



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



DEĞİŞMELİ HALKALARIN S-YARI ASAL İDEALLERİ

BARAN DÜZGÜN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Prof. Dr. Ünsal TEKİR

İSTANBUL, 2020



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



DEĞİŞMELİ HALKALARIN S-YARI ASAL İDEALLERİ

BARAN DÜZGÜN

520916001

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Prof. Dr. Ünsal TEKİR

İSTANBUL, 2020

MARMARA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Öğrencisi Baran DÜZGÜN'ün "Değişmeli Halkaların S-Yarı Asal İdealleri" başlıklı tez çalışması, 28 Ocak 2020 tarihinde savunulmuş ve jüri üyeleri tarafından başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Ünsal TEKİR (Danışman)

Marmara Üniversitesi (İMZA) 

Doç. Dr. Esra ŞENGELİN SEVİM (Üye)

Bilgi Üniversitesi (İMZA) 

Doç. Dr. Füsün NURCAN (Üye)

Marmara Üniversitesi (İMZA) 

ONAY

Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ^{12.02.2020} tarih ve ^{2020/06-02} sayılı kararı ile Baran DÜZGÜN'ün Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans derecesi alması onaylanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Bülent EKİCİ



TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim süresince bilgisi, tecrübesi, eleştiri ve önerilerini daima bizimle paylaşan, güler yüzü ve samimiyeti ile yanımızda olan değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Ünsal TEKİR'e tüm yardımları ve teşvikleri için sonsuz teşekkür ederim.

Tez savunmamda yer alan ve eleştirileri ile tezime katkıda bulunan saygıdeğer hocalarım Doç. Dr. Esra ŞENGELİN SEVİM ve Doç. Dr. Füsün NURCAN'a çok teşekkür ederim.

Sorduğu sorular ve yaptığı yorumlarla daha derin düşünmemizi sağlayan, yüksek lisans eğitimimiz boyunca yardımlarını ve zamanını bizden esirgemeyen Dr. Suat KOÇ'a teşekkür ederim.

Son olarak aldığım kararlarda arkamda olan maddi manevi destekçilerim, sevgili aileme teşekkür ederim.

Ocak 2020

Baran DÜZGÜN

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
YENİLİK BEYANI	vi
SEMBOLLER.....	vii
ŞEKİL LİSTESİ	viii
1. GİRİŞ	1
1.1. Halka ve İdealler Hakkında Genel Bilgiler	1
1.2. Bölüm Halkası ve Kesir Halkası.....	12
1.3. Modüller Hakkında Genel Bilgiler.....	17
1.4. Bazı Cebirsel Yapıların S-Versiyonu	19
2. S-YARI ASAL İDEALLER VE S-İNDİRGENMİŞ HALKALAR.....	21
2.1. S-Yarı Asal İdeallerin Karakterizasyonu.....	21
2.2. S-İndirgenmiş Halkalar.....	30
3. SONUÇLAR	34
KAYNAKLAR.....	35
ÖZGEÇMİŞ.....	1

ÖZET

DEĞİŞMELİ HALKALARIN S-YARI ASAL İDEALLERİ

Bu çalışmada yarı asal ideallerin genelleştirmesi olan S -yarı asal idealler değişmeli halkalar üzerinde tanımlanmıştır.

R birimli ve değişmeli bir halka ve $S \subseteq R$ çarpımsal kapalı bir alt küme olsun. P , $P \cap S = \emptyset$ olacak şekilde R nin bir ideali olsun. Bir $x \in R$ ve $m \in \mathbb{N}$ için $x^m \in P$ iken $sx \in P$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ varsa P ye S -yarı asal ideal denir.

Yapılan tanımdan yola çıkılarak asal idealler, maksimal idealler, radikal idealler gibi belirli ideal yapıları ile S -yarı asal idealler arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Hangi koşullar altında bu tanımların denk olduğu belirlenmiş, örnek ve ters örneklere yer verilmiştir.

Son olarak S -yarı asal ideal tanımı kullanılarak indirgenmiş halka yapısı karakterize edilip, indirgenmiş halkaların genelleştirmesi olan S -indirgenmiş halkaların tanımı yapılmıştır. R bir halka ve $S \subseteq R$ çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. Bir $x \in R$ ve $m \in \mathbb{N}$ için $x^m = 0$ iken $sx = 0$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ varsa R ye S -indirgenmiş halka denir.

ABSTRACT

S-SEMIPRIME IDEALS OF COMMUTATIVE RINGS

In this paper, we introduce the notion of S -semiprime ideal which is a generalization of semiprime ideal.

Let R be a commutative ring with a nonzero identity and $S \subseteq R$ a multiplicatively closed set. An ideal P of R with $P \cap S = \emptyset$ is said to be an S -semiprime ideal if there exists $s \in S$ and whenever $x^m \in P$ for some $m \in \mathbb{N}$ and $x \in R$, then $sx \in P$.

By using the definition of S -semiprime we investigate the relations between S -semiprime ideal and prime, semiprime, maximal ideal. Searching that in which situation these definitions are equal and giving examples and inverse examples about it.

At last by using S -semiprime ideals we characterize reduced rings. In particular, R is said to be an S -reduced ring if there exists $s \in S$ and whenever $x^m = 0$ for some $m \in \mathbb{N}$ and $x \in R$, then $sx = 0$.

YENİLİK BEYANI

Tezin ikinci bölümünde yarı asal ideallerin genelleştirmesi olan S -yarı asal ideal tanımı yapılmıştır. S -yarı asal ideallerin değişmeli halkalardaki özellikleri ve bazı cebirsel yapılarla ilişkisi incelenmiştir.

Tezin ikinci bölümünün ikinci kısmında S -indirgenmiş halkalar tanımlanmıştır. S -indirgenmiş halkaların S -tamlık bölgesi ile ilişkisi incelenmiştir.



SEMBOLLER

$\in$: Elemanıdır

$\notin$: Elemanı değildir

$\subseteq$: Alt küme

$\subset$: Alt küme fakat eşit değil

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{Z}$: Tam sayılar kümesi

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

$\mathbb{Q}$: Rasyonel sayılar kümesi

R/I : Bölüm halkası

$S^{-1}R$: Kesir halkası

$\sqrt{I}$: I nın radikali

$Jac(R)$: Jacobson Radikali

$Max(R)$: Maksimal ideallerin kümesi

$Spec(R)$: Asal ideallerin kümesi

$\text{Çek}(f)$: f homomorfizmasının çekirdeği

$(a_0, a_1, \dots, a_n)$: $a_0, a_1, \dots, a_n$ ile üretilmiş ideal

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1 Bazı ideal yapıları arasındaki ilişkiler

24



1. GİRİŞ

Kısıtlı durumlar için gerçekleşen özellikleri genellemek her disiplinden pek çok bilim insanının amacı olmuştur. Böyle bir genelleştirme yapılarak genel durum için bir kural elde edilmiş ve genele bir anlam yüklenmiş olunur. Matematikçiler de bu bağlamda çalışmalar yapmışlardır.

Cebirsel yapıların genelleştirmesi daha geniş bir bakış açısı sağladığı için çok çalışılan bir konudur. Ayrıca bu şekilde yapılan bir çalışma, özelliklerin gerek ve yeter şartlarını daha ayrıntılı inceleme fırsatı verir. Örneğin zayıf asal idealler (Anderson ve Smith, 2003), 2-yutan idealler (Badawi, 2007), S -asal idealler (Sevim ve ark., 2019); ideallerin çeşitli genelleştirmeleri olarak çalışılan konulardandır.

Bu çalışmada S -yarı asal idealin tanımı yapılarak S -yarı asal ideallerin diğer cebirsel yapılarla ilişkisine dair sorulara cevap aranmıştır. S -yarı asal ideallerin yarı asal olması için hangi koşullar gerekmektedir? Bu şekilde tanımlanan bir ideal ile tanımlanan bölüm halkası nasıl bir yapıya sahip olur? Halka homomorfizmaları altında bu ideallerin görüntü ve ters görüntüsü incelendiğinde hangi sonuçlar bulunur? Çalışmanın ikinci bölümünde bu gibi sorular cevaplandırılmıştır.

Tezin bu bölümünde ise ikinci bölümde genelleştirdiğimiz yapılarla ilgili ön bilgiler verilmiştir.

1.1. Halka ve İdealler Hakkında Genel Bilgiler

Tanım 1.1.1.

R bir küme ve üzerinde tanımlı ikili işlemler $+$, $\cdot$ olsun. Her $x, y, z \in R$ için,

- (i) $x + y = y + x$ (birinci işlemin değişme özelliği vardır)
- (ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (birinci işlemin birleşme özelliği vardır)
- (iii) $x \in R$ için $x + 0 = x$ olacak şekilde $0 \in R$ vardır (birinci işlemin birim elemanı vardır)
- (iv) $x \in R$ için $x + (-x) = 0$ olacak şekilde $(-x) \in R$ vardır (birinci işlem üzerinden her elemanın tersi vardır)
- (v) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (ikinci işlemin birleşme özelliği vardır)

(vi) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ ve $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (ikinci işlemin birinci işlem üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır)

şartlarını sağlayan R kümesine halka denir.

Buradan sonra " $x \cdot y$ " işlemi gösterimi yerine " xy " kullanılacaktır.

Yukarıda tanımı yapıldığı üzere cebirsel yapının halka belirtmesi için ikinci işleme göre birim elemanın, ters elemanın ve değişme özelliğinin olmasına gerek yoktur. Özel olarak yapıda ikinci işleme göre birim eleman varsa halkaya birimli halka, değişme özelliği varsa değişmeli halka denir. Çalışmanın tüm bölümlerinde araştırdığımız özellikler için halkayı birimli ve değişmeli alacağız.

Örnek 1.1.2.

$A \neq \emptyset$ ve $A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, A dan $\mathbb{R}$ ye tüm fonksiyonların kümesi $\mathcal{R}_A$ ile gösterilsin. $\mathcal{R}_A$ aşağıdaki işlemlerle birlikte değişmeli ve birimli bir halkadır. Her $f, g \in \mathcal{R}_A$ ve $x \in A$ için,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Ayrıca $\mathcal{R}_A$ halkasının birim elemanı $I(x) = 1$ fonksiyonudur.

Özel olarak, tüm reel sayı dizilerinin kümesi $\mathcal{R}_{\mathbb{N}}$ birimli ve değişmeli bir halkadır.

Örnek 1.1.3.

R bir halka ve $M_n^n(R)$, $n \times n$ lik tüm kare matrislerin kümesi olsun. Matrislerde toplama ve çarpma işlemine göre $M_n^n(R)$, birimli bir halkadır.

Tanım 1.1.4

R bir halka ve $H \subseteq R$ olsun. H kümesi R halkasındaki işlemlere göre halka oluyorsa H ye R nin alt halkası denir.

Örnek 1.1.5

(i) Reel katsayılı, reel değerli tüm polinomların kümesi $\mathcal{P} = \{f(x): f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tüm fonksiyonların kümesi $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}$ nin bir alt halkasıdır.

(ii) $C[0,1] = \{f \in \mathcal{R}_{[0,1]}: f, [0,1] \text{ kapalı aralığında sürekli}\}$, $\mathcal{R}_{[0,1]}$ nin bir alt halkasıdır.

Örnek 1.1.6

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere tüm $n \times n$ lik köşegen matrislerin kümesi $M_n^n(R)$ nin bir alt halkasıdır.

Tanım 1.1.7

R bir halka ve $x \in R$ olsun. $xy = 0$ olacak şekilde $0 \neq y \in R$ varsa x e sıfır bölen denir. Sıfırdan farklı sıfır böleni olmayan halkaya tamlık bölgesi denir.

Örnek 1.1.8

- (i) $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası bir tamlık bölgesidir.
- (ii) $\mathbb{Z}_n$ halkası n asal sayı iken bir tamlık bölgesidir. n asal sayı değilken $n > p$ olacak şekilde bir p sıfır böleni vardır.
- (iii) $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ bir tamlık bölgesidir.
- (iv) p -adik tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}_p = \{\sum_{k=m}^{\infty} a_k p^k : m \geq 0, a_k \in \mathbb{Z}, p \text{ sabit asal sayı}\}$ bir tamlık bölgesidir.
- (v) Tüm reel katsayılı kuvvet serilerinin kümesi $\mathbb{R}[[x]] = \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k : a_k \in \mathbb{R}\}$ bir tamlık bölgesidir.

