçerliliğine İlişkin Algıları: Geçerli Olma & Uygun Olma & Genellenebilir Olma</td></tr>
</table>

MÖA'nın çözümüne ilişkin görüşleri pedagojik açıdan incelendiğinde, çözümlerinin matematiksel yeterlikleri ile çözümlerine dayalı algıları arasında uyum içinde oldukları görülmektedir. Matematiksel nitelik açıdan beklenen düzeyde olan çözümlerinin, çözüm sürecinde buldukları farklı stratejilerin tercih edilmesi ve bazı sorularda sözel açıklamaların eklenmesi ile farklı çözüm geliştirilebileceğini ifade etmişlerdir. Ayrıca,

çözümlerinin; istenilen durumları göstermiş olmaları, matematiksel olarak kesin bilgileri kullanmaları ve genelleme yapmaları nedeniyle geliştirilebilir yönlerinin olmadığını ve her durumda doğru olacağını ifade etmişlerdir. Çözümlerini değerlendirirken de bu yaklaşım içinde olmuşlardır.

MÖA'nın grup çalışmasında pedagojik bilgilerini yansıtan örnek ifadeler Tablo 4.98 de verilmiştir. Algılara ilişkin diyaloglar, grup çalışması yapma bilincinin daha çok ikinci uygulama ve sonrasında oluşmasından dolayı ağırlıklı olarak üçüncü ve dördüncü uygulamalardan seçilmiştir

Tablo 4. 98. Grup Çalışmasında MÖA'nın Pedagojik Bilgilerinden Örnek İfadeler

Temalar	Kodlar	Örnek İfadeler
İçerik Bilgisi	Geçerli İspat Oluşturabilme Geçerli Olma	***G3-D20:*** […] *ispat olarak kabul ediyorsak her durumda uygulanır.*
	İspatın Zorlukları Bilgi Eksikliği	***G3-D35:*** […] *Basamak kavramı tam oluşmamış olabilir.*
	İspatın Zorlukları İlişkilendirme Eksikliği	***G2-İ31:*** *Örüntüyü yakalaması.* ***G2-İ35:*** *Noktlaar arasındaki ilişkiyi görmek sıkıntılı olabilir.* ***G4-İ48:*** […] *İlişkilendirme kısmında eksiklikleri bulunabilir.* ***G4-H42:*** *Görebilmesi biz iki saate gördük*
	İspatın Zorlukları Stratejide Zorluk Yaşama	***G2-E29:*** *Kenar uzunlukları sayısını bulması.* ***G2-İ34:*** *Noktaların neye göre oluştuğunu görmeleri sıkıntı olabilir.* ***G4-D41:*** […] *Ayrıca o doğruları kesiştirebilmesi.* ***G4-İ49:*** […] *Örüntü bulması kesiştirmesi sonra burada yaptığımız gibi her adımda doğrunun kendisi kadar durumunu gözlemleyebilmesi.*
Öğretim Bilgisi	Öğrenmeyi Destekleme	***G2-E36:*** *Öğrenciyi bu türden uyuglamalara hazırlarız. İlk başta sorular sorarak ona bu sorulara nasıl yaklaşması gerektiğini öğretiriz. Sonra uygulama yaptığımızda biz onu yönlendirmemek için artık soru sormayız, kendisinin yapmasını bekleriz.* ***G3-İ21:*** […] *söylemek yerine onu teşvik etmesi gerekiyor ya da kılavuzluk etmesi lazım.*
	Sorgulama	***G3-D22:*** […] *sorgulaması gerekiyor* ***G3-E25:*** […] *eleştirel düşünmeyi öğretmesi lazım.*
	Dikkat Çekme	***G3-İ48****:merak oluşturabilir*
Öğrenci Bilgisi	Genelleme	***G3-İ19:*** […] *genellemeye giden adımları kazanmalı.* ***G3-D16:*** *İspat yapma becerisine sahip olmalı.*

	Öğrenci Faaliyetleri	***G3-D49:*** *Hami şey dedi ben sevdiğim içinde ben kendimde uğraşıyorum dedi ispat yapmakla dedi. Bunu ilgisini çekmesi önemli öğretmenin olmadığı yerde de bununla uğraşırsa kendini o yönde de uğraştırmış olur bununda farkına daha rahat varır.*
Müfredat Bilgisi	**Ortaokul Seviyesi**	***G3-E42****:* [...] *8.Sınıf çünkü döndürmeleri*
	Lise Seviyesi	***G2-D24****: Lise.* ***G2-İ28:*** *Dizilerden dolayı.* ***G3-E24:*** [...] *kenarortay ve benzerlikten dolayı lise.*

Grup çalışmasında MÖA'nın çözümlerine sahip yaklaşımlarının temelindeki bilgiler incelendiğindeyse Tablo 4.98 de ki sonuçlar elde edilmiştir. Bu kapsamda geliştirmiş oldukları çözümlerin; istenilen durumları göstermeleri, genellemeye ulaşmaları ve çözümlerinin ispat olmalarını belirterek her durumda geçerli olacak sonuçlar oluşturduklarını ifade etmişlerdir. Yapmış oldukları çözümler kapsamında her durumda geçerli olacak sonuçlar elde edebilmek için öğretmen ve öğrenciye düşen bir takım faaliyetlerden bahsetmişlerdir. Öğretmenlerin bu durumu sağlayabilmeleri için genelleme yapma ve ispat becerisini kazandırmaya yönelik sorgulayıcı çalışmalar yaptırmaları gerektiğini ifade etmişlerdir. Öğrencilerin ise ilgili ve istekli olmalarını, konuya ilgi duymalarını, genelleme ve ispat yapma konusunda donanımlı olmaları gerektiklerini ifade etmişlerdir. Araştırma kapsamında sorulacak soruları genel olarak ortaokul ve lise seviyesinde sorulabileceğini belirtmişlerdir. Çözüm süreçlerinde zorlanılacak noktaların ise genelde stratejiye ilişkin noktalarda yaşanabileceğini bununla beraber bilgi eksikliği ve ilişkilendirme yapma konusunda da çeşitli durumlarda zorluk yaşayabileceklerini belirtmişlerdir. Öğrencilerinde bu türden zorlukları görmeleri durumundaysa daha çok sorgulamaya dayalı öğrenimlerini destekleyici çalışmalar yapabileceklerini ifade etmişlerdir.

Araştırma bulguları kapsamında her bir MÖA'nın bireysel ve grup çalışmalarında sıklıkla gözlemlenen tema ve kodları ise Tablo 4.99 da özetlenmiştir.

Tablo 4. 99. MÖA'nın M-İ Bileşenleri ve Üstbilişsel Düzenleme Süreçlerinde Sıklıkla Gözlemlenen Tema ve Kodları

	Matematiksel Bileşen		Psikolojik Bileşen		Pedagojik Bileşen					Üstbiliş
	Çözüm Kategorisi	**Çözüm Derecesi**	**Strateji**	**Çözüm Niteliği**	**İspatın Doğası**	**Geçerli İspat Oluşturma & Zorluk**	**Öğretim Bilgisi**	**Öğrenci Bilgisi**	**Müfredat Bilgisi**	**Üstbilişsel Düzenleme Süreçleri**
Erdem	**DA**	2	Bilgi	Geçerli Olma	Kesin Bilgileri Kullanma	İspat & Stratejide Zorluk Yaşama	Öğrenmeyi Destekleme	Öğrenci Faaliyetleri	Ortaokul Seviyesi	İzleme
İpek	**DA**	3	Bilgi	Geçerli Olma	Genelleme	İspat & İlişkilendirme Eksikliği	Öğrenmeyi Destekleme	Öğrenci Faaliyetleri	Üniversite Seviyesi	İzleme & Hata Ayıklama
Deniz	**SÇ & ÇY**	0	Bilgi	Uygun Olma	İstenileni Gösterme	Formül/Kural & Stratejide Zorluk Yaşama	Öğrenmeyi Destekleme	Öğrenci Faaliyetleri	Ortaokul Seviyesi	Planlama & Bilgi Yönetimi
Grup Çalışması	**GÖ**	3	Bilgi	Geçerli Olma	İspat	Geçerli Olma & Bilgi Eksikliği	Öğrenmeyi Destekleme & Sorgulama	Öğrenci Faaliyetleri & Genelleme	Ortaokul & Lise Seviyeleri	

BÖLÜM V: SONUÇ

Bu bölümde; araştırma genelinde elde edilen genel sonuçlar "sonuç" başlığı altında açıklanacak olup; araştırma genelinde elde edilen özel sonuçlar literatür karşılaştırması ve desteği ile "tartışma" başlığı altında verilecektir. Araştırma bulguları doğrultusunda uygulayıcılar ve araştırmacılar için "öneriler" başlığı altında önerilerde bulunulacaktır.

5.1. Sonuç

Matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispatlara yönelik görevlerle bireysel ve grup halinde meşgul olurken ispat yapma süreçlerini; muhakeme-ispatlama bileşenleri ve üstbiliş bağlamında inceleyen bu araştırmada, MÖA'nın M-İ yapma süreçlerinin farklı bileşenler bağlamında çeşitlilik gösterdiği ve bu bileşenlerin birbirini destekler sonuçlar verdiği belirlenmiştir.

MÖA'nın matematiksel bileşen kapsamında geliştirilen bir çözümü, bilişsel anlamda harcanan çaba nedeniyle yeterince değerlendirmedikleri ve o an ki amaçlarının; çözüme ulaşma veya en iyi çözümü oluşturma olduğu belirlenmiştir. Çözümlerine farklı bir gözle bakamadıkları bu aşamada; çözümlerinde var olan eksikliklerinin, hatalarının ve gözden kaçırdıkları noktaların farkına varmadan çözüm süreçlerini tamamladıkları gözlemlemiştir. Çözüm süreçlerine ilişkin farkına varamadıkları bu noktaların, çözüm süreçlerine ilişkin algılarının incelendiği psikolojik bileşen kapsamında yapılan çalışmalarla genel anlamda giderilebildiği sonucuna ulaşılmıştır. MÖA, kendi çözümlerinin doğruluğuna, geliştirilebilirliğine ve geçerliliğine dayalı sorgulamalar ile çözüm niteliklerine ilişkin farkına varmadıkları kısımları yorumlama imkanı bulmuşlardır. MÖA, çözümlerine dayalı algılarını açıklarken matematiksel olarak geliştirmiş oldukları çözümleri değerlendirmiş ve ispat kavramının kendilerinde ne anlama sahip olduğunun farkına varmışlardır. Bu durum ayrıca çözümlerinin temelinde ispata ilişkin hangi yaklaşımın olduğu konusunda araştırmacıya bilgi vermiştir. Çözümlerine ilişkin pedagojik bilgilerini sorguladıkları görüşmelerle; ispat yapmaya ilişkin öğretmen, öğrenci ve müfredata dayalı hangi bilgilere sahip olduklarını belirleme imkanı bulmuşlardır. Üstbilişsel düzenleme süreçleri ile de muhakeme ve ispat yapma süreçlerinin farklı görevler kapsamında değişkenlik gösterip göstermediğini, çözüm süreçlerinin nasıl geliştiğini, çözümlerine dayalı zorluk yaşama veya çözüme kolay bir

şekilde ulaşmalarına imkan veren faaliyetlerinin nasıl olduğunu gözlemleyebilme fırsatı yakalayabildikleri gözlemlenmiştir. M-İ bileşenleri ve üstbilişsel düzenleme süreçlerinin bir araya gelmesiyle; muhakeme ve ispat yapmaya dayalı olarak geliştirilen bir çözümde kişinin hem kendini hem bilgilerini hem de çözümünün niteliğini birbiriyle uyumlu olarak nasıl tanımlayabildiğinin cevabını alabildikleri belirlenmiştir. Böylece muhakeme ve ispat yapma süreçlerine dayalı var olan süreçlerinin resmini net bir şekilde nasıl ortaya koyabileceklerinin farkında olmuşlardır.

Matematiksel bileşen anlamında ortaya konulan bulguların genel sonuçları incelediğinde; bir MÖA kısmi açıdan da olsa bir bilgi düzeyine sahipse, farklı kategoriler bağlamında geliştirmiş olduğu çözümlerini zamanla niteliği artan sonuçlar elde edecek şekilde geliştirdiği tespit edilmiştir. Bu duruma karşılık olarak, bilgisel anlamda gerekli yeterliklere sahip olmayan MÖA'nın çözüm süreçlerinin tamamında birbirini tekrar eden yaklaşımlar içinde olduğu belirlenmiştir. Bu sonuçla ilgili göz önünde bulundurulması gerekli olan kısım ise ispatın sadece belirli bilgi seviyesine sahip kişilerde geliştirilebilecek veya ele alınabilecek bir konu olmasına dayalı yaklaşımdan bahsedilmeye çalışılmadığını gösteren, grup çalışmaları sırasında elde edilen sonuçlardır. Grup çalışmaları ile farklı bilgi seviyelerine sahip MÖA'nın bir araya gelmesiyle birbirlerinin muhakeme ve ispat yapma süreçlerini destekledikleri ve birbirlerinden bu süreçlerin nasıl gerçekleşebileceğini öğrenme imkanı buldukları gözlemlenmiştir. Bu imkan doğrultusunda, ispat yapılırken takip edilebilecek süreçlerin neler olabileceğini ve ispatlara dayalı soruları çözerken nasıl bir yaklaşım içinde olunabileceği konusunda birbirlerinin gelişimine katkı sağladıkları gözlemlenmiştir. Bir çözümü bireysel çalışma sırasında yapamamış olsalar bile elde ettikleri deneyim doğrultusunda çözüm süreçlerini daha nitelikli duruma getirdikleri belirlenmiştir. Bu durum ortaya farklı bir sonuç daha koymuştur. İspat yapma konusunda yeterli bilgiye sahip olmayan MÖA, grup çalışmalarına dayalı uygulamaların çözüm aşamasında, sürecin başında gözlemci bir durumda kalarak sadece yapılan çözümleri anlamak ile ilgili sorgulayıcı bir bakış açısı içinde olmuştur. Ancak üçüncü ve dördüncü uygulamalar, çözüm süreci içinde aktif olarak rol aldığını göstermiştir.

