T.C.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMEL EĞİTİM ANA BİLİM DALI

SINIF ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

İLKOKUL 4. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN KESİRLER KONUSUNDAKİ DÜŞÜNME YOLLARININ İNCELENMESİ VE NİCEL MUHAKEMELERİNİN GELİŞTİRİLMESİ

Dilara YILMAZ CAN

(Doktora Tezi)

İstanbul, 2024

T.C.

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMEL EĞİTİM ANA BİLİM DALI

SINIF ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

İLKOKUL 4. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN KESİRLER KONUSUNDAKİ DÜŞÜNME YOLLARININ İNCELENMESİ VE NİCEL MUHAKEMELERİNİN GELİŞTİRİLMESİ

INVESTIGATING 4TH GRADE PRIMARY SCHOOL STUDENTS' REASONING ON FRACTIONS AND IMPROVING THEIR QUANTITATIVE REASONING

Dilara YILMAZ CAN

(Doktora Tezi)

Danışmanlar

Doç.Dr. Yusuf KOÇ

Doç. Dr. Mahmut KERTİL

İstanbul, 2024

Tüm kullanım hakları

Marmara Üniversitesi

Eğitim Bilimleri Enstitüsü'ne aittir.

© 2024

ETİK BEYANI

Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak hazırladığım çalışmada;

- Belirttiğim tüm dokümanlar ile verileri akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,

- Çalışmamda yararlandığım eserlerin tamamına atıfta bulunduğumu ve kaynak gösterdiğimi,

- Elde ettiğim verilerde ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,

- Tezin tamamının bilimsel intihal tespit programıyla tarandığını ve hiçbir şekilde intihal içermediğini beyan ederim.

Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyanlara aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

24/10/2024

Dilara YILMAZ CAN

ONAY

Dilara YILMAZ CAN tarafından hazırlanan "**İlkokul 4. Sınıf Öğrencilerinin Kesirler Konusundaki Düşünme Yollarının İncelenmesi ve Nicel Muhakemelerinin Geliştirilmesi**" isimli araştırma 24.10.2024 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda jüri üyeleri tarafından başarılı bulunmuş ve doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Marmara Üniversitesi

Eğitim Bilimleri Enstitüsü

ÖNSÖZ

Doktora tez süreci hem akademik hem de kişisel anlamda beni geliştiren, hayatımın belki de en stresli ve aynı zamanda beni en çok geliştiren süreci olmuştur. Bu yol boyunca bana destek olan ve beni ileri taşıyan insanlara samimi duygularımla minnetlerimi dile getirmek istiyorum.

Bu tezi hazırlarken bana inanan, her ihtiyaç duyduğumda orada olduklarını bildiğim, derin bilgi birikimiyle destek olan çok değerli danışman hocalarım Doç. Dr. Yusuf KOÇ'a ve Doç. Dr. Mahmut KERTİL'e teşekkürlerimi sunarım. Tüm bu süreç boyunca görüş ve önerilere açık olduğunuz için, düşüncelerinizi ve dileklerinizi benimle açıkça paylaştığınız için ve ayrıca düşüncelerimi açıkça dile getirmekten çekinmediğim bir araştırma ortamı yarattığınız için, gerek öğrenciniz gerek dinleyici olarak katıldığım derslerinizde sizden öğrendiklerim için, verdiğiniz tüm emekler için çok çok teşekkür ediyorum. Tezimle ve kendimle ilgili her türlü yapıcı eleştirileri ve destekleri için hocalarım Prof. Dr. Mehmet İNAN'a ve tüm emeklerine ek olarak tez serüvenimin başında bana danışmanlık yapmayı kabul ettiği için Prof. Dr. Yücel KABAPINAR'a çok teşekkür ederim. Tez savunma sınavımda yer alarak kıymetli görüşlerini paylaşan jüri üyesi hocalarım Doç.Dr. Pınar GÜNER'e ve Dr. Öğr. Üyesi Gürsu AŞIK'a teşekkürlerimi sunarım.

Araştırmamın veri toplama aşamasında bir süreliğine de olsa kıymetli öğrencilerini güvenerek bana teslim eden sınıf öğretmenlerine çok teşekkür ediyorum. Bununla birlikte, tezimin öğretim deneyi sürecine katılan öğrencilere teşekkür ediyorum. Tüm veri toplama süreci boyunca öğrencilerin güler yüzleri, azimleri, öğrenme istekleri, samimiyetleri ve işbirlikleri sayesinde bulunduğum ortama yabancılık çekmeden dersleri istekle yürütebildiğim için bu isimsiz kahramanlara gönülden teşekkür ederim.

Mesleki gelişim kadar psikolojik dayanıklılık ve stres yönetimi gibi becerileri de gerektiren bu süreçte manevi destekleri ve motive edici tavırlarıyla yanımda olan yakın dostlarıma, kardeşime ve bana güvenen, hep inanan sevgili eşim Emir'e çok teşekkür ediyorum. Son olarak, beni bugünlere getiren ve hem anne hem baba görevini üstlenerek bizi yetiştirmek uğruna maddi ve manevi tüm dertleri sırtlayan biricik anneme sonsuz saygı ve sevgi ile…

Dilara

Ekim, 2024

ÖZET

Bu araştırmada ilkokul 4. sınıf öğrencilerinin kesirler konusundaki düşünme yollarının belirlenmesi ve nicel muhakemelerinin geliştirilmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda hazırlanan öğretim deneyleri aracılığıyla öğrencilerin kesirlerde bütün, birim kesir ve kesir büyüklüğü konularında düşünme yolları ve bu düşünme yollarının gelişimi incelenmiştir. Araştırma, öğretim deneyi metodu kullanılarak gerçekleştirilmiştir. İstanbul ve Kocaeli'de bulunan devlet okullarında öğrenim gören iki sınıfın katılımıyla iki uygulama şeklinde tamamlanmıştır. İlk uygulamada 24, ikinci uygulamanın yapıldığı sınıfta ise 32 öğrenci bulunmaktadır. Öğretim deneyleri tüm sınıfa uygulanmış ancak her iki uygulamada da üçer öğrencinin düşünme yolları detaylı olarak incelenmiştir. Veri toplama aracı olarak gözlem, görüşme ve etkinlik formları ile alan notları, araştırmacı, öğrenci ve öğretmen günlükleri kullanılmıştır. Uygulanan etkinlikler öğrencilerin nicel muhakemelerini desteklemeyi amaçlamış ve çoğunlukla araştırmacı tarafından geliştirilmiş veya benzer araştırmalardan uyarlayarak uygulanmıştır. Elde edilen veriler öncelikle süreç boyunca gerçekleştirilen sürekli analizler ve veri toplama süreci tamamlandıktan sonra yapılan geriye dönük analizler ile analiz edilmiştir. Araştırma sonucunda elde edilen birçok bulgu arasında öne çıkan sonuçlar şunlar olmuştur: Öğrenciler farklı kesir bağlamları arasında en fazla parça-bütün bağlamını kullanmışlardır. Araştırmada incelenen kesir kavramlarına dair öğrencilerin düşünme yolları farklı temsil türlerinin kullanımı, öğrenme varsayımına dayanan etkinlikler, matematiksel dil desteği, sınıf içi tartışmalar ve araştırmacının yönlendirici sorularının desteğiyle zamanla gelişmiştir. Öğrencilerin kesir büyüklüğü hakkındaki düşünme yolları özellikle alan ve sayı doğrusu temsilleriyle gelişmiş ancak bileşik ve tam sayılara geçildiğinde birçok öğrenci için bu durum değişmiştir. Öğrencilerin çoğunlukla toplamsal düşünme yolu kullandığı ve yüzeysel nicelleştirme yaptığı belirlenmiştir. Kullanılan müdahaleler arasında görsel temsil kullanımının öğrencilerin nicelikler üzerinde düşünmelerini destekleyen oldukça etkili bir araç olduğu ortaya çıkmıştır. Sonuç olarak, öğrencileri çokluklar üzerinde düşündürmeyi sağlayan uygun müdahalelerin olumlu sonuçlar ortaya çıkardığı görülmüştür. Elde edilen bu bulgular sonucunda eğitimcilerin öğrencileri nicelikler üzerinde düşünmeyi destekleyen öğretimler planlayıp uygulaması ve araştırmacıların öğrencilerin nasıl öğrendiğini ve süreç içerisinde değişen düşünme yollarını inceleyen araştırmalar yürütülmesi önerilmektedir.

Anahtar kelimeler: Kesirler, nicel muhakeme, temsiller, öğretim deneyi, ilkokul öğrencileri

ABSTRACT

In this study, it was aimed to determine the ways of thinking of 4th grade primary school students about fractions and to develop their quantitative reasoning. The concepts to develop students' ways of thinking is the whole in fractions, unit fractions and fractions magnitude. The research was conducted using the teaching experiment method. It was completed in two implementations with the participation of two classes studying in different public schools. There were 24 and 32 students in the first and second classes, respectively. The teaching experiments were applied to the whole class, but the ways of thinking of three students in each implementation were reported in detail. Observations, interviews, activity forms, field notes, researcher, student and teacher diaries were used as data collection tools. The data were analyzed primarily through ongoing analysis and retrospective analysis after the data collection process was completed. Among the many findings obtained, the prominent results were as follows: Students used the part-whole context the most among different fraction contexts. Students' ways of thinking about the fraction concepts examined in the study developed over time with the use of different types of representations, activities based on hypothetical learning, mathematical language support, classroom discussions, and the support of the researcher's guiding questions. Students' ways of thinking about fraction magnitude developed especially with area model and number line, but this changed for many students when they moved on to improper fractions. It was found that students mostly used additive reasoning and gross quantification while a few used multiplicative thinking and extensive quantification. The use of visual representations proved to be a highly effective tool to support students' thinking about quantities. As a result, it was seen that appropriate interventions that enable students to think about quantities yielded positive results. As a result of these findings, educators are recommended to plan and implement instruction that supports students' thinking about quantities, and researchers are recommended to conduct research that examines and develops how students learn and the ways of thinking that evolve in the process.

Keywords: Fractions, quantitative reasoning, representations, teaching experiment, primary students

İÇİNDEKİLER

ETİK BEYANI i
ONAY ii
ÖNSÖZ iii
ÖZET v
ABSTRACT vi
İÇİNDEKİLER.....vii
TABLOLAR LİSTESİ.....ix
ŞEKİLLER LİSTESİ x
BÖLÜM I: GİRİŞ
1.1. Problem Durumu 1
1.2. Araştırmanın Amacı 3
1.3. Araştırmanın Önemi 4
1.4. Araştırmanın Sınırlılıkları 6
1.5. Araştırmanın Varsayımları 7
1.6. Tanımlar ve Kısaltmalar Listesi 9
BÖLÜM II: KAVRAMSAL ÇERÇEVE
2.1. Kesirler 11
2.1.1. Kesirlerde Kavramsal ve İşlemsel Anlama.....11
2.1.2. Kesirlerin Anlamları.....13
2.1.3. Birim ve Birimleştirme.....18
2.1.4. Kesirlerde Bütün.....18
2.1.5. Kesirlerde Zihinsel Eylemler.....20
2.1.6. Kesirler ve Nicel Muhakeme 22
2.1.7. Kesir Büyüklüğü.....23
2.1.8. Bileşik Kesir.....24
2.1.9. Kesirlerde Sıralama ve Kesirleri Karşılaştırma.....26
2.1.10. Kesirler ve Temsiller.....27
2.2. Nicel Muhakeme.....29
2.2.1.Bilişsel Gelişim, Matematiksel Muhakeme ve Nicel Muhakeme.....29
2.2.2. Nicel Muhakeme ve Bileşenleri.....31
2.2.3.Yaygın Kullanılan Nicelleştirme Türleri.....34
2.2.4. Nicel İşlem ve Aritmetik İşlem.....36
2.2.5. Nicel Muhakemenin Önemi ve Gelişimi 39
2.2.6. Nicel Muhakeme ve Problem Çözme.....41
2.2.7. Nicel Muhakeme ve Tahmin 42
2.2.8. Nicel Muhakeme ve Temsiller.....43
2.3. Matematiksel Temsiller.....45
2.3.1. Temsillerin Özellikleri.....46
2.3.2. Matematiksel Temsil Oluşturmada Zihinsel Süreçler.....48
2.3.3.Temsil Türleri 52
2.4. İlgili Araştırmalar.....58
2.4.1. Kesirlerle İlgili Yurt İçinde Yapılan Araştırmalar.....58
2.4.2. Kesirlerle İlgili Yurt Dışında Yapılan Araştırmalar.....61
2.4.3. Nicel Muhakemeyle İlgili Yurt içinde Yapılan Araştırmalar 65
2.4.4. Nicel Muhakemeyle İlgili Yurt Dışında Yapılan Araştırmalar 68
BÖLÜM III: YÖNTEM
3.1. Araştırmanın Modeli 73
3.1.1. Öğretim Deneyi Süreci.....75

3.1.2. Öğretim Deneyi Gerekçesi....76
3.2. Katılımcılar….....77
3.3. Veri Toplama Araçları 81
3.4. Araştırma Süreci....89
3.4.1. Keşfedici Öğretim....90
3.4.2. Öğretim Bölümlerinin Oluşturulması....91
3.4.3. Araştırmada Uygulanan Etkinlikler....94
3.4.4.Öğretim Bölümlerinin Uygulanması....96
3.5. Verilerin Analizi....98
3.5.1.Sürekli (Ongoing) Analizler....99
3.5.2. Geriye Dönük (Retrospective) Analiz....101
3.6. Araştırmanın Geçerlik ve Güvenilirliği....103
3.7. Araştırmacının Rolü....105
BÖLÜM IV: BULGULAR
4.1.Öğrencilerin Kesirlerde "Bütün" Kavramına Dair Düşünme Yolları Değişimi…107
4.1.1. Ön Değerlendirme....108
4.1.2. Öğretim Bölümü 1: Kurabiye Paylaşım Etkinliği....113
4.1.3. Öğretim Bölümü 2: Değişen Bütünler Etkinliği....118
4.1.4. Öğretim Bölümü 3: Dijital ve Somut Kesir Çubukları Etkinliği....121
4.1.5.Öğretim Bölümü 4: Pasta Paylaşım Etkinliği....126
4.1.6.Öğretim Bölümü 5: Bütüne En Yakın Kesri Bulma Etkinliği....130
4.1.7.Öğretim Bölümü 6: Bir Bütünden Büyük Kesirleri Modelleme Etkinliği....132
4.1.8.Öğretim Bölümü 7: Bir Bütünden Büyük Kesirleri Sayı Doğrusunda Gösterme Etkinliği....134
4.1.9.Öğretim Bölümü 8: Ters Kesirler Etkinliği……..……..136
4.2.Öğrencilerin Bir Bütünden Küçük Kesirlerin Büyüklüğüne Dair Düşünme Yolları ve Değişimi....142
4.2.1. Ön Değerlendirme....143
4.2.2. Öğretim Bölümü 1: Eş Olmayan Parçalar Etkinliği....147
4.2.3. Öğretim Bölümü 2: Kesir Çubukları Etkinliği....149
4.2.4. Öğretim Bölümü 3: Birim Kesri Sayı Doğrusunda Gösterme Etkinliği....152
4.2.5. Öğretim Bölümü 4: Birim ve Basit Kesirleri Sayı Doğrusunda Gösterme....154
4.2.6. Öğretim Bölümü 5: Doğal Sayıları Sayı Doğrusunda Gösterme Etkinliği....156
4.3. Öğrencilerin Bir Bütünden Büyük Kesirlere Dair Düşünme Yolları....162
4.3.1. Öğretim Bölümü 1: Bileşik Kesir Modelleme Etkinliği....164
4.3.2. Öğretim Bölümü 2: Bir Bütünden Büyük Kesirleri Modelleme Etkinliği....165
4.3.3. Öğretim Bölümü 3: Bir Bütünden Büyük Kesirleri Sayı Doğrusunda Gösterme Etkinliği....171
4.3.4. Öğretim Bölümü 4: Dijital Sayı Doğrusunda Bir Bütünden Büyük Kesirleri Belirtme Etkinliği....174
4.3.5. Öğretim Bölümü 5: Tam Sayılı Kesri Modelleme Etkinliği....177
4.3.6.Öğretim Bölümü 6: Ters kesirleri Modelleme Etkinliği....178
4.4.Öğrencilerin Birim Kesirleri Karşılaştırma Sürecindeki Düşünme Yolları....182
4.4.1.Öğretim Bölümü 1: Kesir Çubukları Etkinliği....184
4.4.2.Öğretim Bölümü 2: Bütüne En Yakın Kesri Bulma Etkinliği....186
4.4.3. Öğretim Bölümü 3: Birim Kesirleri Karşılaştırma Etkinliği....188
4.5. Öğrencilerin Basit, Bileşik ve Tam Sayılı Kesirleri Karşılaştırma Sürecindeki Düşünme Yolları ve Değişimi....193
4.5.1.Öğretim Bölümü 1: Basit Kesirleri Karşılaştırma Etkinliği....193
4.5.2.Öğretim Bölümü 2: Farklı Kesir Türlerini Karşılaştırma Etkinliği....195

4.5.3.Öğretim Bölümü 3: Problemdeki Farklı Kesir Türlerini Karşılaştırma.....198

BÖLÜM V: SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER
5.1. Sonuçlar ve Tartışma.....205
5.1.1. Genel Sonuçlar ve Tartışma.....205
5.1.2.Bütün Kavramına Dair Sonuç ve Tartışma.....216
5.1.3.Bir Bütünden Küçük Kesir Büyüklüğüne Dair Sonuç ve Tartışma.....218
5.1.4.Bir Bütünden Büyük Kesir Büyüklüğüne Dair Sonuç ve Tartışma.....219
5.1.5.Kesirlerde Karşılaştırmaya Dair Sonuç ve Tartışma.....221
5.1.6.Sonuçlara bütüncül bakış.....222
5.2. Öneriler.....223
5.2.1.Araştırmacılara Öneriler.....223
5.2.2.Eğitimcilere Öneriler.....225
Kaynakça.....228
EKLER.....264

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 1.5. Tanımlar.....9
Tablo 3.2.1. Katılımcılara Ait Özellikler.....78
Tablo 3.2.2. Hedef Gruptaki Öğrenciler.....79
Tablo 3.3. Araştırmada Kullanılan Veri Toplama Araçları.....81
Tablo 3.4.2. Varsayımsal Öğrenmeler, Kazanımlar ve Öğretim Bölümleri.....92
Tablo 3.4.3. Tasarım Prensipleri ve Görevler.....93
Tablo 3.5.2. Analiz Örneği.....101
Tablo 3.5.3. Nicel Muhakeme Değerlendirme Ölçütleri.....102
Tablo 4.1.1. Bütün Teması Ön Değerlendirmede Ortaya Çıkan Düşünme Yolları.....108
Tablo 4.2.1.1. Öğrencilerin Parça-Bütün Bağlamı Kapsamında Basit Kesirleri Düşünme Yolları.....143
Tablo 4.2.1.2. Öğrencilerin Ölçme Bağlamı Kapsamında Birim Kesirleri Düşünme Yolları.....145
Tablo 4.2.6. Yavuz'un Birim Kesre Dair Gelişen Düşünme Yolları ve Müdahaleler Yolları.....162
Tablo 4.3.2. Öğrencilerin Parça-Bütün Bağlamında Tam Sayılı Kesirlere Dair Düşünme Yolları.....166
Tablo 4.3.3.Öğrencilerin Ölçme Bağlamında Bir Bütünden Büyük Kesirlere Dair Düşünme Yolları.....171
Tablo 4.3.6.İlknur'un Bir Bütünden Büyük Kesirlere Dair Gelişen Düşünme Yolları ve Müdahaleler 181
Tablo 4.4.3. Yavuz'un Birim Kesirleri Karşılaştırmaya Dair Gelişen Düşünme Yolları ve Müdahaleler.....191
Tablo 4.5.3. Beren'in Birim Olmayan Kesirleri Karşılaştırmaya Dair Gelişen Düşünme Yolları ve Müdahaleler.....200

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1.5. Eş Zamanlı Parçalama Örneği.....20
Şekil 2.1.6. Kesirlerde Dağıtma Örneği.....21
Şekil 2.2.3. Nicelleştirme Türleri.....37
Şekil 3.1.1. Öğretim Deneyi Süreci.....75
Şekil 3.2. Sınıf Düzeni ve Görüşme Ortamı.....80
Şekil 3.3.3.1. Derinlemesine Görüşme Yoluyla Bilişsel Yapıyı Belirleme Modeli.....85
Şekil 3.4. Araştırma Süreci.....90
Şekil 4.1.1.1. Bütün Teması Ön Değerlendirme Etkinliği.....108
Şekil 4.1.1.2. Buğra'nın Ön Değerlendirme Etkinliği 2'ye Verdiği Yanıt.....112
Şekil 4.1.2. Beren'in Kurabiye Paylaşımı Problemine Verdiği Yanıt.....115
Şekil 4.1.3. Beren'in Değişen Bütünler Etkinliğine Yanıtı.....120
Şekil 4.1.4. Beren'in Birim Kesirleri Modellemesi.....125
Şekil 4.1.5. Beren'in Pasta Paylaşım Etkinliğine Yanıtı.....127
Şekil 4.1.6. Beren'in Bütüne En Yakın Kesri Bulma Etkinliğine Yanıtı.....131
Şekil 4.1.7. Beren'in Tam Sayılı Kesir Modellemesi.....133
Şekil 4.1.8.1. Beren'in Tam Sayılı Kesri Sayı Doğrusundaki Gösterimi.....134
Şekil 4.1.8.2. Beren'in Ters Kesirleri Sayı Doğrularında Gösterimi.....136
Şekil 4.1.8.3. Buğra'nın Yürünen Yol Etkinliğine Yanıtı.....138
Şekil 4.1.8.4. Azra'nın Yürünen Yol Etkinliğine Yanıtı.....138
Şekil 4.2.2. Yavuz'un Eş Olmayan Parçalar Etkinliğine Yanıtı.....148
Şekil 4.2.3. Somut Kesir Çubuklarıyla Çalışma Etkinliğinden Örnek.....150

Şekil 4.2.4.Yavuz'un Birim Kesri Sayı Doğrusunda Gösterme Etkinliğine Yanıtı....153
Şekil 4.2.6. Yavuz'un Sayı Doğrusunda Gösterme Etkinliğine Yanıtı 158
Şekil 4.3.1. İlknur'un Bileşik Kesir Modellemesi.....165
Şekil 4.3.2. Buğra'nın Pasta Dilimleri Etkinliğine Yanıtı.....169
Şekil 4.3.5. İlknur'un Tam Sayılı Kesir Modellemesi.....178
Şekil 4.3.6.1. İlknur'un Ters Kesir Modellemeleri.....179
Şekil 4.3.6.2. Beren'in Yanıtı.....182
Şekil 4.3.6.3. Yavuz'un Yanıtı.....182
Şekil 4.4.2.Yavuz'un Bütüne En Yakın Kesri Bulma Etkinliğine Yanıtı.....187
Şekil 4.4.3.1.Yavuz'un Birim Kesir Karşılaştırma Problemine Yanıtı.....189
Şekil 4.4.3.2. Azra'nın Birim Kesir Karşılaştırma Problemine Yanıtı.....192
Şekil 4.5.1. Beren'in Basit Kesirleri Karşılaştırma Yanıtı.....194
Şekil 4.5.2.Beren'in Farklı Kesir Türlerini Karşılaştırma Yanıtı.....196
Şekil 4.5.3.1. Beren'in Kesir Karşılaştırma Problemine Yanıtı.....198
Şekil 4.5.3.2. Azra'nın Tam Sayılı Kesirleri Karşılaştırma Etkinliği Yanıtı.....202

BÖLÜM I: GİRİŞ

Bu bölümde nicel muhakeme ve kesirler konusunun teorik çerçevesi, matematiğin temelini oluşturan muhakeme etme ve problem çözme becerilerinin önemi, araştırmanın amacı, araştırmanın önemi, araştırmanın sınırlılıkları, araştırmanın sayıltıları ve ilgili araştırmalara yönelik açıklamalar yer almaktadır.

1.1. Problem Durumu

Matematik eğitimcileri yapılandırmacı öğrenme teorisine dayanarak çocukların bilişsel süreçlerini betimlemiş ve matematiksel beceriler edinmelerini sağlayan kavram ve fikirlerin nasıl geliştiğini incelemişlerdir. Bu sayede, birçok araştırma çocukların nasıl öğrendiğini açıklamış ve açıklamaya da devam etmektedir. Buna uygun olarak bu araştırma, öğrencilerin nasıl öğrendiğini yapılandırmacılık kuramı temelinde açıklamayı amaç edinmiştir. Araştırmada kesirler konusu, 4. sınıf öğrencilerinin nicel muhakemelerinin gelişmesine olanak tanıyan tasarımlar aracılığıyla öğretilmiş ve bu süreçte öğrencilerin var olan ve değişen düşünme yolları raporlanmıştır.

Öğrencilere aritmetik kuralları ezberletmek ve matematiği yaşadığımız dünyadan ayrı bir alan gibi göstermek yerine matematiği günlük yaşamın bir yansıması olarak öğretmek, muhakeme eden ve problem çözebilen bireyler olarak yetiştirmek oldukça önemlidir. Muhakeme etme, matematiksel fikirlerin geliştirilmesi ve yeni matematiksel bilgilerin yapılandırılması için temel becerilerden biridir (Ball & Bass, 2003; Dündar & Yaman, 2014). Muhakeme; bir olay, problem veya durumu anlamada, ilişkileri fark etmede ve sonuç çıkarmada kullanılan mantıklı düşünme becerisidir (Altun, 2013; Umay, 2003). Matematiksel muhakeme, söz konusu durumları ve problemleri mantık süzgecinden geçirerek belli birtakım ölçütlerle kıyaslayarak ve gerekçelendirerek bireysel fikirler sunabilme imkanı olarak görülebilir. Hem ulusal hem uluslararası alanyazında yer alan araştırmalarda matematik öğretiminin en önemli amaçlarından biri olarak, muhakeme becerisinin öğrencilere kazandırılması ve matematiği anlamlı kılma üzerine vurgu yapılmaktadır (MEB, 2018; 2024; NCTM, 2000).

Öğrenciler bir problemdeki nicelikler üzerinde düşünmeyip yalnızca sayısal değerlere yoğunlaştığında, matematiksel kavramları anlama ve problem çözmede yeterince başarılı olamazlar (Thompson & Carlson, 2017); istenilen ya da bilinmeyen durumlar hakkında yorum yapma becerileri güçleşir veya hangi işlemi yapacağını bilemezler (Thompson,

1988). Bu gibi durumlarda öğretmenlerin verilen problemdeki nicelikler arasında nasıl bir ilişki olduğunu vurgulaması iyi bir çözüm yolu olarak görülmektedir (Nunes & Bryant, 2021). Buna karşın matematik öğrenirken muhakeme eden ve sayılardan önce nicelikler üzerinde akıl yürüten kişiler, matematiği gereksiz işlemler ve kurallar bütünü olarak görmeyip kavramsal bir yapı içinde öğrenirler (Thompson, 1994; Umay & Kaf, 2005). Bu sebeple yapılandırmacı yaklaşım temelinde, öğrencilerin muhakeme etmelerine olanak veren, ilişki kurabilen ve problem çözebilen bireyler olarak yetiştirmek gerekmektedir.

Nicel muhakeme, 20. yüzyılın başlarından itibaren araştırmacıların ilgisini çeken konulardan biri olup nicelikler üzerinde akıl yürütmeyi, nicelikler arasındaki ilişkileri ve bunlarla ilgili çıkarımlar yapmayı içermektedir (Dwyer, Gallagher, Levin & Morley, 2003; Thompson, 1994). Bir muhakeme becerisi olan nicel muhakeme, matematiksel bir durumun nicelikler ve nicel ilişkilere dayanarak analiz edilmesini (Thompson, 1993) ve kişinin matematiksel ilişkiler kurarken gerçekleştirdiği düşünme biçimini ifade eder (Weber, Ellis, Kulow & Özgür, 2014). Öğrencilerin nicelikleri, sayıları ve bunların nasıl temsil edildiğini anlamaları oldukça önemlidir ancak matematik öğrenmek için yeterli değildir çünkü matematik bir ilişkiler bilimidir (Thompson, 1994). Nicel muhakemedeki belirgin özelliklerden biri ise sayıların ikincil öneme sahip olup nicelikler arasındaki ilişkilerin vurgulanmasıdır. Böylece öğrencilerin sadece sayısal değerlere odaklanmasının önüne geçilerek matematiği kavramsal olarak anlayıp kullanabilmenin önü açılabilir. Thompson (2011) nicel muhakemeyi bir matematik dersi konusu olarak görmeyip bunun gerçek hayatın bir parçası olması gerektiğini savunmuş; öğrencilerin matematik ile uğraşırken onlara faydalı olmasını sağlamak için öğretimsel stratejiler geliştirmeyi ve nicelikler arası ilişkilendirmeyi ciddiye almak gerektiğini vurgulamıştır.