Tanım 1.1.9

R halkasında ikinci işleme göre tersi bulunan elemanlara birimsel eleman denir. R halkasının tüm birimsel elemanlarının kümesi $U(R)$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.10

$R_1, R_2, \dots, R_n$ halkalar olsun. $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ kartezyen çarpım kümesi bileşen-bileşen toplama ve çarpma işlemlerine göre birimli ve değişmeli halka yapısı oluşturur. Bu halkanın birim elemanı $(1_{R_1}, 1_{R_2}, \dots, 1_{R_n})$ ve sıfır elemanı $(0_{R_1}, 0_{R_2}, \dots, 0_{R_n})$ dir.

Ayrıca, $R_1, R_2, \dots, R_n$ halkalarının birimsel elemanlarının kümesi sırasıyla $U(R_1), U(R_2), \dots, U(R_n)$ olsun. Kartezyen çarpım halkasının birimsel elemanlarının kümesi $U(R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n) = U(R_1) \times U(R_2) \times \dots \times U(R_n)$ olur.

Tanım 1.1.11

R halkasının sıfırdan farklı tüm elemanlarının ikinci işleme göre tersi mevcutsa R ye cisim denir.

Tanım 1.1.12

Bir R halkasında $a, b \in R$ için $a = bc$ olacak şekilde bir $c \in R$ varsa b elemanına a yı böler denir ve $b|a$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 1.1.13

R halkasında sıfırdan farklı bir $a \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $a^n = 0$ şartı sağlanıyorsa a ya nilpotent eleman denir.

Örnek 1.1.14

n asal sayı değil iken, $\mathbb{Z}_n$ halkasını ele alalım. n sayısının asal çarpanlara ayrılmış hali $i = 1, 2, \dots, k$ için p_i asal sayı ve $k_i \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_i^{k_i}$ yazımına eşit olsun. Bu durumda $p_1 p_2 \dots p_i | a$ şartını sağlayan her $a \in \mathbb{Z}_n$ için $a^m = 0$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ bulunur. Bu şekilde tanımlanan a elemanları $\mathbb{Z}_n$ halkasının nilpotent elemanıdır.

Tanım 1.1.15

R bir halka ve $p \in R$ olsun. $p|ab$ olması durumu $p|a$ veya $p|b$ olmasını gerektiriyorsa p ye R halkasının asal elemanı denir. Örneğin, $\mathbb{Z}$ halkasının asal elemanları, p asal sayı olmak üzere, p lerdir.

Tanım 1.1.16

R bir halka ve I , R nin bir alt kümesi olsun. Her $a, b \in I$ ve $r \in R$ için $a - b \in I$ ve $ra \in I$ sağlanıyorsa I ya R halkasının ideali denir.

Örnek 1.1.17

Örnek 1.1.10 da verilen $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ halkasının bir ideali $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ olsun. O halde her $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in I$ için $(a_1, a_2, \dots, a_n) - (b_1, b_2, \dots, b_n) \in I$ olmalıdır. Böylece her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $a_i - b_i \in I_i$ olur. Diğer taraftan her $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in I$ ve her $(r_1, r_2, \dots, r_n) \in R$ için $(a_1, a_2, \dots, a_n)(r_1, r_2, \dots, r_n) \in I$ olur. Böylece her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $a_i r_i \in I_i$ bulunur. Dolayısıyla $I_1, I_2, \dots, I_n$ sırasıyla $R_1, R_2, \dots, R_n$ halkalarının idealleri olur.

Ayrıca R nin her ideali, I_i , R_i nin ideali olmak üzere, $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ formundadır.

Tanım 1.1.18

R halkasının herhangi bir alt kümesi A olsun. A kümesini kapsayan tüm ideallerin kesişimine A nın ürettiği ideal denir ve (A) ile gösterilir. Ayrıca

$A \subseteq R$ alt kümesi için;

$$(A) = \left\{ \sum_{i=1}^k r_i a_i : r_i \in R \text{ ve } a_i \in A, i = 1, 2, \dots, k, k \in \mathbb{N} \right\}$$

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ sonlu kümesi için;

$$(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n r_i a_i : r_i \in R \text{ ve } a_i \in A \right\}$$

ve tek elemanlı $A = \{a\}$ kümesi için;

$$(A) = (a) = Ra = \{ra : r \in R\}$$

dır.

Örnek 1.1.19

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ halkasında $A = \{2, 4\}$ alalım. O halde A kümesi, $(A) = \{2r : r \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}$ idealini üretmiş olur.

Tanım 1.1.20

R bir halka ve S , R nin bir alt kümesi olsun. $0 \notin S$, $1 \in S$ ve her $a, b \in S$ için $ab \in S$ ise S kümesine R nin çarpımsal kapalı alt kümesi denir.

Örnek 1.1.21

- (i) $\mathbb{Z}_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ halkasını alalım. $\mathbb{Z}_8$ in $S = \{1, 3, 5\}$ alt kümesi için $1 \cdot 3 = 3$, $1 \cdot 5 = 5$, $3 \cdot 5 = 1$ olur. O halde S , $\mathbb{Z}_8$ in çarpımsal kapalı bir alt kümesidir.
- (ii) p bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z} - p\mathbb{Z}$ kümesi, $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinin çarpımsal kapalı alt kümesidir.

Örnek 1.1.22

- (i) R bir halka ve $x \in R$ için $S = \{x^n : n \geq 0\}$ çarpımsal kümedir.
- (ii) R_1 ve R_2 iki halka iken $R = R_1 \times R_2$ halkasını göz önüne alalım. $R_1 \times R_2$ halkasının çarpımsal kapalı alt kümesi $S = S_1 \times S_2$ olsun. Tanımdan her $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in S$ için $ab = (a_1 b_1, a_2 b_2) \in S$ olur. Bu durumda $a_1, b_1 \in S_1$ iken $a_1 b_1 \in S_1$ ve

$a_2, b_2 \in S_2$ iken $a_2 b_2 \in S_2$ olur. Dolayısıyla S_1 ve S_2 , R_1 ve R_2 halkalarının çarpımsal kapalı kümeleridir.

Tanım 1.1.23

R bir halka ve S , R halkasının çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Her $xy \in S$ için $x \in S$ ve $y \in S$ ise S kümesine doymuş çarpımsal kapalı küme denir.

Örnek 1.1.24

R bir halka ve R halkasının tüm sıfır bölenlerinin kümesi A olsun. $S = R - A$ doymuş çarpımsal kapalı kümedir.

Tanım 1.1.25

R bir halka ve S , R halkasının çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. R halkasının S kümesini kapsayan en küçük, tek bir doymuş çarpımsal kapalı alt kümesi vardır. Bu kümeye S çarpımsal kapalı kümesinin doyurulmuşu denir, $\bar{S}$ ile gösterilir. $\bar{S}$ kümesi, S yi kapsayan tüm doymuş çarpımsal kapalı kümelerin kesişimidir.

Tanım 1.1.26

R bir halka ve $I \neq R$ bir ideali olsun. Her $a, b \in R$ için $ab \in I$ olması $a \in I$ veya $b \in I$ olmasını gerektiriyorsa I ya asal ideal denir. R halkasının tüm asal ideallerinin kümesi $Spec(R)$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.27

Örnek 1.1.10 da tanımlanan $R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ halkasının bir asal ideali $P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n$ olsun. $P \neq R$ olduğundan bir $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $P_{i_0} \neq R_{i_0}$ dir. Şimdi her $i \neq i_0$ için $P_i = R_i$ olduğunu gösterelim. $(0_{R_1}, \dots, 1_{R_{i_0}}, 0_{R_{i_0+1}}, \dots, 0_{R_n}) (1_{R_1}, \dots, 0_{R_{i_0}}, 1_{R_{i_0+1}}, \dots, 1_{R_n}) = (0, 0, \dots, 0) \in P$ olur. P asal olduğundan $(0_{R_1}, \dots, 1_{R_{i_0}}, 0_{R_{i_0+1}}, \dots, 0_{R_n}) \in P$ ya da $(1_{R_1}, \dots, 0_{R_{i_0}}, 1_{R_{i_0+1}}, \dots, 1_{R_n}) \in P$ dir. Fakat $(0_{R_1}, \dots, 1_{R_{i_0}}, 0_{R_{i_0+1}}, \dots, 0_{R_n}) \notin P$ olduğundan $(1_{R_1}, \dots, 0_{R_{i_0}}, 1_{R_{i_0+1}}, \dots, 1_{R_n}) \in P$ olur. Dolayısıyla $1_{R_i} \in P_i$ ve böylece $P_i = R_i$ bulunur.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_n$ iken $xy = (x_1, x_2, \dots, x_n)(y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n) \in P$ ise $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in P$ veya $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in P$ olmalıdır. Bu durumda $x_i y_i \in P_i$ olması $x_i \in P_i$ veya $y_i \in P_i$ olmasını gerektirir. O halde P_i, R_i nin asal idealidir.

Tanım 1.1.28

R bir halka ve M , R halkasının kendinden farklı bir ideali olsun. R halkasında M yi kapsayan R ve M den farklı hiçbir ideal yoksa M ye maksimal ideal denir. R halkasının maksimal ideallerinin kümesi $Max(R)$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.29

$\mathbb{Z}$ halkasında $2\mathbb{Z}$ idealini ele alalım. Eğer bu ideal maksimal değilse o zaman bir M^* ideali $2\mathbb{Z} \subset M^* \subset \mathbb{Z}$ olacak şekilde vardır. $a \in M^* - 2\mathbb{Z}$ alalım. O halde $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a = 2k - 1$ formundadır. M^* bir ideal ve $2k, 2k - 1 \in M^*$ olduğundan $2k - (2k - 1) \in M^*$ olmalıdır. Dolayısıyla $1 \in M^*$ olur ve böylece $M^* = \mathbb{Z}$ bulunur. Sonuç olarak $2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ halkasının maksimal idealidir.

Önerme 1.1.30

Her maksimal ideal asal idealdir.

İspat

M bir maksimal ideal olsun. $xy \in M$ ve $x \notin M$ kabul edelim. M maksimal olduğundan $M \subset M + Rx = R$ olur. O zaman $1 = m + rx$ olacak şekilde $m \in M$ ve $r \in R$ vardır. Buradan $y = my + rxy \in M$ elde edilir. O halde M asal idealdir.

Bu önermenin tersi doğru değildir.

Örnek 1.1.31

(i) $\mathbb{Z}[x]$ halkasında $(x) = \{a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n : a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \text{ ve } n \in \mathbb{N}\}$ ideali için $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ iken $fg \in (x)$ olsun. $f \notin (x)$ ve $g \notin (x)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda f ve g elemanları sıfırdan farklı sabit terim içermelidir. $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ve $g = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ olsun. $fg = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + \dots + a_nb_nx^{2n} \notin (x)$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde (x) ideali asal idealdir.

Şimdi $(2, x) \neq R$ idealini alalım. Bu ideal (x) idealini kapsar. Sonuç olarak (x) ideali asaldır fakat maksimal değildir.

(ii) $\mathbb{Z}$ halkasında (0) ideali bir asal idealdir. Fakat $(0) \subset 2\mathbb{Z}$ olduğu için maksimal ideal değildir.

Önerme 1.1.32

R halkasında her has ideali kapsayan bir maksimal ideal vardır.

İspat

R bir halka ve I , R nin kendisinden farklı bir ideali olsun. $\Omega = \{J: I \subseteq J \neq R \text{ olacak şekilde } R \text{ nin ideali}\}$. $I \in \Omega$ olduğundan $\Omega \neq \emptyset$ olur. $(\Omega, \subseteq)$ sıralı kümesinin herhangi bir tam sıralı alt kümesi olarak $\{I_i\}$ kümesini alalım. $\cup I_i$ kümesi R den farklı bir idealdir. Gerçekten $1 \notin I_i$ ve $1 \notin \cup I_i$ olur. Diğer taraftan her $a, b \in \cup I_i$ için $a \in I_k$ ve $b \in I_t$ olacak şekilde $I_k, I_t \in \{I_i\}$ bulunabilir. $\{I_i\}$ tam sıralı bir küme olduğu için $I_k \subseteq I_t$ veya $I_t \subseteq I_k$ olmalıdır. Genelliği bozmadan $I_t \subseteq I_k$ kabul edelim. O halde $a, b \in I_k$ ve $a - b \in I_k$, dolayısıyla $a - b \in \cup I_i$ elde edilir. Ayrıca her $a \in \cup I_i$ ve $r \in R$ için $a \in I_k$ olacak şekilde $I_k \in \{I_i\}$ vardır ve $ra \in I_k$ olduğundan, $ra \in \cup I_i$ bulunur. Şu halde $\cup I_i$ alınan tam sıralı kümenin üst sınırıdır. Zorn Lemmaya göre, Ω kümesinin en az bir maksimal elemanı vardır. Ω nin maksimal elemanları R halkasının maksimal idealleridir. O halde her I idealini kapsayan bir maksimal ideal bulunur.