Araştırma sürecinin başlangıç aşamalarında, MÖA'nın genelleme yapma kapsamında sorulan sorularda ilk başta deneme ve yanılma yöntemini tercih etmeye dayalı çözümler geliştirmeye çalıştıkları tespit edilmiştir. Örüntü kavramına dayalı kavramsal açıdan eksik

olduklarını ve tam olarak neyi temsil ettiğini bilmediklerini belirtmişlerdir. MÖA'nın bu durumu yaşama nedenlerinin, çözüm süreçlerinde, kendilerinden beklenen tüm durumları içerisine alan bir çözümü oluşturma durumu ile sayıları ilerleterek bir sayının nerede olduğunu bulmaya yönelik anlamları arasında ikilime düşmekten kaynaklandığı gözlemlenmiştir. Dolayısıyla örüntü kategorisine uygun çözüm geliştirmeye çalıştıklarında; kesin delil sunmaya imkan vermeyen, farklı durumlarda farklı genel kural ile ifade edilebilecek örüntüler geliştirme eğilimi içinde olmuşlardır. Ancak bir öğretmen adayının kesin deliller sağlamaya imkan veren kesin örüntüler oluşturma kapsamında başarılı çözüm geliştirmesi, grup çalışmalarında da benzer nitelikte çözüm üretmelerine katkı sağlamıştır.

MÖA'nın örüntü kavramına ilişkin deneyimlerinin genelde şekil örüntüleri yardımıyla bir kural bulmaya dayalı olduğu tespit edilmiştir. Sayı örüntülerinin verildiği ancak şekil örüntülerinin oluşturulmasının istendiği soru tarzlarıyla çok karşılaşmadıklarını ve oluşturulabilecek çözümler hakkındaki düşüncelerinin sınırlı olduğunu ifade etmişlerdir. Bu nedenle sayı örüntülerine dayalı bir kural geliştirmeleri istendiğinde, oluşturmuş oldukları genel kural ile model arasında herhangi bir ilişki kurmadıkları bireysel uygulamalar sırasında gözlemlenmiştir. Oluşturmuş oldukları örüntü kurallarında kulanmış oldukları harf temsillerin ne anlama geldiğine ilişkin tanımlama yapmakta yani kullandıkları harf temsilinin soru için ne anlam ifade ettiğini belirlemekte zorluk yaşamışlardır. Grup çalışmalarında, bu duruma karşılık olarak verilen şekil örüntüsü ile oluşturmuş oldukları kurallar arasında bir ilişki kurmaya çalıştıkları ve buna dayalı çözümler geliştirdikleri tespit edilmiştir. Bu çözümlerinde kullanmış oldukları harf temsillerine anlam yükleyerek çözüm süreçlerine yön vermişlerdir. Bu nedenle model oluştururken önceden gördükleri, aşina oldukları örüntü modellerini kullanmayı tercih etmişlerdir.

Genelleme yapma kategorileri kapsamında yapılan uygulamalar sonucunda; tüm durumları içerisine alan genel bir kural oluşturabilme, kullanılan harf temsillerini net bir şekilde tanımlayabilme konularında elde ettikleri deneyimleri geri kalan uygulama süreçlerinin tamamında temele aldıkları tespit edilmiştir. Bu anlamda eğer bir genel kurala ulaştılarsa çözümlerini doğru yaptıklarını eğer genel bir kurala ulaşamıyorlarsa soruyu anlama ve yeterli bir çözüm geliştirme konularında şüphe içinde oldukları berirlenmiştir. Bu durumun farklı bir yansıması olarak ise ispat yapabilmeyi tüm

durumları içerisine alan genel bir kural oluşturma, genelleme yapma, ilişkilendirme, kural bulup verilenleri bu kural üzerinde sağlama şeklindeki faaliyetlerini ispatla ilişkilendirmişleridir.

Genelleme yapma kategorilerindeki sorularda, genellemenin ispat yapmanın bir parçası olduğu deneyimlerini kazanmaları bu süreçlere ilişkin kendilerini sürekli sorgulayan çözüm süreçlerini geçirmelerine de katkı sağlamıştır. Yani onlar için bir örüntü sorusu çözmek, genellemeye dayalı bir soru çözmek ile verilen önermelerin doğruluğunu göstermelerinin istendiği sorularda, soruya ilişkin bir çözüm oluşturma süreçleri arasında farklılık göstermelerine neden olmuştur. Genelleme yapma kategorisi bağlamında sorulan sorularda çözüme başlama, çözümü anlama ve verilenleri ilişkilendirerek çözümü sonlandırma süreçleri uzun vakit harcamalarını gerektirmiş olup; önermelerin doğruluğunun istendiği sorularda soruda kendilerinden ne beklendiğine dayalı bilgileri hemen söyleyebildikleri tespit edilmiştir. Bu duruma karşılık olarak; genelleme yapmak ispatla ilgili tanışık olmadıkları ya da farkında olmadıkları bir süreç olduğu ve sorular kapsamında bunları kazanmış olmaları nedeniyle çözüm süreçlerinden edindikleri bilgilerin daha fazla olduğu gözlemlenmiştir.

Matematiksel bileşen kapsamında geliştirmiş oldukları çözümlerinde sıklıkla deneysel argüman kategorisine uygun çözümler geliştirdikleri gözlemlenmiştir. Bunun nedeninin ise daha çok deneme ve yanılma yöntemini kullanmaya, çözümleri görebildikleri durumlarla test etmeye dayandırdıkları yaklaşımlarına bağladıkları tespit edilmiştir. Grup çalışmalarında ise daha çok genel örnek kategorisine uygun çözümler geliştirdikleri tespit edilmiştir. Bu nedenle grup çalışmalarında tüm durumları içerisine alan genel bir temsil durumunu oluşturabilmeyi çözümlerinde temele aldıkları belirlenmiştir. Bu duruma karşılık olarak mantıksal argüman kategorisine uygun çözümleri sadece bir MÖA'nın bireysel çözümünde ve grup uygulamasında oluşturabildikleri belirlenmiştir. Genel örnek ve kanıt kategorilerinde oluşturdukları çözümlerin ise genelde başarılı olduğu tespit edilmiştir. Bunun nedeninin ise ispatı tanıdıkları anlamı bu sorularda gördükleri ve çözüm stratejisi oluşturmak için harcadıkları süreleri çözümü oluşturmaya vermelerinde kaynaklandığı gözlemlenmiştir. Bu duruma ilişkin katkı sağlayan bir diğer nokta ise genelleme yapma kategorilerinde elde ettikleri deneyimlerden faydalanmalarından kaynaklandığı yaptıkları açıklamalarla tespit edilmiştir.

Psikolojik bileşen anlamında ortaya konulan bulguların genel sonuçları incelediğinde; genel anlamda stratejilerine dayalı algılarının yoğun olduğu gözlemlenmiştir. Stratejik anlamdaki algılarını ise en çok bilgilerine dayandırarak açıklamışlardır. Bilgilerine dayalı olarak yaptıkları açıklamalarla uyumlu olarak tespit edilen nokta ise eğer soruyu doğru çözmüş ve bakış açılarına göre iyi sayılabilecek bir ispat süreci geliştirmişlerse genel anlamda algılarına dayalı matematiksel süreçleri ile uyumlu açıklamalarda bulunmuşlardır. Farklı çözümler geliştirme ile çözümün geliştirilebilirliği konusundaki algılarının birbirine benzer açıklamalardan oluştuğu belirlenmiştir. Bu kısımla ilgili olarak genel anlamda çözümlerinin netleştirilmesi adına, çözümlerini güçlendirmeye dayalı çalışmalar yapabileceklerini ifade etmişlerdir. Bu bağlamda, ispat olarak kabul ettikleri çözümlerin başka çözümlerin neden alternatifi olduğu konusundaki bakış açılarının net olmadığı tespit edilmiştir. Çözümlerinin doğruluğu ve geçerliği konusunda var olan algılarını ise sıklıkla geçerli ve uygun olmaya dayandırarak açıkladıkları tespit edilmiştir. Bu kapsamda, ispat yapma süreçlerine dayalı olarak algılarını ortaya koyarken ispat kavramına dayalı sahip oldukları sınırlı bilgiler çözümlerini geniş bakış açısıyla değerlendirebilmelerinin önüne geçmiştir. Tüm bunlara karşılık olarak algıya dayalı uygulamalar kapsamında çözümlerine ikinci bir gözden bakabilme fırsatı yakaladıkları için M-İ sürecinde var olan hatalarının farkına vararak sonraki uygulamalarda bunları yapmamaya dikkat etmişlerdir.

Pedagojik bileşen anlamında ortaya konulan bulguların genel sonuçları incelediğinde; genel anlamda bilgilerinin sınırlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu bileşen kapsamında verdikleri yanıtların aslında kendi çözüm süreçlerini tanımlayıcı boyutta olduğu gözlemlenmiştir. Yani ispat yapma sürecinde zorlanılan bir noktayı tanımlarken aslında o soru kapsamında kendilerinin nerede zorlandığına dayalı bilgileri cevap olarak verdikleri tespit edilmiştir. Pedagojik bilgilerine dayalı sıklıkla hatalı yanıtlar verdikleri kısımların ise genel anlamda müfredat konusunda olduğu tespit edilmiştir. Müfredat ile ilgili bilgilerini açıklarken konuların hangi sınıf seviyeleri ile ilişkilendirileceği konusunda yanlış yanıtlar verdikleri tespit edilmiştir. İçerik bilgisi kapsamında verdikleri yanıtların genelde formül/kural ve ispat kapsamında olduğu ancak stratejilerine ve geçerli olmaya dayalı olarak geçerli ispatların nasıl oluşturulabileceğini tanımladıkları tespit edilmiştir. İçerik bilgisi kapsamında elde edilen bir diğer sonuç ise ispat yaparken veya ispata dayalı soruları çözerken yaşadıkları zorlukları çoğunlukla ilişkilendirme

eksikliğine dayandırmaları olmuştur. Bir çözüm geliştiremediklerinde ya da buna karşılık olarak matematiksel olarak kabul edilmiş bir bilgiyi çözüme ulaşmak için kullanmanın gerekli olduğunu düşündüklerinde bilgi eksikliğinden kaynaklanan zorlukların bu kapsamda yaşanabileceğini ifade etmişlerdir. Bu sonuçlara paralel olarak ispat yaparken kullanılan stratejide zorluk yaşanabileceğini ve bu durumun da ispat yapma sürecini zorlaştıracağını ifade etmişlerdir. Öğretim bilgisi kapsamında ise çoğunlukla, ispat yapma sürecine katkı sağlayacak ve bu süreci kolaylaştıracak öğrenmeyi destekleyici faaliyetlerden bahsetmişlerdir. Genelde uygulama yapma faaliyetlerinden bahsettikleri bu kısımda, ispat becerisini geliştirmeye dayalı çalışmaların da neler olabileceğinden bahsettikleri tespit edilmiştir. Yine bu kapsamda dikkat çekme ve sorgulamaya dayalı faaliyetler ile öğretim sürecinin öğrenciler için anlaşılır olmasına dayalı açıklamalarda bulunmuşlardır. Öğrenci bilgisi kapsamında da genel olarak öğrencilerin ispat yapma süreçlerini geliştirmeye yönelik öğrenci faaliyetlerine dayalı açıklamalarda bulunmuşlardır. Ayrıca konuya ilgi duymaları konu ve işlem bilgileri, genelleme yapmaları ve sezgiye dayalı açıklamalarda da bulunmuşladır. Müfredat bilgisi kapsamında ise genel anlamda ortaokul seviyesine yönelik yorumlarda bulundukları tespit edilmiştir. İspat yapma sürecinde zorluk yaşamalarına rağmen M-İ odaklı soruların sorulabileceği sınıf düzeyini genel olarak ortaokul seviyesiyle ilişkilendirmeleri dikkat çeken bir sonuç olsa da ispatı bu seviyede ele alınabilecek bir konu alanı olarak gördükleri sonucunu da dolaylı olarak ortaya koymuştur.

Araştırma kapsamında pedagojik bileşen boyutunda değerlendirilen önemli bir sonuç ise bir MÖA'nın ispat yapamama nedenlerini eğitim geçmişi ile bağdaştırması olmuştur. Sorulan sorular kapsamında yeterli çözümler geliştiremeyen ancak grup uygulamalarında sorgulayıcı, süreci izleyen ve öğrenmeye çalışan bu MÖA; ispata dair sahip olduğu yeterliliğin az olması nedeniyle uygulama sürecinde düşük bir performans sergilemek zorunda kaldığını ifade etmiştir. Bilgi eksikliğine dayalı açıklamalarda bulunan MÖA, ispatı ilk olarak üniversite eğitiminde tanıdığını ve sürece adapte olmasının iki yılını aldığını ifade etmiştir. Bu sonuç, ispatın ele alınacağı sınıf seviyesini üniversiteye taşımanın beraberinde getireceği sorunları da yansıtması nedeniyle önemlidir.