Nicelik kavramına yapılan vurgu yalnızca bazı akademik çalışmalarda değil, Matematik dersi öğretim programında ve uluslararası sınavlarda da kendisine yer bulmuştur. Örneğin PISA sınavlarında yer alan problemlerde sıklıkla vurgulanan "nicelik, niceliği anlama, nicelikleri ilişkilendirme" kavramlarının da nicel muhakemeyi işaret ettiği net bir biçimde görülmektedir (OECD, 2018). Bununla birlikte, farklı yaş düzeylerinden öğrencilerle gerçekleştirilen araştırmalarda çeşitli muhakeme türleri ile nicel muhakemenin güçlü bir ilişkisi olduğu vurgulanmıştır (Nunes, Bryant, Evans & Barros, 2015; Kruse & Drews, 2013; Koedinger & Nathan, 2004; Ellis, 2007; Thompson, 1994; Akın, 2016; Özaltun Çelik & Bukova Güzel, 2019). Hackenberg (2010), nicel muhakeme ile çarpımsal akıl yürütmeyi;

Ellis (2007), Hackenberg (2006), Kabael ve Akın (2016), Koedinger ve Nathan (2009), Smith III ve Thompson (2007) ve Thompson (1988) cebirsel düşünmeyi; Carlson ve arkadaşları, (2003) problem çözmeyi; Paoletti ve Moore (2017) ise kovaryasyonel düşünmeyi ilişkilendirmiştir. Buna ek olarak, Moore vd. (2009) ve Ellis (2007) öğrencilerin belirli matematiksel bağlamlardaki nicel akıl yürütmelerini daha geniş uygulama alanlarına nasıl genelleyebileceklerine odaklanan araştırmalar yürütmüştür. Karagöz Akar, Watanabe ve Turan (2022), matematik ders kitaplarını öğrencilerin nicel akıl yürütmelerini destekleme ölçütlerine göre incelemişlerdir. Alanyazındaki bu araştırma sonuçlarından yola çıkarak edinilen bilgiler öğrencilerin matematiksel düşünme ve kavramlar ile ilgili kazanımlarında nicel muhakemenin rolünü ve önemini vurgulamaktadır.

Matematik dersinde kesirler konusu birinci sınıftan itibaren her sınıf düzeyinde farklı kavram ve konular temelinde öğretilmektedir ancak öğrenciler için kesir kavramlarını öğrenmek ve doğru bir şekilde temsil etmek oldukça zordur (Lortie-Forgues, Tian & Siegler, 2015; Siegler, Thompson & Schneider, 2011). Bununla birlikte, öğrencilerin ilkokulda güçlü bir kesir bilgisine sahip olması daha sonraki düzeylerde özellikle cebir, fonksiyonlar, oran-orantı, ondalık sayılar ve rasyonel sayılar konularındaki başarılarını yordamaktadır (Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012; Hecht & Vagi, 2010; Işık & Kar, 2012; Lamon, 2007; Ross & Bruce, 2009; Siegler vd., 2012). Öğrencilerin kesirler konusunda sıklıkla yaptığı hataların temelinde kesirleri tek bir nicelik olarak değil, iki farklı doğal sayı olarak görmeleridir (Ni & Zhou, 2005; Siegler & Pyke, 2013; Smith, 2002; Yeo & Webel, 2022). Bu sebeple öğrencilerin kesirleri birer nicelik olarak öğrenmeleri gerekmektedir.

Çocukların kesir kavramlarını öğrenmelerini desteklemenin yaygın bir yolu, öğretim ve problem çözme etkinlikleri sırasında doğru ve uygun görsel temsiller kullanmaktır (Siegler vd., 2010; Sidney, Thompson & Rivera, 2019). Verschaffel ve De Corte (1993) problem çözme konusunda yürüttükleri araştırmada birçok öğrencinin problemdeki nicelikleri ilişkilendirirken uygun olmayan temsil kullanması sebebiyle hata yaptığını ifade etmişlerdir. Bununla birlikte Weber ve arkadaşları (2014), nicelikleri kavramsallaştırmaya dayanan modelleme etkinliklerinin öğrencilerin matematiksel fikirleri ve ilişkileri keşfetmede sürecini destekleyen güçlü bir yol olduğunu belirtmişlerdir. Bu bilgilere dayanarak bu araştırmada kesirlerde yaygın olarak kullanılan alan, uzunluk ve sayı doğrusu modelleri (Lamon, 2008; Petit, Laird & Marsden, 2010) öğrencilerin kesirler konusundaki nicel muhakemelerini geliştiren kolaylaştırıcı bir mekanizma olarak kullanılmıştır.

1.2. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmada ilkokul 4. sınıf öğrencilerinin kesirler konusundaki düşünme yollarının temsiller aracılığıyla belirlenmesi ve nicel muhakeme becerilerinin geliştirilmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda hazırlanan öğretim deneyleri sonunda şu sorulara yanıt aranmıştır:

1) 4. sınıf öğrencilerinin kesirlerde bütün, birim kesir ve kesir büyüklüğü konularında düşünme yolları nelerdir?

2) 4. sınıf öğrencilerinin kesirler konusundaki düşünme yolları nicel muhakemeyi destekleyici bir öğretimle nasıl gelişir?

1.3. Araştırmanın Önemi

Okul öncesi dönemden itibaren çocuklar nicel ilişkiler hakkında muhakeme becerilerine sahiptir (Tian & Huang, 2009) ve çocuklarda gelişmiş nicel muhakeme becerisi sonraki yıllarda akademik başarılarına da katkıda bulunmaktadır (Nunes vd., 2015). Korb (2007), erken çocukluk döneminde geliştirilen nicel muhakeme becerisi ile çocukların sonraki başarıları arasında ilişki olduğunu belirtmiştir. Bu nedenle çocukların etkili bir şekilde düşünme becerileri kazandıkları ilkokul döneminden başlayarak nicel muhakeme becerilerinin geliştirilmesi ve desteklenmesi oldukça önemlidir. Nicel muhakeme yapan bir öğrenci nicelikleri, nicelikler arası ilişkileri ve niceliklerin birimlerini göz önüne alarak sürekli niceliklerin anlamını oluşturmak için uğraşır, bütün bunlara ek olarak niceliklerle ilgili hesaplamalar yapar, niceliklerin çoklu imajlarına sahip olur ve onlar arasında esnek bir şekilde dönüşüm yapabilir (Harel, 2013). Dolayısıyla bu araştırmayla, nicel muhakemenin okuldaki eğitimin ilk aşaması olan ilkokul için öneminin anlaşılması ve kesirler konusunda etkili bir öğrenme teorisi olduğunun açıklanmasına ihtiyaç duyulmuştur.

Kesirler konusunda yoğun olarak öğrenci hatalarını vurgulayan çeşitli araştırmalar mevcuttur (Altıparmak & Özüdoğru, 2015; Işık & Kar 2012; Mitchell & Horne, 2008; Pesen, 2008). Öğrencilerin konu ve kavramlar ile ilgili yaşadıkları zorlukları tespit etmek önemlidir ve hatta iyi bir başlangıç noktası olabilir ancak sorunun sadece ne olduğunu bilmek temel sorunları giderme noktasında yeterli değildir. Bu sebeple kesirler konusunda öğrencilerin düşünme yollarını araştıran ve nicel muhakemelerini geliştiren müdahale araştırmalarına daha fazla ihtiyaç vardır. Bu araştırmanın ülkemizde kesirler ve nicel muhakeme alanında

müdahale içeren araştırmalar içinde bir ilk olacağı ve dolayısıyla yeni bir bakış açısı getireceği beklenmektedir. Buna ek olarak bu araştırma daha az sayıda katılımcıdan söz konusu durum/kavram hakkında çok sayıda ayrıntılı bilgi üretmesi (Patton, 2002) sebebiyle ilkokul matematik eğitimi alanına katkı sağlama potansiyeline sahiptir.

Nicel muhakemenin kesirleri anlamayı desteklediği araştırmacılar tarafından ortaya konulmuş olmasına rağmen (Barros Baertl, 2020; Nunes, Bryant, Pretzlik & Hurry, 2006) ülkemizde ilkokul öğrencilerinin kesirler konusunda nicel muhakeme becerilerinin gelişimlerini konu alan oldukça sınırlı araştırmalar olduğu görülmüştür. Uluslararası alanyazında, kesirlerde sıralama ve karşılaştırma (Barros Baertl, 2020; Crawford, Huscroft-D'Angelo, Quebec Fuentes & Higgins, 2018; Siegler, Thompson & Schneider, 2011), kesirlerde işlemler (Nunes & Bryant, 2009; Syarifuddin, Nugroho & Mutmainah 2020; Thompson & Saldanha 2003), kesirlerde parça-bütün, ölçme ve uzunluk anlamları (Barros Baertl, 2020; McMullen, Hannula-Sormunen, Minna & Lehtinen, 2014; Yeo & Webel, 2022) gibi konuların nicel muhakeme ile birlikte incelendiği araştırmalar mevcuttur. Bu çalışmalar, öğrencilerin kesirlerle ilgili yaşadığı birtakım engellerin doğası hakkında değerli bilgiler sağlasa da öğrencilerin kesir kavram ve işlemlerini etkin biçimde algılayabilmek için inşa edebilecekleri yollarla ilgili sorunları göz ardı etmiş veya bir müdahale araştırması olarak ortaya koymamıştır. Bu sebeple ilkokul düzeyinde kesir kavramlarını nicel muhakeme ile geliştirmeyi hedefleyen bir tasarım araştırmasının yapılması gerekli görülmüştür. Bu araştırmada, ilkokul öğrencilerinin kesirler konusunda nicel muhakemelerini gelişimsel bir bakış açısıyla ele alınması araştırmanın özgün yönünü ortaya koymaktadır. Bununla birlikte nicel muhakemenin ilkokul düzeyi kesirler konusunun içeriğini teorik bir bakış açısıyla geliştirebilme potansiyeli olması ve çeşitli müdahaleler ile kesirlerin öğretiminde etkili bir düşünme becerisi olabilmesi sebepleriyle diğer araştırmacılara örnek teşkil edeceği düşünülmektedir.

Bu araştırmaya benzer olarak Crawford ve arkadaşları (2019) 5. sınıf öğrencilerinin kesirleri karşılaştırma konusundaki düşünme yollarını nicel muhakeme teorisine dayanarak açıklamış ve eğitimciler için bir değerlendirme aracı geliştirmiştir. Serrazina ve Rodrigues (2018), 2. sınıf öğrencilerinin toplamsal nicel akıl yürütmelerinde kavramsal bilginin geliştirilmesinde temsillerin rolünü deneysel bir araştırma olarak tartışmıştır. Barros Baertl (2020) ise doktora tezinde ilkokul 4. sınıf öğrencilerinin kesirler konusundaki aritmetik ve nicel muhakemelerini incelemiş, nicel akıl yürütme ve aritmetiğin farklı matematiksel

beceriler olduğunu ve nicel muhakemenin daha güçlü bir yordayıcı olduğunu ortaya koymuştur. Bu araştırmalar, kesirlerde nicel muhakemeyi betimsel bir yaklaşımla ele alma ve yalnızca belirli kesir kavramlarını inceleme bakımından bir öğretim deneyi araştırması olan bu çalışmadan farklılaşmaktadır. Bu araştırmada ise ilkokul 4. sınıf öğrencilerinin nicel muhakeme yaparak kesir kavramlarını öğrenmeleri hedeflenmiş ve bu süreç araştırmacı tarafından tasarlanmış görevlerle bir öğretim deneyi olarak yürütülmüştür. Böylece öğrencilerin kesirler konusunda yer alan çeşitli kavramların gelişimine dair düşünme yollarının modellenmesi ve nicel muhakeme becerilerinin geliştirilmesi hedeflenmiştir.

Araştırmada amaç, öğrencilerin kesir kavramlarına ait zihinsel süreçlerini açığa çıkarmak olduğundan bir tasarım tabanlı araştırma olan öğretim deneyi yönteminin uygun olduğu düşünülmüştür (English, 2003). Öğretim deneyi çalışmalarında araştırmacı ya da öğretmen çeşitli müdahalelerde bulunur, geliştirdiği tasarımları doğal sınıf ortamında uygular ve öğrencilerin bilişsel, duyuşsal ve kavramsal gelişmenin nelerden etkilendiğini ve bu gelişmelerin nelerin şekillendirdiğini derinlemesine inceler ve sonunda bir model ortaya koyar (Steffe & Thompson, 2000). Bu sürecin yürütülmesi esnek bir öğrenme ortamında öğrencilerin gelişimini gözeten detaylı araştırma planlamasıyla gerçekleşebilir. Bu araştırma süreci boyunca öğrencilerin kesirler konusundaki kavramların gelişmesindeki zihinsel süreçlerini ve bu süreçteki deneyimlerini yorumlamak bir öğretim deneyi çalışması olarak yürütülen bu araştırmayı değerli kılmaktadır. Buna ek olarak araştırmanın temelini ve öğretim tasarımlarının alt yapısını matematik eğitimde güçlü bir teori olan nicel muhakeme teorisine dayandırılması ve bir tasarım araştırması olan öğretim deneyi metoduna uygun yürütülmesi bu araştırmayı diğer araştırmalardan ayırmaktadır. Bu çalışma şu açılardan hem pratik hem de teorik öneme sahiptir: Pratik önemi, kesirlerin öğretilmesini olumlu olarak etkileyebilecek ve öğrencilerin kesir büyüklüklerini nicelleştirme bakımından bilişsel gelişimine katkıda bulunabilecek olmasıdır. Teorik katkısı ise, etkili tasarımlar ile öğrencilerin kesirleri öğrenmesinde nicel muhakemenin oynadığı rolü netleştirebilmesidir.

1.4. Araştırmanın Sınırlılıkları

Araştırmada elde edilen veriler, farklı bölgelerde yer alan, farklı başarı düzeyine sahip ve farklı sosyo-ekonomik düzeyde öğrencilerden oluşan iki farklı okuldaki katılımcıların yanıtları ile sınırlıdır.

Kesirler konusu ünitelendirilmiş yıllık plana göre ocak-şubat aylarında işlendiğinden ilk uygulamanın aralık; ikinci uygulamanın da bahar döneminin başlamasıyla birlikte ocak ayında yürütülmesi planlanmıştır. Ancak 6 Şubat 2023 tarihinde yaşanan deprem felaketi nedeniyle ülke çapında okullarda eğitime iki hafta ara verilmesi sebebiyle ikinci uygulama şubat ayında yürütülmüştür. Dolayısıyla planlanmayan bir şekilde iki uygulama arasında bir ay kadar bir fark oluşmuştur.

Araştırmada birinci uygulama güz dönemi sonunda üç haftada tamamlanırken ikinci uygulama beş hafta sürmüştür. Güz döneminde ara tatilden hemen önce ilk uygulamaların yapılması araştırmacıya daha kısıtlı bir zaman dilimi bıraktığından bu durum araştırmanın bir sınırlılığını oluşturmaktadır.

Araştırmada kullanılan öğretim deneyi metodunda araştırmacının rolü kapsamında da sınırlılık mevcuttur çünkü bu araştırmada araştırmacı aynı zamanda öğretmen rolünü üstlenmiştir. Araştırmacının uygulama sürecine ek olarak sınıf yönetimi konusunda da çeşitli organizasyonları gerçekleştirmesini zorunlu kıldığından bu araştırmanın bir sınırlılığı olarak görülmektedir.

1.5. Araştırma Varsayımları

1. Öğrenciler süreç boyunca kendilerine verilen görevleri istekli ve samimi şekilde yerine getirmiştir.

2. Araştırmada kullanılan veri toplama araçları, araştırma kapsamındaki kavramların incelenmesi için yeterlidir.

3. Araştırmaya katılan öğrencilerin tümü birbirlerine yakın gelişim dönemlerindedir.

4. Öğretim uygulamaları ve derinlemesine görüşmelerde ortaya çıkan kaygı, dikkatsizlik, fiziksel ortamdan kaynaklı gürültü ve rahatsızlık gibi beklenmeyen durumlar araştırma sürecini olumsuz olarak etkileyecek biçimde yaşanmamıştır.

5. Öğrenciler görüşme süresince rahat davranmışlar ve yabancılık çekmeden bildiklerinin hepsini açıklamışlardır.

1.6. Tanımlar

Tablo 1.5. Tanımlar

Kavramlar		Tanımlar
Türkçe	**İngilizce**	
Nicel muhakeme	Quantitative Reasoning	Nicelikler ve nicelikler arası ilişkiler hakkında düşünmeyi belirten muhakeme.
Öğretim Deneyi	Teaching Experiment	Matematiksel fikirlerin nasıl oluştuğunu anlamayı sağlayan, varsayımlar öğrenmelere dayalı ve döngüsel tasarım temelli araştırma türü.
Tahmini Öğrenme Yörüngesi	Hypothetical Learning Trajectory	Eğitimcilerin, etkili metodlarla öğrencilerin öğrenmesinin ilerlemesini araştırmak için oluşturdukları varsayıma dayalı yol haritaları
Kesir Büyüklüğü	Fraction Magnitude	Kesirlerin temsil ettiği çoklukların büyüklüğünü tahmin etme, temsil etme ve karşılaştırma yeteneği
Kapsamlı Nicelleştirme	Extensive Quantification	İki nicelik arasındaki ilişkinin çarpımsal olarak ve birim temel alınarak kavranması
Yüzeysel (Kabaca) Nicelleştirme	Gross Quantification	İki nicelik arasındaki ilişkinin algısal ve deneyimsel ölçütlere göre değerlendirilmesi
Toplamsal Akıl Yürütme/Düşünme	Additive Reasoning	Toplama ve çıkarma arasındaki ilişkiyi anlamaya dayanan düşünme yolu.
Çarpımsal Akıl Yürütme/Düşünme	Multiplicative Reasoning	Kesir, oran, orantı ve yüzde gibi çarpımsal ilişkileri yorumlamaya dayanan düşünme yolu
Devam Eden/Sürekli Analiz	Ongoing Analysis	Öğretim deneyi araştırmalarında veri toplama süreci ile birlikte verilerin yorumlanmasını ve analizini içeren analiz türü
Geriye Dönük Analiz	Retrospective Analysis	Öğretim deneyi araştırmalarında veri toplama süreci sonunda tüm verileri en baştan değerlendirmeyi belirten analiz türü
Düşünme Yolu	Thinking of Way	Problem çözme sürecinde kullanılan stratejiler
Zihinsel imge	Mental Image	Kişinin zihninde oluşturduğu temsil ve imgeler

KISALTMALAR LİSTESİ

MEB: Millî Eğitim Bakanlığı

NCTM: National Council of Teaching Mathematics (Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi)

OECD: Organisation for Economic Co-Operation and Development (Ekonomik İşbirliği ve Kalkınma Örgütü)

BÖLÜM II: KAVRAMSAL ÇERÇEVE

Bu bölümde kavramsal ve işlemsel öğrenme, kesrin anlamları, kesir ve nicel muhakeme, nicel muhakemenin tanımı ve özellikleri, kesirlere ait kavramlar ve matematiksel temsiller başta olmak üzere bu araştırmada öne çıkan kavramlar detaylandırılmıştır.

2.1. Kesirler

Kesir, en basit haliyle "pay ve payda olmak üzere iki tam sayının birbirine oranı veya bölümü" olarak tanımlanmıştır (Torbeyns, Schneider, Xin & Siegler, 2015, s.6). İlkokul matematik eğitiminde kesirler, öğrencilerin okul öncesinde ve ilkokulun ilk dönemlerinde öğrendiği doğal sayılara ait bilgi ve kuralların esnetildiği bir konudur. Dolayısıyla da üzerinde durulması gereken önemli bir kavramdır. İlkokul matematik dersi öğretim programında kesirler, 2018 yılında yayınlanan programda "Sayılar ve İşlemler" öğrenme alanı; 2024 programında ise "Sayılar ve Nicelikler" teması altında yer almaktadır. Kesirler ilk olarak 2. sınıf düzeyinde bütün, yarım ve çeyrek arasındaki ilişkiyi çözümleme ile programda belirtilmiştir. Kesir gösterimleri, birim kesir, pay ve payda arasındaki ilişki 3. sınıf düzeyinde ele alınırken; kesir çeşitleri, denk kesir, birim kesirler yoluyla karşılaştırma, parça-bütün ve bütün-parça ilişkisi, kesirlerin farklı anlamları doğrultusunda paydaları eşit kesirlerde toplama ve çıkarma işlemi 4. sınıfta yer almaktadır (MEB, 2018; 2024). Bu araştırmanın katılımcılarının 4. sınıf öğrencileri olmalarına karşın araştırmada incelenen kavramlar tüm ilkokul düzeyindeki kesir kavramlarından oluşmaktadır.

2.1.1. Kesirlerde Kavramsal ve İşlemsel Anlama

Skemp (1978) matematiği anlamaya ilişkin görüşlerini iki kavram altında değerlendirmiştir: Kavramsal ve işlemsel anlama. *Kavramsal anlama,* matematiksel fikir ve kavramlarla bağlantılı olan ilişkileri anlamayı ifade eder. Bossé ve Bahr'a (2008) göre kavramsal anlama aynı zamanda bilgiyi daha anlamlı başka biçimlerde yorumlayabilme olup önceki bilgileri yeni bilgilerle birleştiren bir sürecin ürünü olarak kabul edilen matematiksel ilkeleri anlamayı desteklemektedir. *İşlemsel anlama* ise matematiksel bilgileri temsil etmek için kullanılan sembol bilgisi ve matematik yaparken kullanılan kurallar olup algoritmik beceri, teknik ve yöntem bilgisini içerir. Diğer bir deyişle, işlemsel anlama matematiğin kurallarını ve rutinlerini anlamayı içerirken, kavramsal anlama matematiksel ilişkileri anlamayı içerir (Forrester & Chinnappan, 2010). Kısaca, kavramsal anlama ilgili kavramın ne olduğunu diğer kavramlarla ilişkisi ile beraber bilmek olup işlemsel anlama bu kavram

ile ilgili süreçlerin ve işlemlerin nasıl çalıştığını ve arkasında yatan nedenleri bilmek anlamına gelmektedir. Matematik öğretiminde kavramsal anlama ve işlemsel anlamanın nasıl tanımlanacağı ve değerlendirileceği keskin çizgiyle ayrılmamakta, daha ziyade çocukların bir şeyi nasıl öğrendiklerine bağlı olmaktadır (Nunes, 2019). Bununla birlikte her iki anlama birbirini geliştirir ve birlikte gelişir ancak işlemsel anlama, kavramsal anlayış temelinde inşa edilmelidir (Skemp, 1978). Bu sebeple geleneksel bir aritmetik bilgisinin anlamlı olabilmesi için kavramsal anlamaya dayanan zihinsel işlemlerin ve geleneksel gösterimlerin koordinasyonunun sağlanması gerekir (Crawford vd., 2018).

Kesirlerde kavramsal bilgi; kesirlere ait ilkeleri, gösterimleri, büyüklükleri ve miktarların neyi temsil ettiğini anlamayı gerektirir (Siegler vd. 2013). Bununla birlikte kesirler, hem kavramsal hem işlemsel bilgiye sahip olmayı gerektiren bir konudur (Gould, 2012). Kesirlere ilişkin kavramsal ve işlemsel bilginin edinimi diğer matematik konularına benzer olarak, birbirlerinden ayrı gelişmez; kavramsal bilgisi yüksek olan öğrencilerin işlemsel bilgilerinin de gelişmiş düzeyde olduğu bilinmektedir (Lortie-Forgues, Tian & Siegler 2015). Kavramsal ve işlemsel kesir bilgisi arasındaki ilişki üzerine yapılan önceki araştırmalar, bu yapıların yüksek oranda ilişkili olduğunu göstermiştir (Lenz vd., 2020; Schneider & Stern, 2010). Bazı durumlarda örn $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{4}$'i toplarken işlem yapmadan bu iki kesrin büyüklüğü hakkında tahmin yaparak doğru sonuca ulaşabiliriz. Ancak $\frac{2}{7} + \frac{4}{21}$ probleminin sonucu bulmak için çarpımsal akıl yürütme gerektiren ortak paydayı belirleme işlemi daha avantajlı olabilir. Dolayısıyla büyüklüklere ilişkin kavramsal bilgi, kesirlerde sonuca ulaşmak için gerekli ancak yeterli olmayabilir. Kesirler, kavramsal bilginin öncülendiği ve sonra işlemsel bilginin gerektiği konulardır. Öyle ki, kesir problemlerini çözme işlemlerini büyüklük anlayışı olmadan uygulayan öğrenciler, daha derin ve kavramsal bilgi gerektiren problem çözme görevlerinde daha az başarılı olurlar (Bailey vd., 2015; Siegler & Lortie-Forgues, 2014).

Çocuklar, kesirlere dair kavramsal bir anlayış geliştirmeden yalnızca aritmetik algoritmaları ezberleyerek işlem yapabilirler (Crawford vd., 2018; Siegler vd., 2011; Cramer vd., 2002). Böyle bir durumda öne çıkan bir soru: "Kesirlerde kavramsal bilgi nasıl ayırt edilmektedir?" sorusu olmaktadır. Bazı kesir görevlerinin kavramsal olduğu aşikarken bazılarının da işlemsel olduğuna dair yaygın bir inanç vardır. Örneğin bir kesri sayı doğrusunda gösterebilme kavramsal bilgi gerektirirken kesirlerde payda eşitleme veya paydaları da birbiriyle toplama işlemsel bir durumu ifade eder. Ancak öğrencilerin bazı

görevlere kavramsal veya işlemsel stratejilerle yaklaşması muhtemeldir (Newton, Willard, & Teufel, 2014). Örneğin kesirlerde karşılaştırma etkinliğinde öğrenci kavramsal olarak da işlemsel olarak da soruyu yanıtlayabilir (Siegler vd., 2011). Örneğin $\frac{3}{4}$ ile $\frac{2}{7}$ kesirlerini karşılaştırırken öğrenci 4x7 işlemi ile paydaları eşitliyorsa işlemsel bilgisi ön planda; $\frac{3}{4}$'ün bir bütüne çok yakın olduğunu düşünerek kesirleri bir bütün, yarım gibi dayanak noktalarını referans alarak karşılaştırıyorsa kavramsal bilgisi ile soruyu çözüyordur (Florence Gabriel vd., 2023). Kesir öğretiminde her iki türlü bilgi de önemli ve gereklidir ancak öncelikle öğrencileri bir nicelik olarak kesir büyüklüğü üzerinde düşünmelerini sağlamak gerekmektedir.

2.1.2. Kesirlerin Anlamları

Kieren (1980) kesirlerde anlamayı "Parça-bütün, bölme, işlemci, ölçme ve oran" olmak üzere beş farklı şekilde sınıflandırmıştır. Bu yapılar birbirinden bağımsız değildir, ancak farklı düşünme kalıplarını temsil ederler. Behr, Lesh, Post ve Silver (1983) parça-bütün ve ölçme anlamlarını ayırmayıp Kieren'in belirttiği kesir anlamlarının tamamını parça-bütün ve eş parçalama zemininde değerlendirmiştir. Nesher (1985) genel olarak kesir anlamlarını parça-bütün, bölme ve oran olmak üzere üç grupta toplamıştır. Son olarak Nunes ve arkadaşları (2007) kesirlerin *parça-bütün, bölme, işlemci ve oran* olmak üzere dört farklı anlamda karşımıza çıkabileceğini belirtmişlerdir. Bu araştırma, literatürde kabul gören Kieren'in (1980) kesir anlamlarının sınıflandırmasına göre yapılandırılmıştır.

2.1.2.1. Parça-bütün

Kesirlerin parça-bütün anlamı bir bütünün eş parçalarını ifade eder (Steffe & Olive, 2010). Buna göre, verilen bir görevde öğrenci birim kesirleri devamlı olarak tekrarlayarak parçaya ya da bütüne ulaşır. Kesirlerin en sık tercih edilen ve kitaplarda da en yoğun bulunan anlamıdır (Siegler & Pyke, 2013). Bunun muhtemel sebebi, parça-bütüne dayanan etkinliklerin somutlaştırmaya çok daha elverişli olması ya da küçük yaştaki çocukların alışık olduğu paylaştırma anlamına yakınlığı olabilir. Behr vd. (1984) parça-bütün anlamına dayanarak kesirleri öğretmenin en uygun yöntem olduğunu savunurken Thompson ve Saldanha (2003), parça-bütün durumlarının bileşik kesirlerle çalışıldığında sorunlara neden olduğunu, çünkü parça-bütün anlamında öğrencilerin a/b kesrinde a'yı "b'nin bir parçası" olarak yorumladığı, bunun da bileşik kesirleri anlamada kafa karışıklığı yaratabildiğini belirtmiştir. Nunes ve Bryant (2015) de benzer olarak çocukların parça-bütün durumuyla

ilgili zorluklar yaşayabilmesinin nedenini, parça sayısı ile parçaların boyutu arasındaki ilişkiyi anlayamamasından kaynaklandığını savunmuştur. Kesirlerde parça-bütün ilişkilerinin yalnızca toplamsal düşünme gerektirmesi ve bunun bileşik kesirleri anlamada bir engel oluşturması da diğer olumsuz durumlardan biridir (Siegler & Pyke, 2013).