Tanım 1.1.33

R bir halka ve I , R nin ideali olsun. $\{r \in R: \exists n \in \mathbb{N}, r^n \in I\}$ kümesine I nin radikali denir ve $\sqrt{I}$ ile gösterilir.

Önerme 1.1.34

$\sqrt{I}$, R halkasının bir idealidir.

İspat

Her $a \in \sqrt{I}$ için $a^n \in I$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. I bir ideal olduğundan her $r \in R$ için $a^n r^n \in I$ olur. Bu durumda $ra \in \sqrt{I}$ bulunur. Diğer taraftan $a, b \in \sqrt{I}$ olsun. Bu durumda $a^n \in I, b^m \in I$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{N}$ vardır. $(a - b)^{m+n} \in I$ olduğunu gösterelim. $(a - b)^{m+n} = a^{m+n} - \binom{m+n}{1} a^{m+n-1}b + \binom{m+n}{2} a^{m+n-2}b^2 - \dots + (-1)^{m+n} b^{m+n}$ olur. $a^n \in I, b^m \in I$ olduğu için yukarıdaki toplamın tüm terimleri I nin elemanı olarak bulunur. Bu durumda $(a - b)^{m+n} \in I$ ise $(a - b) \in \sqrt{I}$ elde edilir. Böylece $\sqrt{I}$ bir ideal olur. Aynı zamanda her $a \in I$ için $a^1 = a \in I$ olduğundan $I \subseteq \sqrt{I}$ bulunur.

Tanım 1.1.35

R bir halka ve I , R nin bir ideali olsun. Her $a \in R$ için $a^n \in I$ olması $a \in I$ olmasını gerektiriyorsa I ya yarı asal ideal denir.

Örnek 1.1.36

$A = \{1,2,3\}$ iken A kümesinin kuvvet kümesini $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ alalım. Bu küme üzerinde aşağıdaki işlemler tanımlı olsun. Her $x, y \in P(A)$ için;

$$x \oplus y = x \Delta y = (x - y) \cup (y - x)$$

$$x \otimes y = x \cap y$$

Bu durumda $(R, \oplus, \otimes)$ birimli ve değişmeli halka yapısı oluşturur. Bu halkanın birim elemanı A ve sıfır elemanı $\emptyset$ dir.

Bu halkanın tüm ideallerini inceleyelim.

$$P(\{\emptyset\}) = (\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$P(\{1\}) = (\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

$$P(\{2\}) = (\{2\}) = \{\emptyset, \{2\}\}$$

$$P(\{3\}) = (\{3\}) = \{\emptyset, \{3\}\}$$

$$P(\{1,2\}) = (\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

$$P(\{1,3\}) = (\{1,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$$

$$P(\{2,3\}) = (\{2,3\}) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}\}$$

$$P(\{1,2,3\}) = (\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

olur.

R halkasındaki ideallerin asallığını inceleyelim:

$(\{1\})$ idealini alalım. İdealin asal olması için $a, b \in R$ iken $a \otimes b \in (\{1\})$ olması ya $a \in (\{1\})$ ya da $b \in (\{1\})$ olmasını gerektirir. $a \notin (\{1\})$ ve $b \notin (\{1\})$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $a = \{2\}$ ve $b = \{3\}$ alabiliriz. $a \otimes b = a \cap b = \emptyset \in (\{1\})$ olduğundan $(\{1\})$ asal ideal değildir.

$(\{1,2\})$ idealini alalım. Yine $a, b \in R$ iken $a \otimes b \in (\{1,2\})$ ve $a, b \notin (\{1,2\})$ olsun. Bu durumda $a, b \in \{\{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ olur. O halde her a, b için $\{3\} \subseteq a \cap b = a \otimes b$ bulunur. Yani $a, b \notin (\{1,2\})$ iken $ab \notin (\{1,2\})$ bulunur. İncelediğimiz ideal asaldır.

İncelediğimiz ideallerin yapılarına bakarak genelleştirme yaparsak sonlu herhangi bir A kümesi üzerinde verilen işlemlerle tanımlı halka yapısı için $x, y \in A$ iken $P(A - \{x, y\})$ ideali asal değildir. Çünkü $\{x\}, \{y\} \notin P(A - \{x, y\})$ fakat $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset \in P(A - \{x, y\})$ olur. Yani A kümesinin birden fazla elemanından farkını alarak oluşturulan tüm kuvvet kümeleri için kesişimleri boş olacak şekilde eleman bulunur. O halde R halkasının asal ideallerinin yapısı $P(A - \{x\})$ şeklindedir.

Ayrıca $P(A - \{x\})$ yapısındaki idealler bu halkanın asal idealleri olduğundan ve bu kümeleri kapsayan R den başka küme bulunmadığından aynı zamanda maksimal ideallerdir.

I, R nin bir ideali olsun. $\sqrt{I} = \{r \in R : \exists n \in \mathbb{N} \text{ için } r^n \in I\}$ şeklinde tanımlanmıştı. Bu durumda $r^n \in I$ ise $r \cap r \cap \dots \cap r = r \in I$ bulunur. Yani $\sqrt{I} = I$ olur. Böylelikle bu halkadaki her ideal yarı asal idealdir.

İdealler	Yarı asal idealler	Asal idealler	Maksimal idealler
$P(\{\emptyset\}) = (\emptyset)$	$P(\{\emptyset\}) = (\emptyset)$		
$P(\{1\}) = (\{1\})$	$P(\{1\}) = (\{1\})$		
$P(\{2\}) = (\{2\})$	$P(\{2\}) = (\{2\})$		
$P(\{3\}) = (\{3\})$	$P(\{3\}) = (\{3\})$		
$P(\{1, 2\}) = (\{1, 2\})$	$P(\{1, 2\}) = (\{1, 2\})$	$P(\{1, 2\}) = (\{1, 2\})$	$P(\{1, 2\}) = (\{1, 2\})$
$P(\{1, 3\}) = (\{1, 3\})$	$P(\{1, 3\}) = (\{1, 3\})$	$P(\{1, 3\}) = (\{1, 3\})$	$P(\{1, 3\}) = (\{1, 3\})$
$P(\{2, 3\}) = (\{2, 3\})$	$P(\{2, 3\}) = (\{2, 3\})$	$P(\{2, 3\}) = (\{2, 3\})$	$P(\{2, 3\}) = (\{2, 3\})$
$P(\{1, 2, 3\}) = (\{1, 2, 3\})$	$P(\{1, 2, 3\}) = (\{1, 2, 3\})$		

Örnek 1.1.37

$\mathbb{Z}$ halkasının, $p \neq q$ asal sayılar olmak üzere $pq\mathbb{Z} = \{x : x = pqk, k \in \mathbb{Z}\}$ idealini alalım. $p, q \notin pq\mathbb{Z}$ için $pq \in pq\mathbb{Z}$ bulunur. Bu durumda $pq\mathbb{Z}$ asal ideal değildir. $\sqrt{pq} = pq\mathbb{Z}$ olduğu için $pq\mathbb{Z}$ yarı asal idealdir.

Önerme 1.1.38

$\sqrt{I}$, I yı kapsayan en küçük yarı asal idealdir.

İspat

$\sqrt{I}$ nın I yı kapsadığını Önerme 1.1.34 ten biliyoruz. Şimdi $\sqrt{I}$ nın yarı asal olduğunu gösterelim. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $x^n \in \sqrt{I}$ alalım. Buradan $(x^n)^m = x^{mn} \in I$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ vardır. $\sqrt{I}$ nın tanımından $x \in \sqrt{I}$ olduğu görülür. Böylece $\sqrt{I}$ yarı asal idealdir. Şimdi I yı kapsayan bir P yarı asal ideali alalım ve $\sqrt{I} \subseteq P$ olduğunu gösterelim. $y \in \sqrt{I}$ alalım. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $y^n \in I \subseteq P$ dir. P yarı asal ideal olduğundan $y \in P$ yani $\sqrt{I} \subseteq P$ olur.

Önerme 1.1.39

Yarı asal ideallerin kesişimi yarı asaldır.

İspat

P ve Q , R halkasının yarı asal idealleri olsun. $P \cap Q$, R halkasının idealidir. Gerçekten her $x, y \in P \cap Q$ ve $r \in R$ için $x, y \in P$ ve $x, y \in Q$ dir. Buradan $x - y \in P$, $xr \in P$ ve $x - y \in Q$, $xr \in Q$ bulunur. Böylece $x - y \in P \cap Q$ ve $xr \in P \cap Q$ olur. Sonuç olarak $P \cap Q$ idealdir.

Şimdi $P \cap Q$ nun yarı asal ideal olduğunu gösterelim. $x \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x^n \in P \cap Q$ alalım. O halde $x^n \in P$ ve $x^n \in Q$ olur. P ve Q yarı asal idealler olduğundan $x \in P$ ve $x \in Q$ bulunur. Sonuç olarak $x \in P \cap Q$ olur. $P \cap Q$ yarı asal idealdir.

Tanım 1.1.40

R bir halka olsun. R halkasının tüm maksimal ideallerinin kesişimine Jacobson radikali denir ve $Jac(R)$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.41

Örnek 1.1.36 da tanımladığımız halka üzerinde tüm maksimal ideallerin $P(A - \{x\})$ formunda olduğunu göstermiştik. Şimdi bu halkanın Jacobson Radikaline bakalım.

$$P(\{1,2\}) \cap P(\{1,3\}) \cap P(\{2,3\}) = \{\emptyset\} = (\emptyset) \text{ olur yani genel olarak,}$$

$$i \in 1,2,\dots,n \text{ için } J(R) = \bigcap_{x_i \in A} P(A - x_i) = \{\emptyset\} \text{ bulunur.}$$

Tanım 1.1.42

- (i) R bir halka olsun. Sıfır idealinin radikali, yani $\sqrt{0} = \{a \in R: a^n = 0\}$ kümesine nil radikal denir.

- (ii) Bir halkanın nil radikali sıfıra eşitse, yani $\sqrt{0} = 0$ ise, bu halkaya indirgenmiş halka denir.

Örnek 1.1.43

- (i) Her tamlık bölgesi indirgenmiş halkadır.
- (ii) $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı, reel değerli tüm sürekli fonksiyonların kümesi $C[0,1]$ i göz önünde bulunduralım. $f \in \sqrt{0}$ alalım. O zaman bir $m \in \mathbb{N}$ için $f^m = 0$ olur. Buradan her $x \in [0,1]$ için $(f(x))^m = 0$ dır. Reel sayılar cisminde nilpotent eleman sadece 0 olduğundan $f(x) = 0$ bulunur. O halde $f = 0$ olur. Böylece $C[0,1]$ indirgenmiş halkadır.

$$\text{Diğer taraftan, } f(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & ; \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \text{ ve } g(x) = \begin{cases} -2x + 1 & ; 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & ; \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonları $[0,1]$ aralığında süreklidir ve sıfırdan farklı fonksiyonlardır, buna karşın $fg = 0$ bulunur. Yani halka tamlık bölgesi değildir.

Örnek 1.1.44

Örnek 1.1.36 da tüm ideallerin yarı asal ideal olduğunu göstermiştik. O halde $\sqrt{0} = 0 = \{0\}$ bulunur. Dolayısıyla $A = \{1,2,3\}$ olmak üzere $(P(A), \Delta, \cap)$ halkası indirgenmiş halkadır.

1.2. Bölüm Halkası ve Kesir Halkası

Tanım 1.2.1

R_1 ve R_2 iki halka olsun. $f: R_1 \rightarrow R_2$ tanımlı bir fonksiyon olsun.

- (i) $f(1_{R_1}) = 1_{R_2}$
- (ii) Her $a, b \in R_1$ için $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- (iii) Her $a, b \in R_1$ için $f(ab) = f(a)f(b)$

Şartlarını sağlayan f fonksiyonuna halka homomorfizması denir. f örten bir fonksiyonsa buna epimorfizma denir.

Tanım 1.2.2

$f: R_1 \rightarrow R_2$ bir halka homomorfizması olsun. $f^{-1}(0_{R_2}) = \{a \in R_1: f(a) = 0_{R_2}\}$ olarak tanımlanan kümeye f homomorfizmasının çekirdeği denir, $\text{Çek}f$ notasyonu ile gösterilir.