Üstbilişsel düzenleme süreçleri anlamında ortaya konulan bulguların genel sonuçları incelediğinde; M-İ sürecinde sergiledikleri üstbilişlerini başarılı olarak ortaya koyabildikleri tespit edilmiştir. Genel anlamda izlemeye dayalı süreçleri M-İ sürecinde

işe koşmuşlardır. İspat yapmaya dayalı üstbilişsel süreçlerini ortaya koymakla beraber geliştirdikleri çözümler kapsamında hangi süreçleri ortaya koymadıkları bilgilerini de net olarak görebilme fırsatına sahip oldukları gözlemlenmiştir. Çözümlerini sesli olarak dile getirerek çözmeleri ve üstbilişsel süreçlerini yorumlamaları ispat yapma süreçlerine yardımcı olmuştur. Matematiksel bileşen perspektifinden zorlandıkları veya çözüm geliştiremedikleri çözümlerini yorumlarken kendilerinde güvensizlik duydukları gözlemlenmiştir. Ancak çözüm yapamama ve zorlanma noktalarını üstbilişsel düzenleme süreçleri kapsamında değerlendirdiklerinde bu durumu; zorluk yaşama nedenlerini açıklamak için bir fırsat görmüşler ve bunu gidermenin daha önemli olduğu hissi içinde olarak muhakeme ve ispat yapma süreçlerini geliştirmeye odaklanan bir bakış açısı içerisinde olmuşlardır. Üstbilişsel düzenleme süreçlerine dayalı olarak yaptıkları açıklamaların genellikle algılarından etkilendiği gözlemlenmiştir. Örneğin; hata içeren çözümlerinin farkına varamamışlarda ve bunun doğru olduğu algısı içindelerse bu durumun hata ayıklama kategorisi kapsamında seçtikleri kartlara ilişkin yaptıkları yorumlarında, çözümlerinin doğru olması yaklaşımından hareket ederek yorumlarda bulunmuşlardır.

Üstbilişsel düzenleme süreçlerinin matematiksel muhakeme ve ispat yapma süreci üzerindeki etkileri her bir MÖA için farklı şekilde gözlemlenmiştir. Çözümlerinde açıklama eksikliği bulunan, geliştireceği çözümün iyi bir çözüm olmasına odaklanan MÖA; çözümünü dolayısıyla ispat sürecini iyi bir şekilde ortaya koymak için izleme kategorisine uygun olarak strateji ve çözümünü gözden geçirmeye dayalı bir yaklaşım içinde genelde olmuştur. Genel anlamda beklenen tam çözümleri oluşturan MÖA, ispat sürecinde izleme ve hata ayıklama süreçlerini genelde işe koşmuş; bir yandan iyi çözümler oluşturmayı amaçlarken bir yandan da hata kaynaklı kayba uğramamaya dikkat etmiştir. Genel anlamda çözüm geliştiremeyen MÖA ise ispat yapma sürecinde planlama ve bilgi yönetimi süreçlerini işe koşmuş ve bir çözüm geliştirebilmek için gereken durumların nasıl oluşturulabileceğini ve gerekli bilgileri ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Bireysel olarak her bir MÖA'nın ispat yapma süreçlerine destek veren üstbilişin katkısı grup çalışmalarında da dolaylı olarak gözlemlenmiştir. Farklı üstbilişsel süreçlere sahip olan bu adaylar ispat sorularına dayalı çözümler geliştirirken, dikkat edecekleri noktalarında çeşitlilik göstermesi nitelikli süreçler ortaya koymalarına katkı sağlamıştır. MÖA'dan biri çözümü stratejik ve çözüm niteliği boyutunda değerlendiriren biri buna ek

olarak hata yapmamaya dikkat etmiştir. Diğer öğretmen adayı da kullanılan bilgilerin nasıl işe koşulduğunun takibini yapmıştır. Böylece ispat süreçlerine üstbilişin sağladığı katkılar net olarak görülmüştür. Bu kapsamda, MÖA ispatın farklı anlamlarını deneyimlemeleri, öğretmenlik yaşamlarında ispatın bu yönlerini nasıl ele alacaklarını yorumlamaları ve ispatın aslında her sınıf seviyesinde ele alınabilir bir kavram olduğuna ilişkin kazandıkları farkındalıkları ifade etmeleri; bu araştırmanın matematiksel muhakeme ve ispat konusunda MÖA'na sağladığı önemli katkılardan sadece birkaçıdır.

5.2. Tartışma

MÖA'nın farklı kategorilerdeki ispat görevleriyle bireysel ve grup halinde meşgul olurken ispat uygulamalarına ilişkin hedeflerinde olumlu değişimlerin olduğu; ispata sınıf ortamlarında rolü büyük olan bir anlam yükledikleri sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca bu kategoriler aracılığıyla ispatın genelleme ve gerekçelendirme gibi yönlerini tanıdıkları ve ispat konusuna tepkiyle yaklaşmayı bırakıp konuya ilgi duymaya geçiş sürecini yaşadıkları tespit edilmiştir. Bu sonuçlar Stylianides'in (2010) çalışmasındaki sonuçlarla uyuşmaktadır. Stylianides (2010) farklı kategorileri dikkate alarak ders işleyen öğretmenlerin sürece eleştirel gözle baktıklarını, ispat yapmaya ve ispatın öğretimine aşina olmaya katkı sağladıklarını; ispat ve diğer faaliyetler arasında olumlu yönde ilişkiler olduğu sonucuna ulaşmış ve bu sonuçlar; bu araştırmadan elde edilen bulgularla paralellik göstermiştir.

MÖA genel durumları belirlerken, genellenebilir bir örüntüyü ortak özelliğin geçerli kılacağını ifade etmiş ancak ortak özelliğin ne olduğunu tanımlama konusunda zorluk yaşamışlardır. Bu durum, ortak özellik olarak tespit ettikleri ve bunları göstermede kullandıkları temsilleri tanımlamakta zorluk yaşamalarına neden olmuştur. Böylece genel durumu tanımlama ve ifade etmede zorluk yaşadıkları sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuç, Zaskis vd.'nin (2002) öğretmen adaylarının genelliği ifade etme becerilerinin düşük olduğu sonucuyla uyuşma göstermiştir.

MÖA'nın örüntü belirlemeye çalışırken verilen örüntüyü devam ettirmeye dayalı bir çözüm yaklaşımı içinde oldukları gözlemlenmiştir. Bu durum örüntü belirlerken zorluk yaşamalarına ve genel bir duruma ulaşmalarına engel olmuştur. Bu sonuç, Zayyaidi ve Kurnuati'nin (2018) öğrencilerin deneme ve yanılma yoluyla örüntü belirleme

çalışmalarının, doğru örüntüleri bulmada zorluk yaşamalarına sebep olacağı sonucuyla uyuşma göstermiştir.

MÖA'nın verilen sayı örüntüsüne uygun bir model geliştirirken genelde sayı örüntüsü ile verilen şekil örüntüsü arasında bir ilişki kurmadan model geliştirmeye çalıştıkları, modeli oluşturmadan önce kural geliştirdikleri ve oluşturdukları kuralda kullandıkları temsillerin oluşturmuş oldukları örüntü modelinde neyi temsil ettiğini anlatmak da zorluk yaşadıkları gözlemlenmiştir. Bu sonuç Rivera'nın (2010) örüntü sorularında cebirsel gösterimleri formülleştirmeye dayalı önemin, genelleme becerisine göre öğretim süreçlerinde daha fazla olduğu sonucuyla uyuşma göstermiştir. Nitekim MÖA'nın verilen şekil örüntüsü yardımıyla aradaki artışa dayanan sayı örüntüsü bulma odaklı öğrenim görmelerini ve bunun tersi uygulamalarla çok fazla karşılaşmadıklarını ifade etmeleri bu durumu desteklemiştir. İfade ettikleri durumlar, Matematik Dersi Öğretim Programında (MEB, 2018a) örüntü konusuyla ilgili var olan kazanımların incelenmesiyle doğrulanmıştır. Böylece MÖA'nın genel kural oluşturma süreçlerinin örüntüye uygun model geliştirme süreçlerinden daha iyi olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ancak grup uygulamalarında şekil örüntüsüne uygun kural oluştururken; verilen şekil ile oluşturdukları kuralı dikkate alarak çözüm geliştirebildikleri gözlemlenmiştir. Bu kapsamda, bireysel çalışmalar sonucunda elde ettikleri deneyimlerin grup çalışmasında kendilerinden beklenen çözümü oluşturmalarına katkı sağladığı sonucuna ulaşılmıştır.

MÖA'nın örüntü sorularında birçok durumu göz önüne alarak genel kurala ulaşma çabaları, ilişkilendirme yapmakta zorluk yaşamalarına neden olmuştur. Bu sonuç, Zayyadi ve Kurnuati'nin (2018) öğrencilerin örüntü bulmaya çalışırken birçok durumu göz önüne almalarının, örüntü bulmada zorluk yaşamalarına neden olacağı sonucuyla uyuşma göstermiştir.

MÖA'nın oluşturdukları genel kurallar ile ilgili açıklamalarının düşük düzeyde olduğu, geliştirdikleri genel kuralları açıklamada zorlandıkları ve çözümlerini uygun matematiksel ifadelerle göstermekte kısmen zorlandıkları tespit edilmiştir. Bu sonuç, Zaskis vd.'nin (2002), öğrencilerin genellemeleri ile bu genellemeleri sözlü olarak ifade edebilme becerileri arasında bir boşluk olduğu sonucuyla ile uyuşma göstermektedir.

MÖA'nın muhakeme ve ispat yapma süreçlerinde çözümlerine dayalı gerekli gerekçelendirmeleri ifade etme becerilerinin düşük olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu

sonuç, Bieda'nın (2010) öğrencilerin genelleme, varsayım ve ispat yapmakla ilgili çalışmalarında; görevlerle ilgili deneyimlerinde matematiksel gerekçelendirme yeterliklerinin düşük olduğu sonucuyla uyuşma göstermektedir. Bu nedenle MÖA varsayımda bulunma kategorisi kapsamında sınırlı sayıda doğru çözüm geliştirmişlerdir. Bu durum, oluşturmuş oldukları örüntü modeli ve genel kural arasında bir ilişki kurmamalarına ya da ilişkiyi kurmuş olsalar da bu ilişkiyi yeterli gerekçelerle ifade edemedikleri sonucunu ortaya koymuştur. Böylece Stylianides (2008) tarafından ifade edildiği üzere varsayım kategorisine uygun çözümlerde; tahmin ve önsezilere dayanmadan ilişkilendirme yapabilmeleri beklenirken, bu durumu gerçekleştiremeyen bazı MÖA'da çözümlerini eksik bırakma durumu gözlemlenmiştir. Bu durumun bir diğer nedeninin ise sayısal işlem odaklı bir çözüm geliştirdikten sonra çözümlerini ilişkilendirerek açıklamaya artık ihtiyaç duymadıkları sonucu gösterilebilir.

MÖA örüntüye uygun bir model geliştirirken, uygulama sürecinde kullanılan sorularda gördükleri örüntü modeli yapılarını ya da almış oldukları derslere dayalı deneyimlerini dikkate aldıklarını belirtmişlerdir. Farklı örüntü modellerini oluşturup oluşturamayacakları konusunda sorulan sorulara ise sınırlı sayıda bilgilerinin olduğunu ifade ederek yanıt vermişlerdir. Böylece ispata dayalı var olan yeterliklerinin almış oldukları eğitimle şekillendiği sonucuna ulaşılmıştır. Dolayısıyla bu eğitim süreçlerinde karşılaştıkları farklı durumların sayısının azlığının, ispatla ilgili sınırlı çözümler oluşturabilmelerine neden olduğu tespit edlmiştir. Bu durum Doğan'ın (2019a) öğretmenlerin matematiksel muhakeme ve ispata yeterince önem vermemeleri sonucunda; öğrencilerin ispat becerilerini yeterli düzeyle kazanamayacak olmaları sonucuyla uyuşma göstermiştir. Ayrıca bu durum, incelenen Matematik Dersi Öğretim Programında (MEB, 2018a) örüntü konusuyla ilgili sınırlı sayıda kazanıma yer verilmesine, var olan kazanımların da daha çok verilen örüntüyü devam ettirme ve örüntünün kuralını bulmaya yönelik faaliyetlerden oluşmasının bir sonucu olduğu düşünülmektedir.

MÖA ağırlıklı olarak deneysel argüman kategorisinde değerlendirilen çözümler geliştirmiş, çözümlerine deneme ve yanılma yöntemlerinden yaklaşmışlardır. Bu durum oluşturmuş oldukları çözümlerde, tüm durumlardan ziyade, tüm durumların uygun bir alt kümesinin incelenmesinin ispata dayalı bir çözüm oluşturmak için yeterli olacağı yaklaşımlarından kaynaklanmıştır. Böylece istenen durumu doğrulamak MÖA için

yeterli olmuştur. Bu yaklaşımları; ispat süreçleriyle ilgili deneyim eksiklikleri ve ispat yapmayla ilgili çoğunlukla, teoremlerin doğruluğunu birkaç durum üzerinden göstermeye dayalı uygulamalarla karşılaşmalarının bir sonucudur. Dolayısıyla bu kategori kapsamında geliştirilmiş çözümlerin ağırlıkta olması, MÖA'nın ispatla ilgili yanlış yaklaşıma sahip olduğunu göstermiştir. Deneysel argüman olarak geliştirilmiş çözümler ispata eş değer değildir sadece bu sürecin bir aşamasıdır. Ancak MÖA çözümlerini bu kategori kapsamında geliştirip, açıklamalarını yaparken bu farklılığın farkında olmamışlardır. Bu sonuç, Stylianides'in (2009) deneysel argümanlardan öğrencilerin yanlış ispat algılarını güçlendirdikleri için kaçınılması gerektiğine dayalı düşüncesinin önemini destekler niteliktedir.

MÖA'nın çoğunlukla deneysel argüman kategorisinde çözümlerini oluşturma nedenlerinin, Zeybek vd.'nin (2018) ortaokul matematik ders kitaplarına dayalı yaptıkları incelemelerde, M-İ kategorilerinden en fazla deneysel argümanlara dayalı etkinliklere yer verilmiş olmasının dolaylı bir sonucu olduğu düşünülebilir. Bu durum, genelleme veya önermeleri belirli durumları göz önüne alarak doğrulamanın yeterli olacağı algısına sahip olmaya neden olmaktadır. Bir başka deyişle, deneysel argüman oluşturmanın ispat yapmayla eş değer olarak görülmesine neden olmaktadır. Ancak genellemenin bazı durumlarda doğru olması tüm durumlarda doğru olacağını göstermez ve genellemeyi ispatlamaz (Stylianides, 2009). Bu nedenle öğrenciler, matematiksel genellemeleri veya önermeleri doğrulamada deneysel argümanların sınırlarını anlamadıkça, matematikte ispatın önemini takdir edemezler.