2.1.2.2. Bölme

Çocukların parça bütün bağlamını gerçekten anlayıp anlamadıklarını test etmek için en güvenilir yollardan biri uzunluk, zaman, hacim vb gibi sürekli niceliklerin (continuous quantity) yer aldığı bölme problemleri sormaktır. Öyle ki, öğrencilerin ilkokulda nicelikler arasındaki ilişkiler hakkında akıl yürütmeyi öğrenmeleri ve toplamsal akıl yürütmeyi tanımlayan parça-bütün görevlerini yerine getirmeleri gerekir (Nunes & Bryant, 2008). Kesirlerde bölme bağlamı, bir çokluğun eş paylaşımı fikrine dayanmakta ve (Behr vd., 1983; Nunes & Bryant, 2009) bir sayı diğer sayıya bölündüğünde bölenin veya bölümün tam sayı olmadığı durumlarda ortaya çıkmaktadır (Olkun & Toluk Uçar, 2012; van de Walle vd., 2018). Gregg ve Gregg'e (2007) göre kesirlerde bölme, parçalara ayırma ve ölçme olmak üzere iki anlamda değerlendirilir. Parçalara ayırma anlamında "bir tanesi ne kadardır?" veya "bir kişiye ne kadar düşer?" gibi sorular yanıtlanır. Örneğin 26 elma 4 kişi arasında paylaştırıldığında bir kişiye ne kadar elma düşeceğini hesaplamak kesirlerde bölme anlamına sahip olmayı gerektirir. Bölmenin ölçme olarak yorumlanması ise tekrarlı çıkarma ya da eş gruplar olarak adlandırılır (van de Walle vd., 2018). Örneğin bir grup arkadaş 6 adet pizzayı paylaşacak ve her bir kişiye $\frac{3}{4}$ pizza düşecekse bu grupta kaç kişi olduğunu hesaplamak için eş gruplar oluşturulur; ölçüm birimi olarak da $\frac{3}{4}$ kesri alınır. Kesirlerde bölme anlamı da doğal sayılarda bölme işlemi ile yakından ilgilidir. Araştırmalar doğal sayılarda bölme işleminin, bölen, kalan, bölünen bileşenlerinin anlaşılması ile kesirlerin kavramsal olarak anlaşılması arasında pozitif bir ilişki olduğunu göstermektedir (Nunes & Csapó, 2011). Bununla birlikte kesirlerde bölme anlamının bazı avantajları da bulunmaktadır. Streefland (1991), çoğu çocuğun çok erken yaşlardan itibaren maruz kaldığı ortak bir deneyim olan adil paylaşıma dayandığından, bölme ve paylaştırma durumlarının anlaşılmasının daha kolay olduğunu belirtmiştir.

Nunes ve Bryant (2009) çocukların kesirlerin denkliği konusundaki anlayışlarını parça-bütün ve bölme anlamlarına bağlı olarak karşılaştırarak araştırmışlardır. Buna göre çocukların parça-bütün durumlarına verilen doğru yanıtları oranı bölme durumlarındaki

orana göre oldukça düşüktür. Bu sonuçlar, 7 yaşından itibaren çocukların kesirlerin denkliği hakkında çıkarım yapabildiklerini ve bölme durumlarını kullanarak daha kolay anlayabildiklerini göstermektedir. Parça-bütün ve bölme olmak üzere her iki anlayışın da kesirlerin öğrenmesine katkıda bulunması beklenir; ancak deneysel kanıtlar, çocukların bölme ve dolayısıyla paylaştırma durumu hakkında akıl yürütürken daha az zorluk yaşadığını ve bunun da tam sayılardan kesirlere daha yumuşak bir geçiş sağladığını göstermektedir (Nunes & Bryant, 2009). Literatürde yer alan bu araştırmalara dayanarak bu araştırmada da öğretim deneylerine ilk olarak paylaşım fikrine dayanan bir etkinlikle başlanmıştır.

2.1.2.3. Ölçme

Kesirlerin ölçme anlamı bir uzunluğun eş birimlerle ölçümünü ifade eder. Örneğin a/b ifadesi a tane 1/b birimlik bir ölçüyü ifade eder. Bir açıdan ölçüm yaklaşımı, eş paylaşım yaklaşımına göre çocukların tam sayılarla ilgili önceki deneyimlerinden oldukça uzaktır (Ni & Zhou, 2010). Ancak kesirlerde ölçme durumları, kesirlerin de bir sayı olduğu, doğal sayılar dışında da sayıların var olduğu ve sayı doğrusu üzerinde sıralanabileceği gerçeğini vurgulaması açısından oldukça önemlidir (Kieran, 1988). Öyle ki tüm gerçek sayılar için geçerli olan özellik, her birinin büyüklüklere sahip olmaları ve büyüklüklerine göre sayı doğrusunda sıralanabilmeleridir (Siegler, Fazio, Bailey & Zhou, 2013). Hamdan ve Gunderson (2016) ile Saxe ve arkadaşları (2007) kesirlerin sayı doğrusu kullanılarak tanıtılmasının kesir ve tam sayı arasında ilişki kurmayı sağladığını ve çocukların kesir büyüklüğü anlayışını geliştirdiğini vurgulamışlardır. Ne var ki kesirlerin ölçme anlamı diğer anlamlar içinde anlaşılması en zor ve en az kullanılandır (Tunç-Pekkan, 2015). Bu sebeple kesirlerde ölçme anlamını vurgulamada etkili bir araç olan sayı doğrusuna sıklıkla yer verilmesi gerekmektedir (Siegler, Thompson & Schneider, 2011).

Kesirlerde ölçme anlamı, kesirlerde yineleme şemasıyla yakından ilişkilidir. Steffe ve Olive (2010), öğrenciler yineleme kesir şemaları oluşturduklarında ortaya çıkan kesirler için model üretmişlerdir. Bu şemanın bir yönü şöyledir: Bir öğrenciden verilen bir çubuğun (dikdörtgen) 9/7'sini çizmesi istenir. Öğrenci 9/7 çizmek için bir hedef oluşturur ve bölme (eşit parçalar yapma) ile yineleme (daha büyük bir kesir yapmak için bir parçayı tekrar tekrar yineleme) işlemlerine başvurur. Öğrenci, verilen çubuğu yedi eşit parçaya bölerek ve yeni bir çubuğu bu parçalardan birinin dokuz kez yinelenmesi olarak düşünerek bu etkinliğe katılır. Bu zihinsel aktiviteye genellikle eşit parçaları işaretleme ve bu parçalardan dokuzunu

gösteren bir çubuk çizme fiziksel aktivitesi eşlik eder. Yeni çubuktaki parçalar sorulduğunda, öğrenci bunların yedide bir olduğunu söyler çünkü öğrenci bunları orijinal çubukla karşılaştırır. Böylece öğrenci çubuğu dokuz tane 1/7 parçasının yanı sıra bir orijinal çubuk ve iki yedide bir olarak görür. Yinelemeli bir kesir şeması oluşturmamış öğrenciler 9 parçalı bir çubuk çizebilir, ancak genellikle yeni çubuğu "dokuz tane 1/9" olarak adlandıracak ve parçaları yalnızca dokuzda bir olarak göreceklerdir (Hackenberg, 2007; Hackenberg & Lee, 2015; Olive & Steffe, 2010). Genel olarak, bir uzunluğun ölçüm birimi olarak oluşturulması çarpımsal bir yapının oluşturulmasını gerektirir (Thompson & Saldanha, 2003). Başka bir deyişle, çocuklar 1 metrelik bir şeridi 1 cmlik bir çubukla ölçebilir ve çubuğun şerit boyunca 12 kez sığdığını görmek için 1 cmlik çubuğu tekrarlayabilir. Ancak 1 cmlik çubuğun bir ölçüm birimi olarak oluşturulması, şeridin uzunluğunun çubuğun uzunluğundan 12 kat daha büyük olduğunu anlamayı gerektirir. Steffe (2013) bunu yinelenebilir bir uzunluk birimi oluşturmak olarak tanımlamıştır. Bir uzunluk birimi bir öğrenci için yinelenebilir olduğunda, bu çarpımsal bir yapı anlamına gelir. Yinelenebilir bir birim aynı zamanda birimin kendisiyle aynı olduğu ve bir diğeriyle değiştirilebileceğini ifade eder.

2.1.2.4. Oran

Kesirlerin oran anlamı iki doğal sayının birbirine oranını ifade etmektedir. Başka bir ifadeyle, kesrin parça-parça veya parça-bütün karşılaştırma anlamı olarak da bilinmektedir. Oran, göreceli büyüklük kavramını taşıyan bir bağıntıdır; bu nedenle, bir sayıdan ziyade karşılaştırmalı bir indeks olarak düşünülmesi daha doğrudur. Oranların kullanımı, büyüklüklerin karşılaştırılmasını gerektiren çeşitli durumlarda çok güçlü bir problem çözme aracıdır (Behr, vd. 1983). Kesirlerde oran anlamı çarpımsal düşünmenin de gelişimi ile paralel olduğundan oldukça önemlidir (Nunes & Bryant, 1996). Bunun daha net bir şekilde anlaşılması için dolaylı nicelleştirmenin olumlu etkisinden bahsedilebilir. Şöyle ki, dolaylı nicelleştirmede özellikle konsantre problemleri gibi tamamen orantısal ilişkiye dayalı problemlerde kesrin oran bağlamını anlamak oldukça muhtemeldir. Buna ek olarak gerçek yaşam durumlarıyla ilişkili olduğundan çocuklar için de anlaşılırdır. Ayrıca denk kesirler konusunun öğretiminde faydalı bir kavramsal temeldir (Behr vd., 1983). Denk kesirlerin anlaşılması için kesrin değerinin büyümesi ve küçülmesine dayanan orantısal ilişkiyi anlaması gerekmektedir. Oransal ilişki çarpımsal anlayışa dayalı olduğundan ilkokul

düzeyindeki öğrenciler için anlaşılması kolay değildir. Dolayısıyla bu araştırmada da bu anlamı vurgulayan etkinliklere özel olarak yer verilmemiştir.

2.1.2.5. İşlemci

Kesirlerin anlamlarından sonuncusu olan işlemci anlamı bir doğal sayının belirli bir kesir kadarını bulmayı gerektiren anlamıdır. Başka bir ifadeyle kesrin, bir çoklukla çarpılmasıyla çokluğun büyümesi ya da küçülmesidir (Olkun & Toluk-Uçar, 2012). X tane nesneden oluşan bir grubun a/b'sinin belirlenmesi işlemci anlamına bir örnektir. İşlemci anlamını vurgulayan etkinliklerde öğrenciler bir çokluğun birim kesir kadarını bulabilirken çokluğun basit kesir kadarını hesaplamada zorlanmaktadır (Kullberg & Runesson, 2013). Hackenberg vd. (2016) kesirlerde ölçme ve bölme anlamlarının anlaşılması için "karşılıklı bir nicel anlam" (a quantitative meaning for a reciprocal)" kavramına değinmişlerdir. Buna göre nicel anlam denilen ifade nicelikleri tek başına anlamlandırmaya çalışmak yerine nicelikler arası ilişkiye vurgu yapar. Örneğin bir metre içinde kaç tane $\frac{1}{4}$ vardır gibi bir soru yöneltmek öğrencilerin farklı birimler ve dolayısıyla farklı nicelikler üzerinde akıl yürütmesini gerektirir.

Kesirlerin tüm anlamları öğrencilere verilmeden kesirlerin tam olarak anlaşılması mümkün değildir (Altun, 2018). Kesirlerin farklı anlamlarının temelde farklı kavramsal yapılar olması sebebiyle öğrencilerin kesirleri daha iyi anlamak için farklı anlamları entegre etme konusunda daha fazla deneyime ihtiyaçları vardır (Barbieri vd., 2020). Piaget, çocukların bir eylem şeması edindikten sonra tersine çevrilebilir düşünceye (reversible thinking) ulaşmaları gerektiğini vurgulamıştır. Piaget, Inhelder ve Szeminska'nın (1960) çocukların kesirleri anlaması üzerine yaptıkları çalışma, kesirlerin uzunluk ve alan temsillerini anlamının gelişimini ortaya koymuştur. Araştırmacılar, bir uzunluğu ya da alanı eşit sayıda parçaya bölmeyi gerektiren durumlarda 3-8 yaş arasındaki çocukları gözlemlemişlerdir. Piaget, çocuğun bütünden parçaya gidebilmesini ve parça-bütün ile parça-parça ilişkilerini anlayabilmesini gerektiren görevler önermiştir. Böylece tersine çevrilebilir düşünmenin, çocukların kesirlerde parça-bütün ilişkisini anlamasını mümkün kıldığını belirtmiştir (Wadsworth, 1996). Mamede (2015) tarafından yapılan araştırma sonuçları göstermişti ki kesirleri parça-bütün ilişkileri için kullanmayı öğrenen öğrenciler, kesirleri bölüm durumlarını temsil etmek için kullanamamışlardır. Öğrenciler kesirleri parça-bütün ve bölüm durumlarını temsil etmek için kullanabileceklerini hemen görememişler ve bu sembollerin kullanımını bir durumdan diğerine transfer edememişlerdir.

Charalambous ve arkadaşları (2010), öğrencileri birden fazla kesir anlamıyla meşgul etmenin bir yapıdan diğerine geçmenin anlamayı pekiştirdiği için de öğrenmeyi hızlandırdığını ortaya koymuştur.

2.1.3. Birim ve Birimleştirme

Birim kavramı, Türk Dil Kurumunda belirtilen tanımıyla şu anlamlara gelmektedir (TDK, 2011, s.356): Bir kümenin her elemanı, bir çokluğu oluşturan varlıkların her biri, bir niceliği ölçmek için kendi cinsinden örnek seçilen değişmez parça. Bu tanımlarda olduğu gibi kesirlerde de birim, bir kesir büyüklüğünü oluşturan her bir eş parçayı ifade etmektedir. Birim kesri anlamak kesirlerde yineleme ve ayırma şemalarını güçlü bir şekilde anlamlandırma ile ilişkilidir. Steffe (2002) kesir şemalarını birim kesir ve bütün üzerine inşa ederek birim kesrin anlaşılmadığı durumlarda öğrencilerin eş parçalama, yineleme şemalarında eksiklik olduğunu belirtmiştir (Steffe & Olive, 2010). Kesirlerde birimi anlamak paydayı anlamakla da ilişkilidir çünkü payda birimi belirtir. Sonuç olarak da bütünü belirtir. Bu kavramların her biri bir diğeri ile güçlü şekilde ilişkilidir. Şöyle ki, bir bütünü eş parçalara ayırdığında bütünün ne olduğu belli olmayabilir ancak birimin ne olduğu çok açıktır. Dolayısıyla birim ve bütün birlikte gelişir (Tobias, 2013). Birim kavramı kesirlerde birim kesir isimlendirmesi yapmadan önce eş paylaşım fikrine dayanarak örtük bir şekilde öğretilir. Eş paylaşım fikri aynı zamanda birim kesir kavramının gelişmesini gerekli kılar ve kesirlerin birim kesirler açısından yorumlanması, öğrencilerin kesir kavramlarını anlaması için temel oluşturur (McCoy, Barnett & Stine, 2016). Kesirler ile ilgili deneyimler üzerine yapılan deneysel çalışmalar (Streefland, 1991; Yeo & Webel, 2022), hem eşit paylaşımın hem de birimle ölçümlerin kesir öğretimi için uygun bir kaynak oluşturduğunu göstermektedir (Ni & Zhou, 2010). Bununla birlikte birim, niceliği anlamak ve zihinde canlandırabilmek için temel bir öğedir (Thompson, 1994).

2.1.4. Kesirlerde Bütün

Bir kesrin bütününün tanımlanması, kesirleri anlamak ve kesirlerle başarılı bir şekilde çalışmak için esastır (Tobias, 2013). Bu noktada, kesrin nisbi bir büyüklük olduğu anlayışı, kesir büyüklüklerini anlama ve değişen bütünlere göre yorumlayabilme öne çıkmaktadır. Kesrin bütüne göre nisbi veya göreceli olması (relativity of the whole) ve öğrencilerin bu göreceliği nasıl anlamlandırdığı birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir (Ball, 1990; Bednarz & Proulx, 2014; Simon, 1993; Schifter, 1998; Tobias, 2013). Sonuç olarak ise

bütünün göreceliğinin, kesirler üzerinde yapılan işlemler hakkındaki matematiksel akıl yürütmelerde temel bir öneme sahip olduğu belirlenmiştir (Schifter, 1998; Simon, 1993). Özetle, bütünün göreceliği kavramı, kesir kavramının altında yatan anlamla ilişkilidir. Kesrin ne olduğunu anlamak için bütünün ne olduğunu ve bütünün göreceliğini anlamak gerekir (Bednarz & Proulx, 2014). Özet olarak Tobias (2013) bütünün anlaşılması için üç şeyin anlaşılması gerektiğini belirtmiştir: Kesir bütüne ya da gruba bağlıdır, bütünün neyi referans aldığını belirlemek gerekir ve paydanın neyi temsil ettiğine dair kesir dilinin gelişmesi gerekir. Örneğin iki ½ kesri her zaman aynı çokluğu ifade etmez; bunlar referans alınan bütünün büyüklüğüne göre değişir. Daha basit bir ifade ile 1 kilo elmanın yarısı ile iki kilo elmanın yarısı aynı çoklukları belirtmez.

Kesirlerde bütünü yorumlama konusunda hem öğrenciler hem öğretmenler sıklıkla hata yaparlar (Bednarz & Proulx, 2014; Tobias, 2013). Bu doğrultuda, Tobias (2013) kesirlerde bütünü anlayabilmek için kesir diline yapılan vurgunun önemini vurgulamıştır. Özellikle kesirlerde "ne kadar?" sorusu yerine "kaç tane?" sorusunun sorulması veya öğrencilerin her zaman bir doğal sayı ile çalışacaklarını düşünmesi en yaygın kesir dili hatalarındandır (Lamon, 2005). Tam sayılardan farklı olarak, kesirler için bütünler mutlaka ayrı bir nesne kümesi olmayabilir (Mack, 1993). Dolayısıyla bir bütün tanımlanırken, "neyin" (Lamon 2005) bütün olduğunun anlaşılmamasından kaynaklanan yanlış yorumlar ortaya çıkabilir. Örneğin her biri 12 eşit dilime bölünmüş iki pizzadan 14 dilim yenildiğinde yenen miktar $\frac{14}{12}$ olarak ifade edilir ve bu doğru bir çözümdür. Ancak böyle bir durumda $\frac{14}{24}$ gibi hatalı yanıtların da gelmesi oldukça olasıdır ve bu durum bütünün içselleştirilmemesi ile ilgilidir (Davis & Maher, 1990).

Yapılan araştırmalar, öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının bile kesirlerde dili doğru kullanmakta zorlandığını ortaya koymuştur (Bednarz & Proulx, 2014; Tobias, 2013). Buna ek olarak kesirlerde bütünü anlamanın yalnızca kesir dili ile ilişkili olmadığı söylenebilir. Kesirlerde yapılan birçok hata, kesir dili vurgusundan ve bütünün anlaşılmamasından kaynaklanır. Örneğin bir bütünden büyük kesirlerle çalışırken öğrencilerin "Bir kesir nasıl bir bütünden daha büyük olabilir?" sorusunu sorması (Hackenberg, 2013; Steffe, 2002), kesirlerde işlem yaparken paydaların toplanması (Davis & Maher 1990), sayı doğrusunda kesir gösteriminde ve alan modellemelerinde yapılan hatalar aslında bütünün anlaşılmaması ile ilişkilidir.

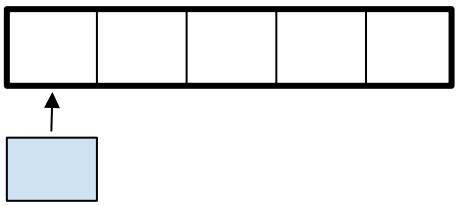
2.1.5. Kesirlerde Zihinsel Eylemler

Kesirler konusunda öğrencilerin kullandığı çeşitli zihinsel eylemler bulunmaktadır. Steffe (2002) bu zihinsel eylemleri "işlemler (operation)" ve bu işlemlere dayanarak "kesir şemaları (fractional schemes)" olarak açıklamıştır. Eylem şeması kişinin zihinsel eylemlerini içselleştirmesi ve böylece zihinsel bir imge oluşturmasıdır (Piaget, 1952; Barros Baertl, 2020). Nunes ve Bryant (2023) çocukların sıklıkla kullandığı farklı eylem şemalarından bahsetmişlerdir: Birleştirme, ayırma, paylaştırma, karşılaştırma, iki kümeyi bire-bir veya bire-çok eşleme (joining, separating, sharing, comparing). Öğrencilerin sıklıkla kullandığı zihinsel eylemler, bu araştırmada elde edilen bulguların yorumlanmasında önemli bir kaynak olmuştur. Steffe'nin (2002), birim kesir ve birimleştirme kavramlarına dayanarak belirlediği zihinsel eylemler aşağıda açıklanmıştır.

1.Eş parçalara ayırma (partitioning): Bir bütünü, bütünün tamamını kullanarak eş parçalara ayırmayı ifade eder. İki farklı eş parçalama şemasından bahsedilebilir (Hackenberg vd., 2016):

i) Eş parçalama (equi-partitioning): Öğrenci, bir modeli eş parçalara ayırmak için öncelikle tahmini olarak bir parçayı alır ve aynı modelin tamamında bu eş parçayı yineler. Bu noktada çocuğun zihninde bir eş parça imgesi vardır ve parçaları eş yapma gayretindedir ancak bunu birim kesri referans alarak değil; tahmini birim olarak belirlediği bir parçayı referans alarak yapar.

ii) Eş zamanlı parçalama (simultaneous partitioning): Öğrenci bütünün de bir birim olduğunu kabul eder ve modeli bir bütün olarak zihninde canlandırarak her bir parçanın büyüklüğüne karar verir. Örneğin, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi öğrenci bir uzunluk modelini eş parçalara ayırırken her bir parçanın büyüklüğüne parçaları bir nesne ile ilişkilendirerek karar verebilir.



Şekil 2.1.5. Eş Zamanlı Parçalama Örneği

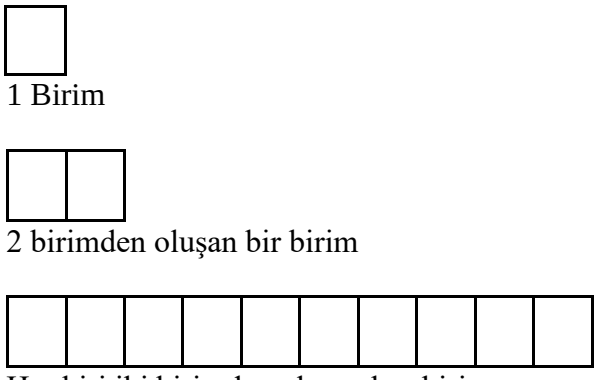
2.Yineleme (iterating): Bir niceliğin aynı kopyalarını oluşturmaktır. Eş parçalama

şemasında olduğu gibi yinelemede de yinelenen birim ve bütün olmak üzere iki birimden ve birimleri ilişkilendirmekten söz edilir. Bununla birlikte yineleme ve eş parçalama arasında ters ilişki vardır. Şöyle ki bir çocuk bir çikolatayı dört arkadaşı arasında paylaştırırken öncelikle eş parçalara ayırır ve ilk oluşturduğu birim parçayı yineleyerek diğer parçaları oluşturabilir. Öğrencilerin bu iki eylem şemasını anlaması ve ilişkilendirmesi oldukça önemlidir.

3.Bölümleme (splitting): Eş parçalara ayırma ve yineleme eylemlerinin eş zamanlı kullanımını gerektirir ancak yinelemenin daha baskın olduğu işlemdir. Sıklıkla kullanılan bir örnek olarak "Modelde belirtilen uzunluk, başka bir uzunluğun beş katı olduğuna göre diğer uzunluğu çiz." problemi öğrencilerin bu zihinsel eylemi kullanmalarını gerektirir. Öğrenciler bu problemi çözerken kendi çizdiği uzunluk ile verilen uzunluk arasında en az bir çarpımsal ilişkinin, yani beş kez yinelenen uzunluğun verilen uzunluğu ürettiğinin farkındadır.

4.Ayırma (disembedding): Bütünün büyüklüğüne dair zihinsel imgeyi bozmadan bütünün içinden parçayı almak anlamına gelir ve "bütünden parçalar" (parts out of whole) olarak da nitelendirilir (Steffe & Olive, 2010). Kesirlerde parça bütün ilişkisinin anlaşılması için öğrencinin "ayırma" şemasını anlamış olması gerekmektedir. Örneğin ⅜ kesrinin 8 eş parçadan oluşan bir bütünden üç parçanın alınması olarak yorumlanması beklenmekte ancak bazı öğrenciler ⅜'i modelin tamamı olarak düşünürler (Olive & Vomvoridi, 2006).

5.Dağıtma (distributing): Yineleme eylemine dayanarak farklı birimleri ilişkilendirmeyi yani bileşik birim üzerinde düşünmeyi gerektirir (Steffe, 1992). Küme gösteriminde olduğu gibi her biri 2 birimden oluşan 5 birim oluşturma görevi buna örnek olup aşağıdaki şekilde belirtilmiştir (Norton, Boyce, Phillips vd. 2015).



Şekil 2.1.6. Kesirlerde Dağıtma Örneği

Kesirlerde dağıtma eylem şeması işlemci anlamı ile yakın kabul edilebilir. Bir doğal sayının belli bir kesir kadarını bulurken çizilen modellerde de öğrencilerin birden fazla birim üzerinde düşünmesi ve bunu modellemesi gerekir. Dolayısıyla birimler üzerinde düşünmeyi gerektiren bir dağıtma işlemi söz konusudur. Bir doğal sayının belli bir kesir kadarını bulmayı gerektiren bazı problemler bu duruma örnek olabilir.

2.1.6. Kesirler ve Nicel Muhakeme

Kesirler ve nicel muhakeme arasındaki yakınlıktan bahsedebilmek için öncelikle cebirsel düşünme ve ilişkilerinden bahsetmek gerekmektedir. Nicel muhakeme, cebirsel düşünmenin üzerine inşa edildiğinden (Thompson, 1988) cebir ile kesir arasındaki ilişkiyi vurgulamak yerinde olacaktır. Kaput (2008) kesirlerin cebirsel düşünme ile ilişkisini iki kavram üzerinden yorumlar:

i) Nicelikler arasındaki ilişkiyi ve aritmetik bilgisini genelleştirme, soyutlama ve temsil etme, ii) Nicelikler hakkında muhakeme etmeye benzer olarak cebirsel ifadelerle de muhakeme etmeyi öğrenme.

Çocuklar, aritmetik veya cebir öğrenmeden de nicelikler üzerinde akıl yürütür ve bu nicelikleri çeşitli sembollerle temsil ederler. Bu durum aynı zamanda çocukların sembollere ve temsillere dayanarak hem doğal sayılar hem kesirler konusunda genelleştirme yapabildiğini gösterir. Çocukların sembol ve çeşitli temsillerle temsil ettiği çoklukların cebirdeki anlamı, bilinmeyen ifadenin, niceliğin bir değerini göstermesidir (Thompson, 2010). Böyle bir durumda söz konusu sembol veya model bilinmeyen bir değeri temsil eder ancak kişi çeşitli genelleştirmelere dayanarak bu bilinmeyen ifadenin değerine ulaşabileceğini bilir. Bu sebeple nicel muhakemede sayısal değerler yerine nicelikler üzerinde düşünmek ön plana çıkar ve bu durum kesirler söz konusu olduğunda da değişmez.

Daha özel anlamda kesirler ve nicel muhakemenin ilişkisi üzerinde düşünüldüğünde birim kesir kavramı öne çıkmaktadır Şöyle ki, niceliği anlamak ve nicelik üzerinde akıl yürütmek bir çokluğun ölçülebilir bir özelliğini ve bu ölçme eylemini yapabilmek için bir birim üzerinde düşünmeyi gerektirir (Thompson, 1994). Birim kesir de kesirlerde bir ölçü birimi olarak kesirlerin özelliklerini ve kesir büyüklüklerini anlamak için en temel kavram olarak görülmektedir. Nitekim bir kesrin büyüklüğüne karar vermek için bu kesrin kaç birim kesirden oluştuğu üzerinde akıl yürütmek gerekir. Böylece kesirlerin büyüklükleri hakkında daha doğru çıkarım yapılabilir. Dolayısıyla ölçme kavramı temelinde nicel muhakemenin

öneminden bahsedebiliriz.