Önerme 1.2.3

R_1 ve R_2 iki halka ve $f: R_1 \rightarrow R_2$ olsun. f in birebir olması için gerek ve yeter koşul $\text{Çek}f = 0$ olmasıdır.

İspat

f birebir olsun. $\text{Çek}f \neq 0_{R_1}$ olduğunu varsayalım. O halde bir $0_{R_1} \neq x$ için $x \in \text{Çek}f$ olur. Buradan $f(x) = 0_{R_2} = f(0_{R_1})$ olur ve f birebir olmaz. O halde $\text{Çek}f = 0_{R_1}$ dir.

Tersine $\text{Çek}f = 0_{R_1}$ olsun. f in birebir olduğunu gösterelim. $f(a) = f(b)$ olmak üzere $a, b \in R_1$ alalım. Buradan $f(a - b) = f(a) - f(b) = 0_{R_2}$ olur. Yani $a - b \in \text{Çek}f = 0_{R_1}$ bulunur. Böylece $a - b = 0_{R_1}$ dir yani f birebirdir.

Örnek 1.2.4

Örnek 1.1.22 de tanımlanan halka yapısını göz önüne alalım. $R_1 \times R_2 = R$ halkası üzerinde her $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in R$ için,

$f: R \rightarrow R_1, f(a) = f((a_1, a_2)) = a_1$ şeklinde tanımlanan fonksiyonu inceleyelim.

$$f(a + b) = f((a_1 + b_1, a_2 + b_2)) = a_1 + b_1 = f(a) + f(b)$$

$$f(ab) = f((a_1 b_1, a_2 b_2)) = a_1 b_1 = f(a) f(b)$$

sağlanır. O halde f bir halka homomorfizmasıdır.

Bu halkanın çekirdeğine bakalım:

$\text{Çek}f = f^{-1}(0) = \{a \in R: f(a) = 0\} = 0 \times R_2$ olur. $\text{Çek}f \neq (0,0)$ olduğu için bu homomorfizma birebir değildir.

Tanım 1.2.5

Tek maksimal ideali olan halkaya yerel halka (quasi-local ring) denir.

Örnek 1.2.6

(i) p bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : (m, n) = 1 \text{ ve } p \nmid n \right\}$ halkasını göz önüne alalım. $\mathbb{Z}_{(p)}$ nin idealleri bir $k \in \mathbb{N}$ için $p^k \mathbb{Z}_{(p)}$ şeklindedir. Böylece $\mathbb{Z}_{(p)}$ tek maksimali $p\mathbb{Z}_{(p)}$ olan yerel halkadır.

(ii) F bir cisim olmak üzere $F[[x]]$ kuvvet serisi halkasının idealleri

$$F[[x]] \supseteq xF[[x]] \supseteq x^2F[[x]] \supseteq \cdots \supseteq x^nF[[x]] \supseteq \cdots$$

biçimindedir. Böylece $F[[x]]$ tek maksimali (x) ideali olan bir yerel halkadır.

Tanım 1.2.7

I , R halkasının bir ideali olsun.

Her $a, b \in R$ için,

$$a \equiv b \pmod{I} \Leftrightarrow a - b \in I$$

denklik bağıntısıyla oluşan R/I bölüm grubunun üzerinde birinci işlem olarak

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I,$$

ikinci işlem olarak

$$(a + I)(b + I) = ab + I$$

tanımlanan halkaya bölüm halkası denir.

Örnek 1.2.8

$\mathbb{Z}[x]$ halkasında (x) ideali için, $\mathbb{Z}[x]/(x)$ bölüm halkasını inceleyelim. Her $a \in \mathbb{Z}[x]$ için $a = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1}$ olsun. Burada $x, x^2, \dots, x^{n-1} \in (x)$ olduğundan $a \equiv a_1 \pmod{(x)}$ olur. Böylece $\mathbb{Z}[x]/(x) \cong \mathbb{Z}$ bulunur.

Tanım 1.2.9

I , R halkasının bir ideali olsun. R halkasının elemanlarını $\pi(a) = a + I$ işlemiyle R/I halkasına resmeden homomorfizmaya doğal homomorfizma denir.

Tanım 1.2.10

R bir halka ve S , R nin çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. $R \times S$ kümesinde $\sim$ bağıntısı;

$(a, s) \sim (a', s') \Leftrightarrow \text{bir } u \in S \text{ için } u(as' - a's) = 0$ şeklinde tanımlansın. $\sim$ bir denklik bağıntısıdır. Gerçekten

$$(a, s) \in R \times S \text{ için } (a, s) \sim (a, s) = u(as - as) = u0 = 0,$$

$$(a, s), (b, t) \in R \times S \quad \text{ için } \quad (a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow u(at - bs) = 0 = u(bs - at) \Leftrightarrow (b, t) \sim (a, s),$$

$(a, s), (b, t), (c, r) \in R \times S$ için $(a, s) \sim (b, t)$ ve $(b, t) \sim (c, r)$ ise $u_1(at - bs) = 0$ ve $u_2(br - ct) = 0$ olacak şekilde $u_1, u_2 \in S$ vardır. $u_1 u_2 r(at - bs) = 0$ ve $u_1 u_2 s(br - ct) = 0$ eşitliklerini taraf tarafa toplarsak $u_1 u_2 t(ar - cs) = 0$ bulunur. O halde $(a, s) \sim (c, r)$ olur.

$(a, s) \in R \times S$ kümesinin bu denklik bağıntısına göre belirttiği denklik sınıfına kesir denir ve $\frac{a}{s}$ ile gösterilir. Tüm kesirler kümesi $S^{-1}R$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.11

R bir halka ve S , R halkasının çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. $S^{-1}R$ kümesi üzerinde her $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in S^{-1}R$ için

$$\oplus: \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd} \text{ ve}$$

$\otimes: \frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ ikili işlemleri tanımlanırsa $(S^{-1}R, \oplus, \otimes)$ yapısı bir halka belirtir. Bu halkaya R nin S ye göre yerelleştirmesi denir.

Örnek 1.2.12

Rasyonel sayılar kümesinin tanımından, $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} - \{0\})^{-1}\mathbb{Z}$ olduğu için $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi, $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinin $\mathbb{Z} - \{0\}$ a göre yerelleştirmesidir.

Örnek 1.2.13

R bir halka ve S , R halkasının çarpımsal kapalı alt kümesi olsun.

$S^* = \{a \in R: \frac{a}{1}, S^{-1}R \text{ halkasının birimsel elemanı}\}$ şeklinde tanımlanan kümeyi ele alalım. $a, b \in S^*$ iken $\frac{a}{1}$ ve $\frac{b}{1}$ birimsel ise $\frac{a}{1} \frac{b}{1} = \frac{ab}{1}$ birimseldir. Dolayısıyla $ab \in S^*$ olur. Böylece S^* çarpımsal kapalı kümedir.

$xy \in S^*$ için $\frac{xy}{1} = \frac{x}{1} \frac{y}{1} \in S^{-1}R$ birimseldir. Bu ise $\frac{x}{1}$ ve $\frac{y}{1}$ in birimsel olmasını gerektirir. Böylece $x, y \in S^*$ olur yani S^* doymuş çarpımsal kümedir.

Şimdi $\bar{S} = S^*$ olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için $S \subseteq T$ doymuş alt kümesi için $S^* \subseteq T$ olduğunu göstermeliyiz. $x \in S^*$ alalım. O halde $\frac{x}{1}$ birimseldir yani $\frac{x}{1} \frac{a}{1s} = 1$ olacak şekilde $\frac{a}{s} \in S^{-1}R$ vardır. Buradan bir $u \in S$ için $us = uxa \in S \subseteq T$ bulunur. T doymuş olduğundan $x(ua) \in T$ olması $x \in T$ olmasını gerektirir. Böylece $\bar{S} = S^*$ dir.

Önerme 1.2.14

- (i) R bir halka olsun, P nin R halkasının asal ideali olması için gerek ve yeter koşul R / P halkasının tamlık bölgesi olmasıdır.
- (ii) R bir halka olsun, M nin R halkasının maksimal ideali olması için gerek ve yeter koşul R / M halkasının cisim olmasıdır.
- (iii) R bir sonlu halka ise R halkasının tüm asal idealleri maksimal idealdir.

İspat

(i) P nin asal ideal olduğunu kabul edelim. $x \in R$ olmak üzere, $x + P \in R / P$ bir sıfır bölen ise $(x + P)(y + P) = 0_{R/P}$ olacak şekilde bir $P \neq y + P \in R / P$ vardır ve $(x + P)(y + P) = xy + P = 0_{R/P}$ olur yani $xy \in P$ dir. Kabulümüzden $y \notin P$ ve $x \in P$ elde edilir. Böylece $x + P$ nin sıfırın bir sınıfı ve R / P nin bir tamlık bölgesi olduğu görülür.

Tersine R / P bir tamlık bölgesi ve $x, y \in R$ ve $xy \in P$ olsun. $0_{R/P} = xy + P = (x + P)(y + P)$ olduğundan $x + P = P$ veya $y + P = P$ olur yani $x \in P$ veya $y \in P$ elde edilir. Böylece P asal idealdir.

(ii) M nin bir maksimal ideal olduğunu kabul edelim. $x \in R - M$ olmak üzere M maksimal ideal olduğundan $(M, x) = R$ dir ve $1_R = m + rx$ olacak şekilde bir $m \in M$ ve $r \in R$ vardır. O halde $(r + M)(x + M) = rx + M = 1_R + M = 1_{R/M}$ elde edilir. Böylece halkada her elemanın tersi vardır ve halka bir cisim yapısı oluşturur.

Tersine R / M bir cisim olsun. $x \notin M$ ise $x + M \in R / M$ sınıfı birimseldir yani $(x + M)(y + M) = xy + M = 1_{R/M}$ olacak şekilde $y \in R$ vardır. O halde $xy - 1_R \in M$ ve $(x) + M = R$ olur. Böylece M maksimal ideal olur.

(iii) R sonlu bir halka ve P , bu halkanın asal ideali olsun. R sonlu halka olduğu için R / P sonlu halkadır. Aynı zamanda P asal ideal olduğu için R / P tamlık bölgesidir. Sonlu bir tamlık bölgesi ise bir cisimdir. Dolayısıyla R / P cisim iken P nin maksimal olması gerekir. Böylece sonlu halkada alınan her asal ideal maksimal ideal olmaktadır.

1.3. Modüller Hakkında Genel Bilgiler

Tanım 1.3.1

$(M, +)$ bir değişmeli grup ve R bir halka olsun. $R \times M \rightarrow M$ skaler çarpım fonksiyonu

- (i) Her $r \in R$ ve her $m_1, m_2 \in M$ için $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$
- (ii) Her $r_1, r_2 \in R$ ve her $m \in M$ için $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$
- (iii) Her $r_1, r_2 \in R$ ve her $m \in M$ için $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$
- (iv) Her $m \in M$ için $1_R m = m$

özelliklerini sağlıyorsa M ye R -modül denir. M nin yukarıdaki özellikleri sağlayan boştan farklı her alt kümesine alt modül denir.

Örnek 1.3.2

Her R halkası R -modül olarak düşünülebilir.

Tanım 1.3.3

R bir halka ve M bir R -modül ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ bir alt küme olsun.

$(0: N) = \{r \in R: rN = 0\}$ kümesine N nin sıfırlayıcısı denir ve $Ann(N)$ ile gösterilir.

Örnek 1.3.4

R bir halka ve I , R nin ideali olsun. Bu durumda R/I bölüm halkası değişmeli grup olarak alınırsa R/I , R halkası üzerinde modül olur. $Ann(R/I) = \{r \in R: r(R/I) = 0\} = I$ olduğunu gösterelim.

$r \in Ann(R/I)$ alalım. Böylece her $m \in R$ için $r(m + I) = 0_{R/I}$ gerçekleşir yani $rm \in I$ elde edilir. Özel olarak $m = 1$ için $rm = r \in I$ olur. Böylece $Ann(R/I) \subseteq I$ olur.

Tersine $x \in I$ alalım. $x(m + I) = xm + I = I = 0_{R/I}$ olur. O halde $I = Ann(R/I)$ bulunur.

Tanım 1.3.5

R bir halka, M ve N iki R -modül olsun. $f: M \rightarrow N$ fonksiyonu her $m_1, m_2 \in M$ için

$$f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2),$$

ve her $r \in R$, her $m \in M$ için

$$f(rm) = rf(m)$$

özelliklerini sağlıyorsa f fonksiyonuna R -modül homomorfizması denir.