MÖA'nın sıklıkla deneysel argüman ağırlıklı çözümler geliştirmeleri Yee vd.'nin (2018) araştırmalarından elde ettikleri, en fazla öğrencinin deneysel argüman kategorisine ilişkin çözüm geliştirmeleri sonucuyla uyuşmuştur. Bu durum, deneysel argümanların ispat olarak kabul edilmesine dayalı anlayışın yaygın olduğunu destekler niteliktedir. Bu duruma karşılık olarak ise Weber (2010) ispata geçiş dersini tamamlamış matematik bölümü öğrencilerinin, deneysel argümanları ispat olarak görmemelerine dayalı değerlendirmelerde bulunduğu sonucuna ulaşmıştır. Dolayısıyla deneysel argümanların ispat olarak kabul edilmemesi gerektiğine ilişkin farkındalığın oluşturulması ile bu yanlış anlayışın giderilebileceği Weber'in (2010) elde ettiği sonuçla yorumlanabilir.

Yee vd. (2018) araştırmalarında deneysel argümaların yanı sıra, mantıksal argüman, genel örnek ve kanıt kategorilerine uygun öğrenci çözümlerinin de sıklıkla var olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Belirtilen kategorilere ilişkin üretilen çözümlerle bu araştırmada da karşılaşılmasına rağmen mantıksal argüman kategorisine uygun çözümlere; sadece bir MÖA ve bir grup uygulaması çözümlerinde karşılaşılmıştır. Böylece yanlış ispat anlayışının gelişimini desteklemeyen, ispatlara göre daha az geliştirilmiş argümanlar olan ve deneysel argümanlarla ispat arasında geçiş aşaması olarak kullanılabilen mantıksal argümanlar (Stylainides, 2009); MÖA'nın tanımlanan geçiş aşamasında deneysel argümanlara yakın bir tarafta durduklarını göstermiştir. Bu durum ayrıca, ispata giden yolda geçerli argüman oluşturma ve dolayısıyla doğru ispat anlayışına yeterli düzeyde sahip olmadıkları sonucunu ortaya çıkarmıştır.

MÖA tüm durumları içerisine alan genel bir temsil oluşturma gerekliliğinin farkına varmış olsalar da bu temsili bulmakta zorlanınca örnek durumlar üzerinden önermeyi incelemişlerdir. Bu sonuç da Stylianides'in (2009) örnek durumları incelemeye dayalı ispat çözümlerinin ispatla ilgili yanlış yaklaşımlara neden olabileceği yaklaşımını desteklemiştir. Bu sonuç ayrıca, Aylar'ın (2014) öğrencilerin cebirsel ifadeleri anlama ve uygulama sırasında zorlandıktan sonra örnek vererek doğrulama işlemine geçmelerini gözlemlemesi sonucuyla uyuşmaktadır.

MÖA'nın ispata dayalı çözümü yapıyor olsalar dahi, o sorunun çözümünde kullandıkları ispat yönteminin ne olduğunu açıklama konusunda zorluk yaşadıkları tespit edilmiştir. Bu zorluğunun nedeninin, matematikte öğrendikleri teoremleri ve kanıtları ezberleyerek ve ispat yöntemlerinden tam olarak yararlanmadıklarından (Anapa ve Şamkar, 2010) kaynaklandığı düşünülebilir. Bir başka neden olarak ise, ağırlıklı olarak teoremlere ve bilgiye dayalı eğitim alan MÖA'nın ispat yapmanın anlamını ve adımlarını sınırlı bir şekilde öğrendiklerinin (Uğurel ve Moralı, 2010) bir sonucu olduğu söylenebilir.

MÖA'nın ispatla ilgili algılarında daha çok almış oldukları derslerin ve deneyimlerinin etkisi görülmüştür. Bu sonuç Weber'in (2010) öğrencilerin ispatla ilgili düşüncelerinin genellikle eğitim süreçlerinde karşılaştıkları uygulamlar, yorumlar ve gözlemlerden etkilendiği sonucuyla uyuşmaktadır.

MÖA, var olan bilgilerinin doğruluğunu inceledikleri sorularda kendilerini güvende hissetmiş ve çözümlerinin kesinlikle doğru olduğu algısı içinde olmuşlardır. Benzer

durum, geliştirmiş oldukları genel kurallara dayalı örnek durumları incelemeleri sonrasında da gözlemlenmiştir. Bu sonuç, Harel ve Sowder'ın (1998) öğrencilerin teoremleri örneklerle kontrol edene kadar ve bilgilerin doğruluğundan emin olana kadar bazı şüpheler besleyebilecekleri ancak bu aşamadan sonra çözümlerine güven duyacakları yaklaşımıyla uyuşmaktadır.

MÖA grup çalışmalarında çözümlerinin çoğunu ispatla ilişkilendirmişlerdir. Bir ispatın hata içermediği ve kesin olduğunu ifade etmişlerdir. Çözümlerinin geçerli olmasını da ispatın tanımladıkları bu yönlerine dayandırmışlardır. Alcock ve Weber'in (2005) matematikçilerin ispatı geçerliliği önemli bir matematiksel etkinlik olarak kabul ettikleri yorumu, MÖA'nın bu yaklaşımıyla desteklenmiştir.

MÖA grup çalışmalarında birbirlerinin muhakeme ve ispat yapma süreçlerine katkı sağlayan bir performans içerisinde olmuşlardır. Birbirlerinin eksik olduğu noktaları gidermeye çalışmış, olabildiğince en iyi çözümü yapabilmek için etkileşim içerisinde olmuşlardır. İspatın bilgilerin kurulması, gelişmesi ve aktarılmasında gerekli olması (Stylianides, 2007) ve etkin bir rol oynaması bu süreçlerine anlam kazandırmıştır. Bu durum ayrıca, Dawkins ve Weber'in (2017) ispatın öğretmen otoritesinden bağımsız olarak deneyim elde edebilecek rollere fırsat sağlamasına dayalı ifade edilen benzer yaklaşımın bir sonucu olabilir.

Farklı kategoriler kapsamında yöneltilen soruları çözen MÖA'nın; süreç boyunca muhakemelerinin geliştiği gözlemlenmiştir. Bu kapsamda genelleme yapma, ilişkilendirme ve gerekçelendirme rollerini çözümlerinde temele aldıkları sonucu elde edilmiştir. Çözümlerini sürekli gözden geçirmiş ve kullandıkları matematiksel ifadelere netlik kazandırmaya çalışmışlardır. Bu sonuçlar, ispat sürecinde muhakemeyi etkin kılmak için örnek kullanımının süreç içerisinde netleştirildiği çalışmaların sonuçlarıyla uyuşmaktadır (Brown, 2014; Mason, 2017; Özgür vd., 2017; Knuth 2017). İspat sürecinde örnek kullanımı yani ispat sorularının problem durumuna indirgenerek sorulması ile ispatlama süreçlerinin kişilerde derinlemesine öğrenilmesinin sağlanabilr olduğu görülmüştür. Özgür vd.'nin (2017) genelleme, gerekçelendirme, keşfetme ve çözümlerin gözden geçirilmesine imkan vermeye dayalı elde ettiği sonuçlar, araştırma kapsamında elde edilen benzer durumları örneklemektedir.

MÖA ispata genel olarak kesin bilgilerin kullanıldığı, doğrulama ve açıklamanın yapıldığı anlamlar yüklemişlerdir. Uygulama süreci içerisinde Bayazıt'ın (2017) da ifade ettiği üzere öğretme-öğrenme süreçleri adına farklı işlevlerinin olduğuna dayalı farkındalık kazanmaya başlamışlardır. Matematiksel anlamaya, genelleme yapabilmeye, ilişki aramaya, tüm durumları içerisine alan genel çözümler oluşturmaya katkı sağladığına yönelik araştırma süreci görüşmelerden elde edilen yaklaşımları bunlardan bazılarıdır. Matematiksel ispatlarla ilgili tarifi yapılan işlevlerin sıklığı ve çeşitliliği göz önüne alındığında (Bell, 1976; de Villiers, 1990, Schoenfeld, 1994) MÖA'nın sınırlı sayıda bilgiye hala sahip olduğu ve yaşayacakları deneyimlerin arttırılması gerekliliğine ilişkin önem bu sonuçlarla daha net görülmektedir.

MÖA'nın ispat kavramına dayalı algıları ve dolayısıyla ispatın doğasına ilişkin yaklaşımlarının çoğunlukla kesin bilgileri kullanma ve doğrulamaya dayalı olduğu görülmüştür. Genelleme yapma kategorisi kapsamında sorulan sorulardan elde ettikleri deneyimler doğrultusunda genellemeyi de ispatın bir aşaması olarak yorumlamışlardır. Bu sonuçlar; Almeida'nın (1995) öğrencilerinde ispatın doğrulama işlevini çoğunlukla gözlemlemesi sonucu ile ispatın genelde matematiksel ifadeleri doğrulama ve gerekçelendirme işlevleriyle geleneksel olarak tanımlanması (Bell, 1976; de Villliers, 1990) yaklaşımlarıyla uyuşma göstermektedir.

Uygulamaların ilk zamanlarında MÖA'nın geliştirdikleri çözümlerde matematiksel sembolleri kullanma ve bunlara dayalı gerekli açıklamaları yapma konusunda zorluk yaşadıkları belirlenmiştir. İlerleyen süreçlerde bu duruma ilişkin gelişme gösterdikleri ve sayısal işlem odaklı bir çözüm geliştirdilerse çözümlerini her durumda doğru olmasına dayalı bir algı içerisinde oldukları sonucuna ulaşılmıştır. Böylece çözümlerine güven duydukları gözlemlenmiştir. Bu durum Aylar'ın (2014) öğrencilerin sembolik temsilleri kullanarak sayısal işlem odaklı bir çözüm geliştirdiklerinde çözümlerini ispat olarak gördükleri ve çözümlerine güven duydukları sonucuyla uyuşma göstermiştir.

Matematiksel ispatlara ilişkin algı odaklı çalışmaların genelde ispatın rolü, amacı ve önemi gibi konulara odaklandığı görülmektedir (Almeida, 1993; Anapa ve Şamkar, 2010; Aktaş ve Aktaş, 2013; Wiest, 2015). Bu araştırma kapsamında ele alınan "MÖA'nın çözümlerine ilişkin algıları" yaklaşımı; ispat yapma sürecinde algının işler duruma nasıl getirilebileceğine ilişkin önemli sonuçlar içermektedir. Kişinin ispatın önemine dair ifade

ettiği önem eğer çözüm sürecine bir katkı sağlamıyorsa, değerli bir amaca hizmet ettiğinden de bahsedemeyiz. Bu kapsam da MÖA çözümleriyle alakalı doğruluk, geliştirilebilirlik veya geçerlikle ilgili algılarını ifade ederken hem geliştirmiş oldukları ispatları ikinci bir gözle tekrardan gözden geçirme fırsatı yakalamışlar hem de ispatın doğasına ilişkin kendilerine var olan anlamla tanımışlardır. Kısacası "İspat, benim için nedir ve buradan çıkaracağım anlam çözüm sürecimi nasıl etkilemektedir?" sorusunu kendilerine sorma ve bu sorudan bir cevap alma fırsatı yakalamışlardır. MÖA'nın çözümlerinin kabul edilebilirliği ve geçerliği ile ilgili algıları aracılığıyla ispatın önemli rollerini de bir yandan deneyimleme fırsatı yakalamışlardır. Bu sonuç, Gray (2006)'in ispatın geçerliliği, doğruluğu, kabul edilebilirliği ile alakalı algıların ispat kavramını anlamaya ve ispat yapma sürecine katkı sağlamaya dayalı elde ettiği sonuçlarıyla uyuşma göstermiştir.

MÖA'nın üstbilişsel düzenleme süreçlerinin incelenmesine yönelik kendilerine yöneltilen sorulara verdikleri yanıtların, çözümlerine dayalı algılarından etkilendiği sonucu elde edilmiştir. Bu sonuca dayalı ifade edilebilecek nedenlerden biri; bilişsel olgularla ilgili bilgi ve inançlardan etkilenen üstbilişin (Garafolo ve Lester, 1985; Depaepe vd, 2009) yapısından kaynakladığı düşülmektedir. İfade edilecek bir diğer neden ise ispatın; inanç, bilgi ve bilişsel becerilere dayanan yapısıdır (Blanton ve Stylianou, 2003). Ayrıca algıların ve üstbilişin karşılıklı olarak birbirlerini etkilemeleri sonucu, Dickerson ve Doer'in (2014) ispatların matematiksel anlayışı ve üstbilişi geliştirme odaklı algılara sahip MÖA yaklaşımlarının olduğu sonucuyla destek bulmaktadır.

MÖA'nın üstbilişsel düzemleme süreçlerinin katkısıyla ispat çalışmalarını daha nitelikli ürünler olarak ortaya koydukları sonucuna ulaşılmıştır. Üstbilişin fayda sağladığı bir diğer önemli husus ise ispat yapma sürecinde karşılaştıkları zorlukları, farkına varamadıkları hatalarını fark etmelerini ve bunların neden kaynaklandığını belirlemelerine yardımcı olması olmuştur. Matematiksel süreç odaklı yapılan görüşmelerde bu durumların farkına varamamış ve çözümlerinin niteliğini geliştirecek yorumlar yapmaya çalışmışlardır. Üstbilişsel düzenleme süreçlerine yönelik görüşmelerde ise ispat yapma süreçlerine dayalı eksikliklerini temele alarak; bu süreçleri geliştirmeye yönelik olarak kendilerini sorgulayıcı yorumlarda bulunmuşlardır. Kısacası, üstbilişsel süreçlerin katkısı ile ispat yapma süreçlerinin haritasını çizmeye çalışmışlardır. Ayrıca ispat yaparken takip ettikleri süreçlerin problem çözme süreçleriyle benzer süreci

takip ettiklerini; problem çözer gibi ispat sorularını çözmeye çalıştıklarını ifade etmişlerdir. Bu sonuçlar, ispatın problem çözmenin özel bir yolu olduğu (Weber, 2005; Frungetti ve Morseli, 2009) ve matematiksel ispatın aslında problem çözmenin üstbilişsel bir özelliği olduğu ve bu süreci beslediği yaklaşımlarıyla uyumluluk göstermiştir (Lucast, 2005).