İlkokul döneminde nicel muhakeme, nicelikler arasındaki iki ana ilişki sınıfına dayanır: Toplamsal düşünmeye dayanan parça-bütün ve çarpımsal düşünmeye dayanan oransal ilişkiler (Nunes & Bryant, 2023). Bu araştırmada kesirlerin tüm anlamları farklı etkinlikler ile ele alınmış olup parça-bütün ve ölçme anlamları ağırlıklı olarak kullanılmıştır. Hackenberg (2006) kesirlerle nicel akıl yürütme ifadesini, bir kişinin kesir şemalarının ve işlemlerinin nicelikler ve niceliksel ilişkiler bağlamında amaca yönelik işleyişine işaret etmek için kullanmıştır çünkü kesirler de nicelikler arasındaki ilişkileri temsil eder (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004) ve kesirleri niceliklerin temsili olarak anlamak için çocukların kesirlerdeki nicelikler arasındaki bağlantıları anlamaları gerekir (Nunes & Csapó, 2011). Thompson ve Saldanha (2003), kesirleri birer nicelik olarak iyi anlamanın ne anlama geldiğini kavramsal şemalar açısından analiz etmişler ve kesirleri içeren problemler hakkında doğru muhakeme yapmak için bilişsel bir niteliğin geliştirilmesi gerektiğini belirtmişlerdir. Örneğin bir çokluğun ⅖'sini bulurken direkt olarak o çokluğun beşte ikisi değil, beşte ikisi uzunluğunda, hacminde gibi bir nitelikten bahsetmek oldukça etkilidir (Bobos & Sierpinska, 2017).

Smith ve Thompson (2007) kesirlerde temel amacın niceliklere ve niceliklerin durumlarda nasıl bir ilişkide olduğuna odaklanmak olduğunu belirtmiş ve sınıflarda sayılara değil sayıların temsil ettiği niceliklerle ilgili tartışma ortamlarının oluşturulması gerektiğini vurgulamışlardır. Farklı sınıf düzeylerinde ve farklı araştırma yöntemlerini kullanarak kesirler konusu ile nicel muhakemeyi ilişkilendiren çalışmalar bulunmaktadır. Nicel muhakeme ile birlikte ele alınan çalışmalarda özellikle kesirlerin kavramsal anlamı, toplamsal ve çarpımsal düşünme, nicelik/çokluk, kesirlerde büyüklük kavramları vurgulanmıştır (Barros Baertl, 2020; Crawford, 2018; Hackenberg, 2006; Nogues & Dorneles, 2019). Bu araştırmada da kesirlerin birer nicelik olarak nasıl anlaşıldığı ve nicel muhakeme bileşenlerine dayanarak öğrenciler tarafından nasıl inşa edildiği incelenmiştir.

2.1.7. Kesir Büyüklüğü

Nicel muhakeme ve kesirler söz konusu olduğunda büyüklük (magnitude) kavramı öne çıkmakta ve matematikte büyüklüğü anlama fikri, bir niceliğin büyüklüğü fikrine dayanmaktadır (Thompson vd., 2014). Çeşitli araştırmalar sonucunda, büyüklüğü anlamanın genel matematiksel yeterlilik ve aritmetik öğrenme için merkezi bir öneme sahip olduğunu

vurgulanmıştır (Booth & Siegler, 2008; Siegler & Ramani, 2009; Siegler vd., 2012; Thompson & Siegler, 2010; Torbeyns vd., 2015). Büyüklük kavramına yapılan vurgu tam sayıların yanı sıra kesirleri anlamanın da merkezinde yer aldığından (Thompson, Carlson, Byerley & Hatfield, 2014), büyüklük anlayışını vurgulayan öğretimin başarılı olma olasılığı daha yüksektir (Siegler, Thompson & Schneider, 2011). Kesir büyüklüklerinin anlaşılmasını sağlamak kesir bilgisini geliştirme çalışmalarının önemli bir hedefi olmalıdır (Obersteiner & Tumpek, 2016). Buradan hareketle kesir büyüklüğünü anlamak kesirler konusunun da temel yapısını oluşturduğundan bu araştırmada da öne çıkan kavramlardan biri olmaktadır. Kesir büyüklüğünün ve kesirler ile nicel muhakeme arasındaki ilişkinin anlaşılmasında "karşılıklı ilişki" (reciprocal relationship) kavramından bahsetmek gerekir. Küçük yaştaki çocuklar için anlaşılması zor olan karşılıklı ilişki (reciprocal relationship), bir bütün ve bu bütünün parçaları arasındaki ters ilişki üzerinde düşünmeyi gerektirir. Şöyle ki; $\frac{1}{6}$ birim kesirlerinden oluşan bir bütün $\frac{1}{10}$ birim kesirlerinden oluşma durumuna göre daha büyük parçalardan meydana gelir. Sonuçta bir bütün ne kadar büyük parçalardan oluşursa her bir parçanın büyüklüğü o kadar küçük olur (Hackenberg vd., 2016; Steffe, 2002).

Kesir büyüklüğü, kesirleri birer nicelik olarak algılamayı gerektirir ve nicelikler üzerinde düşündürmek için kesir büyüklüğüne dayanan sorular ve yönlendirmeler benimsenmelidir (Gould, 2012; Hackenberg vd. 2016). Bununla birlikte kesirleri birim kullanarak yani ölçü birimlerine dayanarak öğretmek gerekir. Örneğin $\frac{3}{7}$ kesri 7 eş parçadan üçünü ifade edebilir ancak bunun ötesinde $\frac{1}{7}$ birim kesrinden üç tanesini de ifade eder ve bu ikinci anlam kesirlerde ölçmeyi anlamayı ve kesirleri birer nicelik olarak görmeyi pekiştirir (Hackenberg vd. 2016).

2.1.8. Bileşik Kesir

Bileşik kesirler, kesirlerin bir sayı mertebesine yükseldiğinin göstergesidir (Tunç-Pekkan, 2016) çünkü artık içinde en az bir bütün veya doğal sayı barındıran sayıları kullanmayı gerektirir. Öğrencilerin kesirler konusunda anlamaları gereken bir konu da bileşik ve tam sayılı kesirlerin büyüklüklerine dair doğru bir düşünme yolu geliştirmektir. Bileşik kesirleri öğrenmeden önce çocukların birim kesir ve basit kesirleri öğrenmesi kesirlerin her zaman bir bütünden küçük olduğu inancına yol açmaktadır (Olive & Steffe, 2002; Resnick vd., 2016; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Bu nedenle, değeri bir bütünden büyük kesirlerin büyüklüklerini anlamak birçok öğrenci için büyük zorluklar doğurmaktadır

(Hackenberg, 2007; Olive & Steffe, 2002).

Değeri bir bütünden büyük kesirlerin öğretiminde, kesirlerde parça-bütün anlamı tam olarak uygun bir kavramsal zemine oturmamaktadır. Şöyle ki, parça-bütün bağlamında ilk olarak bir bütüne eşit ya da bir bütünden küçük kesirlerle çalışılır ve bir bütünün parçaları üzerinde düşünmek çocuklar için zor bir görev olarak görülmez. Ancak birden fazla bütün üzerinde düşünüldüğünde bütünden büyük parça sayısı çocuklar için pek anlamlı görülmez. Örneğin bir pasta paylaşım durumunda bir kişinin $\frac{2}{6}$ kadarını alması mantıklı iken $\frac{8}{6}$ kadarını alması mantıksız görülebilir. Bu sebeple araştırmacılar bu kesirlerin inşasında farklı öğretim yolları üzerinde çalışmışlardır. Tzur (1999), Steffe (2002) ve Olive ve Steffe (2002) öğrencilerin bileşik kesirleri nasıl anlamlandırdığını incelemiş ve birim kesrin gelişiminde olduğu gibi yineleme (iterating) ile bölümleme (splitting) anlamlarının kritik olduğunu belirtmişlerdir. İlk olarak Tzur (1999) bu konuda yineleme stratejisini kullanarak 2 ile çarpma yönteminin işe yarayacağını önermiştir. Örneğin ⅝ kesri ile başlayıp bundan 2 tanesini bulmaya çalışırsak bileşik kesre geçmiş oluruz. Böyle bir durumda $\frac{5}{8}$ kesri bir bütünün parçası olmakta anlam kazanamayacağı için yineleme, bileşik kesirler üretmek için gerekli görünmektedir. Kesirlerde parçaların genellikle bütünden daha küçük olduğu (ve genellikle bütünün içine gömülü olduğu) düşünülür ve bu nedenle 11'den 12 parça çıkarmak kafa karıştırıcıdır (Olive & Steffe, 2002; Thompson & Saldanha, 2003). Bunun yerine, $\frac{12}{11}$ gibi bir kesir $\frac{1}{11}$'in 12 kez alınmasıyla oluşturulabilir, bu da $\frac{12}{11}$'in bütünün onu oluşturmak için kullanılan parçasıyla ($\frac{1}{11}$) çarpımsal bir ilişkiye sahip olduğu anlamına gelir. On ikide on bir, adını bütünle olan ilişkisinden aldığı için hala bütüne "bağımlıdır": On ikide birin 12 parçasından herhangi biri, bütünü oluşturmak için 11 kez yinelenebilir. Ancak $\frac{12}{11}$ aynı zamanda bütünün bir parçası olmadığı için bütünden bağımsızdır ve bu nedenle bileşik kesirler yapmak, kesirlerin parça-bütün kavramlarını aşmayı ve yineleme yoluyla oluşturulan ilişkilere güvenmeyi gerektirir.

Tzur (1999) tarafından önerilen bu teknik pay ve paydanın farklı nicelikler olduğu; kesrin bu iki nicelikle tek bir sayıyı temsil etmediği algısını ortaya çıkarabilir. Bu sebeple Steffe (2002) bunu doğru bulmayıp 2 ile çarpmanın kesirsel bir anlam ifade etmediğini, payı iki ile çarpmak işlemsel bir bilgi olduğundan hedeflenen bir kavramsal gelişimin gerçekleşmesinin mümkün olmadığını, bu yöntemin yalnızca basit kesirlerde kullanılabileceğini belirtmiştir. Buradan yola çıkarak bileşik kesirlerin kavranmasının en

kolay yolunun eş zamanlı bölme (partitioning) ve yinelemeden (iterating) oluşan bir bölme inşasının kullanılmasını önermiş ve "Bölümleme" (Splitting) problemleri üzerinden ilerlemiştir. Bir çocuk iki kere $\frac{6}{11}$'ya "on iki bölü on bir" diyebilir çünkü çocuk 2×6'nın 12 olduğunu bilir. Bu durumda, $\frac{12}{11}$'in 12 birimlik bir tam sayı anlamı vardır. Yani, çocuk $\frac{1}{11}$'i yineleyerek $\frac{12}{11}$ ya da $\frac{11}{11}$ elde edebilir, tıpkı 1'i yineleyerek 12 ya da 11 elde edebildiği gibi. Ancak $\frac{1}{11}$, kendi başına ve etkinlikten önce, çocuk için 11 eşit parçaya bölünmüş bir bütün anlamına gelmez. Kısacası, $\frac{11}{11}$ henüz hem 11 öğe hem de bir öğe gibi ikili bir anlama sahip değildir, çocuk henüz bu ikinci anlamı içselleştirmemiştir. Dolayısıyla, $\frac{1}{11}$'in bütünle açık bir çarpımsal ilişkiye sahip olduğunu düşünmez ancak on birde birini 12 kez yineleyerek $\frac{12}{11}$ yapabilir ve buna $\frac{12}{11}$ diyebilir. Başka bir deyişle, bir bütünden büyük bir kesir üretmek için bir birimin veya basit kesirli miktarın yinelenmesi, çocuğun yinelenen parça, bütün ve sonuç arasında yapısal bir ilişki kurmasını gerektirmez. Bu yapısal ilişkinin kanıtı olmadan, bileşik kesirlerin içselleştirildiğini belirtmek zordur. Buna ek olarak Watanabe (2006) bileşik kesirlerin öğretiminde bu kesirlerin büyüklüğünü anlayabilme amacıyla payı çarpma yöntemine dayanarak ve ölçme anlamını vurgulayarak birim kesir kullanılabileceğini belirtmiştir. Böylece birim kesir ile diğer kesirler arasındaki çarpımsal ilişki vurgulanmış olur. Örneğin, $\frac{1}{3}$ birim kesrinin 3 katı olarak üç tane $\frac{1}{3}$ kesri $\frac{3}{3}$'e ve örneğin 1 metre uzunluğa eşittir ve 4 birim kesrinin 4 katı $\frac{4}{3}$'e eşittir ve bir metreden daha uzun bir uzunluğu tanımlar. Bu sonuç bir bütünden büyük kesirlerin varlığını kolaylaştırır ve kesirlerde anlaşılması daha zor olan ölçme kavramına vurgu yapar.

2.1.9. Kesirlerde Sıralama ve Kesirleri Karşılaştırma

Kesirlerde karşılaştırma konusu kesir büyüklüğü kavramı ile birlikte ele alınmalıdır çünkü karşılaştırma etkinlikleri tamamen kesir büyüklüğünün anlaşılmasına bağlıdır çünkü en basit tabirle kesir, büyüklüğün pay ve payda arasındaki çarpımsal ilişkiye bağlıdır (Moss, 2005; Ni & Zhou, 2005). Kesir karşılaştırmasında yapılan hatalar kesir büyüklüğünün anlaşılmaması ile yakından ilişkili olup kavramsal anlamanın eksikliğini göstermektedir (Lenz, Reinhold & Wittmann, 2022). Bununla birlikte, kesirleri doğru şekilde karşılaştırabilen öğrenciler kesir büyüklüğüne ilişkin doğru bir bakış açısı geliştirebilen öğrencilerdir.

Karşılaştırma etkinlikleri toplamsal ve çarpımsal olarak iki farklı biçimde gerçekleşmektedir (Nunes & Bryant, 2015; Thompson, 2011). Araştırmacılar (Davydov, 2015; Smith III & Thompson, 2008), toplamsal karşılaştırma işleminin ilkokul çağındaki çocukların bile kavramsallaştırabileceği ve üzerinde akıl yürütebileceği bir şey olduğunu belirtmişlerdir. Buna uygun olarak, öğrenciler ortak paydada olan kesirleri karşılaştırırken toplamsal karşılaştırma yaparlar ve çoğunlukla doğru yanıtı verirler çünkü aynı paydaya sahip iki kesrin büyüklüklerini karşılaştırmak için payların büyüklüklerini karşılaştırmak yeterlidir. Bu durum da öğrencileri kesir büyüklükleri hakkında derin düşünmemeye itmektedir (Hansen, vd., 2017; Obersteiner & Tumpek, 2016; Tian & Siegler, 2017).

Öğrenciler kesirleri karşılaştırma etkinliklerinde farklı stratejiler kullanmaktadırlar. İlk olarak kesir büyüklüğü üzerinde düşündüren dayanak noktalarına göre karşılaştırma, öğrencilerin toplamları ve farkları tahmin etme becerisini destekler. Kesir karşılaştırmalarıyla ilgili kavramsal bilgi hem pay-payda ilişkisine dair bilgiyi (payda ne kadar küçükse, parçalar o kadar küçüktür) hem de hesaplama yapmadan büyüklükleri karşılaştırmak için kullanılabilecek tipik ölçüt (örneğin $\frac{1}{2}$ veya 1) bilgisini içerir. Yani dayanak noktalarına göre karşılaştırma yapmak kavramsal bilgiye sahip olunduğunu gösterir (Lenz vd., 2022). Örneğin kesirlerin büyüklüğünü kavrayabilen bir öğrenci bir kesrin $\frac{1}{2}$'e eşit olduğunu ve diğerinin 1'e yakın olduğunu belirleyebilmelidir (Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012). Kesirleri diğer kesirlerle karşılaştırarak veya birim kesir stratejilerine başvurarak karşılaştırmak, kesirlerin kavramsal olarak anlaşılmasını destekler ve dolayısıyla kesir konusunda yetkinlik kazanılmasına katkıda bulunur (Teoh, Mohamed, Parmjit & Kor, 2020). Bu konuda yapılan birçok araştırma sonucunda öğrencilerin kullandığı stratejilerden birinin dayanak noktalarına göre karşılaştırma olduğunu tespit edilmiştir (Cramer, Post, & del Mas, 2002; Crawford vd., 2018).

2.1.10. Kesirler ve Temsiller

Matematiksel kavramların anlamlarının öğrencilerin zihninde anlamlı bir zemine oturabilmesi için görsel temsiller ve materyaller iyi birer yardımcıdırlar (Ohlsson,1988). Matematik dersi öğretim programında niceliklerin büyüklüklerini temsil edebilmeye yapılan vurgu ve özellikle kesirler konusunda öne çıkan temsil etme ve temsil kullanma ifadeleri ilkokulda temsil kullanmanın önemini işaret etmektedir (MEB, 2018; 2024). Temsiller, öğrencilerin kesirlerin farklı kavramsal yönlerini anlamalarına ve böylece kesirler hakkında

sağlam bir anlayış kazanmalarına yardımcı olabilir. Kesir büyüklüklerinin doğru temsili, hem kesirlerin kavramsal olarak anlaşılması hem de kesir aritmetiği için anahtar rol oynar (Siegler vd., 2011). Kesirleri doğru temsil etmenin öğrenilmesi işlem performansını da artırır çünkü işlemsel ve kavramsal görevlerdeki iyileşmeler birbirlerini takip ederler (Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001). Dolayısıyla çocukların anlamakta zorlandığı kesir kavramlarını öğrenmede desteklemenin yaygın bir yolu, öğretim ve problem çözme etkinlikleri sırasında temsiller kullanmaktır (Siegler vd., 2010; Sidney, Thompson & Rivera, 2019).

Kesirlerde alan, uzunluk, küme ve sayı doğrusu modelleri olmak üzere çeşitli temsil türleri kullanılmaktadır (Lamon, 2008; Petit, Laird & Marsden, 2010). Bu araştırmada da kesir öğretiminde sıklıkla kullanılan alan, uzunluk ve sayı doğrusu modelleri kullanılmıştır. Genel olarak çocuklar, dairesel ya da dörtgensel alan modelleri aracılığıyla kesirler kavramıyla tanıştırılır (Lamon, 2008; Zhang, Clements & Ellerton, 2015). Alan modelleri daireler veya dikdörtgenler gibi geometrik şekiller olup kesirleri temsil eden görsel temsillerdir. Bu temsillerde, bütünler eş parçalara bölünür ve kesir paydaları her bir bütün şekildeki toplam eş parça sayısı ile temsil edilirken kesir payları, taranmış parçaların toplam sayısı ile temsil edilir. Bu tür modeller kesirlerde parça-bütün ve bölme anlamını vurgular ve çocukların kesirlerin görsel temsilini ve ortak paydaları anlamalarını destekler (Cramer vd., 2008). Ancak alan modeli kullanımı kesirlerde kullanılan diğer temsilleri öğrenmede engel oluşturabilmektedir (Hamdan & Gunderson, 2017; Marmur vd., 2020). Sonuç olarak kesirler konusunun öğretiminde farklı temsil türlerinin bir arada kullanılması öğrencilerin kesir kavramlarını daha iyi anlamasını sağlayabilir.

Cramer, Post ve Mas (2002) kesir öğretiminde farklı modeller, modeller arasındaki dönüşümler ve çoklu temsil biçimlerinin kullanılmasının öğrencilerin başarılarını önemli oranda artırdığını tespit etmiştir. Farklı temsillerin kullanılması öğrencilerin zihinsel şemalarını değiştirip kesir büyüklüğünü daha iyi anlamalarını sağlamaktadır (Petit, Laird & Marsden, 2010). Dolayısıyla bu araştırmada birçok farklı görsel temsil ve araç kullanmaya özen gösterilmiştir. Her bir temsil türünün kendi içinde önemli ve geliştirici noktaları olmakla birlikte literatürde de geniş yer tutan sayı doğrusu modelini detaylandırmak gerekli görülmüştür.

Son yıllarda, kesirlerin öğretiminde sayı doğrusu kullanımı özellikle teşvik edilmektedir çünkü kavramsal ve işlemsel bilgiyi birbirine bağlayan kilit mekanizmalardan biri, kesirleri

sayı doğrusu üzerinde temsil etme becerisidir. Kesirlerin farklı anlamlarını öğrenmesi için öğrencilerin daha fazla deneyime ihtiyaçları vardır ve bir temsil olarak sayı doğrusunu kullanmak oldukça uygun bir araçtır (Barbieri vd., 2020). Wong'a (2013) göre kesirlerde sayı doğrusu kullanımı diğer modellerden birkaç yönden farklıdır: İlk olarak sayı doğrusu bir uzunluk birimini temsil eder ve yalnızca birimin yinelemesini değil, aynı zamanda yinelenen tüm birimlerin eşzamanlı alt bölümlerini de gerektirir. Dolayısıyla sayı doğrusu bir cetvel olarak ele alınabilir. İkincisi, bir sayı doğrusu üzerinde ardışık birimler arasında belirgin ayrım yoktur. Alan veya küme modellerinde olduğu gibi alanda belirgin bir ayrım olmayıp tamamen süreklidir. Bununla birlikte, kesirler iki ayrı sayı yerine tek bir miktar olarak sayı doğrusunda yorumlanabilir.

Araştırmalar, çocukların sayı doğrusuna ilişkin aralık ve sıranın temel özelliklerini anlama ve koordine etmelerinin sonraki çalışmalar için de bir temel sağladığını ortaya koymuştur (Cramer, Behr ve Lesh, 2009; Saxe vd., 2013). İlkokul düzeyindeki öğrenciler, sayı doğrusu üzerindeki noktaların sıralandığını, sayıların soldan sağa doğru hareket ettikçe arttığını ve her sayının doğru üzerinde bir yeri olduğunu anlamalıdırlar. Öğrenciler aynı zamanda denk kesirlerin aynı noktada olduğunu anlamalıdır. Sayıları sıralama ve sayıların denkliği fikirlerini geliştirmek için sayı doğrularının kullanılabileceğini öğrenmelidirler (Saxe vd., 2013). Sayı doğrusu, kesir işlemlerinin ve kesir büyüklüğünün anlaşılmasında önemli olan birimlerin farkındalığını ve dolayısıyla kesirlerde ölçme anlamını destekler (Lamon, 2008; Petit vd., 2010; Ni, 2000; Wong, 2013). Tunç-Pekkan (2015), ölçme anlamının sadece sayı doğrusu temsilleri ile ilişkili olmayabileceği, öğrencilerin dairesel temsillerle yaptıkları etkinlikler için de açıklayıcı bir araç olabileceği düşünülmektedir. Bu sebeple bu araştırmada alan, uzunluk ve sayı doğrusu modelleri kullanılarak öğrencilerde birim kesir kavramının geliştirilmesi önemli bir amaç olarak görülmüştür.

2.2. Nicel Muhakeme

2.2.1. Bilişsel Gelişim, Matematiksel Muhakeme ve Nicel Muhakeme

Muhakeme, zeka ve bilişsel gelişim kavramları matematik eğitimindeki etkileri ve önemi sebebiyle birbirleriyle sıkı bir ilişki içinde olmuşlardır. Öyle ki, matematiksel bilgi de bilişsel gelişim kuramını temel alarak ilerlemektedir. Öncelikle zeka, mantıklı düşünme, muhakeme etme, öğrenme, uyum sağlama, soyut düşünme, problem çözme, hafıza ve zihinsel kapasiteyle ilgili temel kavramları içermektedir (Cesur, 2012). Bilişsel gelişim

kuramını geliştiren Piaget zekanın niceliksel bir tanımını (bir testteki doğru yanıt sayısına dayanan bir tanım) reddeder ve zekayı, farklı yaş gruplarındaki çocukların kullandığı farklı düşünme yöntemleri olarak belirtir. Buradan hareketle Piaget, zeka ve bilişsel gelişim kavramlarını birbirinden ayrı değerlendirmez. Ona göre zeka; uyum sağlayabilme, birey ve çevre arasında denge sağlayabilme ve zihinsel faaliyette bulunabilme ile ilgilidir (Ginsburg & Opper, 1969). Piaget, Binet ve Simon'un zeka testi çalışmalarına sırasında zeka kavramı ile ilgilenmiş ve çocukların verdikleri doğru yanıtlara değil yanlış cevaplara dikkatini yoğunlaştırarak çocuk zihninin nasıl çalıştığı sorusunu cevaplamaya çalışmıştır (Ginsburg & Opper, 1969). Bu çabaya dayanarak yürüttüğü birçok görüşme sonucunda da çocuklarda bilişsel gelişimi i)Duyusal-Motor, ii)İşlem Öncesi, iii)Somut İşlemler ve iv)Soyut İşlemler şeklinde dört devreye ayırmıştır.

Piaget'nin bilişsel gelişim teorisine göre somut işlemler dönemini işaret eden yedi ile on yaş arasında çocuklar matematiksel kavramları anlamaya başlarlar. Bu aşama, mantıksal düşüncenin gelişimi ve miktarın görünüşü değişse bile asıl miktarın sabit kaldığının farkına varılması olan korunumun kavranması ile karakterize edilmiştir (Tadeu, 2024). İlkokulun başlarında çocuklar kesirleri sıklıkla bir bütünün ya da belirli bir kümenin basit unsurları olarak görürler. Bu anlayış, somut işlemler aşamasının bir özelliği olan, nesneleri ortak özelliklerine göre kategorize etme ve sınıflandırma bilişsel becerilerine karşılık gelir. Başka bir deyişle, bir bütünün eşit parçalara bölünmesi olarak kesir kavramı bu yaştaki çocuklar için sezgiseldir. Çocuklar yaş aldıkça ve bilişsel kapasiteleri geliştikçe, kesirlere ilişkin anlayışları da gelişir. Öğrenciler kesirlerin sadece bir bütünün veya kümenin bir kısmını değil, aynı zamanda bölme kavramını ve oranları da temsil edebileceğini anlamaya başlar. Kesirleri nicelikler arasındaki ilişkiler olarak kavrayabilir, matematiksel muhakemelerini tam sayıların ötesine genişletebilirler. Dolayısıyla tüm gelişim dönemlerinde var olan bir durum olarak muhakeme etme becerisi ön plana çıkmaktadır (Empson & Levi, 2011).

Muhakeme; bir olay, problem veya durumu anlamada, ilişkileri fark etmede ve sonuç çıkarmada kullanılan mantıklı düşünme becerisidir (Altun, 2013). Üst düzey düşünme becerisi gerektiren muhakeme, matematik için oldukça önemlidir çünkü muhakeme yapmak, matematik yapmak ile eşdeğer olarak görülmektedir (Dündar & Yaman, 2014). Matematiksel muhakeme zamanla ve etkili müdahalelerle gelişebilir (Nunes & Csapó, 2011) ve bu sebepledir ki bunu teşvik edecek bir öğrenme ortamının tasarlanması matematik öğretiminin en önemli amaçlarından biridir (MEB, 2018; 2024). Matematiksel muhakeme

ile nicel muhakeme arasında güçlü bir ilişki vardır (Nunes vd., 2015). Matematiksel muhakeme, konu ve düşünme becerisine göre aritmetiksel, cebirsel, orantısal, geometrik ve istatistiksel muhakeme gibi farklı türlere ayrılmaktadır. Aritmetiksel ve cebirsel muhakemeyi birbirine bağlayan matematiksel düşünme yolu ise nicel muhakemedir (Ellis, 2007; Thompson, 1993). Cebirde birçok problem aritmetik olarak çözülebilir ancak aslında cebir, bir durum içindeki karmaşık ilişkileri ele almak için bir yöntem olarak öğretilir. Bu nedenle, çocukların sayılar yerine durumlardaki karmaşıklıkla başa çıkma konusundaki yetenekleri üzerinde düşünmek gerekir (Thompson, 1993). Dolayısıyla nicelikler üzerinde akıl yürütme fikri cebirsel düşünme ile ilişkilendirilir. Buna ek olarak cebir matematikte kullanılan sembolik, görsel vb temsiller ile çalışmayı ve genellemelere ulaşmayı gerektirdiğinden nicel muhakeme ve modellemenin birlikteliğinden bahsedebiliriz (Thompson, 2011).