Örnek 1.3.6

R bir halka ve I , R nin ideali olsun. Bu durumda R ve R/I , R halkası üzerinde iki modül olur. $f: R \rightarrow R/I$ fonksiyonu $f(a) = a + I$ olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$f(a + b) = a + b + I = a + I + b + I = f(a) + f(b) \text{ ve}$$

$$f(rb) = rb + I = r(b + I) = rf(b) \text{ olur, böylece } f \text{ bir modül homomorfizmasıdır.}$$

Tanım 1.3.7

R bir tamlık bölgesi ve M bir R -modül olsun.

$T(M) = \{m \in M : \exists 0 \neq r \in R \text{ için, } rm = 0\}$ şeklinde tanımlanan kümeye M nin burulmalı alt modülü denir. Özel olarak $T(M) = M$ ise M ye burulmalı modül, $T(M) = 0$ ise M ye serbest burulmalı modül denir.

Örnek 1.3.8

(i) $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi için $n \in \mathbb{Z}$ alalım. $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Z}_n$ ler burulmalı modüldür. Gerçekten $\mathbb{Z}_n$ in her elemanı n ile çarpılırsa sıfıra eşit olur. Böylece $T(\mathbb{Z}_n) = \mathbb{Z}_n$ bulunur.

(ii) $\mathbb{Z}$ -modül $\mathbb{Q}$ serbest burulmalı modüldür. Gerçekten $T(\mathbb{Q}) = 0$ olduğu kolaylıkla görülür.

Tanım 1.3.9 (Huckaba, 1988)

M bir R -modül ise $R \propto M$ kümesi aşağıdaki işlemlerle birlikte birimli ve değişmeli bir halkadır. Her $x, y \in R$ ve $a, b \in M$ için,

$$(x, a) + (y, b) = (x + y, a + b)$$

$$(x, a)(y, b) = (xy, xb + ay)$$

dir. $R \propto M$ halkasına R -modül M nin trivial genişlemesi denir.

Teorem 1.3.10 (Anderson ve Winders, 2009)

M bir R -modül olsun.

(i) $R \propto M$ nin asal idealleri P , R nin asal ideali olmak üzere $P \propto M$ şeklindedir.

(ii) $I \subseteq R$ bir ideal ve $N \subseteq M$ bir alt modül ise $I \propto N \subseteq R \propto M$ bir idealdir $\Leftrightarrow IM \subseteq N$ dir.

(iii) S, R nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi ve N, M nin bir alt modülü ise $S \propto N$ de $R \propto M$ nin bir çarpımsal kapalı alt kümesidir.

1.4. Bazı Cebirsel Yapıların S-Versiyonu

Tanım 1.4.1 (Sevim ve ark., 2019)

R bir halka olmak üzere; I, R halkasının bir ideali ve $S, S \cap I = \emptyset$ olacak şekilde R nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. $a, b \in R$ için $ab \in I$ iken $sa \in I$ veya $sb \in I$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ varsa I ideale S -asal ideal denir.

Örnek 1.4.2

(i) P asal ideal ve $P \cap S = \emptyset$ ise P, S -asaldır.

(ii) $R = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}$ halkasını ve bu halkanın $I = \{0\} \times 4\mathbb{Z}$ idealini alalım. $S = \{1, 3\} \times \mathbb{Z}$, R halkasının çarpımsal kapalı bir alt kümesidir ve $S \cap I = \emptyset$ dir. $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in R$ iken $ab \in I$ olsun. O halde $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $ab = (a_1b_1, a_2b_2) = (0, 4k)$ biçimindedir. Şimdi $s = (3, 4)$ alalım.

$$a_1b_1 = 0 \text{ ve } a_1 = 0 \text{ ise } sa = (3, 4)(0, a_2) = (0, 4a_2) \in I$$

$a_1b_1 = 0$ ve $b_1 = 0$ ise $sb = (3, 4)(0, b_2) = (0, 4b_2) \in I$ olur. Şimdi $a_1b_1 = 0$ ve $a_1 \neq 0$ ve $b_1 \neq 0$ olsun. O halde a_1 ya da b_1 elemanlarının herhangi birinin 2 yi çarpan olarak içermesi gerekir. Genelliği bozmadan $n \in \mathbb{Z}$ için $a_1 = 2n$ olsun. Bu durumda $as = (a_1, a_2)(3, 4) = (2n, a_2)(3, 4) = (6n, 4a_2) \in I$ olur. Sonuç olarak seçilebilecek her $a, b \in R$ için tanımın gerektirdiği şekilde sabit bir $s \in S$ vardır. Dolayısıyla I, S -asal ideal olur.

Diğer taraftan, $a = (2, 2), b = (3, 2) \notin I$ dır fakat $ab = (0, 4) \in I$ olduğundan I asal ideal değildir.

Tanım 1.4.3 (Sevim ve ark., 2019)

R bir halka olsun ve $S, 0 \notin S$ olacak şekilde R nin çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. $r_1, r_2 \in R$ için $r_1r_2 = 0$ olması $r_1s = 0$ veya $r_2s = 0$ olmasını gerektiriyorsa R ye S -tamlık bölgesi denir.

Örnek 1.4.4

p bir asal sayı olmak üzere $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ halkasını ele alalım. R bir tamlık bölgesi değildir. Gerçekten, $(1,0)(0,1) = (0,0)$ olur. Şimdi $S = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}_p - \{0\})$ ve $s = (0,1) \in S$ alalım. $(a,b)(m,n) = (0,0)$ olacak şekilde $a, m \in \mathbb{Z}$ ve $b, n \in \mathbb{Z}_p$ var olsun. Buradan $am = 0$ ve $bn = 0$ dır. Böylece $b = 0$ veya $n = 0$ olur. Bu durumda $s(a,b) = (0,0)$ veya $s(m,n) = (0,0)$ dır. Yani R, S -tamlık bölgesidir.



2. S-YARI ASAL İDEALLER VE S-İNDİRGENMİŞ

HALKALAR

2.1. S-Yarı Asal İdeallerin Karakterizasyonu

Tanım 2.1.1

S , R halkasının çarpımsal kapalı bir alt kümesi ve P , R halkasının $P \cap S = \emptyset$ şartını sağlayan bir ideali olsun. $a \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ iken $a^n \in P$ için $sa \in P$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ varsa P ye R nin bir S -yarı asal ideali denir.

Teorem 2.1.2

R bir halka ve S , R nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun.

- (i) $P \cap S = \emptyset$ ve P , R nin bir yarı asal ideali ise bu durumda P , R nin S -yarı asal idealidir. Tersine P , R nin bir S -yarı asal ideali ve $S \subseteq U(R)$ ise P , R nin yarı asal idealidir.
- (ii) Her S -asal ideal S -yarı asal idealdir.
- (iii) S_1 ve S_2 , $S_1 \subseteq S_2$, olacak şekilde R halkasının çarpımsal kapalı iki alt kümesi olsun. P bir S_1 -yarı asal ideal ve $P \cap S_2 = \emptyset$ ise P , S_2 -yarı asal idealdir.
- (iv) P , S -yarı asal idealdir $\Leftrightarrow P$, S^* -yarı asal idealdir.
- (v) P , R halkasının S -yarı asal ideali ise $S^{-1}P$, $S^{-1}R$ halkasının yarı asal idealidir.

İspat

(i) S , R nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi ve P , R nin $P \cap S = \emptyset$ şartını sağlayan bir yarı asal ideali olsun. Yarı asal idealin tanımından $x \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ iken $x^n \in P$ ise $x \in P$ olmalıdır. Bu durumda her $s \in S \subseteq R$ için $x \in P$ ise $sx \in P$ olur. Sonuç olarak $x \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ iken $x^n \in P$ ise $sx \in P$ bulunur. Böylece P , R nin bir S -yarı asal idealidir.

Tersine P , R nin bir S -yarı asal ideali olsun. Bu durumda $x \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x^n \in P$ olduğunda $sx \in P$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ vardır. $S \subseteq U(R)$ olduğu göz önüne alındığında her $s \in S$ için $us = 1$ olacak şekilde $u \in R$ vardır. Böylece $x = usx \in P$ olur. Sonuç olarak $x \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x^n \in P$ olduğunda $x \in P$ bulunur. Böylece P , R nin bir yarı asal idealidir.

(ii) P , R nin bir S -asal ideali olsun. Buna göre tanımdan $P \cap S = \emptyset$ ve $ab \in P$ ise sabit bir $s \in S$ için $sa \in P$ veya $sb \in P$ olur.

$x \in \sqrt{P}$ seçelim. Bu durumda bir $n \in \mathbb{N}$ için $x^n \in P$ olur. P bir S -asal ideal olduğundan $x^n = x^{n-1}x \in P$ iken sabit bir $s \in S$ için $sx \in P$ veya $sx^{n-1} \in P$ bulunur. Eğer $sx \in P$ ise ispat tamamlanmış olur. Aksi halde $sx^{n-1} \in P$ elde ederiz. $x(sx^{n-2}) \in P$ ve P , S -asal ideal olduğundan aynı $s \in S$ için ya $sx \in P$ ya da $s^2x^{n-2} \in P$ bulunur. Yine $sx \in P$ ise P , R nin S -yarı asal ideali olur. Aksi halde $s^2x^{n-2} \in P$ elde ederiz. İşleme aynı şekilde devam edersek $s^{n-1}x \in P$ elde ederiz. Bu durumda $x(s^{n-1}) \in P$ için $sx \in P$ veya $s^n \in P$ bulunur. S çarpımsal kapalı bir küme olduğundan $s \in S$ olması $s^n \in S$ olmasını gerektirir. O halde $s^n \in P$ ise $s^n \in P \cap S$ olur ve bu bir çelişkidir. Böylece P , S -yarı asal idealdir.

(iii) İddia açıktır.

(iv) P nin R de bir S -yarı asal ideal olduğunu varsayalım. İlk olarak $S \subseteq S^*$ olduğunu hatırlatalım. Şimdi $P \cap S^* = \emptyset$ olduğunu göstereceğiz. Tersini kabul edelim. O halde bir $a \in P \cap S^*$ vardır. Bu ise bir $\frac{b}{t} \in S^{-1}R$ için $\frac{a}{1} \frac{b}{t} = 1$ olmasını gerektirir. Kesir halkasının tanımından $\frac{a}{1} \frac{b}{t} = \frac{ab}{t} = 1$ için $uab = ut$ olacak şekilde bir $u \in S$ vardır. Böylece $uab \in P$ ve $ut \in S$ olur. Buradan $uab = ut \in P \cap S$ bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlıştır. $P \cap S^* = \emptyset$ dir. $S \subseteq S^*$ ve P , S -yarı asal ideal olduğundan Teorem 2.1.2 (iii) den P , S^* -yarı asal ideal bulunur.

Tersine P nin S^* -yarı asal ideal olduğunu kabul edelim. $P \cap S^* = \emptyset$ ve $S \subseteq S^*$ olduğundan açıkça $P \cap S = \emptyset$ bulunur. Bir $a \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $a^n \in P$ alalım. Bu durumda sabit bir $s' \in S^*$ için $s'a \in P$ dir. Böylece $\frac{s'}{1} \frac{b}{t} = 1$ olacak şekilde bir $\frac{b}{t} \in S^{-1}R$ vardır. O halde bir $u \in S$ için $us'b = ut$ diyebiliriz. Sabit bir $s \in S$ için özel olarak $s = ut$ alalım. $s'a \in P$ olduğundan $sa = aut = s'aub \in P$ bulunur. P , S -yarı asal idealdir.

(v) P bir S -yarı asal ideal olsun. O zaman sabit bir $s \in S$ için $a^n \in P$ iken $sa \in P$ dir. $\frac{b}{t} \in \sqrt{S^{-1}P}$ alalım. O halde $(\frac{b}{t})^n \in S^{-1}$ olur. Buradan $\frac{b^n}{t^n} \in S^{-1}P$ dir yani $ub^n \in P$ olacak şekile bir $u \in S$ vardır. Dolayısıyla $(ub)^n \in P$ dir ve P , S -yarı asal ideal olduğundan $sub \in P$ bulunur. Böylece $\frac{b}{t} = \frac{sub}{sut} \in S^{-1}P$ elde edilir. Sonuç olarak $\sqrt{S^{-1}P} = S^{-1}P$ dir yani $S^{-1}P$ yarı asal idealdir.

Teorem 2.1.2 (i) ve (ii) öncüllerinin tersi doğru değildir. Verilen örnekleri inceleyelim.