İspat yapma sürecinde üstbilişsel süreçlerin sıklıkla kullanıldığı ve bu süreçlerin gelişimine katkı sağlandığının elde edilmesi; ispat yapma sürecinde üstbilişsel süreçlerin bilişsel süreçlere göre daha az kullanıldığını tespit eden Öztürk ve Kaplan'ın (2019) çalışmalarıyla uyuşmayan bir sonucu ortaya koymuştur. Bu durumun oluşma nedeni araştırma bağlamında değerlendirilirse; çoklu veri toplama araçlarının kullanımı, problem çözmenin özel bir durumu olarak hazırlanan soruların varlığı, ispatın farklı kategoriler kapsamında düşüncesel çeşitliliği sağlayacak şekilde ele alınmasının ve MÖA'nın bu süreçlerinin farkına varmalarının birkaç kez sağlanmasının bir sonucu olduğu düşünülmektedir. Tahmini yapılan bu yorumlara; ispat çalışmalarının niteliğinin arttırılmasında üstbilişin nasıl bir rol oynayacağı ve bunu sağlamada kullanılabilecek örnek temelli sorulara ilişkin Lockwood vd.'nin (2016) çalışmalarından elde edilen sonuçlar destek vermektedir. Kişilerin üstbilişsel davranışları ortaya koysalar da üstbilişsel bilgilerinin bu davranışlarını yorumlayamamalarına neden olması (Temur vd., 2019) sorunu bu davranışları tanımlayabilecekleri durumların oluşturulması ile giderilebilir (Wilson ve Clarke, 2002, 2004). Araştırmada kullanıla davranış kartlarının, MÖA'nın kendilerinde gözlemledikleri davranışları tarif etmeleri ve açığa çıkarmalarında önemli bir araç olması da ispat sürecinde üstbilişsel süreçlerini başarıyla tanımlamalarının nedeni olabilir.

MÖA'ya içerik bilgisi kapsamında sorulan sorularda ispatın anlamına dayalı sınırlı sayıda var olan bilgileri dikkat çekmiştir. İspatın birçok anlamı ve rolü olmasına rağmen (Tall, 1989; Alibert ve Thomas, 1991; Hersh, 1993; Greenberg, 1993; Almeida, 1995; Edwards, 1997; Healy ve Hoyles, 1998; Rav, 1999; Ball vd., 2002; Lucast, 2003; Stylianides, 2007; Stylianou vd., 2009; Selden ve Selden 2013). MÖA, ispatın çoğunlukla kesinlik, doğrulama ve açıklama yönlerine odaklanmışlardır. Tall'un (1989) tanımladığı; formül ve ifadelerin açıkça formüle edilmesi yaklaşımına benzer olarak çözümlerinde açıklık ve net olmaya önem verdikleri ancak ispata ilişkin bakış açılarının bu durumlarla sınırlı kaldığı sonucuna ulaşılmıştır. Bu durumun çözümlerine dayalı gerekli açıklamaları

yaparken birbirini tekrar eden yanıtlar vermelerine de sebep olduğu gözlemlenmiştir. MÖA'nın ispatlarla ilgili sınırlı düzeyde bilgiye ve bakış açısına sahip olmaları; ispatla geç tanışmaları ve ağırlıklı olarak ispatın formal yönüne dayanan eğitimlerinin bir sonucu olduğu söylenebilir. Nitekim incelenen sınırlı sayıda kazanım ve konunun var olduğunun incelendiği Matematik Dersi Öğretim Programları (MEB, 2018a, 2018b, 2018c) bu düşüncenin oluşumuna desteklemektedir. Bu durum ayrıca MÖA'nın pedagojik bilgilerinin düşük olmasına ve müfredatla ilgili yanlış yanıtlar vermelerine de neden olmuştur. Bu sonuçlar MÖA'nın ispatlara ilişkin desteğe ihtiyaçları olduğunu göstermektedir. Bu sonuç, MÖA'nın bilgisel anlamdaki yeterlikleri, mesleki gelişimleri ve müfredat çalışmaları kapsamında desteğe ihtiyaç duydukları önerisinde bulunan Bieda'nın (2010) görüşünü destekler niteliktedir. Bu duruma karşılık olarak ise MÖA'nın ispata dayalı sınırlı eğitim geçmişlerine rağmen, çözüm süreçlerini desteklemek ve M-İ sürecindeki pedagojik yeterliklerini; deneyimleri sonucunda ortaya koymaya çalışmaları ispat sürecindeki pedagojik gerekliliklerini görmelerini sağlamıştır. Kişilere uygulama imkanı tanıdıktan sonra ispata dayalı pedagojik bilgilerin incelendiği araştırmalara göre (Steele ve Rogers, 2012; Lesseig, 2016) bu araştırma; MÖA'nın pedagoji bilgileri kapsamında çözümlerini değerlendirmelerini, öğretmenlik yaşamlarında nelere dikkat etmeleri gerektiğini ve ispatla ilgili var olan ve geliştirmeleri gereken noktaların farkına varmalarını sağladığını ve bunların her bir MÖA da oluşan bir farkındalık olduğu sonucu elde edilmiştir.

5.3. Öneriler

Matematik öğretmen adaylarının matematiksel muhakeme ve ispat yapma süreçlerinin incelendiği bu araştırmada; gelecek araştırmalar ve uygulayıcılar için şu önerilerde bulunulabilir:

- M-İ Analitik Çerçevesinde bulunan matematiksel bileşen kapsamında var olan kategorilerin tanımına ve gerekliliklerine ilişkin MÖA ve matematik öğretmenlerinin farkında olmaları sağlanarak; öğretim süreçlerinde ispatı hangi kategori kapsamında ele alacakları ve bunları öğrenci öğrenmelerine nasıl katkı sağlayacağı konusunda farklı bir araştırma ele alınabilir.

- İspat yapma sürecinde olan bir kişinin çözümüne dayalı olarak hangi algılara sahip olduğu ve bunun çözüm süreçlerini nasıl yönlendirdiği cevabı; grup odaklı çalışma kapsamında ele alınabilir. Bu kapsamda; ispatta algı kavramının sadece bir görüş veya düşünce sürecini mi içerisine aldığı yoksa ispat yapma sürecine yön verdiği ve bu sürecin bir parçası olup olmadığını ele alacak araştırmalar yapılabilir.
- Araştırma sonuçlarına göre MÖA'nın ispata dayalı pedagojik bilgileri ve bu kavrama dayalı kısıtlı anlamlara sahip oldukları göz önüne alındığında, ispatın teoremlerin doğruluğu veya kesinliği sağlayan anlamından öte bilişsel ve üstbilişsel süreçlere katkı sağlayan ve matematiksel anlamaya yön veren değerinin temele alındığı araştırmalar sıklaştırılabilir.
- Matematik öğretmen adaylarının ispatın anlamı ve değerini anlamaya ve bu kapsamda pedagojik bilgilerini geliştirmelerine yönelik sınıf uygulamalarıyla deneyim kazanmaları sağlanabilir.
- M-İ odaklı görev sorularının hazırlanması ve geliştirilen çözümlerin incelenmesinde kullanılan M-İ kategorilerini MÖA'nın bilmesi durumunda çözüm süreçlerine etkisinin neler olabileceği incelenebilir.
- Üstbilişsel süreçlerinin incelenmesi anlamında takip edilen süreçler, her bir uygulama sonrasında görüşmelerden önce eş zamanlı olarak uygulanmasının, bu süreçleri ortaya çıkarmada ne tür değişiklikler oluşturacağı incelenebilir.

MÖA'nın muhakeme ve ispat yapma sürecine ilişkin araştırma genelinde elde edilen sonuçlar doğrultusunda önerisi yapılacak önemli bir husus ise matematiksel ispatlarla öğrencilerin tanıştırılmasının çok geciktirilmemesidir. Özellikle ortaokul seviyesinde bulunan öğrencilere ispatın muhakemeye tesir ettiği; genelleme, tahminde bulunma, sorgulama ve ilişkilendirme benzeri matematiksel düşünmeye destek veren süreçlerle; öğrencilerin anlamlı öğrenmelerinin gerçekleşmesinde matematiksel ispatlar bir araç olarak kullanılabilir. Bu doğrultuda; matematiksel bilgilerin, problem çözmenin, bilişsel seviyeleri geliştirmenin ve bilgileri doğrulamanın bir aracı olarak kullanılacak matematiksel ispatlara, matematiksel anlamayı ve anlamlı öğrenmeleri sağlayan bir amaç perspektifinden bakılabilmelidir.

KAYNAKÇA

Aktaş, M. C., & Aktaş, D. Y. (2013). Matematik bölümü öğrencilerinin ispat yapma ile ilgili algılarının metaforlar yoluyla belirlenmesi. *International Online Journal of Educational Sciences, 5*(3), 701-718

Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. *Journal of Mathematical Behavior, 24,* 125-134.

Alibert, D., & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. İçinde D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (s. 215–230). Dordrecht: Kluwer.

Almeida, D. (1995). Mathematics undergraduates' perceptions of proof. *Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of The IMA, 14* (4), 171-177.

Almeida, D. (2003) Engendering proof attitudes: can the genesis of mathematical knowledge teach us anything? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34(4),* 479-488.

Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2010). *Charming Proofs: A Journey Into Elegant Mathematics* (No. 42). MAA.

Anapa, P., & Şamkar, H. (2010). Investigation of undergraduate students' perceptions of mathematical proof. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 2*(2), 2700-2706.

Anthony, G., & Walshaw, M. (2009). Characteristics of effective teaching of mathematics: a view from the west. *Journal of Mathematics Education, 2*(2), 147-164.

Arsac, G. (2007). Origin of Mathematical Proof: History and Epistemology. In *Theorems in School* (s. 25-42). Brill Sense.

Aylar, E. (2014). A study on the forms of perception of 7th grade students towards the concept of proof. *Journal of Education and Future*, (5), 39-56.

Azevedo, R., Moos, D. C., Johnson, A. M., & Chauncey, A. D. (2010). Measuring cognitive and metacognitive regulatory processes during hypermedia learning: Issues and challenges. *Educational Psychologist, 45,* 210–223.

Balacheff, N. (1988). *Aspects of Proof in Pupils' Practice of School Mathematics.* (İçinde D.Pimm (Ed.), Mathematics, Teachers and Children (s. 216-235). London: Hodder and Stoughton).

Ball, D.L., Hoyles, C., Jahnke, H.N. & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. *İçinde Proceedings for the International Congress of Mathematicians (s. 907–920*). Beijing, China: Higher Education Press.

Bayazit, İ. (2017). İspat'ın önemi ve ispat konusundaki öğretmen yeterliklerinin incelenmesi. *Electronic Turkish Studies, 12* (14), 19-40.

Beck, M., & Geoghegan, R. (2011). The Art of Proof. *San Francisco*.

Bell, A. W. (1976). A Study of Pupils' Proof-Explanations in Mathematical Situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*(1), 23-40.

Bieda, K. N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 351-382.

Bills, L., & Rowland, T. (1999). Examples, generalisation and proof. *Research in Mathematics Education*, *1*(1), 103-116.

Brodie, K. (2009). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms* (Vol. 775). Springer Science & Business Media.

Brown, S. A. (2014). On skepticism and its role in the development of proof in the classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 311-335.

Burton, L. (1984). Mathematical Thinking: The Struggle for Meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35-49.

Bussi, M. (2009). Proof and proving in primary school: An experimental approach. İçinde *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 1, s.. 53-58).

Canadas, M.C., & Castro, E. (2005). A proposal for categorisation for analysing inductive reasoning, İçinde Bosch, M. (Éd.), *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* Saint Feliu De Guixols, Spain, s. 40.

CCSSM [Commen Core State Standarts for Mathematics] (2010). Commen Core State Standarts for Mathematics. 22 Nisan 2018 tarihinde http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf adresinden erişildi.

Coe, R., & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal.* 20, 41-53.

Costa, A. L. (1984). Mediating the metacognitive. *Educational Leadership*, *42*(3), 57-62.

Creswell, J. W. (2014). *Educational Research: Planning, Conducting, and Evaluating Quantitative* (s. 146-166). Upper Saddle River, NI: Prentice Hall.

Creswell, J. W. (2016). *Nitel Araştırma Yöntemleri: Beş Yaklaşıma Göre Nitel Araştırma ve Araştırma Deseni*. Siyasal Kitabevi.

Çelik, D. (2016). Matematiksel Düşünme. E. Bingölbali, S. Arslan, İö Zembat. *Matematik Eğitiminde Teoriler*, 17-42.

Dawkins, P. C., & Weber, K. (2017). Values and norms of proof for mathematicians and students. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(2), 123-142.

Dede, Y., & Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi, 4 (2),* 47-71. DOI: 10.17984/Adyuebd.52880.

Depaepe, F., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2010). Teachers' metacognitive and heuristic approaches to word problem solving: Analysis and impact on students' beliefs and performance. *ZDM*, *42*(2), 205-218.

Dickerson, D. S., & Doerr, H. M. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(4), 711-733.

de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras,* N. 24, s. 17-24.

Doğan, M. F. (2019a). Sekizinci sınıf matematik ders kitabındaki matematiksel akıl yürütme ve ispatı öğrenme olanakları. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *20*(2), 601-618.

Doğan, M. F. (2019b). The nature of middle school in-service teachers' engagements in proving-related activities. *Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *48*(1), 100-130.