Öğrencilerin matematiksel kavramları oluştururlarken ve yorumlarlarken söz konusu durumlardaki niceliklere ilişkin zihinlerinde oluşturdukları anlamlar ve zihinsel eylemler öğrenmelerini belirleyen temel etkendir çünkü öğrencilerin matematiksel bilgileri, söz konusu bilgilerin altında yatan mantığı anlamalarına dayanır. Bu sebeple öğrencilerin sayıları ve aritmetiği nasıl temsil edeceklerini öğrenmek için nicelikler arasındaki ilişkileri anlamaları gerekir (Nunes vd., 2007). Barros Baertl'a (2020) göre öğrencilerin aritmetik işlemleri anlamaları ve sembolleri mantığa uygun biçimde kullanabilmeleri için nicel muhakeme gereklidir çünkü nicel muhakeme matematiksel bir durumu anlayan, duruma ilişkin nicelikleri oluşturan, bu nicelikleri ilişkilendiren ve kullanan bir öğrencinin zihinsel eylemlerini tanımlamanın bir yoludur (Thompson, 1990; Weber vd.,2014). Bununla birlikte nicel muhakeme, öğrencilerin matematik başarılarına ve matematiği öğrenmelerine önemli ölçüde katkıda bulunur (Korb, 2007; Rosemary & Ibibo, 2019). Smith ve Thompson (2008) ile Thompson'a (1990) göre güçlü bir matematik bilgisi nicel muhakemenin gelişimine önem verilmesine bağlıdır. Bu nedenle çocukların düşünme ve öğrenme becerilerini etkin bir şekilde kazandıkları erken çocukluk döneminden başlayarak nicel muhakeme düzeylerinin incelenmesi, geliştirilmesi ve desteklenmesi oldukça önemlidir.

2.2.2. Nicel Muhakeme ve Bileşenleri

Nicel muhakeme öğrencilerin problem çözme süreçlerine etkin biçimde katılmalarını sağlayan güçlü bir muhakeme türüdür ve hem işlemsel hem kavramsal anlamayı içerse de etkili bir öğrenmenin gerçekleşebilmesi için önce kavramsal anlayışın gelişmesi gerektiğini

savunur (Thompson, 1990). NCTM (2014), işlemsel akıcılığın güçlü bir kavramsal anlayıştan geliştiğini savunmaktadır. Benzer olarak, Thompson ve Carlson (2017) matematiksel ilişkilere dayanan kavramsal anlamayı vurgulamakta ve öğrencilerin matematiksel gelişimi için çok önemli olan nicel akıl yürütme yollarını ön plana çıkarmaktadır.

Literatürde birçok tanımı ve betimlemesi olan nicel muhakeme matematik eğitimi araştırmacıları tarafından sıklıkla araştırılan bir konu olmuştur (Mayes vd., 2014; Steffe, 1991; Ulrich, 2012; Ellis, Ozgur, Kulow, Williams & Amidon, 2012). Bu kavramın matematik eğitimi literatüründeki yerini sağlamlaştıran Thompson'ın (1994; 2011) nicel muhakeme teorisinde anlam oluşturma süreci nicelikler ve nicelikler arası ilişkilere dayanmaktadır; nicel ilişkilerle çalışan bir öğrenci problemde niceliklerin birbirleriyle nasıl ilişkili olduğunu düşünmeli ve problemi çözmek için aritmetik işlemleri kullanmak yerine problemdeki niceliklerin ne anlama geldiği üzerinde düşünmelidir. Dwyer ve arkadaşlarına (2003) göre nicel muhakeme; nicel bilgileri yorumlama ve uygun çıkarım yapma, gerekçelendirme, aritmetiksel, cebirsel, geometrik veya istatistiksel yöntemler kullanarak problem çözme, tahmin etme, nicelikleri temsil etme gibi bazı becerileri kullanmayı gerektirir. Buna göre, bu araştırmada bu becerileri kullanmaya dayanan etkinlikleri uygulamaya çalışılmıştır.

Thompson (1994) nicel muhakemeyi, yapılandırmacılık kuramı üzerinde konumlandırarak nicelikler ile nicelikler arası ilişkiler üzerinde düşünmek olarak tanımlar. Bazı araştırmacılar nicel muhakemeyi matematiksel model oluşturma, temsil etme ve zihinsel modelleme kavramları ile ilişkilendirmişlerdir. Weber, Ellis, Kulow ve Özgür'e (2014) göre nicel muhakeme kendi başına bir öğretim tekniği değil, matematik hakkında belirli bir düşünme biçimidir. Başka bir deyişle, niceliklere ve bunların ilişkilerine odaklanmak, matematiksel konulara, ölçme, büyüklükler üzerinde düşünme ve matematiksel ilişkiler kurma gibi etkinlikleri vurgulayan bir matematiksel duruştan yaklaşmak anlamına gelir. Nunes, Bryant, Evans ve Barros'a (2015) göre nicel muhakeme, nicel bilgiyi temsil etme ve temsil edilen miktarlar arasındaki ilişkiler hakkında sonuca varmak için temsiller üzerinde hareket etme yeteneğidir. NCTM'e (2000) göre, nicel muhakeme, nicel bilgiyi analiz etme ve bir çözüme ulaşmak için belirli bir sorunda hangi becerilerin kullanılabileceğini belirleme yeteneğidir. Dolayısıyla nicel muhakeme, temel bir problem çözme odağına sahiptir. Nicel muhakeme doğrudan bir matematik müfredatıyla ilgili değil

ancak öğrencilerin matematiği günlük yaşamda kullanma kapasiteleri ve eğilimleriyle özdeşleştirilir. Sonuç olarak nicel muhakeme, niceliklerin büyüklüğünü anlama ve nicelikleri ilişkilendirme sürecinde kavramsal anlamadan işlemsel anlamaya doğru ilerleyen bir düşünme yolu, hatta zihin alışkanlığı olarak tanımlanabilir.

Nicel akıl yürütme, nicelikleri belirleme, nicelikleri ilişkilendirme ile aritmetiksel ve niceliksel işlemler uygulamayı içerir (Thompson, 1990). Bileşenler, iç içe geçmiş düşünceler olup hiyerarşik bir sırayı ifade etmez ve bir öğrencinin nicel muhakemesi bu bileşenlerin bazılarını veya hepsini içerebilir (Thompson, 2022).

2.2.2.1. *Nicelik (Miktar):*

Nicelik (quantity), TDK'ya göre "bir şeyin sayılabilen, ölçülebilen veya azalıp çoğalabilen durumu; kemiyet, miktar, kantite" olarak tanımlanmıştır (TDK, 2011, s.1770). Türkçe olarak yayınlanan nicel muhakeme araştırmalarında da "quantity" kavramının araştırmacılar tarafından genellikle "nicelik" olarak isimlendirildiği görülmektedir (Belin, 2013; Turan Kurudilek, 2023; Tanışlı & Dur, 2018; Özaltun Çelik & Bukova Güzel, 2018; Danacı & Şahin, 2021). Bundan farklı olarak Karagöz Akar (2016) çokluk kavramını da kullanmıştır. Bu araştırmada "quantity" kavramının Türkçe karşılığı olarak "nicelik" ve "miktar" kavramları kullanılmıştır.

Thompson (1994) niceliği, bir nesnenin veya bir olgunun ölçülebilir niteliğine ilişkin anlayışı olarak tanımlamıştır. Örneğin uzunluk, alan, hacim, hız, sıcaklık ve yoğunluk niceliklerle ölçülebilen niteliklerdir. Diğer bir ifadeyle nicelik, zihinde canlandırılabilen bu niceliklerin ölçülebilen özelliğini ve bunu algılama kapasitesini ifade eder (Smith &Thompson, 2008). Kısaca, nicelik dört bileşenden oluşan bilişsel bir nesnedir: (a) bir nesne, (b) nesnenin ölçülebilir bir özelliği, (c) nitelik için bir ölçüm birimi ve (d) ölçüm birimi ile ilişkilendirilen bir sayısal değer (Thompson, 2011). Nicelikler, nesnelerin veya olguların kendisinden ziyade insanların durumları anlayışlarında yani zihinlerinde oluşturulur. Örneğin çocuklar 10-11 yaşına yani soyut işlemler dönemine kadar hız ölçümüne dair kavramsal bir anlayış geliştiremezler ancak bunu hissedebilirler (Piaget & Inhelder, 1969). İki arabanın farklı hızlarda yanyana gittiğini hayal ettiğimizde hangisinin hızlı hangisinin yavaş gittiğini algısal olarak anlayabiliriz. Buna dair zihnimizde oluşan görüntü veya bilişsel nesne, nicelik hakkında düşündüğümüzü gösterir. Bununla birlikte Thompson (2011), niceliğin dışarıda değil, zihnin içinde olduğunu savunmuştur. Kişilerin

nicelikleri zihinde canlandırma şekli zihinsel bir eylem olduğundan herkesin kendine ait düşünme yolu da birbirinden farklıdır.

Piaget'e (1965) niceliğin gelişiminin "korunum"un gelişmesi ve bilişsel gelişimle eş zamanlı olduğunu belirtmiştir. Korunum, bir nesnenin görünümü değişse de miktar, ağırlık, hacim gibi belli özelliklerinin değişmemesidir. Örneğin kare şeklindeki beş modelin önce çok yakın konumlarda sonra ise birbirlerinden uzak konumlarda gösterilmesi toplamda beş kare olduğunu değiştirmez. Piaget'nin nicelik ve nicelleştirmeye dayalı açıklamaları sonraki yıllarda farklı araştırmacılar tarafından yorumlanmış ve açıklanmıştır. Schwartz (1988) niceliklerin toplama, çıkarma, çarpma ve bölme gibi aritmetik (sayısal) işlemlerle oluşturulduğunu işaret etmektedir. Thompson (1990) ise sayısal işlemleri niceliksel işlemlerden ayırmıştır. Ona göre nicelik bir sayısal değer değil; sayıdan ziyade bir durumu anlamayla ilgilidir (Thompson, 1994). Thompson'ın belirttiği nicelik kavramı Schwartz'ınkinden (1988) farklı olup aritmetiksel işlemler bir niceliğin değerini (sayısal sonucunu) değerlendirmek için kullanılır, dolayısıyla nicelik ile sayı aynı değildir. Nicelik ve sayı ilişkisi aşağıda detaylı bir şekilde açıklanmıştır.

2.2.2.2.Nicelik ve sayı:

Thompson (1993), miktarları sayılarla temsil etmeden düşünebildiğimizi ve bu sebeple sayılar ve nicelikler arasında ayrım yapılması gerektiğini vurgulamıştır. Nicelikleri yorumlamak için sayısal değerlere ihtiyaç yoktur; nicelik, ölçüldüğü zaman sayısal bir değere sahip olur (Thompson, 2011). Kişi, herhangi bir sayı olmadan yalnızca niceliklere ve bunun zihninde oluşturduğu nicelik imgesine dayanarak matematiksel anlamda yorum yapabilir (Thompson, 1993). Örneğin, bir ölçüm yapmadan da bir mağaza ile ev arasındaki uzaklık hakkında düşünülebilir veya iki öğrencinin boylarının sayısal olarak uzunluğunu bilmeden de hangisinin uzun hangisinin uzun-kısa olduğu saptanabilir çünkü söz konusu nicelikler hakkında akıl yürütmek için onları ölçmeye gerek yoktur (Thompson, 1993; 2022). Bu örneklerde olduğu gibi, kişi bir niteliği, onu ölçebilme şansını düşünerek zihninde bir nicelik ve sonrasında ise nicelikleri ölçtüğünde sayısal bir değer oluşturur (Thompson, 1993).

İlkokulun ilk yıllarında çocuklar sayıları nicelikler hakkında düşünme ve ifade etme aracı olarak öğrenirler. Burada temsil olarak sayılara yapılan vurgu, sayıların düşünme araçları olarak önemine dayanmaktadır (Nunes vd., 2015). Nicelikleri temsil edecek sayılar

olmadığında niceliklerin büyüklüğünü anlayamaz ve bunlar hakkında iletişim kuramayız. Nicelikleri sayarak ya da ölçerek bir sayı ile ifade eder ve böylece anlaşılır kılarız. Örneğin, 12 ve 17 düğme arasındaki farkı sadece bakarak anlayamayabiliriz ancak bunları sayarsak bunu yapmakta sorun yaşamayız. Ya da bir mağazada gördüğümüz ve satın almak istediğimiz bir dolabın evimizdeki bir boşluğa uyup uymadığını söyleyemeyebiliriz ancak dolabı ve sığmasını istediğimiz boşluğu ölçersek bunu biliriz. Bu durumda, sayarak veya ölçüm yaparak bir sonuca varabiliriz. Dolayısıyla nicelikleri temsil eden sayılar, algısal olarak yapamadığımız ayrımları yapmamızı ve nicelikleri temsil etmemizi sağlar (Ginsburg, Klein & Starkey, 1998; Nunes, Bryant, Hallett, Bell & Evans, 2009). Sonuç olarak, öğrencilerin miktarlar ve bunların sayısal temsilleri arasındaki bağlantılara ilişkin kavrayışları ile matematik öğrenimleri arasındaki ilişki vurgulanmalıdır (Nunes & Csapó, 2011).

Sayıların ve niceliklerin anlaşılması arasındaki ilişki bazı araştırmalarda ele alınmış ve çocukların sayılar ile nicelikler hakkındaki bilgileri arasında ayrım yapmanın önemli olduğu vurgulanmıştır (Sarnecka & Gelman, 2004). Çocukların matematik öğrenmedeki başarısı büyük ölçüde sayılar ve nicelikler arasındaki bağlantıyı tanıma, sayılar arasındaki mantıksal ilişkilerin farkında olma yeteneklerine bağlıdır (Nunes & Csapó, 2011). Bu noktada nicel muhakeme de çocukların sayıların doğasını anlamalarına yardımcı olmaktadır (Ching, Kong, Wu & Chen, 2020). Bundan dolayı matematik öğretiminde öncelik, öğrencileri nicelikler hakkında düşündürmek ve sonrasında sayıları ve işlemleri kullanmak olmalıdır çünkü öğrenciler, matematiksel durumu anlamak için sayıları kullanmak yerine durumdaki nicelikleri ve ilişkileri anladıklarında daha iyi performans gösterirler (Nunes & Bryant, 2023). Bu sebeple matematik yaparken birincil amaç niceliklerin ne anlama geldiği üzerinde düşünmek ve sonrasında ise bunu matematiksel temsillerle görünür hale getirmek olmalıdır. Örneğin bir sepette bir miktar elma olduğunu gören bir öğrenci bir elmayı birim kabul ederek bu elmaları sayar ve sonuçta ise bu miktarı temsil eden bir sayı ile bunu ifade eder. Benzer olarak, bu sepetteki elmalardan önce 5 tanesini yiyip sonra tekrar 5 elma alıp yerine koyduğunda sepetteki elma miktarının değişmediğini anlayabilir.

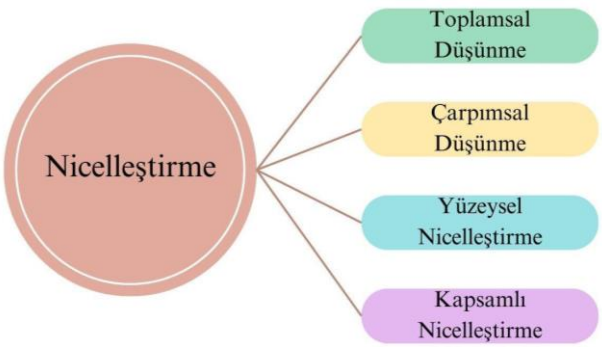
2.2.2.3.Nicelleştirme

Öğrencilerin bir niceliği kavraması ile onun nasıl nicelleştirileceğini bilmesi birbirinden farklı olup bu ikisi arasındaki ilişki çok önemlidir (Thompson & Saldanha, 2003). Diğer bir ifade ile, bir kişi miktarların ne anlama geldiğini bilir ama bu nicelikleri nasıl

ilişkilendireceğini bilemeyebilir. Bu noktada nicelleştirmenin önemi ortaya çıkmaktadır. Thompson (2011, s.8) nicelleştirmeyi matematiğin temeli olarak görmüş ve bu süreci şöyle açıklamıştır: "Nicelleştirme, bir niceliği ölçmenin ne anlama geldiğini bilme, neyi ölçeceğini belirleme ve bir ölçüm yaptıktan sonra ölçümün ne anlama geldiğine dair yorumda bulunmadır." Thompson (1990), nicelleştirmeyi öncelikle niceliklere sayısal değerler atanan bir süreç olarak tanımlamış ve daha sonra nicelleştirmenin bundan çok daha fazlası olduğunu vurgulamıştır (Thompson, 2011). Nicelleştirme, doğrudan veya dolaylı olarak bir ölçüm süreci olup iki niceliği kullanarak üçüncü bir niceliğe ulaşmayı ifade eder (Moore vd, 2009; Thompson, 2011). Örneğin yol ve zamana bağlı olarak hızı bulmak nicelleştirmeyi işaret eder. Bobos ve Sierpinska'ya (2017) göre nicelleştirme, bir nesneyi ve onun bir niteliğini, bir ölçü birimine sahip olacak şekilde anlamlandırma sürecidir. Bir çokluğun nasıl ölçüleceğini bilmek de nicelleştirmenin bir parçasıdır ve bunun için ön koşul, bir niceliğin zihinde işlenmesidir. Dolayısıyla nicelik ve nicelleştirme birbirinden ayrı değil, birbirini tamamlayan bileşenlerdir (Thompson, 1994). Örneğin, bir alan modelini eş parçalara ayırıp taralı alan üzerinde düşünebilme, bunu zihinde görselleştirme bir nicelik hakkında düşünmeyi ifade eder. Niceliğin zihinde oluşturulan imgesinin bir sayı-kesir ile ilişkilendirilmesi ve temsil edilmesi nicelleştirmedir. Benzer olarak, bir doğal sayının belirli bir kesir kadarını hesaplarken doğal sayıyı birimlere ayırıp belli bir miktarını hesaplamak, iki niceliği kullanıp üçüncü bir nicelik elde etmek olduğundan nicelleştirme için uygun bir örnektir.

2.2.3.Yaygın Kullanılan Nicelleştirme Türleri

Araştırmada, nicelleştirme süreci içerisinde değerlendirilen matematiksel akıl yürütme yolları ve nicelleştirme türleri Şekil 2.2.3'te özetlenmiş ve devamında detaylıca açıklanmıştır.



Şekil 2.2.3. Nicelleştirme Türleri

2.2.3.1. Toplamsal ve çarpımsal düşünme

İlkokulun ilk yıllarında öğrencilere nicelikler arasındaki iki farklı ilişki türüne dayanan matematik öğretilmektedir. Bunlar; niceliklerin toplamsal olarak birleştirilmesi ile toplamsal olarak karşılaştırılması ve niceliklerin çarpımsal olarak birleştirilmesi ile çarpımsal olarak karşılaştırılmasıdır (Thompson, 1988; 1994; 2011). Belue (2015), öğrencilerde kazandırılması hedeflenen bu nicelleştirme türlerini açıklamak için dikdörtgensel zemini dört nicel işlem çerçevesinden ele almıştır.



Yukarıda gösterilen dikdörtgensel zeminin çevresine ilişkin nicelik, kenar uzunlukları olan a ve b'nin toplamsal olarak birleştirilmesi sonucunda oluşmaktadır çünkü zeminin iki genişliği ve iki uzunluğu toplamsal olarak birleştirilmektedir. Dikdörtgensel zeminin uzunluğunun genişliğinden ne kadar büyük olduğuna ilişkin nicelik, niceliklerin toplamsal olarak karşılaştırılması sonucunda oluşmaktadır çünkü zeminin uzunluğu ve genişliği arasındaki miktar yani fark düşünülmektedir. Yani b-a'nın değeri iki nicelik arasındaki toplamsal karşılaştırmaya dayanır. Dikdörtgensel zeminin alanına ilişkin nicelik, niceliklerin çarpımsal olarak birleştirilmesi sonucunda oluşmaktadır. Burada a ve b kenarının çarpımsal olarak birleştirildiği düşünülmektedir. Dikdörtgensel zeminin uzunluğunun genişliğinin kaç katı olduğuna ilişkin nicelik, niceliklerin çarpımsal olarak karşılaştırılması sonucunda oluşmaktadır. Yani b kenarı a kenarının kaç katıdır? b kenarının a kenarına oranı nedir? sorularını yanıtlamak çarpımsal düşünme gerektirir. Burada dikdörtgensel zeminin uzunluğu ve genişliği arasındaki oran düşünülmektedir.

Bu nicelleştirme eylemlerini kesirler kapsamında düşünürsek, paydaları eşit kesirlerde toplama-çıkarma işlemi yapma nicelikleri toplamsal olarak birleştirmedir. Paydaları farklı kesirlerde toplama-çıkarma işlemi yapma niceliklerin çarpımsal olarak birleştirilmesidir. Paydaları eşit kesirleri karşılaştırma ya da kesirlerin parça-bütün anlamına dayanan etkinlikler niceliklerin toplamsal olarak karşılaştırılmasına örnek iken denk kesirlerin öğretimi ya da kesirlerde oran anlamına dayanan etkinlikler niceliklerin çarpımsal olarak karşılaştırılmasına vurgu yapmaktadır.

Toplamsal akıl yürütme, çocukların problemleri parça-bütün ilişkilerine dair bilgilerine dayanarak nicelikler hakkında çıkarımda bulunma yeteneği ile ilişkilendirilir (Nunes & Bryant, 2015). Çarpımsal akıl yürütme ise toplamsal akıl yürütmeye göre çocuklar için daha karmaşıktır çünkü daha çok odaklanma, düşünme becerisi ve bilişsel olgunlaşma gerektirir (Nunes vd., 2015). Çarpımsal akıl yürütmenin ayırt edici özelliği, nicelikler arasında bire çok eşleşmeler yaparak veya nicelikler arasındaki oranlara bakarak çıkarımda bulunmaktır (Nunes & Bryant, 2015). Nunes ve arkadaşları (2012), farklı sınıf düzeyindeki öğrencilerde çarpımsal nicelleştirmenin ve nicel muhakemenin öğrencilerin matematiksel performanslarıyla ilişkili olduğunu tespit etmişlerdir. Bununla birlikte, ilkokul düzeyindeki öğrencilerin gelişimi dikkate alındığında niceliklerin toplamsal olarak birleştirilmesi ve karşılaştırılması eylemlerinin kullanılabildiği kabul görmektedir (Nunes & Bryant, 2015). Bu araştırma da ilkokul öğrencilerinin kesirler konusundaki düşünme biçimleri ve bunların gelişimi ele alındığından bu yaş düzeyinde gelişim gösteren ağırlıklı olarak toplamsal akıl yürütmeye odaklanılmıştır.

2.2.3.2. Yüzeysel ve kapsamlı muhakeme

Nicelleştirme, Piaget'nin bireylerin anlayışlarını kendilerinin geliştirdiklerini savunan yapılandırmacılık teorisi ve bilgiyi içselleştirme, zihinsel imge ve şema oluşturma kavramları üzerine inşa edilmiştir (Thompson, 2011). Bu noktada Piaget (1965) çocukların nicelikleri anlamasına dayanan deneylerinde alan, sayı, uzunluk, hacim gibi farklı niceliklerin korunumunu işlemiştir. Sonuçta ise üç seviye nicelleştirmeden söz etmiştir:

i) Yüzeysel nicelleştirme (gross quantification)

ii) Kapsamlı nicelleştirme (extensive quantification)

iii) Dolaylı nicelleştirme (intensive quantification)

Piaget, öncelikle algısal nicelleştirmede az-çok gibi kabaca bir karşılaştırmanın oluştuğunu vurgular ve yüzeysel nicelleştirmenin (gross quantification) gelişimini bu seviyenin belirgin özelliği olarak kabul eder. Dolayısıyla bu düzeyde toplamsal ya da çarpımsal bir nicelleştirmeden söz edilmez. İkinci aşamada ise nicelikleri ilişkilendirme başlar ancak bu ilişkilendirme birim kavramından yoksun bir şekilde gelişir. Yani birim yoktur ancak mantıksal bir ilişkilendirmeye dayalı bir akıl yürütme vardır ve bu durumda intensive (dolaylı) nicelleştirmeden söz edebiliriz. Son olarak ise birim kavramının gelişimiyle birlikte kapsamlı (extensive) nicelleştirme gelişir.

Yüzeysel nicelleştirme bir niceliğin bazı deneyimsel kriterlere göre kavranması anlamına gelir. Örneğin bir nesnenin fiziksel görüntüsüne bakarak diğer bir nesneden büyük göründüğünü düşünmek veya sayı büyüklüklerine dair tahminde bulunmak yüzeysel nicelleştirmeye dayanır. Dolayısıyla yüzeysel nicelleştirme algısal bir duruma işaret eder ve bir anlamda tahmin etme becerisi ile birlikte çalışır. Bir örnek ile açıklamak gerekirse, bir öğrencinin sayı doğrusu üzerinde $\frac{3}{4}$ kesrinin yerini gösterirken bütüne yakın olduğu fikrini öne sürmesi yüzeysel nicelleştirme olarak kabul edilebilir çünkü öğrenci bir kesir büyüklüğünü herhangi bir birim ile ölçmeden, matematiksel bir işlem de yapmadan doğrudan tahmine dayalı olarak kabaca bir muhakeme yapmıştır. Kapsamlı nicelleştirme ise birimleştirme ve bölümlere ayırma işlemleriyle ortaya çıkan sayısal unsurlardan oluşan bir nicelik anlayışını ifade eder (Steffe, 1991: Steffe, von Glasersfeld, Richards, & Cobb, 1983). Bir önceki örneğe göre öğrenci ¾ kesrinin sayı doğrusu üzerindeki yerini bulurken sayı doğrusunu birimlere ayırırsa bu durum kapsamlı nicelleştirme olarak değerlendirilebilir.

Kapsamlı nicelleştirmenin temel özelliği, birimleri bir araya getirme işlevidir. Örneğin, bir öğrencinin aynı kesri birimlere ayırması ve eşit parça-mesafeyi dikkate alarak eşit parçalara bölerek sayı doğrusunda göstermesidir. Dolaylı (intensive) nicelleştirme ise orantısal düşünmeye dayanan mantıklı akıl yürütmeyi ifade eder (Piaget, 1965). Piaget (1965) dolaylı niceliklerin genel olarak nicel ve nicelleştirme kavramlarını içselleştirme adına oldukça önemli olduğunu vurgular: “Dolaylı nicelik ile çocuk başka herhangi bir ölçümden önce farklılıkların orantılılığını ve dolayısıyla geniş nicelik kavramını kavrayabilir. Tek başına sayının gelişimini mümkün kılan bu durum, çocuğun bu aşamalar sırasında kaydettiği mantıksal ilerlemeyi gösterir.” Buna ek olarak bu nicelleştirme türleri farklı araştırmacılar tarafından ele alınmış ve detaylıca açıklanmıştır.

Schwartz (1988), kapsamlı niceliklerin doğrudan ölçülebilir nicelikler olduğunu; dolaylı niceliklerin ise, iki kapsamlı nicelikten türetilen dolaylı ölçümler olduğunu belirtmiştir. Örneğin uzunluk, alan, hacim doğrudan ölçülebilir nicelikler olduğundan kapsamlı nicelleştirme içerisinde yer alır. Bununla birlikte dolaylı niceliklerin, birimlerin her zaman "her biri için (per)" kelimesi içermesiyle tanındığını belirtmiştir. Yani, birim başına düşen bir niceliğin orantısal değişimini dolaylı nicelleştirme olarak tanımlamış; öne çıkan sonucun ise kapsamlı nicelikler arası ilişkiler olduğunu açıklamıştır. Yoğunluk, konsantrasyon ve hız dolaylı nicelleştirmenin en tipik örnekleridir. Bir kişinin arabası için satın aldığı yakıt miktarı litre cinsinden ölçülen kapsamlı bir nicelik iken, arabanın yakıt verimliliği (birim mesafe

başına yakıt tüketimi) dolaylı bir niceliktir. Daha net bir ifade ile, oranla ilgili fikirler dolaylı nicelikleri, miktarla ilgili fikirler ise kapsamlı nicelikleri içerir (Kertil, 2014; Schwartz, 1988).

Noelting (1980), Piaget'nin nicelleştirme türlerine atıfta bulunarak dolaylı nicelleştirme problemleri tasarlamış; Nunes ve arkadaşları (2013) benzer problemleri kullanarak öğrencilerin dolaylı nicelleştirmelerine dair çıkarımlarda bulunmuşlardır. Problemler, portakallı içecek çiftlerindeki portakal konsantresi ve su oranlarını hesaplamaya dayalıdır. Böyle bir durumda kapsamlı nicelikler bardaklardaki su ve portakal miktarı iken iki niceliğin birbiriyle karıştırılıp oluşturduğu portakal suyunun konsantresinin hesaplanması dolaylı nicelleştirmedir. Örneğin bir portakal suyunun tatlı ya da ekşi olmasının birer kapsamlı nicelikler olarak su ve portakal miktarlarına bağlı olması gibi. Nunes ve arkadaşları (2013) yürüttükleri araştırmada dolaylı ve yüzeysel nicelik farkına değinmiş ve ilkokul öğrencilerinin dolaylı nicelikleri anlamada kapsamlı niceliklere göre daha fazla zorluk yaşadıklarını tespit etmiştir. Bu bilgilere dayanarak bu araştırmada 4. sınıf düzeyinde öğrencilerin oran ve orantısal düşünme becerilerine dair kazanımların yer almaması sebebiyle dolaylı nicelleştirmeye dayanan etkinliklere yer verilmemiştir.