Örnek 2.1.3

$R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$ halkasını ve bu halkada $P = \mathbb{Z} \times (0)$ idealini göz önüne alalım. $S_1 = \mathbb{Z} - \{0\}$ ve $S_2 = \{1,2,4,8\}$ iken R nin bir çarpımsal alt kümesi olarak $S = S_1 \times S_2$ alalım. Burada

$P \cap S = (\mathbb{Z} \times (0)) \cap (S_1 \times S_2) = (\mathbb{Z} \cap S_1) \times ((0) \cap S_2) = \emptyset$ olduğu kolayca görülür. Bir idealin yarı asal ideal olması için radikalinin kendisine eşit olması gerekir. Bu bilgi kullanılarak $\sqrt{P} = \mathbb{Z} \times (6) \neq P$ bulunur yani P yarı asal ideal değildir.

Şimdi, $m, n \in \mathbb{Z}$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $(m, n)^k \in P$ alalım. O halde $(m, n)^k = (m^k, n^k) \in P$ yani $m^k \in \mathbb{Z}$ ve $n^k \in (0)$ bulunur. Bu ise $12|n^k$ olmasını yani $6|n$ olmasını gerektirir. O halde ya $n = 0$ ya da $n = 6$ bulunur. $s = (1, 2) \in S$ alalım. Böylece $s(m, n) = (sm, sn) = (sm, 0) \in P$ elde edilir. Sonuç olarak P bir S -yarı asal idealdir.

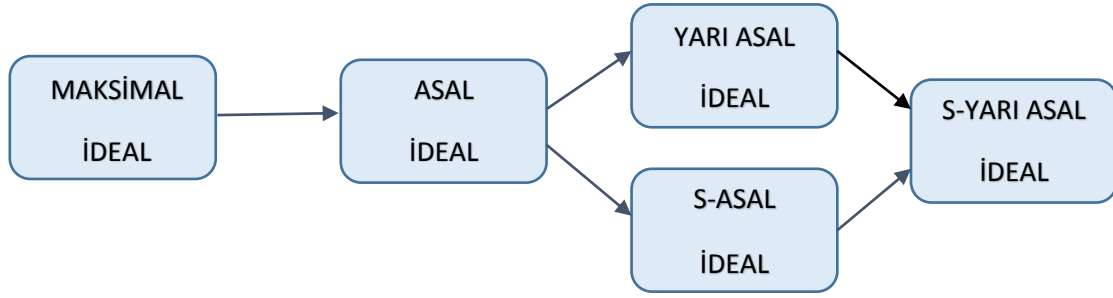
Örnek 2.1.4

R ve R' iki değişmeli halka ve P, P' sırasıyla bu halkaların asal idealleri olsun. $H = R \times R'$ halkasını ve bu halkanın $I = P \times P'$ idealini alalım. H halkasının S çarpımsal kapalı alt kümesi olarak $S = (R - P) \times (R' - P')$ alalım. Açıkça $S \cap I = ((R - P) \times (R' - P')) \cap (P \times P') = ((R - P) \cap P) \times (R' - P') \cap P' = \emptyset$ olur. Bu durumda $a = (a_1, a_2) \in H$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $a^n = (a_1, a_2)^n = (a_1^n, a_2^n) \in I$ ise $a_1^n \in P$ ve $a_2^n \in P'$ bulunur. P ve P' asal idealler olduğundan aynı zamanda yarı asal ideallerdir. O halde $a_1^n \in P$ için sabit bir $s_1 \in S$, $s_1 a_1 \in P$ olacak şekilde; $a_2^n \in P'$ için sabit bir $s_2 \in S$, $s_2 a_2 \in P$ olacak şekilde vardır. Bu durumda $s = (s_1, s_2) \in S$ alırsak, $a^n \in I$ için $sa = (s_1 a_1, s_2 a_2) \in I$ olur. Böylece I, H nin bir S -yarı asal idealidir.

Şimdi, I nin S -asal ideal olmadığını göstereceğiz. $a = (0, 1), b = (1, 0) \in H$ için $ab = (0, 0) \in I$ dır. Şimdi, $(s_1, s_2) \in S$ alalım. $(0, 1)(s_1, s_2) \notin I$ ve $(1, 0)(s_1, s_2) \notin I$ olduğundan I, R nin S -asal ideali değildir.

Örneğin; D bir tamlık bölgesi ve $D^* = D - \{0\}$ olsun. O halde $D \times D$ halkasında 0 ideali $D^* \times D^*$ -yarı asal idealdir fakat $D^* \times D^*$ -asal ideal değildir.

Aşağıda asal, maksimal, yarı asal, S -asal, S -yarı asal idealler arasındaki ilişkiyi gösteren şema verilmiştir.



*diyagramda her hücredeki ifade kendinden önceki hücrede bulunan ifadenin genelleştirmesidir.

Şekil 1.1 Bazı ideal yapıları arasındaki ilişkiler

Lemma 2.1.5

R bir halka olmak üzere S , R nin çarpımsal kapalı alt kümesi ve P , $P \cap S = \emptyset$ olacak şekilde R nin bir ideali olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (i) P bir S -yarı asal idealdir.
- (ii) R nin $J \subseteq \sqrt{P}$ şartını sağlayan her J ideali için $s \in S$, $sJ \subseteq P$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ vardır.

İspat

(i) $\Rightarrow$ (ii): P bir S -yarı asal ideal olsun ve J , R halkasının $J \subseteq \sqrt{P}$ şartını sağlayan bir ideali olsun. Şimdi sabit bir $s \in S$ için $sJ \subseteq P$ olduğunu göstereceğiz. Bunu göstermek için $x \in J$ alalım. O halde bir $n \in \mathbb{N}$ için $x^n \in P$ olur. P bir S -yarı asal ideal olduğundan sabit bir $s \in S$ için $sx \in P$ olur. O halde $sJ \subseteq P$ bulunur.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Herhangi bir $a \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $a^n \in P$ olsun. $Ra = J$ alalım. Böylece $Ra = J \subseteq \sqrt{P}$ olur. Kabulümüzden bir $s \in S$ için $sa \in sJ = sRa \subseteq P$ bulunur. Böylece P , R nin bir S -yarı asal idealidir.

Önerme 2.1.6

R ve R' birer halka iken $f: R \rightarrow R'$ bir halka homomorfizması olsun. S kümesi de R halkasının $0 \notin f(S)$ olacak biçimde bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun.

(i) P', R' halkasının bir $f(S)$ -yarı asal ideali ise $f^{-1}(P')$, R halkasının bir S -yarı asal idealidir.

(ii) f bir epimorfizma, S R nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun ve P de R halkasının $\text{Çek}(f)$ yi içeren bir S -yarı asal ideali olsun. Bu durumda $f(P)$, R' halkasının $f(S)$ -yarı asal idealidir.

İspat

Öncelikle $f(S)$ nin R' halkasının çarpımsal kapalı alt kümesi olduğunu göstermeliyiz. Bunu göstermek için $a, b \in S$ olmak üzere $f(a), f(b) \in f(S)$ alalım. S çarpımsal kapalı bir alt küme olduğundan $ab \in S$ ve böylece $f(a)f(b) = f(ab) \in f(S)$ bulunur. Yani $f(S)$, R halkasının çarpımsal kapalı bir alt kümesidir.

(i) $S \cap f^{-1}(P') \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. O halde bir $a \in f^{-1}(P') \cap S$ vardır. $a \in f^{-1}(P')$ ise $f(a) \in P'$ bulunur. Yani $f(a) \in P' \cap f(S)$ olur ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak kabulümüz yanlıştır ve $f^{-1}(P') \cap S = \emptyset$ olur. Şimdi $a \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $a^n \in f^{-1}(P')$ olsun. O halde $f(a^n) = f(a)^n \in P'$ bulunur. P' bir $f(S)$ -yarı asal ideal olduğundan $s \in S$ olmak üzere $f(s)f(a) = f(sa) \in P'$ elde edilir. O halde $f(sa) \in P'$ ise $sa \in f^{-1}(P')$ olur. Sonuç olarak $f^{-1}(P')$, S -yarı asal idealdir.

(ii) $f(P) \cap f(S) \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Kabulümüze göre bir $y \in f(P) \cap f(S)$ vardır. O halde bir $s \in S$ için $y = f(s) \in f(P)$ bulunur. P , $\text{Çek}(f)$ yi içerdiğinden ve $f(s) \in f(P)$ olduğundan $s \in P$ olur. Bu ise $P \cap S = \emptyset$ olması ile çelişir. Varsayımımız yanlıştır ve $f(P) \cap f(S) = \emptyset$ olmalıdır. Şimdi, bir $b \in R'$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $b^n \in f(P)$ alalım. f bir epimorfizma olduğundan $b = f(x)$ olacak şekilde $x \in R$ vardır. O halde $b^n = f(x)^n = f(x^n) \in f(P)$ ve böylece $x^n \in P$ bulunur. P bir S -yarı asal ideal olduğundan, $sx \in P$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ bulunur. Bu ise $f(sx) = f(x)f(s) \in f(P)$ olmasını gerektirir. Böylece, $f(P)$ bir $f(S)$ -yarı asal idealdir.

Sonuç 2.1.7

(i) R bir halka; I , R halkasının ideali ve S , $I \cap S = \emptyset$ olacak şekilde, R halkasının çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. P nin, R nin bir S -yarı asal ideali olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\pi: R \rightarrow R/I$ doğal epimorfizma olmak üzere P/I nin R/I halkasında $\pi(S)$ -yarı asal ideali olmasıdır.

(ii) R' , R halkasının bir alt halkası; S , R' halkasının çarpımsal kapalı alt kümesi ve P de R halkasında S -yarı asal ideal olsun. O halde $P \cap R'$ ideali R' halkasının S -yarı asal idealidir.

İspat

(i) P nin R de bir S -yarı asal ideal olduğunu varsayalım. Her $x \in R$ için $\pi(x) = x + I$ olarak tanımlanmış doğal epimorfizmayı göz önüne alalım. O halde $\text{Çek}(f) = I \subseteq P$ dir. Önerme 2.1.6 (ii) den $P/I, R/I$ halkasının $\pi(S)$ -yarı asal idealidir. Tersine P/I nın R/I halkasında $\pi(S)$ -yarı asal ideal olduğunu varsayalım. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $a^n \in P$ olacak şekilde $a \in R$ seçelim. O halde $(a + I)^n = a^n + I \in P/I$ elde ederiz. P/I bir $\pi(S)$ -yarı asal ideal olduğundan $(s + I)(a + I) = sa + I \in P/I$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ vardır. Bu ise $sa \in P$ olmasını gerektirir. Bundan dolayı P, R halkasının S -yarı asal idealidir.

(ii) P nin R halkasında bir S -yarı asal ideal olduğunu varsayalım. Her $x \in R'$ için $i(x) = x$ olarak tanımlanan içirme fonksiyonunu göz önüne alalım. O zaman Önerme 2.1.6 (i) den $i^{-1}(P) = P \cap R', R'$ nün bir S -yarı asal idealidir.

Önerme 2.1.8

- (i) İki S -yarı asal idealin kesişimi S -yarı asal idealdir.
- (ii) P, R halkasının bir S -yarı asal ideali ise $\sqrt{P}, R$ halkasının S -yarı asal idealidir.

İspat

(i) P_1 ve P_2, R halkasının S -yarı asal idealleri olsun. $P_1 \cap S = \emptyset$ ve $P_2 \cap S = \emptyset$ olduğuna göre $(P_1 \cap P_2) \cap S = \emptyset$ bulunur. Bir $a \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $a^n \in P_1 \cap P_2$ alalım. O halde $a^n \in P_1$ ve $a^n \in P_2$ olur. $a^n \in P_1$ ve P_1 bir S -yarı asal ideal olduğundan sabit bir $s_1 \in S, s_1 a \in P_1$ olacak şekilde vardır. Benzer şekilde $a^n \in P_2$ ve P_2 bir S -yarı asal ideal olduğundan sabit bir $s_2 \in S, s_2 a \in P_2$ olacak şekilde vardır. Şimdi $s' = s_1 s_2 \in S$ diyelim. Bu durumda $s' a = s_2(s_1 a) \in P_1$ ve $s' a = s_1(s_2 a) \in P_2$ elde ederiz. Böylece $s' a \in P_1 \cap P_2$ bulunur. Sonuç olarak $P_1 \cap P_2, R$ nin bir S -yarı asal ideali olur.