Edwards, L. D. (1997). Exploring the territory before proof: Student's generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *2*(3), 187-215.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. İçinde L. B. Resnick (Ed.), The Nature of Intelligence (s. 231-235). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Furinghetti, F., & Morselli, F. (2009). Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: affective and cognitive factors in proving. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(1), 71-90.

Fortunato, I., & Hecht, D. (1991). Metacognition and problem solving. *The Arithmetic Teacher*, *39*(4), 38.

Garofalo, J., & Lester Jr, F. K. (1985). Metacognition, Cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 163-176.

Goldberg A. (2002). What are mathematical proofs and why are they important? 24 Aralık 2017 tarihinde http://www.math.uconn.edu/~hurley/math315/proofgoldberger.pdf adresinden erişildi.

Grabiner, J. V. (2011). Why Proof? A Historian's Perspective. İçinde *Proof and Proving in Mathematics Education* (s.. 147-167). Springer, Dordrecht.

Greenberg, M. (1993). Proving environmental inequity in siting locally unwanted land uses. *Risk*, *4*, 235.

Gray, D. M. (2006). *An Investigation of Pre-Service Teachers' and Professional Mathematicians' Perceptions of Mathematical Proof at the Secondary School Level*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of New Hampshire, USA

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-2), 5-23.

Hanna, G., & Barbeau, E. (2002). What is proof? *History of Modern Science and Mathematics*, *1*, 36-48.

Hanna, G., & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. ZDM, 40, 345–353.

Hanna, G., & De Villiers, M. (Eds.). (2012). *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study* (Vol. 15). Springer Science & Business Media.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from an exploratory study. İçinde A. H. Schoenfeld, J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research in College Mathematics Education III* (s.. 234-283). Providence, RI: AMS.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, *2*, 805-842.

Hartman, H. J. (2001). Developing students' metacognitive knowledge and skills. İçinde *Metacognition in Learning and Instruction* (s. 33-68). Springer, Dordrecht.

Healy, L., & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics: Technical report on the nationwide survey*. Institute of Education, University of London.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 396-428.

Hoyles, C., & Healy, L. (2007). Curriculum change and geometrical reasoning. İçinde *Theorems in School* (Pp. 79-115). Brill Sense.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 389-399.

Hıdıroğlu, Ç. N. (2018). Üstbiliş kavramına ve problem çözme sürecinde üstbilişin rolüne eleştirel bir bakış. *Pamukkale University Journal of Social Sciences Institute / Pamukkale Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, (32).

Jahnke, H. N., & Wambach, R. (2013). Understanding what a proof is: a classroom-based approach. *ZDM*, *45*(3), 469-482.

Johnston-Wilder S., Mason . (2005). *Developing Thinking in Geometry*. London, Open University & Paul Chapman Publishing.

Knuth, E.J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education* ,5(1), 61–88.

Knuth, E. J., & Sutherland, J. (2004). Student understanding of generality. *North American Chapter of The International Group for the Psychology of Mathematics Education October, 2004, Toronto, Ontario, Canada*, 562.

Knuth, E., Zaslavsky, O., & Ellis, A. (2019). The role and use of examples in learning to prove. *The Journal of Mathematical Behavior*, *53* (2019), 256-262.

Kuchemann, D., & Hoyles, C. (2009). From Empirical to Structural Reasoning in Mathematics: Tracking Changes Over Time. Lawrence Erlbaum Associates.

Kuzle, A. (2018). Assessing Metacognition of grade 2 and grade 4 students using an adaptation of multi-method interview approach during mathematics problem-solving. *Mathematics Education Research Journal*, *30*(2), 185-207.

Ko, Y. Y., & Knuth, E. (2009). Problems manifested in prospective secondary mathematics teachers' proofs and counterexamples in differentiation. İçinde *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 1, s. 262-267).

Lai, E. R. (2011). *Metacognition: A literature review*. *Always learning: Pearson Research Report*. 24 Temmuz 2017 tarihinde Https://İmages.Pearsonassessments.Com/İmages/Tmrs/Metacognition_Literature_Review_Final.Pdf adresinden erişildi.

Lannin, J., Ellis, A., Elliot, R., & Zbiek, R. M. (2011). Developing essential understanding of mathematical reasoning for teaching mathematics in grades Pre-K–8. *Reston: NCTM*

Lesseig, K. (2016). Investigating mathematical knowledge for teaching proof in professional development. *International Journal of Research İn Education And Science*, *2*(2), 253-270.

Lecompte, M. D., & Goetz, J. P. (1982). Problems of reliability and validity in ethnographic research. *Review of Educational Research*, *52*(1), 31-60.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 255-276.

Lin, X. (2001). Designing metacognitive activities. *Educational Technology Research* and Development, 49 (2), 23-40.

Lockwood, E., Ellis, A. B., Lynch, A. G. (2016). Mathematicians' example-related activity when exploring and proving conjectures. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *2*(2), 165–199.

Lucast, E. K. (2003). Proof as method: a new case for proof in mathematics curricula. *Unpublished Masters Thesis. Pittsburgh, PA, USA: Carnegie Mellon University*.

Martin, W. G., Carter, J., Forster, S., Howe, R., Kader, G., Kepner, H., . . . Valdez, P. (2009). *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making. Reston*, VA: NCTM.

Mason J., Burton L., Stacey K. (2010). *Thinking Mathematically (2nd Edition).* London: Pearson Education.

Mason, J. (2017). Relationships between proof and examples: Comments arising from the papers in this issue. *The Journal of Mathematical Behavior*, *53 (2019)*, s. 339-347

Maxwell, J. A. (2013). *Qualitative Research Design: An Interactive Approach* (Vol. 41). SAGE Publications.

Mccrone, S. M. S. & Martin, T. S. (2009). Formal Proof in High School Geometry: Student Perceptions of Structure, Validity, and Purpose. Teaching Proving By Coordinating Aspects of Proofs With Students' Abilities. İçinde Stylianou, D. A., Blanton, M. L. & Knuth, E.J. (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across Grades: A K-16 Perspective*, (s.. 204-221). New York/Washington, DC: Routledge/NCTM.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018a). Ortaokul Matematik Dersi (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı. Ankara: Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018b). Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı. Ankara: Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018c). Ortaöğretim Fen Lisesi Matematik Dersi Öğretim Programı. Ankara: Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı

Miles, M. B., Huberman, A. M., Huberman, M. A., & Huberman, M. (1994). *Qualitative Data Analysis: An Expanded Sourcebook*. SAGE.

NCTM [National Council of Teachers of Mathematics]. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: Author.

OECD (2013). PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do (Volume I): Student Performance in Mathematics, Reading and Science. OECD Publishing.

Öztürk, M., & Kaplan, A. (2019). Cognitive analysis of constructing algebraic proof processes: A mixed method research. *Education and Science, 44*(197).

Özgür, Z. (2017). *Relationships Between Students' Conceptions of Proof and Classroom Factors.* Unpublished Doctoral Dissertation, University of Wisconsin-Madison, Ann Arbor, USA.

Özgür, Z., Ellis, A. B., Vinsonhale, R. Doğan, M. F., Knuth, E. (2017). From examples to proof: Purposes, strategies, and affordances of example use. *Journal of Mathematical Behavior (2017),*http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.03.004.

Patton, M. Q. (2018). Nitel Araştırma ve Değerlendirme Yöntemleri. *Ankara: Pegem Akademi*.

Polya, G. (1954). Nasıl Çözmeli? (F. Halatçı, Çev.). İstanbul: Sistem Yayıncılık.

Polya, G. (1966). Matematikte Endüksiyon ve Benzetme: 1. Kısım (O. Ş. İçen, Çev.). İstanbul: Türk Matematik Derneği.

Punch, K. F. (2014). Sosyal Araştırmalara Giriş: Nicel ve Nitel Yaklaşımlar (3. Baskı). *Çev. D. Bayrak, Hb Arslan, Z. Akyüz, Z. Etöz). Siyasal Kitabevi: Ankara*.

Rav, Y. (1999). Why Do We Prove Theorems?. *Philosophia Mathematica, 7*(1), 5-41.

Reid, D. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5–29.

Reid, D.A., & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education. Research, Learning and Teaching,* Rotterdam: Sense Publishers.

Rivera, F. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies in Mathematics 73,* 297–328.

Ross, K. A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *105*(3), 252-255.

Russel, J. S. (1999). Mathematical Reasoning in the Elementary Grades. Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12. *1999 Yearbook, NCTM*, 1-12.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. İçinde *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 334-370.

Schoenfeld, A. H., (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior, 13,* 55-80.

Schoenfeld, A. H. (2009). Why do we teach?. *Kappa Delta Pi Record, 46*(1), 26-29.

Schneider, W., & Artelt, C. (2010). Metacognition and Mathematics Education. *ZDM, 42*(2), 149-161.

Schraw, G., Dennison, R. S. (1994). Assessing metacognitive awareness. *Contemporary Educational Psychology, 19*(4), 460-475.

Schraw, G., & Moshman, D. (1995). Metacognitive theories. *Educational Psychology Review, 7*(4), 351-371.

Selden, A. & Selden, J. (2007). Teaching Proving By Coordinating Aspects of Proofs With Students' Abilities. (Technical Report), Tennesse Technological University, Mathematics Department, 10 Ekim 2018 Tarihinde Http://Www.Math.Tntech.Edu/Techreports/Tr_2007_2.Pdf Adresinden Alınmıştır.

Selden, A., & Selden, J. (2013). Proof and Problem Solving at University Level. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1), 303-334.

Sperling, R. A., Howard, B. C. Miller, L. A., & Murphy, C. (2002). Measures of children's knowledge and regulation of cognition. *Contemporary Educational Psychology, 27,* 51–79.

Springboard (2014). *Springboard Mathematics, Course 3/Prealgebra (1. Basım).* Yer: Collegeboard.

Sriraman, B. (2005). Problem solving as a precursor to mathematical proof. *Mathematics in School*, *34*(1), 4-8.

Stacey, K. (2006). What Is Mathematical Thinking and Why Is It Important. *Progress Report Of The Apec Project: Collaborative Studies On İnnovations For Teaching And Learning Mathematics In Different Cultures (II)—Lesson Study Focusing on Mathematical Thinking.*

Steele, M. D., & Rogers, K. C. (2012). Relationships between mathematical knowledge for teaching and teaching practice: The case of proof. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(2), 159-180.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38(3),* 289-321.

Stylianides, G. J. (2005). *Investigating Students' Opportunities to Develop Proficiency in Reasoning and Proving: A Curricular Perspective*. Unpublished Doctoral Dissertation, University of Michigan, Ann Arbor, USA.

Stylianides, G. J. (2007). Investigating the guidance offered to teachers in curriculum materials: the case of proof in mathematics. *International Journal of Science And Mathematics Education, 6(1),* 191-215.

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics, 28 (1),* 9-16.

Stylianides, A. J. (2009). Breaking the equation "empirical argument = proof." *11 Kasım 2017 tarihinde* https://nrich.maths.org/6664 adresinden erişildi.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning, 11,* 258-288.

Stylianides, G. J. (2010). Engaging secondary students in reasoning-and-proving. *Mathematics Teaching, September,* 39-44.

Stylianides, G.J., Stylianides, A.J., Philippou, G.N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education 10*(3), 145–166.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2017). Based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(2), 119-127.

Stylianides, G., Stylianides, A. & Weber, K. (2017). Research on the Teaching and Learning of Proof: Taking Stock and Moving Forward. İçinde J. Cai (Ed.), Compendium for Research in Mathematics Education. Reston, VA: NCTM.

Stylianou, D. A., Blanton, M. L., Knuth, E. J. (Eds.). (2009). *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspective*. Routledge & NCTM.

Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching, 127*, 28-32.

Tall, D. (1998). The Cognitive development of proof: ıs mathematical proof for all or for some. İçinde *Conference of The University of Chicago School Mathematics Project*.

Tall, D. (2002). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. İçinde *Advanced Mathematical Thinking* (s. 3-21). Springer, Dordrecht.

Temur, Ö. D., Özsoy, G., & Turgut, S. (2019). Metacognitive instructional behaviours of preschool teachers in mathematical activities. *ZDM*, 1-12.

Tanışlı, D. (2016). How do students prove their learning and teachers their teaching? Do teachers make a difference? *Eurasian Journal of Educational Research, 16 (66)* , 47-70.

Uğurel, I., & Moralı, H. S. (2010). Bir Ortaöğretim matematik dersindeki ispat yapma etkinliğine yönelik sınıfiçi tartışma sürecine öğrenci söylemleri çerçevesinde yakından bakış. *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, (28), 134-154.

Uğurel, I., Moralı, S., Koyunkaya, M. Y., & Karahan, Ö. (2016). Pre-Service secondary mathematics teachers' behaviors in the proving process. *Eurasia Journal Of Mathematics, Science & Technology Education*, *12*(2), 203-301.

Varghese, T. (2009). Secondary-level student teachers' conceptions of mathematical proof. Issues in the undergraduate mathematics preparation of school teachers: The Journal, volume 1: Content knowledge.

Veenman, M. V. J. (2005). The assessment of metacognitive skills: what can be learned from multi-method designs? İçinde C. Artelt & B. Moschner (Eds.), *Lernstrategien und Metakognition: Implikationen für Forshung und Praxis* (s. 77–99). Münster: Waxmann.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and Proof. İçinde J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics (s. 227-236). Reston, VA: NCTM.

Yıldırım, A., Şimşek, H. (2013). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yin, R. K. (2014). *Case Study Research and Applications: Design and Methods*. SAGE Publications.

Yee, S. P., Boyle, J. D., Ko, Y. Y. W., & Bleiler-Baxter, S. K. (2018). Effects of constructing, critiquing, and revising arguments within university classrooms. *The Journal Of Mathematical Behavior*, *49*, 145-162.

Zaskis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of Patterns: The Tension Between Algebraic Thinking and Algebraic Notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 379–402.