2.2.4. Nicel İşlem ve Aritmetik İşlem

Thompson (1994) nicel muhakeme içerisine hem nicel işlem hem de aritmetik işlemi almış ancak nicel işlemi aritmetik işlemin öncüsü olarak değerlendirmiştir. Bir nicelikten yeni bir nicelik elde etme sürecinde matematiksel bir işlem ortaya koymadan gerçekleştirilen zihinsel eylemleri nicel işlem olarak tanımlamıştır. Örneğin, "iki niceliğin birleştirilmesindeki nicel işlem, bir araya getirerek bir bütün yapma; iki niceliğin karşılaştırılmasında nicel işlem ise fazlalığı ya da farkı belirlemek ile oluşturulur" (Thompson, 1994, s. 185-186). Kesirlerden örnek vermek gerekirse, bir bütünü kişi sayısı kadar eş parçaya ayırarak parlaştırma yapacağını düşünme nicel işleme örnektir. Daha açık bir ifade ile, matematiksel işleme gelmeden önce zihinde gerçekleşen kavramsal anlamaya dayalı zihinsel eylemlerdir. Aritmetik işlem ise Kieren'ın (1988) "teknik-sembolik bilgi (technical symbolic knowledge)" kavramıyla belirttiği gibi bilginin öğrenilmiş matematik algoritmalarına, standart matematiksel fikirlere dayanarak inşa edilmesidir. Daha net ifade etmek gerekirse, nicel işlemler söz konusu matematiksel durumu kavramsal olarak açıklamayı sağlarken aritmetik işlemler durumu işlemsel anlama olarak açıklama ve ifade etmeyi gerektirir. Örneğin, bölme işlemindeki "paylaştırma" anlayışı zihinsel bir eylemdir

ve nicel işleme örnektir. 20 kişinin bulunduğu bir sınıfta herkesin pastadan bir dilim yemesi isteniyorsa bu durumda ne yapmak gerekir? gibi bir soru karşısında zihinde beliren paylaştırma eylemi nicel işleme örnektir. Bu zihinsel eylem matematiksel olarak işleme döküldüğünde yani sayısal değerler ve işlemler kullanılarak ifade edildiğinde aritmetik işlem olarak tanımlanır (Thompson, 2011).

Thompson (1993), araştırmasında fark kavramını öğrencilerin toplamsal karşılaştırma yoluyla oluşturabilecekleri bir nicelik olarak tanımlamış ve ilkokul öğrencileriyle yürüttüğü öğretim deneyleri sonucunda bu kavramın öğrencilerdeki gelişimini incelemiştir. Böylece öğrencilerin bir ölçüm yapmadan yani aritmetiksel bir işlem gerçekleştirmeden nicel işlem yapabildiklerini görmüş ve bunu nicelik kavramına dair öğrencinin oluşturduğu zihinsel imge olarak yorumlamıştır. Nicel akıl yürütmeye odaklanan öğretimler, öğrencilerin kavramsal anlamalarında işlemsel anlamaya kıyasla olumlu gelişmeler sağlar ve kavramsal anlayışın gelişmesinin sonucunda ise işlemsel anlamanın gelişmesini kolaylaştırır (Belue, Overman Cavey & Kinzel, 2017). Daha açık bir ifade ile, nicel muhakeme bileşenlerinden nicel işlemi kavramsal anlama; aritmetik işlemi ise işlemsel anlama ile özdeşleştirmek mümkündür.

2.2.5. Nicel Muhakemenin Önemi ve Gelişimi

Nicel muhakeme okul öncesinden itibaren geliştirilebilen bir beceridir (Nunes vd., 2015; Kabael & Akın, 2016). Öyle ki, ilkokulun ilk yıllarında öğrenciler nicelikleri ve bu nicelikleri temsil edebilmek için sayıları öğrenirler (Nunes & Csapó, 2011). Çocukların sayıların nicelikleri temsil ettiğini anlamaları çok önemlidir ancak bu matematik öğrenmek için yeterli olmayabilir çünkü matematik bir ilişkiler bilimidir; önemli olan nicelikler ve nicelikler arasındaki ilişkilerdir (Thompson, 1993). Öğrencilerin zihinsel eylemleri onların farklı kavramlar arasında ilişkilendirme yapmalarına ve matematiksel durumları nicelikler ve ilişkiler olarak değerlendirmelerine imkan veren kavramsal öğrenmeyi desteklemelidir. Bu doğrultuda nicel muhakeme, matematik öğretiminin bir amacı olarak ele alınmalı ve nicel muhakemenin gelişmesini sağlayan görevler arttırılmalıdır (Thompson, 1990).

Bir matematik konusu ya da kavramının nicel muhakeme bağlamında öğretilmesi ve değerlendirilmesi için dikkat edilmesi gereken özelliklerden biri gerçek hayat durumlarını içeren problem durumlarının kullanılmasıdır. İçinde bulunduğumuz çevreyi niceliksel olarak anlamak nesnelerin ölçülebilen yönlerinin algılanması anlamına gelir. Bu sebeple

matematiksel içerikleri anlamak nicel muhakeme yapmak ile mümkündür (Smith & Thompson, 2007; Thompson, 1994). Nicel muhakeme becerisi öğrencilerin günlük hayattaki deneyimlerinden olabildiğince yararlanmasına, problem durumu ve gerçek hayat arasında bağlantı kurmasına ve dolayısıyla gerçekçi problemleri daha anlamlı bir biçimde çözümlemesine olanak tanır (Smith & Thompson, 2007). Bu sebeple öğretmenler, matematik öğretimini gerçek dünyadaki niceliklerle ve bunların mantıksal bağlantılarıyla yakından bağlantılı tutmanın yollarını belirlemelidirler (Bryant, Barros & Sylva, 2012; Nunes vd., 2009). Özaltun Çelik ve Bukova Güzel (2018), öğrencilerin deneyimledikleri ya da anlam yükleyebildikleri bir durum üzerinde çalışırlarken daha motive olduklarını ve zihinsel olarak daha aktif olduklarını tespit etmişlerdir. Öğrenciler günlük hayatla ilişkili ve gerçeğe uygun problemler çözme sürecinde nicelikleri ilişkilendirirken problemi anlayarak doğru çözebilmektedirler (Moore, Carlson & Oehrtman, 2009). Aslında burada bahsedilen, öğrencinin kendi hayatında deneyimleyebileceği gerçekçi duruma uygun problemler kullanmaktır. Örneğin kesirlerin öğretiminde sıklıkla kullanılan pasta-pizza paylaşımları bu problemlere örnektir çünkü muhtemeldir ki her çocuk pizza ya da pasta paylaştırma durumuna dahil ya da şahit olmuştur. Bu bilgilere dayanarak bu araştırmada da kullanılan etkinliklerin öğrencilerin günlük hayatta karşılaşabilecekleri ve deneyimleyebilecekleri etkinlikler olmasına özen gösterilmiştir.

2.2.6. Nicel Muhakeme ve Problem Çözme

Nicel muhakeme, belirtilen birçok tanım ve özelliklere ek olarak problem çözmeyi açıklayan bir düşünme yolu olarak da kabul edilmektedir (Moore vd., 2009, Danacı & Şahin, 2021). Matematiksel muhakeme ve nicel muhakemenin problem çözme üzerinde önemli ölçüde ve pozitif bir etkisi olduğu, anlatılan konuyu kavramada kolaylık sağladığı, öğrencilerin anlamlı ve bağlantılı matematiksel anlayışlar geliştirmesinde öncü olduğu çeşitli araştırmalar ile tespit edilmiştir (Dur, 2014; Ellis, 2007; Hackenberg, 2010; Moore vd., 2009; Özaltun Çelik & Bukova Güzel, 2019; Thompson, 1993). Bu çalışmalar, öğrencilerin niceliklerden oluşan durumları kavrayarak ve niceliklere dair akıl yürüterek öğrenmelerinin desteklenmesi gerektiğini ileri sürmektedir.

Araştırmacılara göre öğrenciler verilen bir problemde sadece işlemlere odaklandıkları zaman problem çözme sürecinde zorlanabilmektedir (Smith & Thompson, 2007; Thompson, 1993; 1998). Bu nedenle, hesaplama gerektirmeyen problemler, çocukların sayısal muhakemelerini geliştirmede ve matematiğin aritmetik hesaplamalardan daha fazlası

olduğunu fark etmelerinde önemli bir rol oynar. Örneğin bir kalemi birim kabul ederek sınıfın kapısının kaç kalem uzunluğunda olduğunu tahmin etme, dolu bir diş macunundan her gün bir cm kullanılması durumunda yaklaşık ne kadar zaman sonra biteceğini üzerinde akıl yürütme, düzgün olmayan bir taşın hacminin nasıl bulunabileceğini düşünme, 16 kurabiyenin 6 kişi arasında paylaştırılması durumunda herkese kurabiye düşebileceğini bilme gibi durumlar bu tür problemlere örnek gösterilebilir. Çocuklar okula başlamadan önce ve ilkokul boyunca, hesaplama yapmak zorunda kalmadan matematik hakkında çok şey öğrenebilirler (Nunes & Bryant, 2023). Sonuçta öğrenciler bir problemdeki niceliklere dikkat etmedikleri zaman, matematiksel kavramları anlamaları ve problem çözme becerileri olumsuz etkilenmektedir (Clement 1982; Thompson & Carlson, 2017). Dolayısıyla araştırmalar nicel muhakemenin gelişimiyle problem çözme becerisinin gelişiminin sağlanabildiğini desteklemiştir (Smith & Thompson, 2007). Ek olarak, nicel muhakeme aracılığıyla matematiksel becerilerin yanı sıra öğrencilerin eleştirel düşünme, iletişim gibi becerilerin de kazanıldığı belirlenmiştir (Robinson, 2017).

2.2.7. Nicel Muhakeme ve Tahmin

Nicel muhakemenin problem çözmedeki olumlu etkisinden hareketle, problem çözmede önemli bir strateji olan tahminden ve nicel muhakeme ile ilişkisinden bahsetmek gerekir. Nicel muhakemede tahmin, güçlü sayı bilgisi ve dikkat gerektiren bir tür matematiksel yeterlilik olarak kabul edilebilir. Matematik başarısında önemli bir etken olan tahmin ile ilgili çalışmalar, çocukların ilk yıllarda sınıflama, sıralama ve toplama ile çıkarma arasındaki ilişkiler hakkındaki performanslarının matematik başarılarını yordadığını göstermiştir (Fuchs vd., 2005; Nunes vd., 2007). Tahmine dayalı etkinlikler öğrencilerin matematikte hem kavramsal hem işlemsel bilgilerini geliştirmek için bir fırsattır; öğrencilerin kendi çözüm stratejilerini geliştirmeleri için farklı yollar oluşturmalarına izin verirken sonuçlarını gerekçelendirme ve kontrol etmeye de yardımcı olur.

Günlük etkinliklerde matematik kavramlarının öğrenilmesini teşvik etmek için hem sayı tahmini hem de nicel muhakeme görevlerinin günlük sınıf etkinliklerinde kullanılması gerekmektedir. Örnek olarak, çocuklar hangi iki kapta daha fazla boncuk olduğunu hesaplamaya çalışırken, iki birim kesri karşılaştırırken hangisinin bir dayanak noktasına yakın olduğunu tahmin ederken nicel akıl yürütmeyi kullanırlar. Bunlar basit bir düşüme yolu gibi görünse de küçük çocukların bile nicel muhakeme yapabildiğini kanıtlamaktadır (Nogues & Dorneles, 2019).

2.2.8. Nicel Muhakeme ve Temsiller

Öğrencilerin matematiksel işlemlerden önce problemdeki durumu görselleştirmek ve nicel ilişkileri kullanabilmek için önce zihinsel imgeler oluşturmaları oldukça önemlidir (Moore & Carlson, 2012). Öğrenciler, problem durumlarını matematiksel işlemlere çevirmek yerine, önce görsel olarak temsil etmeye başladıklarında, problemleri daha doğru bir şekilde çözebilir ve matematiksel kavramları daha iyi anlayabilirler (Ellis, 2007). Weber ve arkadaşları (2014) öğrencileri nicel muhakemeye yönlendirmenin gerçek yaşam durumlarının matematiksel modellerini geliştirmelerine ve keşfetmelerine yardımcı olacağını ifade etmişlerdir. Bunun sonucunda, modelleme öğretiminde nicel akıl yürütmenin nasıl kullanılabileceğine dair ilkeler belirlemişlerdir. Bu ilkelerden biri de öğrencilerin, modelledikleri durumun tüm niceliklerden ve aralarındaki ilişkilerden oluşan bir temsilini (fiziksel, görsel vb.) geliştirmelerini sağlamaktır. Benzer olarak Czocher ve arkadaşları (2022) öğrencilerin nicel muhakeme yaparken modelleme sürecini dikkate almasının etkili olduğunu kanıtlayan veriler elde etmişlerdir. Tüm bunlardan hareketle, temsil kullanma ve modelleme etkinlikleri bu araştırmanın da büyük bir bölümünü oluşturmaktadır.

Moore ve Carlson (2012), öğrencilerin formülleri ve grafikleri kullanmadan önce problem bağlamıyla ilgili nicelik hakkında zihinsel imge oluşturmaları ve nicelikler arası ilişkileri kurmalarının problem çözme sürecinde büyük bir öneme sahip olduğunu ortaya çıkarmışlardır. Sonuçta öğrenci, niceliklerin ilişkili olduğunu düşündüğünde problem bağlamına ilişkin zihinsel imge de geliştirir (Moore & Carlson, 2012). Bu doğrultuda, çocukların çizimleri aynı zamanda onların düşünme araçlarıdır. Çocukların çizimlerinin, nicelikler arasındaki ilişkilere odaklandıkça daha az ayrıntılı ve daha şematik hale gelme eğiliminde olduğu gözlemlenmiştir (Nunes & Bryant, 2023). Koedinger ve Nathan (2004) problem çözme temsillerindeki farklılıkların öğrencilerinin hem nicel muhakemelerini hem de temsillerinin arkasındaki bilişsel süreçlerini nasıl değiştirdiği araştırmışlardır. Bir temsilin anlaşılması diğerinden daha kolay olduğunda veya bir temsil diğerinden daha güvenilir ve anlamlı çözüm stratejileri ortaya çıkardığında, temsillerdeki farklılıkların performansı ve öğrenmeyi etkileyebileceği sonucuna varılmıştır. Bu araştırmada da kesirlerin farklı temsillerle ifade edilmesi ve temsillerin birbiriyle ilişkilendirerek kullanılması araştırmanın amaçlarından biri sayılmaktadır.

Matematiksel temsiller içerisinde yer alan konuşma ve sözel ifadeler nicel muhakemenin gelişmesinde de etkili araçlardır. Çoğunlukla soyut olan ya da soyut olduğu

düşünülen matematiğin aksine, nicel muhakeme bu becerilerin bağlam içinde uygulanmasını (Agustin, Agustin, Brunkow & Thomas 2012; De Lange, 2003) ve sonuçlar üzerinde konuşulmasını ve tartışılmasını gerektirir (Glasersfeld, 2002; Grawe & Rutz, 2009). Thompson (1993) öğretim deneyi kullanarak gerçekleştirdiği araştırması sonucunda dil ve gösterimin pozitif rolüne vurgu yapmış ve öğrencilerin düzenli olarak eğitici tartışmalara dahil edilmesi gerektiğini belirtmiştir çünkü yalnızca uygun bir bağlamda ve bir etkileşim içinde öğrenciler söz konusu nicelikleri ve ilişkileri anlamlandırarak zihinsel imge oluşturabilir. Bu sebeple sınıf tartışmaları sayılar üzerine değil nicelikler üzerine olmalıdır. Buradaki amaç öğrencilerin verilen durumu nasıl gördükleri ve nicelikler arası ilişkileri nasıl kurduklarına yönelik fikirlerini belirlemektir (Smith & Thompson, 2008). Çeşitli araştırmalar göstermektedir ki sözel ifade ve sınıf içi tartışmalara ek olarak akran dayanışması veya grup çalışmaları nicel muhakemenin gelişimine ilişkin güçlü bir araçtır (Goos, Galbraith & Renshaw, 2002; NCTM, 2014). Bu sonuçlara dayanarak bu araştırmada öğrencilerin fikirlerini açıkça ifade edebilmesi önemsenmiş ve desteklenmiştir.

2.3. Matematiksel Temsiller

Temsil en genel ifadeyle bir şeyin bir ya da birkaç özelliğini simgeleme, bir şeyin yerine kullanma gibi durumları belirten bir kavramdır. Matematik eğitimi araştırmalarında temsiller çoğunlukla bilişsel durumlara zemin sağlama amacıyla, öğrencilerin anlama ve düşünme sürecini değerlendirmek için araç olarak kullanılmaktadır (Pape & Tchoshanov, 2001). Duval'e (1993) göre, matematiksel temsiller sayesinde zihnimizde olup bitenleri somutlaştırır ve anlaşılır kılarız. Kaput (1987) temsillerin ve görselleştirmenin matematiğin özü olduğunu belirtmiştir. Bu noktada "Temsillerin matematiksel muhakeme ve matematik öğrenmedeki rolü hangi çerçevede değerlendirilmeli?" sorusunun yanıtı kuramcılar ve araştırmacılar tarafından açıklanmıştır. Piaget (1951, 1971), Vygotsky (1981), Bruner (1966, 1974), Duval (1995, 1999), Goldin'in (1998, 2008) ilgili görüşlerine dayalı olarak temsiller ve matematikte temsillerin kullanılması detaylı olarak açıklanmıştır. Sonuçta, bu araştırmada temsiller yapılandırmacılık kuramına uygun olarak öğrencilerin kesir kavramlarını nasıl anladıklarını belirleyebilmek için bir araç ve destek olarak kullanılmıştır.

Piaget (1971) ilkokul öğrencilerinin bilişsel gelişim dönemlerinden somut işlemler döneminde yer aldığını belirtmiştir. Buna göre, bu dönemdeki çocuklar kavramların ve durumların somutlaştırılmasına ihtiyaç duyar ve böylece soyut bilgileri anlaşılır hale getirirler. Matematiğin soyut kavram ve olguları içerdiği düşünüldüğünde, bu dönemdeki

çocuklar için matematikte var olan soyut kavramları somutlaştırma ve anlaşılır hale getirme görevi üstlenen temsillerin kullanılması kaçınılmaz olmaktadır. Jerome Bruner, bir çocuğun bir kavramı öğrenmesinde baskın olarak doğrudan (enaktif), görsel (ikonik) ve sembolik olarak üç tür aşama belirlemiştir. Bu aşamaların Piaget'nin bilişsel gelişim dönemlerine benzer olarak yaş ve gelişim dönemlerine göre geliştiğini savunmuştur (Bruner, 1966). Yapılandırmacı kuram savunucularından Vygotsky'e (1981) göre ise temsiller sosyo-bilişsel gelişim içinde değerlendirilmelidir. Öyle ki, öğrenme yalnızca bilişsel gelişim temelinde açıklanan bir süreç değil aynı zamanda sosyo-kültürel bir aktivitedir. Vygotsky, dil ve konuşma baskın olmak üzere temsillerin bilişsel gelişimdeki rolünü incelemiş ve örneklendirmiştir (Vygotsky, 1981). Ona göre çocuklar sosyal çevreleriyle etkileşim halinde olduklarında ve bu etkileşimlerde dil, semboller ve kültürel araçlar kullanarak iletişim kurduklarında, zihinsel temsiller geliştirirler. Bu süreç, çocuğun düşünme ve problem çözme yeteneklerinin gelişiminde kritik bir rol oynar. Sonuç olarak temsiller sosyal etkileşimler ve kültürel deneyimlerle birlikte çocuğun bilişsel gelişiminde şekillenen zihinsel araçlardır (Wertsch, 1980).

2.3.1. Temsillerin Özellikleri

Eğitimde yaygın olarak yorumlandığı şekliyle matematiksel temsiller, matematiksel fikirleri veya ilişkileri temsil eden veya somutlaştıran semboller veya nesnelerin düzenlenerek bir durumu simgelemesidir (Goldin, 2004; 2014). Örneğin diyagramlar, sayı doğruları, grafikler, somut nesneler, fiziksel modeller, matematiksel ifadeler, formüller ve denklemler veya matematiksel semboller temsil türleri arasındadır. Patterson ve Norwood (2004), matematiksel temsilleri bir süreç ya da kavramın tablo, grafikler ya da denklemler kullanarak anlatılması olarak tanımlamıştır. Pape ve Tchoshanov (2001) ise temsillerin işlevinin altını çizmiş ve bilişsel aktiviteler için bir araç olarak tanımlamıştır.

Bahsedilen tanımların ötesinde, farklı araştırmacılar temsilleri farklı şekillerde tanımlamış ve yorumlamışlardır. Duval'in (1993) "Semiyotik temsil teorisi (Semiotic representations theory)" matematiksel düşünmenin ve öğrenmenin anlaşılması açısından önemli bir çerçeve sunar. Bu teori, matematiksel kavramların çeşitli sembolik temsiller aracılığıyla nasıl ifade edildiğini ve anlaşıldığını açıklayarak matematik eğitiminde çoklu temsillerin ve bu temsiller arasındaki dönüşümlerin önemini vurgular. Bu teori, öğrencilerin matematiksel kavramları daha derinlemesine anlamalarını ve bu kavramları farklı bağlamlarda uygulayabilmelerini sağlar. Bu noktada Duval; sembolik, görsel, dilsel ve

somut nesnelerden oluşan temsil türlerini ve temsiller arası geçişlere vurgu yaparak matematiği anlamlandırma sürecini incelemeyi önerir.

Temsil etme süreci Kaput (1987) tarafından "sembol şemaları" (symbol schemes) olarak açıklanmıştır. Kaput'a göre sembol şemaları gözlemlenemez çünkü yapılandırma süreci zihinde şemalar aracılığıyla gerçekleştirilir. Bu doğrultuda Kaput, Piaget'nin bilişsel gelişimine ve şema oluşturma sürecine dayanarak, zihnimizde oluşturduğumuz yapıyı dışa vuracak bir araca her zaman sahip olamayacağımızı iddia eder. Duval de (1999) benzer olarak matematiksel bir temsilin o matematiksel kavramın ya da nesnenin yerini tutamayacağını vurgulamıştır. Bu noktada ise matematiksel nesne ile o nesnenin yerini tutan temsili ayırmak gerektiğini ifade etmiştir. Duval, temsilleri dil bilimi ile birlikte ele alarak temsilleri kullanmanın amacının matematiksel kavramları ve yapıları somutlaştırmanın ötesinde bunlar üzerinde konuşmak olduğunu vurgulamıştır. Temsiller arasında görsel olarak resim, somut modeller gibi araçların matematik ve dil arasındaki ilişkiyi kurmayı sağladığı için daha fazla önem vermek ve matematiksel öğrenme için hangi koşulların elverişli olduğuna odaklanmak gerekmektedir (Duval, 1993; Thompson, 1990).

Diyagram, model, resim, çizim ve temsil kavramları literatürde birbirlerinin yerine kullanılabilmektedir. Bu sebeple öncelikle bu kavramların anlamlarını netleştirmek gerekmektedir. Diyagram, bilgiyi uzamsal bir düzen içinde gösteren görsel bir temsildir (Diezmann & English, 2001). Diyagramlar yapısal temsillerdir; yüzeysel detayları önemsizdir. Örneğin, bir problemdeki ördekleri üçgen çizerek temsil etmek bir diyagram örneğidir çünkü böyle bir temsilde öğrenci her bir ördeği tek tek çizme gibi yüzeysel bir fikirden uzaklaşmış ve başka bir çizim olarak üçgen kullanmayı tercih etmiştir (Goldin & Shteingold, 2001). Böyle bir problemde öğrenci tek tek ördekleri çizmeyi tercih ediyorsa diyagram değil resim temsili kullanmış olurdu. Matematiksel modeller ise, matematiksel bir durumu yorumlama sürecinde zihinde var olan yapılar ile bu yapıların dış temsillerini ifade eder (Lesh & Doerr, 2003). Diğer bir deyişle modeller hem iç temsiller hem de bunların bir yansıması kabul edilen dış temsillerdir. Modelleme ise matematiksel problemleri tanımlama, açıklama, yorumlama veya oluşturmada zihinde meydana gelen süreci ifade eder. Matematik eğitimi araştırmalarında modeller, problem çözme sürecinde zihinde gerçekleşen soyutlama ve genelleme gibi süreçleri tarif eden zihinsel "şemalar" gibi anlamlarda da kullanılmaktadır (Tutak & Güder, 2014). Goldin'e göre (2008) model, temsil ettiği bir nesnenin, bir durumun veya olgunun özelliklerini somutlaştıran spesifik bir yapıdır. Örneğin bir kesrin parça-bütün

anlamını işlerken kullanılan bir daire, temsil ailesi içinde yer alan bir modeldir. Model, ilgili durumların veya olguların bazı yönlerini tanımlar ve bir şeyin basitleştirilmiş versiyonu olarak kabul edilir. Bir fizik modeli, bir araştırma modeli veya bir bilgisayar modeli buna örnektir. *Temsiller* ise genel olarak bir şeyin betimlenmesi veya bir şeyin yerine kullanılması olarak kabul edilir ve matematiksel semboller, resimler, haritalar, çizimler buna örnek olabilir. Bu tanım ve örneklere dayanarak bu araştırmada temsiller başlığı altında birçok temsil ve model örnekleri kullanılmıştır.

2.3.2. Matematiksel Temsil Oluşturmada Zihinsel Süreçler

Matematik yapma sürecinde zihinde gerçekleşen eylemler, temsilleri ve modelleri ifade ettiğinden söz konusu zihinsel süreçlerden bahsetmek gerekmektedir. Öğrenme sürecinde zihinde gerçekleşen eylemlerin, öğrenmenin gerçekleşmesi veya gerçekleşmemesine karar verme noktasında önemli bir yeri vardır. Bu sebeple, öğrenme ve anlama sürecinde önemli kavramlar olan zihinsel eylem, zihinsel görüntü, düşünme yolu, zihinsel imge, eylem şeması, içselleştirme ve şema kavramlarını tanımlamak gerekmektedir. İlk olarak içselleştirme (internalisation), eylemlerin zihinsel imge oluşturmayı mümkün kılacak şekilde yapılandırılması sürecidir. Daha açık bir ifade ile, özümseme ve bir imgeye sahip olma anlamına gelir (Kieren & Pirie, 1991). Bu noktada içselleştirme şemalar, eylemler ve zihinsel imgeleri oluşturmada ve yorumlamada önemli bir kavramdır.

Türkçe kullanımıyla imge, zihinsel imge, imgeleme veya imaj, kişinin tamamen özgün olarak zihninde oluşturduğu bir resim olduğundan temsilleri anlamak için bir temel kabul edilebilir. Douville ve Pugalee'ye (2003) göre "zihnin gözü" olarak da adlandırılan zihinsel imge, olayların veya nesnelerin içsel imgelerinin oluşturma eylemi olarak tanımlanır ve sözel olan ve olmayan matematik kavramlarını içerir. Örneğin bir matematik problemi ile karşılaşıldığında problemde anlatılanı anlamaya çalışırken zihin birçok imge oluşturur. Burada bahsedilen imge, problemi nasıl çözeceğini düşünmek değil, bunun çok daha ilkel bir düşüncesi olarak problemi anlamaya çalışırken bildikleri üzerinde düşünmek ile ilgilidir. Thompson (1994; 1996) imge kavramının zihinsel imgeden fazlası olduğunu ve Piaget'in şema ve zihinsel eylem kavramlarıyla iç içe olduğunu vurgulamıştır. Ona göre zihinsel imgenin arkasındaki deneyimler öne çıkmaktadır. Zihindeki görselin kaynağı herkeste farklı olduğundan her bireyin zihinsel imgesi de tektir. Bu anlamda onun bu tanımı, Piaget'nin deneyimler yoluyla kazanıldığını belirttiği eylem şemalarına dayanır. Thompson (2014) imge tanımını şu ifadelerle derinleştirmiştir: "İmge derken, kişinin eski arkadaşlarıyla dolu

bir odaya girip olayların nasıl gelişeceğini bilmesini sağlayan türden bir bilgiyi kastediyorum. Bir imge çeşitli deneyimler tarafından oluşturulur." (Thompson, 2014: s. 229-230). Sonuç olarak zihinsel imgeler, büyük çoğunlukla deneyimlere dayanan ve söz konusu durumu anlamayı ve betimlemeyi işaret eden özgün zihinsel bir durumdur. Bu özgün zihinsel durumlar eylemlerin, şemaların ve düşünme yollarının oluşması için bir temel teşkil eder.