(ii) $S \cap \sqrt{P} \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. O halde $a \in S \cap \sqrt{P}$ olacak şekilde bir a elemanı vardır. $a \in \sqrt{P}$ ise bir $n \in \mathbb{N}$ için $a^n \in P$ bulunur ve S çarpımsal kapalı bir küme olduğundan $a \in S$ iken $a^n \in S$ bulunur. Böylece $a^n \in P \cap S$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde varsayımımız yanlıştır. $S \cap \sqrt{P} = \emptyset$ bulunur. Şimdi, $x \in R$ ve $m \in \mathbb{N}$ için $x^m \in \sqrt{P}$ alalım. O halde bir $t \in \mathbb{N}$ için $(x^m)^t = x^{mt} \in P$ bulunur. P bir S -yarı asal ideal olduğundan sabit bir $s \in S$ için $s x \in P \subseteq \sqrt{P}$ vardır. Bundan dolayı $\sqrt{P}, R$ nin bir S -yarı asal idealidir.

Önerme 2.1.9

Her $i = 1, 2$ için S_i , R_i nin çarpımsal kapalı alt kümesi, P_i de R_i nin ideali olsun. $R = R_1 \times R_2$ ve $S = S_1 \times S_2$ olduğunu varsayalım. $P = P_1 \times P_2$ de R nin bir ideali olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (i) P , R nin bir S -yarı asal idealidir.
- (ii) P_1 bir S_1 -yarı asal ideal ve $P_2 \cap S_2 \neq \emptyset$ veya P_2 bir S_2 -yarı asal ideal ve $P_1 \cap S_1 \neq \emptyset$ veya her $i = 1, 2$ için P_i bir S_i -yarı asal idealdir.

İspat

(i) $\Rightarrow$ (ii): P nin R de bir S -yarı asal ideal olduğunu varsayalım. O halde $(P_1 \times P_2) \cap (S_1 \times S_2) = (P_1 \cap S_1) \times (P_2 \cap S_2) = \emptyset$ dir. Bu durumda ya $P_1 \cap S_1 = \emptyset$ veya $P_2 \cap S_2 = \emptyset$ bulunur. Genelliği bozmadan $(P_1 \cap S_1) \neq \emptyset$ kabul edebiliriz. O halde $P_2 \cap S_2 = \emptyset$ olmak durumundadır. Şimdi P_2 nin bir S_2 -yarı asal ideal olduğunu gösterelim. Bunun için $x_2 \in R_2$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x_2^n \in P_2$ olsun. Böylece $(0, x_2)^n = (0, x_2^n) \in P$ elde edilir. Bu durumda sabit bir $s = (s_1, s_2) \in S = (S_1 \times S_2)$, $s(0, x_2) = (0, s_2 x_2) \in P = (P_1 \times P_2)$ olacak şekilde vardır. Bu ise $s_2 x_2 \in P_2$ olmasını gerektirir. Böylece P_2 , R_2 nin bir S_2 -yarı asal idealidir. Diğer durumlarda da istenen benzer şekilde elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i): P_1 , R_1 de bir S_1 -yarı asal ideal ve $P_2 \cap S_2 \neq \emptyset$ olsun. O zaman, $P_1 \cap S_1 = \emptyset$ olduğu için, $(P_1 \times P_2) \cap (S_1 \times S_2) = (P_1 \cap S_1) \times (P_2 \cap S_2) = \emptyset \times (P_2 \cap S_2) = \emptyset$ bulunur. $a = (a_1, a_2) \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $a^n \in P$ olsun. O halde $a^n = (a_1, a_2)^n = (a_1^n, a_2^n) \in P = P_1 \times P_2$ olur. Yani $a_1^n \in P_1$ ve $a_2^n \in P_2$ elde edilir. Kabulümüze göre P_1 bir S_1 -yarı asal ideal ve $a_1^n \in P_1$ olduğundan $a_1 s_1 \in P_1$ olacak şekilde sabit bir $s_1 \in S_1$ vardır. $P_2 \cap S_2 \neq \emptyset$ olduğundan bir $s_2 \in P_2 \cap S_2$ vardır. Böylece $a_2 s_2 \in P_2$ elde edilir. Şimdi, $s' = (s_1, s_2) \in S$ alalım. $s'a = (s_1, s_2)(a_1, a_2) = (s_1 a_1, s_2 a_2) \in P$ olur. Sonuç olarak P , R de bir S -yarı asal ideal olur. Diğer durumlarda da benzer yöntemle P nin S -yarı asal ideal olduğu görülür.

Teorem 2.1.10

$n \geq 1$ olmak üzere her $i = 1, 2, \dots, n$ için R_i bir halka S_i , R_i halkasının çarpımsal kapalı alt kümesi ve P_i , R_i halkasının ideali olsun. $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$, $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$, $P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n$ olduğunu varsayalım. Aşağıdakiler denktir.

- (i) P , R de bir S -yarı asal idealdir.

(ii) $i \in \{k_1, k_2, \dots, k_m: 1 \leq k_1, k_2, \dots, k_m \leq n \text{ ve } 0 \leq m < n\}$ için $P_i \cap S_i \neq \emptyset$ ve her $i \in \{1, 2, \dots, n\} - \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ için P_i, R_i de S_i -yarı asal idealdir.

İspat

Teoremin ispatını yapabilmek için n üzerinden tümevarım hipotezini kullanacağız. $n = 1$ iken $R = R_1, S = S_1, P = P_1$ olur ve (i) $\Leftrightarrow$ (ii) sağlanır. $n = 2$ için (i) $\Leftrightarrow$ (ii) olduğunu Önerme 2.1.9 da gösterdik. $t < n$ için (i) $\Leftrightarrow$ (ii) olduğunu kabul edelim. Şimdi, $t = n$ alalım. $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n, S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n, P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n$ olsun. $P' = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_{n-1}$ ve $S' = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{n-1}$ alalım. $P = P' \times P_n$ olduğu açıkça görülür. Önerme 2.1.9 dan, P nin S -yarı asal ideal olması için gerek ve yeter koşul $P_n \cap S_n \neq \emptyset$ ve P', S' -yarı asal idealdir veya $P' \cap S' \neq \emptyset$ ve P_n nin, S_n -yarı asal ideal olması veya P', S' -yarı asal ideal ve P_n, S_n -yarı asal ideal olmasıdır. Tümevarım hipotezinden $t = n$ için (i) $\Leftrightarrow$ (ii) elde edilir.

Teorem 2.1.11

R bir halka, M bir R -modül, I R nin bir ideali ve ayrıca S, R nin çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (i) I, R nin bir S -yarı asal idealidir.
- (ii) $I \propto M, R \propto M$ nin bir $S \propto 0$ -yarı asal idealidir.
- (iii) $I \propto M, R \propto M$ nin bir $S \propto M$ -yarı asal idealidir.

İspat

(i) $\Rightarrow$ (ii): I, R halkasında bir S -yarı asal ideal olsun. $x \in R, m \in M$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $(x, m)^n = (x^n, nx^{n-1}m) \in I \propto M$ alalım. O halde $x^n \in I$ ve $nx^{n-1}m \in M$ elde ederiz. I bir S -yarı asal ideal olduğundan sabit bir $s \in S$ için $x^n \in I$ olması $sx \in I$ olmasını gerektirir. Şimdi, $(s, 0) \in S \propto 0$ seçelim. Bu durumda $(s, 0)(x, m) = (sx, sm) \in I \propto M$ olur. Böylece $I \propto M$ bir $S \propto 0$ -yarı asal idealdir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): $I \propto M, R \propto M$ nin bir $S \propto 0$ -yarı asal ideali olsun. Öyleyse $(I \propto M) \cap (S \propto 0) = \emptyset$ olmalıdır. Bu ise $(I \cap S) \propto (M \cap 0) = \emptyset$ olmasını gerektirir. $(M \cap 0) \neq \emptyset$ olduğu için $(I \cap S) = \emptyset$ olmalıdır. Böylece $(I \cap S) \propto M = (I \propto M) \cap (S \propto M) = \emptyset$ elde edilir. $(S \propto 0) \subseteq (S \propto M)$ ve $(I \propto M) \cap (S \propto M) = \emptyset$ olduğundan Teorem 2.1.2 (iii) ten $I \propto M$ bir $S \propto M$ -yarı asal idealdir.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Şimdi $I \propto M, R \propto M$ nin bir $S \propto M$ -yarı asal ideali olsun. $x \in R, n \in \mathbb{N}$ için $x^n \in I$ alalım. O halde $(x, 0)^n = (x^n, 0) \in I \propto M$ elde ederiz. $I \propto M$ bir $S \propto M$ -yarı asal

ideal olduğundan $(s, m)(x, 0) = (sx, xm) \in I \times M$ olacak şekilde sabit bir $(s, m) \in S \times M$ vardır. Bu ise $sx \in I$ olmasını gerektirir. Böylece I bir S -yarı asal idealdir.

Şimdi, keyfi halkaların belirli yarı asal ideallerini S -yarı asal ideallerle karakterize edeceğiz.

Teorem 2.1.12

I, R nin $I \subseteq \text{Jac}(R)$ şartını sağlayan bir ideali olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (i) I bir yarı asal idealdir.
- (ii) Her $M \in \text{Max}(R)$ için, $S_M = (R - M)$ iken I bir S_M -yarı asal idealdir.

İspat

(i) $\Rightarrow$ (ii): I, R nin bir yarı asal ideali olsun. Her $M \in \text{Max}(R)$ için $I \subseteq \text{Jac}(R)$ olduğundan $S_M \cap I = \emptyset$ olur. Teorem 2.1.2 (i) den I, S_M -yarı asal idealdir.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Her $M \in \text{Max}(R)$ için I bir S_M -yarı asal ideal olsun. Bir $x \in R, n \in \mathbb{N}$ için $x^n \in I$ alalım. Her $M \in \text{Max}(R)$ için I, S_M -yarı asal ideal olduğundan, $s_M x \in I$ olacak şekilde sabit bir $s_M \notin M$ vardır. $\Omega = \{s_M : \exists M \in \text{Max}(R), s_M \notin M, s_M x \in I\}$ kümesini tanımlayalım. $(\Omega) \subseteq M^*$ olacak şekilde bir $M^* \in \text{Max}(R)$ olduğunu varsayalım. O halde I bir S_{M^*} -yarı asal ideal olduğu durumda $s_{M^*} x \in I$ olacak şekilde sabit bir $s_{M^*} \notin M^*$ vardır. Ayrıca $s_{M^*} \in \Omega \subseteq (\Omega) \subseteq M^*$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece (Ω) herhangi bir maksimal ideal tarafından kapsanmaz yani $(\Omega) = R$ olur. O halde $1 \in (\Omega)$ bulunur. Bu ise her $1 \leq i \leq n$ için $r_i \in R$ ve $s_{M_i} \in \Omega$ olmak üzere $1 = r_1 s_{M_1} + r_2 s_{M_2} + \dots + r_n s_{M_n}$ olmasını gerektirir. Buradan eşitliği x ile çarparsak $x = r_1 (s_{M_1} x) + r_2 (s_{M_2} x) + \dots + r_n (s_{M_n} x)$ elde ederiz. Her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $s_{M_i} x \in I$ olduğu için $x \in I$ elde ederiz. Sonuç olarak I, R de yarı asal idealdir.

Sonuç 2.1.13

M, R nin tek maksimal ideali olmak üzere (R, M) bir yerel halka olsun. Aşağıdakiler R nin her has I ideali için denktir.

- (i) I bir yarı asal idealdir.
- (ii) I bir S_M -yarı asal idealdir.

İspat

R nin tek maksimal ideali vardır ayrıca her ideal bir maksimal ideal tarafından kapsanır. Bu durumda $I \subseteq \text{Jac}(R) = M$ olur. Böylece Teorem 2.1.12. den (i) $\Leftrightarrow$ (ii) bulunur.

Teorem 2.1.14

P, R nin bir ideali ve $S, P \cap S = \emptyset$ olacak şekilde R nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (i) P, R nin bir S -yarı asal idealidir.
- (ii) Sabit bir $s \in S$ için $(P:s)$, R nin bir yarı asal idealidir.