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., & Winicki-Landman, G. (2011). The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical Perspectives. İçinde *Proof and Proving in Mathematics Education* (s. 215-229). Springer, Dordrecht.

Zayadi, M., & Kurniati, D. (2018). Mathematics reasoning and proving of students in generalizing the pattern. *International Journal of Engineering & Technology, 7*(2.10), 15-17.

Zeybek, Z., Üstün, A., & Birol, A. (2018). Matematiksel ispatların ortaokul matematik ders kitaplarındaki yeri. *İlköğretim Online*, *17*(3).

Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *The Journal of Mathematical Behavior, 24*(3-4), 351-360.

Weber, K. (2010). Mathematics majors' perceptions of conviction, validity, and proof. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(4), 306-336.

Wiest, J. (2015). Postsecondary student perceptions of received mathematical proofs. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *15*(1), 69-83.

Wilson, J. (2001). Methodological difficulties of assessing metacognition: A new approach. *Paper Presented at the Annual Meeting of the Australian Association for Research in Education.*

Wilson, J., & Clarke, D. (2000). Monitoring mathematical metacognition. *Education*, *16*(3), 163-176.

Wilson, J., & Clarke, D. (2004). Towards the modelling of mathematical metacognition. *Mathematics Education Research Journal*, *16*(2), 25-48.

EKLER

EK 1. Bilgilendirilmiş Gönüllü Katılım ve Video-Ses Kaydı İzin Formu

Ek 2. M-İ Odaklı Görev Soruları

Ek 3. Davranış Kartları ve Yapılandırılmış Görüşme Soruları

Ek 4. Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları

EK 1. Bilgilendirilmiş Gönüllü Katılım ve Video-Ses Kaydı İzin Formu

BİLGİLENDİRİLMİŞ GÖNÜLLÜ KATILIM
VE
VİDEO-SES KAYDI İZİN FORMU

Araştırmaya katılmadan önce bu formda yer alan açıklamaları okumanız sizin için önemlidir.

Araştırmanın Yürütücüsü	Mehtap Çağla ÇOKYAŞA. Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı.
Araştırmanın Başlığı	Matematik Öğretmen Adaylarının Matematiksel Muhakeme ve İspat Yapma Süreçlerinin Muhakeme – İspatlama Çerçevesi ve Üstbiliş Bağlamında İncelenmesi
Araştırmanın Amacı:	Matematik öğretmen adaylarının matematiksel ispatlara yönelik görevlerle bireysel ve grup halinde meşgul olurken matematiksel muhakeme ve ispat yapma süreçlerini Muhakeme - İspatlama Çerçevesi ve üstbiliş bağlamında incelemektir.

Genel bilgileri tabloda verilen bu araştırmanın içeriği uygulama (test-gözlem-görüşme), video ve ses kaydından oluşmaktadır. Katılımınız dahilinde sizden beklenen araştırma içeriğine katkıda bulunmanızdır. Uygulama sırasındaki yazılı dokümanlar, video ve ses kayıtları araştırma sonuçlarının yer alacağı akademik çalışmalarda kullanılacaktır. Bilgiler araştırmanın yürütücüsü Mehtap Çağla ÇOKYAŞA ve danışmanı Dr. Öğr. Üyesi Alaattin PUSMAZ'ın (Marmara Üniversitesi) kullanımına açık olacaktır. Araştırma kapsamında toplanan veriler, sadece bilimsel amaçlar doğrultusunda kullanılacak, araştırmanın amacı dışında kullanılmayacak ve gerekmesi halinde, sizin (yazılı) izniniz olmadan başkalarıyla paylaşılmayacaktır. Toplanan veriler araştırma sonunda arşivlenecek ya da imha edilecektir. Sizden toplanan verileri inceleme ve istemeniz halinde çalışmadan ayrılma haklarınız bulunmaktadır. Araştırmada hiçbir risk öngörülmemiştir. Araştırma hakkındaki sorularınızı, araştırmanın yürütücüsü Mehtap Çağla ÇOKYAŞA' ya e-posta: mehtapccokyasa@gmail.com adresinden sorabilirsiniz.

KATILIMCI	**ARAŞTIRMACI**
Çalışmanın neden ve nasıl yapılacağı, araştırma katılımım sonucu bir hak kaybımın olmayacağı ve formun bir kopyasının bende kalabileceği bana bildirildi. Araştırmaya gönüllü olarak katılıyorum ve haklarımı biliyorum.	Hazırladığım bu form ile yaptığım araştırmanın içerik, fayda ve risk bilgilerini açıkladım. Katılımcı ile formu gözden geçirdim; açıklamalarımı doğru ve net anladığı görüşündeyim.
Adı-Soyadı:	Adı-Soyadı:
Tarih:	Tarih:
İmza:	İmza:

Ek 2. M-İ Odaklı Görev Soruları

Bireysel Uygulama 1 (BU 1)



GÖREV 1

Verilen şekiller yardımıyla sizden istenilenleri cevaplayınız.

	1	2	3	4	5
9	8	7	6		
	10	11	12	13	14
18	17	16	15		
	19	20	…		
…					

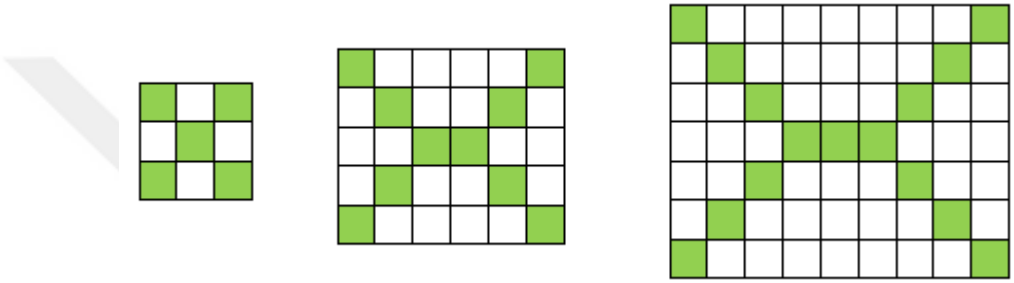
a. 65 sayısının nerede olacağını tahmin edebiliyor musunuz? 92. ve 250. sayılar nerededir?
b. 32. satırın 3. sütununda bulunan sayı kaçtır?
c. Genel olarak, herhangi bir tam sayı verildiğinde, bu örüntüde nerede olacağı nasıl tahmin edilebilir? Önerdiğiniz stratejiyi açıklayın.

Grup Uygulaması 1 (GU 1)

UYGULAMA 1

GÖREV 2

Verilen şekiller yardımıyla sizden istenilenleri cevaplayınız.



a. Örüntüde herhangi bir aşamadaki beyaz kare sayısını bulmak için nasıl bir kural geliştirilebilir? Geliştirdiğiniz kuralı doğrulayınız ve düşünme şeklinizi açıklayınız.
b. 11. şekilde kaç tane beyaz ve yeşil kare vardır?
c. Toplamda 140 beyaz kare içeren şekil kaçıncı sıradadır?

Bireysel Uygulama 2 (BU 2)

UYGULAMA 2

GÖREV 3

Verilen şekiller yardımıyla sizden istenilenleri cevaplayınız.

Şekil Örüntüsü A					
Şekil	1	2	3	4	5
Nokta	2	6	10	14	18

Şekil Örüntüsü B					
Şekil	1	2	3	4	5
Nokta	3	6	9	12	15

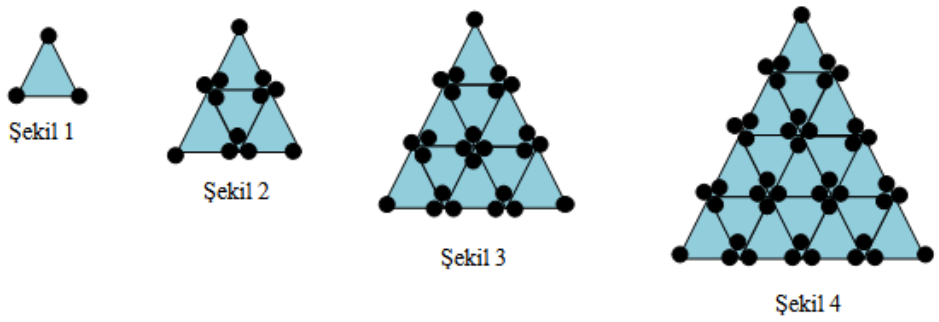
a. A ve B şekil örüntüleri için tabloda verilenlere uygun bir model geliştiriniz. Oluşturduğunuz model üzerinden bir kural oluşturarak düşünme şeklinizi açıklayınız.
b. Yukarıda verilen tabloda A ve B şekil örüntülerinin her ikisinin 2. adımında 6 nokta var. Örüntü devam ettirildiğinde eşit sayıda noktaya sahip başka şekiller oluşur mu? Cevabınızı açıklayınız.

Grup Uygulaması 2 (GU 2)

UYGULAMA 2

GÖREV 4

Verilen şekiller yardımıyla sizden istenilenleri cevaplayınız.



a. Örüntüde herhangi bir aşamadaki toplam çubuk sayısını bulmak için nasıl bir kural geliştirilebilir? Geliştirdiğiniz kuralı doğrulayınız ve düşünme şeklinizi açıklayınız.
b. Örüntüde herhangi bir aşamadaki toplam nokta sayısını bulmak için nasıl bir kural geliştirilebilir? Geliştirdiğiniz kuralı doğrulayınız ve düşünme şeklinizi açıklayınız.

Bireysel Uygulama 3.1 (BU 3.1)

UYGULAMA 3

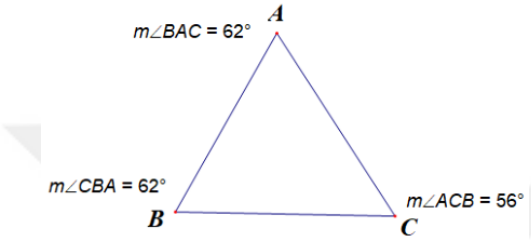
GÖREV 5

1. İki eş üçgen düşünün. Üçgeninizin taşıdığı özellikleri dikkate alarak aşağıdaki soruları cevaplayın.
   a. Bu iki üçgeni kenarları boyunca yapıştırarak kaç farklı dörtgen oluşturabilirsiniz?
   b. Oluşturulabilecek dörtgen çeşitleri ne olabilir?
2. İki eş olmayan düşünün. Üçgeninizin taşıdığı özellikleri dikkate alarak aşağıdaki soruları cevaplayın.
   a. Bu iki üçgeni kenarları boyunca yapıştırarak kaç farklı dörtgen oluşturabilirsiniz?
   b. Oluşturulabilecek dörtgen çeşitleri ne olabilir?

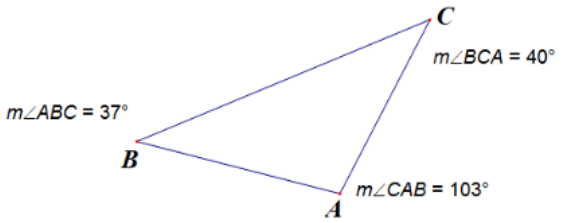
Grup Uygulaması 3.1 (GU 3.1)

UYGULAMA 3

GÖREV 6



Birinci Üçgen



İkinci Üçgen

Size verilen üçgenler yardımıyla aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a. Elinizdeki bu üçgenin ağırlık merkezini bulunuz ve G noktası ile isimlendiriniz. Bu noktayı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.
b. $|\mathbf{AG}|$, $|\mathbf{BG}|$, $|\mathbf{CG}|$ uzunluklarını büyükten küçüğe doğru sıralayınız. Cevabınızı açıklayınız.
c. $|\mathbf{CG}|$ uzunluğunu $|\mathbf{AB}|$ kenarınına ait kenarortay uzunluğuna oranını bulunuz. Cevabınızı açıklayınız.

Bireysel Uygulama 3.2 (BU 3.2)

UYGULAMA 3

GÖREV 7

500’den küçük en büyük asal sayı hangisidir?

Grup Uygulama 3.2 (GU 3.2)

UYGULAMA 3

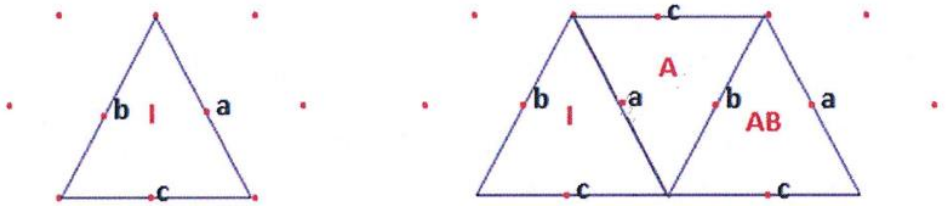
GÖREV 8

Aşağıdaki şekilde izometrik kağıda çizilen eşkenar üçgenin kenarlarının orta noktaları a, b ve c olarak isimlendirilmiştir.

Bu üçgene kenarları üzerindeki noktalar etrafında üç farklı döndürme işlemi uygulanabilir. Üçgeni a noktası etrafında saat yönünün tersi boyunca 180 derece döndürülerek elde edilen üçgene A ismi verilsin. Benzer şekilde başlangıçtaki üçgenin b ve c noktaları etrafında saat yönünün tersi boyunca 180 derece döndürülmesiyle elde edilen üçgenlere de B ve C isimleri verilsin.

Oluşturulan üçgene yeni döndürme işlemleri uygulanarak farklı isimlerde üçgenler elde edilebilir. Örneğin; iki döndürme işlemiyle AB üçgeni şu şekilde elde edilebilir:

Başlangıçtaki üçgen önce a noktası etrafında döndürülür, ardından oluşan üçgen b noktası etrafında döndürülürse AB üçgeni oluşur.



Bu bilgilere göre başlangıçtaki üçgene arda ara üç döndürme işlemi uygulayarak XYZ ve ZYX üçgenleri oluşturulsun. Buna göre XYZ ile ZYX üçgeninin aynı olduğunu gösteriniz.
Yukarıdaki X, Y ve Z başlangıçtaki üçgeni sırasıyla a, b veya c noktaları etrafında döndürmeyle oluşan birbirinden farklı üçgenlerin isimleridir.