Eylem veya praksis, Piaget'nin (1971) şema, eylem şeması ve içselleştirme kavramlarını anlamak için bir temel teşkil eder. Eylem, "ihtiyaca yanıt veren tüm hareketler, tüm düşünceler veya tüm duygulardır" (Piaget, 1968, s. 6). *Şemalar* ise davranışlardan fazlası olup davranışların iç yapısını temsil ederler (Wadsworth, 1996). Piaget'nin şema kavramıyla ele aldığı soru şuydu: "Bir işlemi tekrarlanabilir kılan nedir?" Dolayısıyla Piaget şemayı "bir eylemde tekrarlanabilir ve genellenebilir olan her şey" (Piaget, 1971, s. 42) olarak tanımlamıştır. Bu noktada Piaget, bir durumu biraz farklı şekillerde birkaç kez deneyimlemenin çocuğun anlam kazanmasına ve bu anlamı benzer durumlara aktarmasına yardımcı olduğunu öne sürmüştür (Barros Baertl, 2020). Piaget'nin şema kavramına dayanarak eylem şeması kavramı da kullanılmaktadırlar (Nunes & Bryant, 2023).

Eylem şeması kişinin zihinsel eylemlerini içselleştirmesi ve böylece zihinsel bir imge oluşturmasıdır (Piaget, 1952; Barros Baertl, 2020). Nunes & Bryant (2023) çocukların sıklıkla kullandığı farklı eylem şemalarından bahsetmişlerdir: Birleştirme, ayırma, paylaştırma, karşılaştırma, iki kümeyi bire-bir veya bire-çok eşleme (joining, separating, sharing, comparing, putting two sets in one to- one or one- to- many correspondences). Bu eylem şemaların her biri kendi başına kullanılabilir, ancak çocukların bunları koordine etmeyi öğrenmeleri nicel muhakemenin gelişimi için çok önemlidir (Nunes & Bryant, 2023). Bu araştırmada da kesir kavramlarını anlayabilmede öne çıkan birleştirme, ayırma, paylaştırma ve karşılaştırma eylem şemalarına yer verilmiştir.

Şemalar, davranışlarda kendini belli eden zihinsel eylemlerinin birleşimidir. Eğitimciler, gözlemci olarak, anlam ve düşünme şekilleri ayırt edilen davranışlardan şemaları ortaya çıkarabilirler. Kısacası şema, bireylerin davranışlarını açıklamak için onlara atfettiğimiz teorik bir kavramdır (Piaget, 1968; Thompson vd, 2014). Daha açık bir ifade ile araştırmacılar tarafından öğrencilerin bilişsel yapılarını modellemek için kullanılan yapılardır. Bununla birlikte şemaları strateji olarak yorumlamak yaygındır çünkü her ikisi de öğrencilerinin problem çözme faaliyetlerine dikkat eden öğretmenlerin ilgisini çeker. Aradaki fark, şemaların genellikle öğrencinin farkındalığı dışında gerçekleşen çalışma

biçimlerini tanımlamasıdır (McCloskey & Norton, 2009). Bu noktada şema öğretmenler ve araştırmacılar tarafından öğrencilerin bilişsel yapılarını modellemek için kullanılan yapılardır (McCloskey & Norton, 2009). Örneğin, bir öğrencinin problem çözerken görsel temsiller kullanması bir stratejiyi ifade ederken; öğrencinin problemi çözerken zihninde oluşturduğu (örn. toplama işlemi için nicelikleri bir araya getirmesi veya yineleme ve eş parçalamaya dayanarak kesirleri temsil etmesi) eylemler şemaları oluşturur. Öğrencilerin bilişsel yapılarının belirlenmesi ise zihinsel eylemlerini belirleme olarak düşünülebilir.

Zihinsel eylem (mental operation, mental action), zihinsel süreçler yoluyla bilgiyi işleme, depolama, hatırlama ve kullanma yeteneğini ifade eder ve deneyimlerden ortaya çıkar (von Glasersfeld, 1990; McCloskey & Norton, 2009; Nunes & Bryant, 2023). Örneğin, bir nesnenin veya bir dizi işlemin tersine döndürülebilir olduğu fikrini ifade eden Piaget'nin (1968) "tersine çevirme- reversibility" kavramı veya Steffe'nin (2002) yineleme (iterating) kavramı birer zihinsel eylemdir ve araştırmacı aynı zamanda bu eylemler için "işleyiş (operation)" kavramını da kullanmıştır. Bu zihinsel eylemlere dayanarak bir öğrencinin genellenebilir ve sıklıkla kullandığı şemalar ortaya çıkmaktadır. Steffe'nin (2002) kesirlerde eş parçalara ayırma ve parçayı alma (disembedding) eylemlerinin parça-bütün şemasını oluşturması buna örnektir.

Temsiller sadece bir şeyleri temsil etmez; aynı zamanda gerçeklik ve temsil arasındaki yapıyı da korurlar. Örneğin hesap makinesine cebirsel bir ifade girmek tek başına bir temsil değildir. Eğer ifade üzerindeki cebirsel işlemler çocuğun zihninde bir duruma karşılık geliyorsa, o zaman gerçek bir temsilden söz edilebilir (Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger, 1987). Bu doğrultuda Piaget'nin *içselleştirme* kavramından söz edilmektedir. Bir görsel temsilin problem çözmeye faydalı bir araç olarak düşünülebilmesi için öğrenci tarafından tam anlamıyla kavranmış, içselleştirilmiş olması gerekmektedir (Goldin & Shteingold, 2001). Piaget (1971) şemaların kaynağının deneyimlerin *özümsenmesiyle* ortaya çıktığını belirtmiştirtir. Şema büyüdükçe yeni kartlar eklenir ve böylece zihin daha doğru sınıflamalar yapmaya başlar (Wadsworth, 1996). Bu sebeple öğrencilere, deneyim kazanabilecekleri ve kendilerine özgü şemalarını geliştirebilecekleri görevler verilmesi uygun bir seçenek olabilir. Böylece çocuklar, kendi eylem şemalarını kullanarak problemleri çözerler ve bilgiyi içselleştirirler (Nunes & Bryant, 2022).

Zihinsel imgeleme ve buna eşlik eden temsil kullanımı problem çözmede önemli bir rol oynamaktadır (van Garderen & Montague, 2003). Krawec (2014), temsil kullanabilme

yeteneğinin gelişmiş olduğu öğrencilerin problem çözme sürecinde daha başarılı olduğunu; temsil kullanma becerisi düşük olan öğrencilerin ise problem çözmede zorlandıklarını ve başarısız olduklarını tespit etmiştir. Benzer şekilde Douville ve Pugalee (2003), problem çözerken zihinde bir imge oluşturmanın ve bunu temsil etmenin matematik başarısıyla pozitif yönde ilişkisi olduğunu, başarılı öğrencilerin büyük bir yüzdesinin zihinsel imgelemeyi bir problem çözme stratejisi olarak kullandığını tespit etmiştir. Zihinsel imgenin gelişimi somut işlemler dönemindeki gelişim özelliklerinden biridir dolayısıyla bu döneme uygun olarak 7-11 yaş düzeyindeki çocuklarda gelişmeye başlar (Piaget & Inhelder, 1969). Dolayısıyla bu dönemdeki çocuklara verilen görevler ve yöneltilen sorular ile zihinsel imge geliştirmeleri ve devamında matematiksel temsiller ile düşüncelerini somutlaştırmaları oldukça önemli görülmektedir.

Öğrenme sürecinde zihinde meydana gelen ve yukarıda açıklanan çeşitli kavramlara ek olarak Harel'in ve Thompson'ın "anlama" ve "doğru anlama" arasındaki bağı çözme çabası olarak anlama ve düşünme yolu kavramlarını açıklamak gerekir (Thompson vd. 2014). Thompson ve arkadaşları (1994) “anlama” kavramını anlık ve kalıcı olarak iki şekilde yorumlamışlardır. Anlık anlama, bilginin özümsenmesiyle oluşan bilişsel durumu ifade ederken kalıcı anlama bilginin özümsenmesinin bir şema oluşturmasını ifade eder. Düşünme yolu ise muhakeme sürecinde belirli anlamların veya düşünme şekillerinin alışkanlık halinde ortaya çıkması veya bir kişinin belirli bir zihinsel eylemle ilişkili anlama yollarının bilişsel bir özelliği olarak yorumlanmıştır (Harel, 2008). Tüm bu kavramlara dayanarak bu araştırmada öğrencilerin zihinsel imgeleri, düşünme yolları ve zihinsel eylemleri bulgular bölümünde açıklanmıştır.

2.3.3.Temsil Türleri

Tanımlama ve yorumlamadaki bazı farklılıklara rağmen, araştırmacıların birçoğu temsilleri benzer şekillerde sınıflandırmış ve temsillerin doğasına ilişkin çeşitli ayrımlar yapmışlardır. Öncelikle Piaget (1951), temsillerde kullandığımız iki tür araç arasında ayrım yapmıştır: i) resim, tablo ve çetele gibi semboller, ii) sözel ifadeler ile yazılı rakamlar gibi işaretler (Feldman, 2004). Piaget'in teorisinde "semboller" temsil edilen nesnelere benzerlik gösterir ve her çocuk tarafından oluşturulabilir. Örneğin, çocuklar sekiz elmanın resmini kolaylıkla çizebilirler. Aynı şekilde sekiz parmağı ya da sekiz çeteleyi de nasıl yapılacağı gösterilmeden sembol olarak kullanabilirler. Buna karşın, "işaret" örnekleri, elma ve sekiz kelimeleri ile yazılı "8" rakamını ifade eder. İşaretler temsil edilen nesnelere benzemez ve

geleneksel temsillerden oluşurlar. Başka bir deyişle, sembollerin aksine işaretler çocuklar tarafından icat edilemez. Bunlara ek olarak, geleneksel sistemlerin diğer örnekleri olan matematiksel işaretler ("+" gibi) veya müzik notasyonları da işaretler kategorisinde değerlendirilir.

Temsillerle ilgili bir başka sınıflama Lesh, Post ve Behr (1987) tarafından yapılmıştır: Durağan resimler, somut nesneler, konuşma dili, yazılı semboller ve gerçek hayat durumları. Ponte ve Serrazina (2000), ilköğretimde kullanılan başlıca temsil biçimlerini (i) sözlü ve yazılı dil; (ii) sayılar veya dört işlemin işaretleri ve eşittir işareti gibi sembolik temsiller; (iii) şekiller veya grafikler gibi görsel temsiller; ve (iv) somut matematik araçları veya diğer nesneler gibi aktif temsiller olarak sınırlandırmışlardır. Gilbert'e (2010) göre ise işaret, söylem ya da sembol gibi soyut yapılar sembolik temsili; resim, grafik veya çizim gibi görselliği vurgulayan oluşumlar da görsel temsilleri oluşturur. Temsiller konusundaki alanyazında bir çerçeve olarak kullanılan temsil türlerinden en sık tercih edilen ve Goldin (1998) tarafından geliştirilen temsil sistemleri iç ve dış olmak üzere iki kategoride değerlendirilmiştir. Dış temsiller matematiksel bilginin anlaşılmasını sağlayan ve dışarıdan gözlemlenebilen araçlardır (Goldin, 1998). Sözel ifadeler, resimler, grafikler, denklemler ve nesneler dış temsillere örnektir. İç temsiller ise bireyin kendi zihninde anlamlandırdığı ve yeniden yapılandırdığı şekil ve zihinsel konfigürasyonlardır (Goldin & Kaput, 1996). Goldin'in iç ve dış temsilleri bu araştırmada da benimsenen temsil türleri olup aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır.

2.3.3.1.Dış ve iç temsiller

Dış temsiller, matematiksel bir bilginin şekillenerek gözlemlenebilir formlara ulaşmış hali olup öğrencinin anlamlandırmayı gerçekleştirirken izlediği süreçte oluşturduğu tablolar, grafikler, sayı doğruları, modeller, semboller vb. görseller olarak ele alınmaktadır (Goldin, 1998; Goldin & Shteingold, 2001). Alanyazında *çoklu temsiller* (Ainsworth, 2006) olarak da geçen dış temsilleri Goldin (2008) şu şekilde sınıflandırmıştır:

(1) sözlü ve yazılı dil,

(2) çizim, resimsel temsil, ritmik üretimler,

(3) matematiksel formüller ve denklemler,

(4) hedeflerin ve planlamada stratejik düşünme ve planlama,

(5) göz teması, yüz ifadeleri, beden dili, fiziksel temas ve duyguları aktaran durumlar.

Dış temsil çeşitlerinin birbiri üzerinde bir üstünlüğü olmamakla birlikte, temsillerin farklı durumlara özgü olarak oluşturulduğundan bahsetmek gerekir. Örneğin sınıflamayı gerektiren bir problemde tablo oluşturmak daha etkili bir strateji iken sözel bir mantık problemini konuşma ve tartışma yoluyla anlamaya çalışmak daha etkili olabilir. Buna ek olarak, Verschaffel vd. (2010), öğrencilerin hem öğrenme ve kendi akıl yürütmek hem de başkalarıyla iletişim kurmak için dış temsil formlarını yorumlayabilmesi ve kullanabilmesi gerektiğini belirtmiştir. Bu sebeple bu araştırmada da hedeflendiği gibi, araştırmacılar farklı temsil kullanımlarının birlikte veya birbirinin yerine kullanımını önermektedirler (Ainsworth, 2006; Goldin, 2014; Mainali, 2021).

İç temsiller, bireyin psikolojik temsil sistemlerini ifade eder ve kişilerin özgün görsel ve uzamsal imgelerini, sezgilerini ve duygularını içerir (Goldin, 2008). Başka bir ifade ile iç temsiller öğrencinin *zihinsel temsilleri* olarak adlandırılabilir ve doğrudan gözlemlenemediği için imgeseldir. İç temsil, bireyin zihninin içinde zihinsel imge olarak algılanabilen zihinsel bir görüntüdür. Pape ve Tchoshanov (2001) ise iç temsilleri "matematiksel fikirlerin soyutlamaları veya bir öğrenci tarafından deneyim yoluyla geliştirilen bilişsel şemaları" olarak tanımlamıştır (s. 119). Matematikteki birçok temsil iç temsildir çünkü matematiksel bilgi öncelikle zihinde oluşur (Hibert & Carpenter, 1992). Dolayısıyla iç temsiller kişinin zihinsel veya bilişsel yapılarını ve konfigürasyonlarını işaret eder (Goldin, 2014).

Goldin (1998) iç temsilleri şu şekilde sınıflandırmıştır:

(1) sözel,

(2) imgesel,

(3) matematiğin gösterim sistemleri,

(4) planlama, izleme, uygulama ve kontrol,

(5) duyuşsal temsil sistemleri

Sözel temsiller, dilin, kelimelerin, ifadelerin ve cümleleri anlama ve içselleştirme becerisini belirtir. İmgesel temsiller, yalnızca görsel/mekansal sistem içinde temsil edilebilecek veya işlenebilecek görsel imgelerle sınırlı olmayıp "hayal gücü" kapsamında değerlendirilir. *İmgesel temsilin*, zihinsel imge kavramı ile aynı düşünsel süreci ifade

etmekte olduğu söylenebilir. Diğer bir iç temsil olarak *gösterim sistemleri*, matematiğin geleneksel, resmi notasyonları ve sembolik sistemlerdir (örn. sayı sistemleri, algoritmalar, rasyonel sayı ve cebirsel notasyonlar, semboller vb.). Bu gösterimler, dış temsiller olarak adlandırılır ancak bunların oluşturulması ve kullanılmasıyla ilişkilendirilen sistemler ayrı bir iç veya bilişsel temsili sistem olarak ele alınır. Matematikte kavramsal anlama, sembollerin resmi yapılarının içsel temsillerle ilişkisiyle ilgilidir. Çünkü bir matematik notasyonunun anlamını kavrayabilmek veya bir algoritmanın neden işe yaradığını anlamak, notasyonu veya prosedürü tartışabilmeyi içerir. Bir iç temsil olarak *stratejik planlama, izleme ve karar verme* (yürütme kontrolü), problem çözme sürecini yönlendiren yapılar olarak kabul edilebilir ve diğer iç temsillerle bir ilişki içindedir. Son olarak *duyuşsal temsil* problem çözücülerin problem çözme sırasında deneyimledikleri ve kullandıkları değişen duygu durumlarına işaret eder. Merak, şaşkınlık, hayal kırıklığı, kaygı, korku, umutsuzluk, cesaretlendirme, coşku ve memnuniyet gibi durumlar bunlara örnektir.

İç ve dış temsiller birbirinden farklı formları içerse de birbiriyle ilişkili ifade biçimleridir ve aralarındaki etkileşimin bir kombinasyonunu gerektirir (Barmby vd. 2009). Lesh ve arkadaşlarına (1987) göre dış ve iç temsiller birbiriyle iç içe geçmiştir çünkü dış temsil, öğrenenin bilişsel algısının ya da kurgusunun somutlaşmış halidir. İç temsilleri doğrudan gözlemleyemeyiz ancak bunun yerine, öğrencilerin içsel temsilleri hakkında, dışsal temsillerle etkileşimleri, bunlar hakkındaki söylemleri veya üretimleri temelinde çıkarımlarda bulunuruz. İç temsilleri, bireylerin yaptıklarından ya da yapabildiklerinden, yani gözlemlenebilir davranışlarından çıkarırız (Goldin, 2008). Goldin ve Kaput'a (1996) göre dış temsiller matematiksel ilişkiler ve anlam hakkında konuşmamıza izin verirken, iç temsiller bireylerin zihinsel bilgi yapılarını ve problem çözme süreçlerini tanımlama olanağı tanır. Böylece dış ve iç temsiller arasındaki etkileşimler, bireyler hakkında çıkarımlarda bulunmak ve öğrenme ortamı ile bu ortamdaki koşulların bir sonucu olarak öğrenme ve gelişimi tanımlamak için bir araç sağlar. İç ve dış temsil ilişkisinden hareketle, dış temsiller iç temsillerin vücut bulmuş hali olarak kabul edilebilir.

Matematiği en etkili şekilde, temsillerin ve iyi yapılandırılmış matematiksel görevlerin öğrenme üzerindeki etkilerini anlarsak öğretebiliriz. Bunu yapabilmek için, öğrencilerin kavramları içsel olarak nasıl temsil ettiklerini, anlamlandırdıkları, geliştirdiklerini ve farklı temsilleri birbirleriyle nasıl ilişkilendirdiklerini tartışabilmemiz gerekir (Goldin, 2014). Dolayısıyla iç temsilin kolayca gözlemlenememesi ve varlığı konusunda tartışma olması

nedeniyle, temsil araştırmaları genellikle dış temsile dayandırılmıştır. Buna uygun olarak bu araştırmada da öğrencilerin dış temsilleri yorumlanmıştır ancak bununla birlikte derinlemesine görüşmelerde amaçlandığı üzere, öğrencinin nasıl düşündüğünü açığa çıkarmayı sağlayan yönlendirici sorular sorulmuş ve iç temsillerine yönelik bilgi edinilmiştir. Böylece öğrencinin dış temsili üzerinde konuşma ve oluşturduğu temsili açıklama imkanı doğmuştur. Ek olarak, araştırma sürecinin tamamında öğrencilerin söz konusu kavram ve konuya ilişkin bir dış temsil oluşturması için görevler verilmiş ve böylece kesirler konusunda sıklıkla kullanılan temsilleri kullanmaları desteklenmiştir. Sonuçta da öğrencilerin oluşturdukları standart ya da özgün temsilleri üzerinde konuşulmuş ve iç temsilleri hakkında çıkarımlar yapılmıştır.

2.3.3.2.Somut ve teknolojik matematik araçları

Yapılandırmacı öğrenme kuramına göre gelişimin somut işlemsel aşamadan daha soyut bir aşamaya doğru ilerlediği ve bu nedenle öğrenmenin bu yörüngeyi takip etmesi gerektiği öne sürülebilir. Dahası, somut materyaller öğrenciler için daha ilgi çekici ve cazip olduğundan bu durum onları öğrenme sürecine daha fazla dahil edebilir. Görsel temsiller arasında yer alan somut temsiller de matematik öğretim sürecinde sıklıkla kullanılmaktadır (Goldin, 2008; Ukdem, 2021).

Bartolini ve Martignone (2020) matematikte kullanılan araçları dört kategoriye ayırmıştır:

1) Somut araçlar, öğrenciler tarafından somut olarak ele alınabilen, geniş ve derin bir duyusal deneyim seti sunan fiziksel nesnelerdir.

2) Tarihsel-kültürel araçlar, matematiğin uzun geçmişinde, problemleri keşfetmek veya çözmek için yaratılmış somut eserlerdir.

3) Yapay araçlar, eğitimciler tarafından belirli eğitim amaçları doğrultusunda tasarlanmış eserlerdir.

4) Sanal araçlar, fiziksel nesnelere benzeyen ve gerçek, somut muadillerine dönüştürülebilen dijital eserlerdir. Bu araştırmada uygulanan bazı etkinliklerde somut araçlar olarak kesir çubukları ve farklı web sitelerde yer alan sanal araçlar kullanılmıştır.

Matematik öğretiminde çok önemli bir konu, öğrencilerin öğrenme şeklidir. Bu süreçte önemli bir rol kavramsal ve görsel temsiller tarafından yönlendirilir. Bir görsel temsil çeşidi sayılabilen teknoloji, temsilleri etkileşimli ve dinamik hale getirerek ve özgün bağlamlarda aktararak kullanılabilir (Kazanidis, Palaigeorgiou & Bazinas, 2018). Bu konuda yapılan

çeşitli araştırma sonuçları teknolojinin matematik eğitiminde kullanılmasının çeşitli olumlu sonuçlarını ortaya çıkarmışlardır. Öğretim teknolojilerinden destek alınarak yapılan öğretimlerde öğrenciler matematik kavramları üzerinde daha esnek düşünebilirler (Ainsworth, 2006) ve söz konusu konu ve kavrama dair bilişsel ve duyuşsal bilgilerini geliştirir (Hwang & Hu, 2013). Buna ek olarak teknoloji destekli temsil uygulamalarının öğrencilerin matematiksel bilgiyi, kavramı veya problemi anlamlandırmada olumlu yönde etkilendiği (Debrenti, 2015; Rau, Aleven & Rummel, 2009; Özdemir & Reis, 2013; İzgiol, 2014; Ainsworth, 2006) ve öğrencileri matematiksel ilişkileri görmeye teşvik edip görsel ile sembolik temsil biçimlerini ilişkilendirmelerini desteklediği (Suh, Moyer & Heo, 2005) belirlenmiştir. Bahsedilen araştırma sonuçlarına da dayanarak bu araştırmada kesir kavramları işlenirken çeşitli somut ve teknolojik araçlardan faydalanılmıştır. Örneğin birim kesirleri öğrenme sürecinde kesir çubukları; kesir büyüklüğü ve karşılaştırmaları sürecinde çeşitli websitelerden faydalanılmıştır.

2.3.3.3.Matematiksel dil ve konuşma

Bilimsel kavramlar sözel olarak gelişir ve sözel tanımlardan özel içeriklere doğru ilerler. Bu doğrultuda matematiksel kavramların anlamlı bir bütün oluşturacak şekilde düzenlenmesinde dil, konuşma ve ifadenin yeri büyüktür (Duval, 1999). Matematik dili; günlük dil ile matematiğin doğasını oluşturan özgün ifadelerin beraberliğinden oluşan bir dildir. NCTM (2000), öğrencilerin matematiksel dili kullanması gerektiği üzerinde durarak onların sınıf içi diyaloglara katılması, sınıfta iletişim ortamının sağlanması gerektiği üzerinde durmuştur. Bu sayede öğrenciler konuşarak ve diğer öğrenenlerle iletişime geçerek yaşadıkları zorlukları telafi etme fırsat bulabilir ve konuşma dili ile temsil edilen matematiksel bilgiyi içselleştirebilirler. Öğrenciler matematiksel düşüncelerini başlangıçta günlük dil ile ifade etmeye çalışırken, daha sonra günlük dilin temelini oluşturan matematiksel dili öğrenmeye başlarlar (Nalbant, 2015). Dolayısıyla matematik öğrenme sürecinde matematiksel dil gelişimini desteklemek de öğretimin amaçlarından biri olmalıdır.

Duval (1999) diğer araştırmacılardan farklı olarak temsil kullanımını matematiksel dil ile ilişkilendirmiş ve temsilleri matematiksel bilgiyi somutlaştırmanın ötesinde, nesneler üzerinde konuşabilmek için gerekli olduğunu belirtmiştir. Dil, düşünce için bir araç haline geldiğinde, dil aracılığıyla dünya hakkında verilen bilgilerin ötesine geçerek sonuçlara ulaşmamızı sağlar. Örneğin, "köpekler evcil hayvanlar sınıfının bir parçasıdır." dediğimizde parça-bütün ilişkileri hakkındaki muhakemeyi kullanarak daha fazla evcil hayvan olduğu

sonucuna varılır. Böylece dili bir düşünce aracı olarak kullanarak bize verilen bilginin ötesine geçmiş oluruz (Nunes & Bryant, 2023). Kesirlerde kullanılan dil kesir dili (fraction language) olarak da geçmekte ve Steffe'nin (2004) eş parçalama (partitioning), yineleme kavramları veya bir bütünü oluşturan birim kesir ifadesi kesir diline örnek verilebilir (Hackenberg, 2013). Ek olarak, kesirlerde eş paylaşım bir kesir dili kullanıma örnektir. Yani çocuk kesirlerle çalışırken eş paylaşım vurgusu yapabiliyorsa ve bu eş paylaşım fikrini içselleştirebildiyse kesir dilini ve dolayısıyla matematiksel dili doğru kullanır (Hackenberg, 2007). Bu bilgilere dayanarak, bu araştırmada sınıf öğretim deneyi yürütülmesi uygulanarak sınıf içi tartışmalar ve öğrenciler arası etkileşim desteklenmiştir.

Ülkemizde temsiller konusunda yapılmış araştırmalarda matematik ve sınıf öğretmenleri ile öğretmen adaylarının temsil kullanımları (Dündar & Yılmaz, 2015; Düşünsel, 2019; İpek & Okumuş, 2012) ve ilkokul öğrencilerinin temsil kullanma becerileri (Kamacı, 2021; Kılıç & Özdaş, 2010) araştırılmıştır. Temsillerle ilgili Türkiye'de yapılan araştırmalarda en az tercih edilen örneklem grubunu ilkokul öğrencileri oluşturmaktadır (Ayyıldız & Cansız Aktaş, 2022). Oysa özellikle ilkokul öğrencilerinin somut işlemler döneminde olduğu göz önünde bulundurulduğunda en sık bu yaş grubuyla çalışmaların yürütülmesi beklenmektedir. İlkokulda temsillerin kullanılmasını konu edinen sınırlı sayıdaki çalışmalar incelendiğinde; öğrencilerin probleme uygun temsil oluşturamama ve temsiller arası geçiş yapamama sorunlarıyla karşılaştığı ve sıklıkla aynı temsil türünü kullanmayı tercih ettikleri görülmüştür (Baştürk, 2010; İpek & Okumuş, 2012; Kılıç & Özdaş, 2010). Bu araştırmada 4. sınıf öğrencilerinin kesirler konusundaki nicel muhakemelerini geliştirmelerine ek olarak kesir kavramlarını öğretirken temsil kullanma becerilerini de geliştirmek amaçlanmıştır.