İspat

(i) $\Rightarrow$ (ii): P nin R de bir S -yarı asal ideal olduğunu varsayalım. Tanımdan $x \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x^n \in P$ iken sabit bir $s \in S, sx \in P$ olacak şekilde vardır. $s^* = s^2 \in S$ alalım. Şimdi, $(P:s^*)$ ın R halkasında bir yarı asal ideal olduğunu gösterelim. Bunu gösterebilmek için bir $y \in R$ ve $m \in \mathbb{N}$ için $y^m \in (P:s^*)$ alalım. Bu durumda $s^*y^m = s^2y^m \in P$ olur. Buradan $s^{2m}y^{2m} = (sy)^{2m} \in P$ bulunur. Kabulümüzden P bir S -yarı asal ideal olduğu için $s(sy) \in P$ elde ederiz. Yani $s^2y \in P$ olur ki buradan da $y \in (P:s^2) = (P:s^*)$ bulunur. Sonuç olarak sabit bir $s^* \in S$ için $(P:s^*), R$ de bir yarı asal idealdir.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Bir $s \in S$ için $(P:s)$ nin R de bir yarı asal ideal olduğunu kabul edelim. O halde tanımdan $x \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x^n \in (P:s)$ iken $x \in (P:s)$ gerçekleşir. Bir $x \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x^n \in P$ olsun. O halde buradan $x^n \in (P:s)$ ve $(P:s)$ yarı asal ideal olduğundan $x \in (P:s)$ bulunur. Bu ise $sx \in P$ olmasını gerektirir. Böylece P, R nin bir S -yarı asal idealidir.

2.2. S-İndirgenmiş Halkalar

Tanım 2.2.1

R bir halka ve S, R nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun. $x \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x^n = 0$ iken $sx = 0$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ varsa R halkasına S -indirgenmiş halka denir.

Tüm indirgenmiş halkalar S -indirgenmiş halkadır fakat tersi doğru değildir.

Örnek 2.2.2

$p \neq q$ asal sayılar olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^2q}$ halkasını göz önüne alalım. $\sqrt{0} = (pq) \neq 0$ olduğu için $\mathbb{Z}_{p^2q}$ bir indirgenmiş halka değildir. $S = \{p^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$ çarpımsal kapalı alt kümesini alalım. $s = p \in S$ seçelim. O halde herhangi bir $x \in \sqrt{0}$ için $sx = 0$ elde ederiz. Yani $\mathbb{Z}_{p^2q}$ bir S -indirgenmiş halkadır.

Önerme 2.2.3

Eğer R bir S -tamlık bölgesi ise R bir S -indirgenmiş halkadır.

İspat

R bir S -tamlık bölgesi olmak üzere $x \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x^n = xx^{n-1} = 0$ olsun. R bir S -tamlık bölgesi olduğundan $sx = 0$ veya $sx^{n-1} = 0$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ vardır. Eğer $sx = 0$ ise R bir S -indirgenmiş halka olur. Aksi halde $sx^{n-1} = x(sx^{n-2}) = 0$ olduğundan yine $sx = 0$ veya $s^2x^{n-2} = 0$ elde ederiz. Bu şekilde devam edersek sonuçta $sx = 0$ veya $s^n = 0 \in S$ elde etmiş oluruz. Fakat $s^n = 0$ olması S çarpımsal kapalı bir küme ve $0 \notin S$ olduğu için mümkün değildir. Bundan dolayı $sx = 0$ olmalıdır. O halde R bir S -indirgenmiş halka olur.

Önerme 2.2.3 ün tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 2.2.4

$R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ ve $S = \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Q}^*$ olsun. O halde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x^n = (x_1, x_2)^n = (x_1^n, x_2^n) = (0, 0)$ alalım. Böylece $0 = x_1^n = x_2^n$ ve buradan $x = (x_1, x_2) = (0, 0)$ olduğundan R bir indirgenmiş halkadır. Aynı zamanda S -indirgenmiş halkadır. Şimdi $x = (0, 1)$, $y = (1, 0) \in R$ alalım. $xy = (0, 1)(1, 0) = (0, 0) \in R$ dir. Fakat herhangi $s \in S$ için $sx \neq 0$ ve $sy \neq 0$ dir. Bundan dolayı R , S -tamlık bölgesi değildir.

Teorem 2.2.5

R bir halka ve S , R nin $P \cap S = \emptyset$ şartını sağlayan çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Aşağıdakiler denktir.

- (i) P , R nin bir S -yarı asal idealidir.
- (ii) $\pi: R \rightarrow R/P$ doğal homomorfizma olmak üzere R/P bir $\pi(S)$ -indirgenmiş halkadır.

İspat

(i) $\Rightarrow$ (ii): P nin R de bir S -yarı asal ideal olduğunu kabul edelim. Öncelikle $P \cap S = \emptyset$ olduğundan $0_{R/P} \notin \pi(S)$ dir. Ayrıca S, R nin çarpımsal kapalı alt kümesi olduğundan $\pi(S)$, R/P nin çarpımsal kapalı bir alt kümesidir. $a \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $(a + P)^n = a^n + P$ olsun. Bu ise $a^n \in P$ olmasını gerektirir. P bir S -yarı asal ideal olduğundan $sa \in P$ olacak şekilde sabit bir $s \in S$ vardır. Bu ise $(s + P)(a + P) = sa + P = P = 0_{R/P}$ eşitliğini verir. Bundan dolayı R/P bir $\pi(S)$ -indirgenmiş halkadır.

(ii) $\Rightarrow$ (i): R/P bir $\pi(S)$ -indirgenmiş halka olsun. Bir $a \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $a^n \in P$ alalım. O halde $(a + P)^n = a^n + P = P = 0_{R/P}$ elde ederiz. Bu durumda sabit bir $s \in S$ için $(s + P)(a + P) = 0_{R/P}$ bulunur. Bu ise $sa \in P$ olmasını gerektirir. Yani P, R de bir S -yarı asal idealdir.

Şimdi S -indirgenmiş halkalar yardımıyla indirgenmiş halkaları karakterize edeceğiz.

Teorem 2.2.6

Her R halkası için aşağıdakiler denktir.

- (i) R bir indirgenmiş halkadır.
- (ii) Her $P \in \text{Spec}(R)$ için R bir S_P -indirgenmiş halkadır.
- (iii) Her $M \in \text{Max}(R)$ için R bir S_M -indirgenmiş halkadır.

İspat

(i) $\Rightarrow$ (ii): R bir indirgenmiş halka ve $P \in \text{Spec}(R)$ olsun. $S_P = (R - P)$ olduğu için $1 \in S_P$ dir. $s = 1 \in S_P$ seçelim. $x \in R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x^n = 0$ alalım. R bir indirgenmiş halka olduğu için $x = 0$ böylece $sx = 0$ elde edilir. Sonuç olarak R bir S_P -indirgenmiş halkadır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Her maksimal ideal aynı zamanda asal ideal olduğundan $\text{Max}(R) \subseteq \text{Spec}(R)$ dir. İstenen (ii) den elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Her $M \in \text{Max}(R)$ için R bir $S_M = (R - M)$ -indirgenmiş halka olsun. $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in R$ için $x^n = 0$ olsun. R bir S_M -indirgenmiş halka olduğu için $s_M x = 0$ olacak şekilde sabit bir $s_M \notin M$ vardır. $\Lambda = \{s_M: s_M x = 0, \exists M \in \text{Max}(R), s_M \notin M\}$ kümesini oluşturalım. $(\Lambda) \subseteq M^*$ olacak şekilde bir $M^* \in \text{Max}(R)$ olduğunu varsayalım. R bir S_{M^*} -indirgenmiş halka olduğundan $s_{M^*} x = 0$ olacak şekilde bir $s_{M^*} \notin M^*$ vardır. Burada $s_{M^*} \in \Lambda \subseteq (\Lambda) \subseteq M^*$ bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $(\Lambda) = R$ olur yani $1 \in (\Lambda)$ sağlanır. O halde her $1 \leq i \leq n$ için $r_i \in R$ olmak üzere $1 = r_1 s_{M_1} + r_2 s_{M_2} + \dots + r_n s_{M_n}$ olacak şekilde

$s_{M_1}, s_{M_2}, \dots, s_{M_n} \in \Lambda$ vardır. Eşitliğin her tarafını x ile çarparsak $x = r_1(s_{M_1}x) + r_2(s_{M_2}x) + \dots + r_n(s_{M_n}x)$ elde ederiz. Ayrıca her $1 \leq i \leq n$ için $s_{M_i}x = 0$ olduğu için $x = 0$ olur. Böylece R bir indirgenmiş halkadır.



3. SONUÇLAR

Bu tezde incelemelere ve bulgulara tezin ikinci bölümünde yer verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde değişmeli halkalarda yarı asal ideallerin genelleştirmesi olan S -yarı asal idealler, S -yarı asal ideallerin halka homomorfizması altındaki görüntüsü ve ters görüntüsü, kartezyen çarpım halkalarının S -yarı asal idealleri ve özellikleri, bir modülün trivial genişlemesinin S -yarı asal idealleri incelenmiştir. Buna ilaveten S -indirgenmiş halkalar tanımlanıp indirgenmiş halkalar karakterize edilmiştir.

Bu tezde elde edilen bulgulardan hareketle yeni genelleştirmeler yapılabilir. Örneğin, Sevim, Arabacı, Tekir, Koç (2019) da alt modüllerin bir genelleştirmesini elde etmişlerdir. Alt modüller, modül yapısında ideal gibi davranan birimlerdir. Buna benzer olarak farklı cebirsel yapılar üzerinde bu tarz genelleştirmeler elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Anderson, D. D., & Bataineh, M. (2008). Generalizations of prime ideals. *Communications in Algebra*, 36(2), 686-696.

Anderson, D. D., & Smith, E. (2003). Weakly prime ideals. *Houston J. Math*, 29(4), 831-840.

Atiyah, M. F., Macdonald, I. G. (1969). *Introduction to commutative algebra* (Vol. 2). Reading: Addison-Wesley.

Badawi, A. (2007). On 2-absorbing ideals of commutative rings. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 75(3), 417-429.

Badawi, A. (2007). On 2-absorbing ideals of commutative rings. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 75(3), 417-429.

Badawi, A., Tekir, U., & Yetkin, E. (2014). On 2-absorbing primary ideals in commutative rings. *Bull. Korean Math. Soc*, 51(4), 1163-1173.

Badawi, A., Tekir, U., & Yetkin, E. (2015). On weakly 2-absorbing primary ideals of commutative rings. *J. Korean Math. Soc*, 52(1), 97-111.

Beck, I. (1988). Coloring of commutative rings. *Journal of Algebra*, 116(1), 208-226.

Burton, D. M., (1970). *A First Course in Rings and Ideals*. Addison-Wesley

Çallıalp, F., & Tekir, Ü. (2009). *Değişmeli halkalar ve modüller*. Birsen Yayınevi.

- Dummit, D. S., Foote, R. M., (2004). Abstract Algebra. Willey
- Gilmer, R. W. (1972). Multiplicative ideal theory (Vol. 12). M. Dekker.
- Huckaba, J., (1988). Commutative Rings with Zero Divisors, Marcel Dekker, Newyork
- Kaplansky, I. (1970). Commutative rings. Allyn and Bacon.
- Kim, N. K., & Lee, Y. (2000). Armendariz rings and reduced rings. Journal of Algebra, 223(2), 477-488.
- Koc, S., Uregen, R. N., & Tekir, U. (2017). On 2-Absorbing Quasi Primary Submodules. Filomat, 31(10), 2943-2950.
- Koc, S., Tekir, U., & Ulucak, G. (2019). On Strongly Quasi Primary Ideals. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 56(3), 729-743.
- Northcott, D. G. (2008). Lessons on rings, modules and multiplicities. Cambridge University Press.
- Henicksen, M. (1977). Symosia math, Academic press, (Vol. 21), 401-409.
- Sevim, E. S., Arabaci, T., Tekir, ., & Koc, S. (2019). On S-prime submodules. Turkish Journal of Mathematics, 43(2), 1036-1046.
- Sevim, E. S., Koc, S. (2018). On n -Prime Ideals. University Politehnica Of Bucharest Scientific Bulletin-Series A-Applied Mathematics And Physics, 80(2), 179-190.

Sharp, R. Y. (2000) Steps in Commutative Algebra. (2nd ed.), Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Tekir, U., Koc, S., Oral, K. H. (2017). n -Ideals of commutative rings. Filomat, 31(10), 2933-2941.

Tekir, U., Koç, S., Oral, K. H., & Shum, K. P. (2016). On 2-absorbing quasi-primary ideals in commutative rings. Communications in Mathematics and Statistics, 4(1), 55-62.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Baran DÜZGÜN

Doğum Tarihi ve Yeri: 2 Mayıs 1993/Bilecik

Yabancı Dili: İngilizce

E-posta: brndzgn@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Lise: Eskişehir Gülbahar Anadolu Lisesi (2007-2011)

Lisans: Marmara Üniversitesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği (2011-2016)