Bireysel Uygulama 4.1 (BU 4.1)

UYGULAMA 4

GÖREV 9

Sizden istenilenlere uygun olarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a. Alanı ve çevresi eşit olan dörtgenler vardır. Gösteriniz. Bu önerme yanlışsa sebebini açıklayınız.
b. Alan ölçüleri eşit çevre uzunlukları farklı olan üçgenler vardır. Gösteriniz. Bu önerme yanlışsa sebebini açıklayınız.

Grup Uygulaması 4.1 (GU 4.1)

UYGULAMA 4

GÖREV 10

$[a5]$ iki basamaklı bir sayıdır. $\forall$ a ϵ IN için $[a5]^2 = (a \cdot (a+1)) \cdot 100 + 25$ dir.

a. Yukarıdaki eşitliğin doğru olduğunu gösteriniz.
b. Birler basamağında 5 bulunan üç veya daha fazla basamaklı sayıların karesi için benzer durumun olup olmadığını gösteriniz.

Bireysel Uygulama 4.2 (BU 4.2)

UYGULAMA 4

GÖREV 11

Aşağıdaki önermenin doğruluk durumunu (her zaman, bazen, hiçbir zaman) inceleyiniz.

$$\forall\, k \in IN \text{ için } k^3 + 5k, 6 \text{ ile tam bölünür.}$$

Grup Uygulaması 4.2 (GU 4.2)

UYGULAMA 4

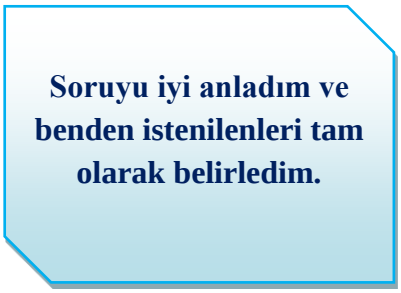
GÖREV 12

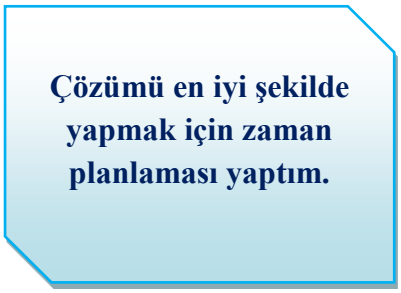
Düzlemde n tane doğru ile oluşturulacak maksimum bölge sayısı P(n) olsun. Buna göre;

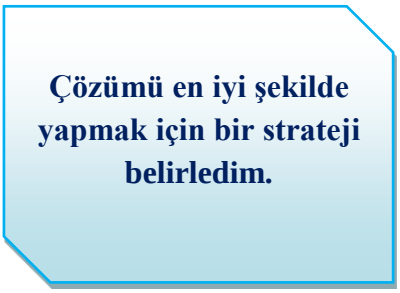
$$\mathbf{P(n) = 1 + \frac{n.(n+1)}{2}}$$ olduğunu gösteriniz.

Ek 3. Davranış Kartları ve Yapılandırılmış Görüşme Soruları

Planlama Kategorisi İçin:



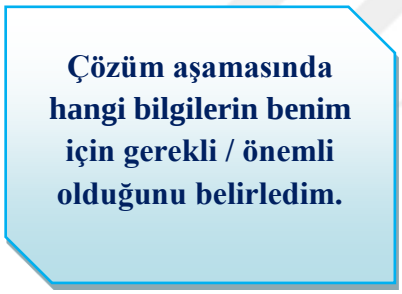


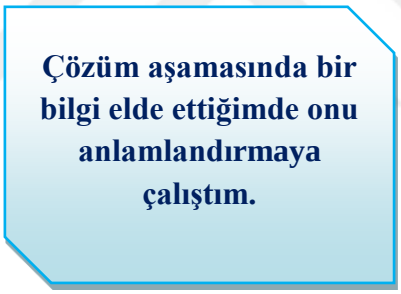


Planlama Kategorisindeki Davranış Kartlarına Yönelik Sorular:

1. **Kart:** Soruyu anlamak için ne yaptın?
2. **Kart:** Kullanmak istediğin stratejiyi nasıl belirledin?
3. **Kart:** Zamanı nasıl planlıyorsun? / Neden bunu yapıyorsun?

Bilgi Yönetimi Kategorisi İçin:

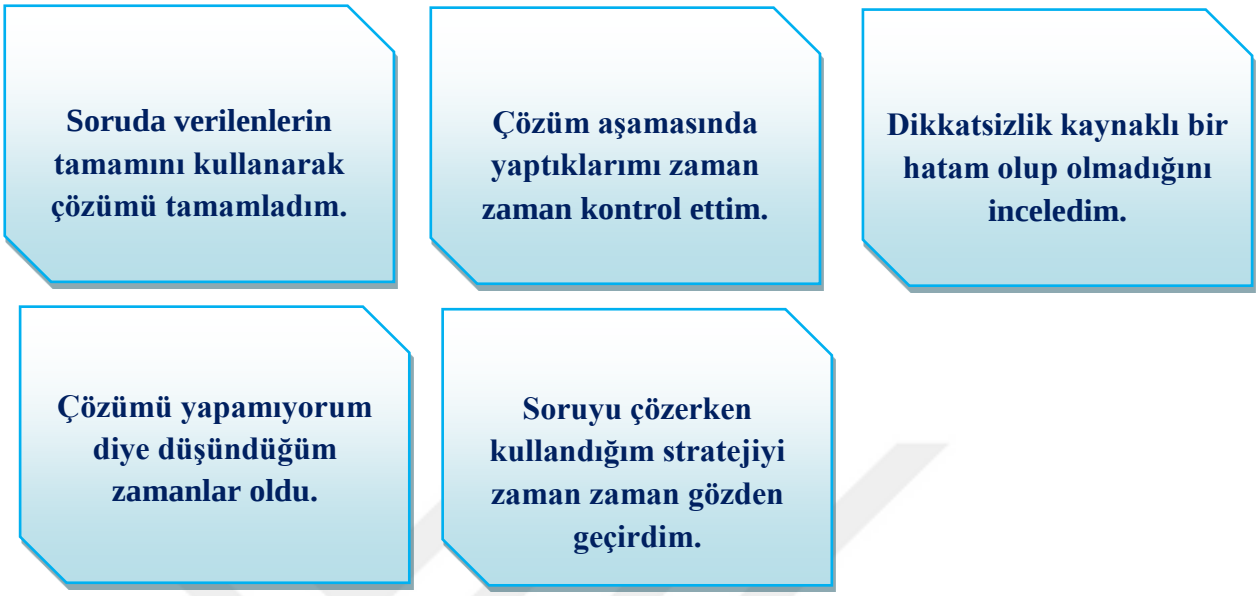




Bilgi Yönetimi Kategorisindeki Davranış Kartlarına Yönelik Sorular:

1. **Kart:** Soruyu çözmek için gerekli / önemli bilgileri nasıl belirliyorsun?
   Gerekli / önemli bilgileri belirlemeye neden ihtiyaç duyuyorsun?
2. **Kart:** Elde ettiğin bilgileri anlamak neden senin için önemli?
   Elde ettiğin bilgiler çözüme nasıl fayda sağlıyor?

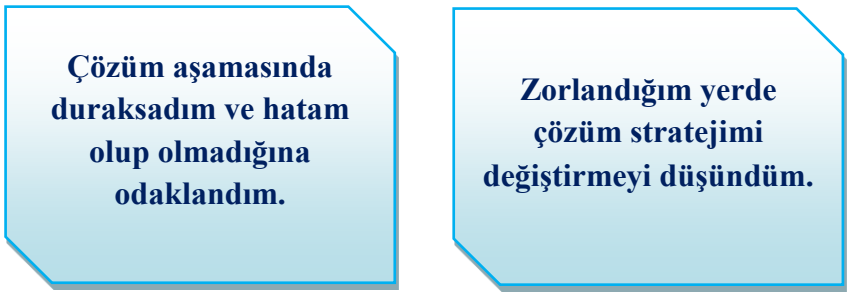
İzleme Kategorisi İçin:



İzleme Kategorisindeki Davranış Kartlarına Yönelik Sorular:

1. **Kart:** Tüm verilenleri kullanarak çözüm yapmak senin için neden önemlidir?
2. **Kart**: Soruyla uğraştığın sırada çözümünü nasıl kontrol ediyorsun?
3. **Kart:** Çözümünde bir hata olup olmadığını nasıl belirliyorsun?
   Hata ile karşılaştığında ne yapıyorsun?
4. **Kart:** Soruyu çözemediğini düşündüğünde ne yapıyorsun?
5. **Kart:** Soruyu çözerken kullandığın stratejiyi nasıl gözden geçiyorsun? Bunu neden yapıyorsun?

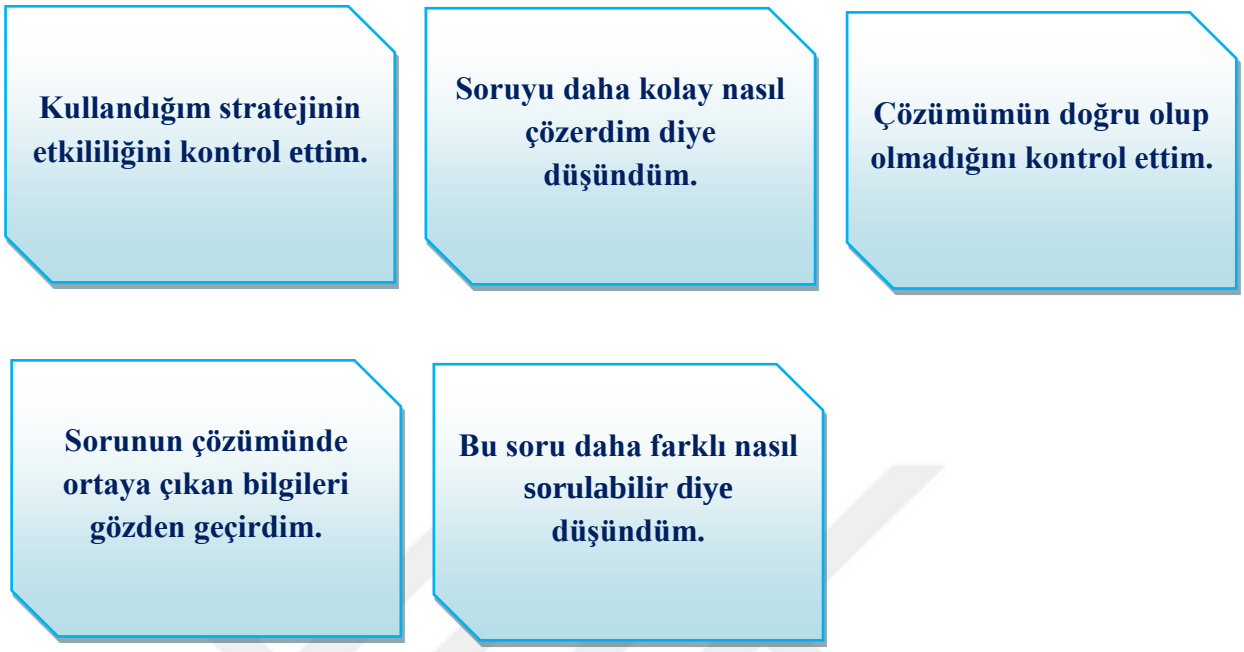
Hata Ayıklama Kategorisi İçin:



Hata Ayıklama Kategorisindeki Davranış Kartlarına Yönelik Sorular:

1. **Kart:** Soruda duraksamanı ve hatan olup olmadığını düşündüren şey nedir?
   Hatanı nasıl düzeltiyorsun?
2. **Kart**: Zorlandığında stratejini değiştirme ihtiyacı neden duyuyorsun?
   Zorlandığında stratejini değiştirme ihtiyacına nasıl karar veriyorsun?

Değerlendirme Kategorisi için:



Değerlendirme Kategorisindeki Davranış Kartlarına Yönelik Sorular:

1. **Kart:** Kullandığın stratejinin etkililiğini nasıl kontrol ediyorsun?
2. **Kart:** Başka bir çözümün daha kolay olup olmadığına nasıl karar veriyorsun?
3. **Kart:** Çözümünün doğru/yanlış olduğunu nasıl anladın?
4. **Kart:** Çözümünde ortaya çıkan bilgileri gözden geçirmek senin için neden önemlidir?
5. **Kart:** Sorunun farklı şekilde sorulabileceğini düşünmeni sağlayan şey nedir?

Ek 4. Yarı Yapılandırılmış Görüşme Soruları

İspata Yönelik Görevlerin Çözülmesi Sırasındaki Görüşme Soruları

Matematiksel Bileşen	*Nasıl bir çözüm geliştirdin?
	*Seni bu çözüme götüren düşünme adımların nelerdir?
Psikolojik Bileşen & Pedagojik Bileşen	*Farklı çözümler geliştirilebilir mi? *Farklı çözümler arasından neden bunu seçtin?
	*Çözümün sence doğru mu?
	*Sence bu çözümün geliştirilebilir bir yönü var mı?
	*Yaptığın bu çözüm her durumda doğru olacak mı? Seni her zaman doğruya ulaştıracak mı?
Pedagojik Bileşen	*Bu çözümün uygulandığı ve uygulanamadığı durumları birbirinden nasıl ayırırsın? Sence bu nasıl öğrenilebilir? Bunu öğrenmede öğrenciye ve öğretmene düşen görev sence nedir?
	*Bu soruyu sorabileceğin ve bu yönde bir çözüm bekleyeceğin sınıf düzeyi kaçtır? *Böyle bir çözüm geliştirmede zorlanılacak noktalar nelerdir? Öğrencilerinde bu zorlukları görsen tamamlamak için nasıl bir yol izlersin?