2.4. İlgili Araştırmalar

2.4.1. Kesirlerle İlgili Yurt İçinde Yapılan Araştırmalar

İlkokulda kesirler konusunda yürütülen çeşitli araştırmalar bulunmaktadır. Bu araştırmalardan bir kısmı öğrencilerin kesir kavramına dair zihinsel imgelerini ya da kesirleri nasıl öğrendiklerini konu edinmiştir. Örneğin Özçakır Sümen (2022) durum çalışması olarak tasarladığı araştırmasında 4. sınıf öğrencilerinin kesirlere ait kavram imajlarını incelemiştir. Araştırmacı veri toplama aracı olarak zihin haritaları, kesir kavram imajı testi ve kesir modelleme testi kullanmıştır. Araştırmaya katılan 12 öğrencinin kesirlere ilişkin parça-

bütün, bölüm ve oran kavram imajlarına sahip oldukları ortaya çıkmıştır. Kesirlerin öğrencilerde en çok çağrıştırdığı kavramın bölme olduğunu ancak kesirleri işlemci ve ölçü anlamında hiç kullanmadıkları belirlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin sıklıkla alan modelini kullandıkları ancak sayı doğrusu ve küme modelini hiç kullanmadıkları görülmüştür. Bu araştırmaya benzer olarak Kayhan (2010) 4'ü beşinci sınıf, 4'ü sekizinci sınıf olmak üzere toplam 8 öğrencinin kesir çeşitlerini birbirine dönüştürmedeki zihinsel modellerini incelenmiştir. Verilerin analizi sonucunda kesir çeşitlerinin birbirine dönüştürülmesi sürecinde sınıf düzeyi açısından büyük farklılıklar gözlemlenmemiştir. Bu araştırmalardan farklı olarak ise Önal ve Yorulmaz (2017) 4. sınıf öğrencilerinin kesirler konusunda yaptıkları hataları incelemiştir. Araştırmacılar 143 öğrenci ile çalışmış ve öğrencilere ait dokümanların analizini yapmışlardır. Araştırma sonucuna göre öğrencilerin kesirlerde en fazla yaptıkları hatalar; kesirlerde sıralama yaparken doğal sayı gibi işlem yapma, toplama işleminde aynı kesir içerisinde pay ve paydayı toplayıp sonucu doğal sayı olarak yazma, çıkarma işleminde pay ve paydaları ayrı düşünüp büyük sayıdan küçük sayıyı çıkarma, sayı doğrusunda bütünü parçalara eş olarak ayırma olarak belirlenmiştir.

Çetin ve Çite (2022) 4. sınıf öğrencilerinin kesir sayı duyularının cinsiyet, okula başlama yaşı, okul öncesi eğitimi süresi ve çocukların oynadıkları oyun türü açısından incelemişlerdir. 301 öğrenci ile gerçekleştirilen araştırmada veri toplama aracı olarak "Kesir Duyusu Testi" uygulanmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin kesir sayı duyularının orta düzeyde olduğu; cinsiyet, okula başlama yaşı ve okul öncesi eğitimi süresi değişkenlerine göre anlamlı olarak farklılaşmadığı tespit edilmiştir. Diğer yandan öğrencilerin kesir sayı duyularının oynadıkları oyun türü değişkenine göre farklılaştığı; dijital oyun türünü tercih eden öğrencilerin kesir kavrama puanlarının bireysel oyun tercih eden öğrencilere göre yüksek olduğu belirlenmiştir. Bu araştırmaya benzer olarak Bayak Acar (2023) 4. Sınıf öğrencilerinin kesirler konusuna yönelik sayı duyularının geliştirilmesini amaçladığı eylem araştırmasında üç öğrenci ile çalışmıştır. Öğrencilerin kesir duyusu uygulama öncesi ve sonrası olmak üzere iki defa ölçülmüştür. Araştırmanın sonuçlarına bakıldığında, öğrencilerin kesirler konusuna yönelik sayı duyusunun kesirlerin anlam ve büyüklüğünü anlama, denk gösterim, referans noktası kullanımı ve tahmin bileşenleri doğrultusunda gelişim gösterdiği gözlemlenmiştir.

Kesir araştırmalarının birçoğu matematiksel temsiller konusu ile birlikte ele alındığı görülmektedir. Kesrin de bir matematiksel sembol olduğu düşünüldüğünde temsiller kesir

araştırmalarının ayrılmaz parçası olarak görülebilir. Şahin (2019) çalışmasında öğrencilerin kesir problemleri çözümünde kullandığı temsil türlerini ve temsiller arası geçişlerini incelemiştir. Çalışma 6, 7 ve 8. sınıftaki 131 öğrenci ile yürütülürken çalışmanın verileri çeşitli etkinlikler aracılığı ile toplanmıştır. Çalışma sonucunda öğrencilerin en çok görsel temsil kullandığı, en çok zorlandıkları temsil türünün sembolik temsil olduğu ve öğrencilerin temsilleri ayrı ayrı bildikleri ancak temsiller arası geçişte zorlandıkları görülmüştür. Kamacı ve Yıldız (2023) tarafından yapılan araştırmada 4. sınıf öğrencilerinin kesir çeşitleri ve birim kesre yönelik kullandığı temsillerin ve modelleme performansları incelenmiştir. Araştırmaya katılan 249 öğrenciye araştırmacı tarafından geliştirilen 'Kesir Temsilleri Formu' ve 'Kesir Modelleme Formu' dağıtılmıştır. Araştırmadan elde edilen bulgulara göre öğrencilerin basit, bileşik, tam sayılı ve birim kesri ifade etmede en fazla tercih ettiği temsiller sırasıyla görsel, sembolik ve sözel temsillerdir. Görsel temsiller arasında ise alan modeli öğrencilerin en fazla tercih ettiği görsel temsildir.

Öğrencilerin kesirler konusundaki bilgilerini, motivasyonlarını veya tutumlarını arttırmayı amaçlayan deneysel araştırma örnekleri bulunmaktadır. Bu araştırmalarda görsel temsil kullanımı baskın olmak üzere çeşitli strateji veya yöntemler ile yapılan öğretimler sonucunda öğrencilerin kesir bilgileri ölçülmüştür. Ukdem (2021), 3. sınıf kesirler konusunda somut ve sanal manipülatif (matematik öğretim araçları) destekli öğretim uygulamalarının kavramsal anlamalarına ve motivasyona etkisini incelemiştir. Aynı devlet okulunun üç farklı şubesinde öğrenim gören 61 öğrenci ile deneysel olarak gerçekleştirilen bu araştırma bulgularına göre; manipulatif kullanımı 3. sınıf öğrencilerinin kesirleri kavramalarında istatiksel olarak anlamlı bir farklılık oluşturmuş ancak matematik dersi motivasyonlarında istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık oluşturmamıştır. Kavramsal anlamadaki değişimin %24'ünün manipülatif kullanmaktan kaynaklandığı görülmüştür. Ancak somut manipulatiflerin kullanıldığı grubun kavrama puanları ile sanal manipulatiflerin kullanıldığı grubun kavrama puanları arasında anlamlı bir farklılaşma tespit edilmemiştir. Benzer bir araştırmada Kavas (2022) 4. sınıf kesirler ünitesinin öğretiminde 3B yazıcıların kullanımının öğrencilerin akademik başarılarına etkisini incelemiş ve 38 öğrenci ile çalışmıştır. Araştırmada veri toplama araçları olarak “Kesirler Ünitesi Akademik Başarı Testi (KÜABT)”, deney grubundaki öğrencilerin dört hafta boyunca beraber yaptıkları etkinliklerin gözlemlenmesi ve öğrenci günlük formu ve yapılandırılmış görüşme formu kullanılmıştır. Araştırma sonucunda 3B yazıcıların kullanıldığı etkinliklerin uygulandığı deney grubu lehine olmak üzere KÜABT sontest puanları arasında manidar bir

farklılığın olduğu görülmüştür. Ayrıca 3B yazıcıların kullanıldığı derslerde öğrencilerin konuyu daha kolay öğrendikleri tespit edilmiştir.

Kükey, Tutak ve Tutak (2019) kesirler konusunun görsel materyal ile öğretiminin ilkokul 4. sınıf öğrencilerinin matematik başarı ve tutumlarına etkisini incelemiştir. Yarı deneysel yöntem olarak tasarlanan araştırmada deney grubunda 20, kontrol grubunda ise 18 öğrenci ile çalışılmıştır. Veriler "Kesirler Başarı Testi ve Matematik Tutum Ölçeği" aracılığıyla elde edilmiştir. Analiz sonucunda görsel materyal ile öğretimin yapıldığı deney grubunun matematik başarısının normal öğretim yapılan kontrol grubuna göre anlamlı düzeyde arttığı belirlenmiştir. Ayrıca deney grubunun matematiğe yönelik tutumunun kontrol grubuna göre daha yüksek olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Yücel Yumuşak (2014) oyun destekli matematik öğretiminin kesirler konusundaki erişi ve kalıcılığa etkisini incelediği yüksek lisans tezinde 56 dördüncü sınıf öğrencisi ile çalışmıştır. Araştırmacı kesir türleri, kesirlerin sayı doğrusunda gösterimi, kesirleri karşılaştırma ve sıralama ile basit kesir problemlerini içeren çeşitli oyun türlerini 6 haftalık süre içerisinde deney grubuna uygulamıştır. Araştırmanın bulguları, oyunla desteklenmiş matematik öğretiminin başarıyı arttırdığını ve kalıcılığı sağladığını göstermiştir. Ayrıca deneysel işlem sürecinde öğrencilerin derse olan ilgilerinin olumlu yönde arttığı gözlemlenmiştir.

Bal İncebacak (2019), sorgulama temelli öğretimin 4. sınıf öğrencilerinin kesir dilini kullanma becerilerine ve akademik başarılarına etkisini incelemiştir. Karma model ile tasarlanan ve yarı deneysel desen kullanılan bu araştırmada 110 öğrenci ile çalışılmıştır. Veriler araştırmacılar tarafından geliştirilen kesirler başarı testi, kesir dilini kullanma becerisi ölçeği, süreç sonu öğretmen görüşme formu, süreç sonu öğrenci görüşme formları kullanılarak toplanmıştır. Araştırma sonuçları sorgulama temelli öğretim alan öğrencilerin her iki kontrol grubuna göre sontest puan ortalamalarında daha başarılı olduğunu ve kesirler konusunu öğrenmede deney grubu lehine anlamlı düzeyde farklılık olduğu ortaya koymuştur. Aynı zamanda sorgulamaya dayalı olarak verilen matematik eğitiminin kesir dili kullanımını arttırdığı ve öğrencilerin diğer gruplara göre daha başarılı oldukları ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin görüşlerinden elde edilen bulgulara göre sorgulama temelli öğretim ile konuyu daha iyi anladıkları, öğrenme sorumluluğunu kendilerinde hissettikleri, öğrenme sürecine aktif olarak katıldıkları ve bilgiyi zihinlerinde daha iyi yapılandırdıkları sonucuna ulaşılmıştır.

Nama Aydın (2014) deneysel olarak gerçekleştirdiği araştırmada Gerçekçi Matematik

Eğitiminin (GME) ilkokul 3. sınıf kesirlerin öğretiminde başarıya kalıcılığa ve tutuma etkisini incelemiştir. Çalışmada deney grubuna GME'ye dayalı öğretimin genel ilkelerine göre etkinliklerhazırlanmıştır. Kontrol grubuna ise konu ile ilgili tanım ve gerekli bilgiler hazır verilmiş, ders kitabı temel alınarak alıştırmalar birlikte çözülmüştür. Araştırma sonucunda deney grubunda bulunan öğrencilerin hem başarı hem tutum puanlarının anlamlı düzeyde daha yüksek olduğu belirlenmiştir. Bu araştırmaya benzer olarak Kan (2019), 4. sınıf kesirlerde gerçekçi matematik eğitimi yönteminin öğrenci başarısına etkisini incelediği araştırmada ön test son test kontrol gruplu yarı deneysel desen kullanmıştır. Ünite sonunda her iki gruba da tekrar matematik başarı testi ve matematik tutum ölçeği uygulanmıştır. Uygulamadan bir ay sonra her iki gruba da tekrar matematik başarı testi uygulanarak kalıcılık oranları ölçülmüştür. Bu karşılaştırmalar sonucu, kesirler konusunu GME ile öğrenen öğrencilerin akademik başarılarının, kalıcılık oranlarının ve matematik tutum bildirimlerinin, geleneksel yöntem ile öğrenen gruba göre daha yüksek olduğu sonucuna varılmıştır.

2.4.2. Kesirlerle İlgili Yurt Dışında Yapılan Araştırmalar

Kesirler söz konusu olduğunda akla ilk gelen isimlerden Steffe, farklı yaş düzeylerinden öğrencilerin kesirleri nasıl anladığına dair araştırmalar yürütmüştür. Örneğin Steffe ve Olive (1990) gerçekleştirdikleri öğretim deneyi araştırmasında çocukların kesirli şemalarının, sayısal sayma şemalarından ortaya çıkabileceğini test etmişlerdir. Steffe (2002) ilkokul öğrencilerinin kesirleri öğrenirken geliştirdiği ve kullandığı zihinsel eylemleri ve şemaları özetlemiştir. Bunun sonucunda çocukların kesir kavramını öğrenirken eş parçalama, bölme, parçalara ayırma, yineleme gibi zihinsel eylemlere dayanarak farklı şemalar kullandıklarını ortaya koymuştur. Hackenberg (2013), Steffe'nin geliştirdiği şemaları öğrenciler üzerinde denemiş ve yeni eylem şemaları ortaya koymuştur.

Kesir araştırmaları çoğunlukla kavramsal ve işlemsel anlamanın incelenmesi veya bu anlamaların geliştirilmesi amacıyla yürütülmüştür. Örnek olarak Nahdi ve Jatisunda (2020), durum çalışması olarak yürüttükleri araştırmada ilkokul öğrencilerine kesirlerde karşılaştırma görevleri vermişlerdir. Araştırmada amaç, kesirlerde işlemsel ve kavramsal bilginin karşılaştırma görevlerinde birbiri üzerindeki etkisini ortaya koymaktır. Elde edilen sonuçlar kesirleri karşılaştırmada başarılı olan öğrencilerin kavramsal ve işlemsel bilgiyi iyi bir şekilde birleştirebildiklerini göstermiştir.

Ulusal literatürde olduğu gibi uluslararası literatürde de kesir araştırmalarında temsiller kesirlerle birlikte sıklıkla ele alınmıştır. Tunç-Pekkan (2015), yaygın olarak kullanılan üç dış temsilin (daire, dikdörtgen, sayı doğrusu) öğrencilerin kesir bilgisi ile nasıl ilişkili olduğunu araştırmıştır. Bu durumu anlamak için, "Kesir Şeması Teorisi" çerçevesinde aynı kesir bilgisine sahip üç temsili kullanan bir test geliştirilmiştir. Araştırmaya 4. ve 5. sınıf ABD'li 565 öğrenci katılmıştır. Bulgular öğrencilerin parça-bütün kesir muhakemesini kullanmayı gerektiren daire ve dikdörtgen maddelerinde benzer performans gösterdiklerini ancak öğrencilerin performansının sayı doğrusu grafik temsilini içeren maddelerde önemli ölçüde daha düşük olduğunu göstermektedir. Farklı alan modellerinin kullanımına dair ise öğrencilerin dikdörtgen gösteriminde daire gösterimine kıyasla daha başarılı oldukları görülmüştür. Rau ve arkadaşları (2009), kesir öğretiminde çoklu temsiller kullanılmasının etkilerini incelemiştir. Bu amaç doğrultusunda Amerika'da bir ortaokuldaki toplam 132 altıncı sınıf öğrencisi düzenli olarak üç günlük çalışmaya tabi tutulmuştur. Bu çalışma öncesinde öğrencilere kesir bilgileriyle ilgili bir ön test, ardından da üç günlük çoklu temsillerin kullanıldığı bilgisayar tabanlı eğitimin ardından son test uygulaması gerçekleştirilmiştir. Çalışma sonunda elde edilen bulgular incelendiğinde araştırmacılar öğrencilerin kesirleri çoklu temsillerle daha iyi öğrendikleri, problemlere kalıcı çözümler buldukları, karmaşık problemler karşısında daha yenilikçi çözüm önerileri sunabildikleri sonuçlarına ulaşmıştır. Benzer olarak Gabriel ve arkadaşları (2012), 4. ve 5. sınıftan 292 öğrencinin kesir bilgilerini geliştirmek için kesir büyüklüğü temsiline odaklanan, yaparak öğrenme etkinliklerine ve çeşitli somut materyaller kullanmaya dayalı bir müdahale tasarlamışlardır. Yarı deneysel araştırma olarak 10 hafta boyunca yürüttükleri çalışmada temsil kullanarak kesir büyüklüklerini öğrenen öğrencilerin kesirlerin kavramsal olarak anlaşılmasında bir gelişme olduğu gözlemlenmiştir.

Matematiksel temsiller arasında yer alan ve kesirler konusunda sıklıkla kullanılan sayı doğrusu konusunda yapılmış birçok araştırma bulunmaktadır. Hamdan ve Gunderson (2016), 2. ve 3. sınıftaki 114 öğrencinin kesirleri sayı doğrusuna yerleştirme becerilerini incelemişlerdir. Bu doğrultuda katılımcı öğrencileri üç gruba ayırmışlardır: Birinci grup sayı doğrusu; ikinci grup alan modelleri konusunda eğitim alırken üçüncü grup kontrol grubu olarak görev almıştır. Araştırmada amaç, farklı modeller kullanarak kesir büyüklüğünü temsil etmenin çocukların kesirleri öğrenmesine katkıda bulunup bulunmadığını değerlendirmektir. Sonuçta hem sayı doğrusu hem alan modeli grubu kesir bilgilerini geliştirmiştir. Ancak edindikleri bilgileri kesir büyüklüğü bilgisine aktarabilenler sayı

doğrusunda eğitim alan çocuklar olmuştur. Sonuçta da sayı doğrusunun, çocukların kesir büyüklüğünü anlamalarının temelini oluşturduğunu belirtmişlerdir. Pesen (2008) kesirlerin sayı doğrusu üzerindeki gösteriminde 3. sınıf öğrencilerinin öğrenme güçlüklerini ve hatalarının altında yatan kavram yanılgılarını araştırmıştır. Sonuçta öğrencilerin sayı doğrusunu eş parçalara ayırmada, sayı doğrusu üzerinde belirlenen noktaya karşılık gelen kesri belirlemede, kesrin sembolik gösterimi olan a/b'nin sayı doğrusu üzerinde gösteriminde kesri bir tek sayı olarak algılamakta güçlük çektiklerini ve bu sayıdaki pay ile paydayı farklı sayılar gibi algılama yanılgısı içerisinde olduklarını belirlemiştir.

Uluslararası alanyazında yer alan çalışmalara bakıldığında nicel muhakeme ile kesirler konusunun incelendiği çok az araştırmanın yapıldığı görülmektedir. Buna örnek olarak Hackenberg (2006) araştırmasında, 6. sınıf öğrencilerinin kesirlerde nicel muhakemelerinin cebirsel düşünme için önemli bir temel oluşturabileceğini göstermiştir. Dört öğrenciyle bir yıl süren öğretim deneyi sırasında derinlemesine görüşmeler gerçekleştirmiş ve bu görüşmeler süresince öğrencilere çarpımsal muhakeme gerektiren çeşitli kesir etkinlikleri uygulatılmıştır. Araştırma sonucunda kesirlerle nicel akıl yürütmenin çarpımsal cebirsel akıl yürütme için önemli bir temel oluşturabileceği sonucuna varılmıştır. Bu araştırmaya benzer olarak Hackenberg (2013) öğrencilerin kesirlerde nicel akıl yürütmeleri ile cebirsel akıl yürütmeleri arasındaki ilişkileri anlamak için 18 ortaokul ve lise öğrencisiyle bir görüşme çalışması yapmıştır. Her biri üç farklı çarpımsal kavrama sahip altı öğrencinin kesir bilgisi ve cebirsel muhakemesini incelemiştir. Bu öğrencilerin kesir bilgilerinin önceki araştırmalarla tutarlı olduğu, öğrencilerin bölme ve yineleme işlemlerini yapılandırdıkları ancak parçalara ayırma işlemlerini yapılandırmadıkları ve öğrencilerin kesirleri bütünler içindeki parçalar olarak algıladıkları görülmüştür. Öğrencilerin yineleme işlemleri cebir problemleri üzerinde çalışmalarını kolaylaştırmış, ancak ayrıştırma işlemlerinin eksikliği cebirsel denklem ve ifadelerin yazılmasında ve ilişkilerin genelleştirilmesinde önemli bir kısıt oluşturmuştur. Aynı araştırma projesinin devamı olarak Lee ve Hackenberg (2013) öğrencilerin kesirlerde nicel akıl yürütmeleri ile cebirsel düşünmeleri arasındaki ilişkiyi araştırmışlardır. Öğrencilerle, kesirlerde nicel akıl yürütmelerini araştırmak için ve bilinmeyenlerin açıkça kullanılmasını gerektiren problemlerin çözümlerini araştırmak için olmak üzere iki kez görüşülmüştür. Elde edilen bulgular güçlü kesir bilgisinin cebirsel durumlarda yapıları ve ilişkileri etkileyebildiğini göstermektedir.

Saenz-Ludlow (1994) 3. sınıf öğrencilerinin kesir etkinliklerini çözerken kullandıkları yöntemleri analiz etmek için boylamsal bir öğretim deneyi gerçekleştirilmiştir. Araştırmaya katılan toplamda 6 öğrenci kesir görevlerini, doğal sayılarla çalışmadaki gelişmişliklerine bağlı olarak farklı karmaşıklık derecelerinde de olsa benzer şekillerde çözmüşlerdir. Öğrencilerin çalışma yöntemleri, önceki şemaların yenilerinin temel taşlarını oluşturmasına ek olarak, gelişimsel olarak kesir bilgisi inşa ettiklerini göstermiştir. Elde edilen bulgular öğrencilerin tamamının kesirlerle ilgili akıl yürütmelerinin doğal sayılarla ilgili nicel akıl yürütmelerine dayandığını göstermiştir. Crawford ve arkadaşları (2019) matematik öğrenme güçlüğü olan 3. ve 5. sınıf öğrencilerinin kesirleri karşılaştırmak için kullandıkları strateji türlerine dair "Nicel Akıl Yürütme Stratejilerini Değerlendirme Çerçevesi" modellenmiştir. 6.000 öğrenciden elde edilen yanıtlara göre kesirleri karşılaştırma görevlerinde öğrenciler şu stratejileri kullanmışlardır: (a) kavramsal akıl yürütme stratejisi, (b) temellendirilmemiş akıl yürütme stratejisi, (c) kısmi akıl yürütme stratejisi ve (d) algoritmik akıl yürütme stratejisi. Araştırmacılara göre öğretmenler bu çerçeveyi kullanarak öğrencilerin sayılar ve işlemler alanındaki nicel problemler hakkında nasıl düşündüklerini keşfedebilirler. Kesirler konusunu nicel muhakeme ile birlikte ele alan araştırmalar arasından bu araştırma ile benzer olan çalışmada kesirler konusu ile nicel muhakeme ve aritmetik bilgisi incelenmiştir. Barros Baertl (2020) 4. sınıfta eğitim gören 124 öğrenci ile boylamsal olarak çalıştığı doktora tezi çalışmasında nicel muhakeme ve aritmetik bilgisinin kesirleri öğrenmedeki etkisini araştırmıştır. "Nicel Akıl Yürütme ve Aritmetik Bilgi Testi" olmak üzere iki test uygulandığı araştırmada katılımcılara 12 ay sonra tekrar aynı test uygulanmıştır. Elde edilen bulgulara göre araştırmacı, kesirleri anlamak için çocukların hem nicel muhakeme hem de aritmetik bilgisine sahip olması gerektiğini ve nicel muhakemenin kesirleri öğrenmede güçlü bir yordayıcı olduğunu tespit etmiştir.

Sonuç olarak kesirler konusunda yurt içinde ve yurt dışında yapılmış çeşitli araştırmaların olduğu belirlenmiştir. Bu araştırmalardan yurt içinde yürütülenlerin çoğunlukla deneysel araştırma ve betimsel araştırma olarak tasarlandıkları görülmüştür. Buna karşın, öğrencilerin süreç içerisinde nasıl öğrendiğini inceleyen araştırma sayısının oldukça kısıtlı olduğu görülmüştür. Bu durum, öğrencilerin kesir kavramlarını nasıl öğrendiğini, uygulama sürecinde yapılan müdahaleleri ve sürecin analizini gerektiren araştırma türlerinin uygulanmasını gerekli kılmaktadır. Yurt dışında yapılmış araştırmaların genellikle kesirlerde kavramsal anlama, kesir büyüklüğü, kesirlerde sayı doğrusu kullanımı ve temsil kullanımı konularında yürütüldüğü görülmüştür. Bununla birlikte, oldukça sınırlı

da olsa kesirler ve nicel muhakemeyi ele alan araştırmaların olduğu ve bu tür araştırmaların zamanla arttığı belirlenmiştir. Dolayısıyla kesri bir nicelik olarak anlamayı gerektiren araştırmaların daha fazla çalışılması gerektiği düşünülmektedir.

2.4.3. Nicel Muhakemeyle İlgili Yurt içinde Yapılan Araştırmalar

Ulusal literatürde yer alan nicel muhakeme konusunda yürütülen araştırmaların çok büyük bir bölümünde ortaokul ve lise öğrencileriyle çalışıldığı görülmüştür. Bu araştırmalar ise genellikle problem çözme becerisi ve matematiksel muhakeme ile birlikte ele alınmıştır. Örneğin Akın (2016), 8. sınıf öğrencilerinin nicel muhakeme temelinde tasarlanan öğrenme ortamında problem çözme sürecindeki nicel muhakeme becerileri, düşünme biçimleri ve matematik okuryazarlık düzeylerini incelemiştir. 19 öğrenci 6 aylık öğretim deneyi kapsamında niceliklerin yüzdesini hesaplama, bir nesnenin hızının kavramsallaştırılması, niceliklerin farklı temsillerini yorumlama ve ilişkilendirme, cebirsel stratejileri kullanma, niceliklerin değişimini analiz etme ve genelleme ile ilgili deneyim kazanmışlardır. Sonuçta birçok katılımcının problem bağlamındaki durumu anlamak yerine problemi çözmek için anlamsız hesaplamalar yaptıkları, hiçbir öğrencinin çözümün doğruluğunu gösterme ihtiyacı duymadığı ve genellikle problem bağlamındaki nicelikler arası ilişkileri görmezden gelerek niceliksel ve matematiksel olmayan muhakemeler yaparak argüman sundukları, çözüm ile ilgili gerekçe sunmada güçlük çektikleri ortaya çıkmıştır. Ancak öğrencilerin nicel muhakeme becerilerinin arttığı ve buna bağlı olarak problem çözme davranışlarının geliştiği, öğrencilerin gerçek yaşam bağlamlarındaki matematik okuryazarlığı problemlerini yorumlama ve çözme becerisinde gelişme kaydettiği belirtilmiştir. Bu araştırmaya benzer olarak Akın ve Kabael (2016) tarafından yürütülen araştırmada Eskişehir'de bulunan üç farklı devlet okulunda öğretim deneyi deseni kullanılarak, nicel muhakeme odaklı matematik öğrenme ortamında 8. sınıf öğrencilerinin problem çözme sürecindeki niceliksel muhakeme becerileri, düşünme yolları ve matematik okuryazarlık performansları incelenmiştir. 237 öğrenci ile yürütülen araştırmada öncelikle tüm öğrencilere problem çözme etkinlikleri uygulanmış; devamında ise bu öğrenciler üç gruba ayrılarak öğretim deneyleri uygulanmıştır. Öğretim deneyinin başından sonuna kadar geçen yedi aylık süreçte araştırmacılar çeşitli problemler kullanarak öğrencilerle derinlemesine görüşmeler yapmışlardır. Elde edilen bulgular sonucunda öğrencilerin başlangıçta problem durumundaki nicelik ve nicelikler arası ilişkileri göz ardı ederek sadece kural, formül ve

işlem yapmaya odaklanmalarına karşın zaman içerisinde problem durumuna ilişkin zihinsel model oluşturduktan sonra işlem yaptıkları görülmüştür.

Dur (2014), öğretim deneyi yöntemine dayanarak gerçekleştirdiği araştırmada 6. sınıf öğrencilerinin problem çözme sürecinde nicel muhakeme becerilerini belirleyerek gelişimlerini incelemiştir. Eskişehir'de bir devlet okulundaki 4 öğrenci ile çalışılmış ve çalışma yaprakları, görüşmeler ile öğretim sürecinin video kayıtları, öğrenci ve araştırmacı günlükleri olmak üzere çeşitli veri toplama araçları kullanılmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin nicel muhakeme becerilerinin gözle görülür şekilde geliştiği; öğrencilerin problemi anlama, problem durumuna uygun strateji seçme, seçilen stratejiyi uygulama ve değerlendirme basamaklarında öğretim öncesine göre daha başarılı oldukları belirlenmiştir. Ayrıca nicel muhakeme yapabilmede etkin bir yere sahip olan diyagram, tablo ve görsel temsil kullanımının öğretim sonrasında alışkanlık haline geldiği gözlenmiştir. Nicel muhakeme ve problem çözme odaklı araştırmalardan farklı olarak Danacı ve Şahin (2021), matematik tarihi etkinliklerinin 7. sınıf öğrencilerinin nicel muhakeme becerilerinin gelişimine etkisini incelediği araştırmada yarı deneysel araştırma deseni kullanmışlardır. Araştırma sonunda deney ve kontrol grubu öğrencilerinin niceliksel muhakeme son test puanları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olmamasına rağmen deney grubu öğrencilerinin nicel muhakeme becerilerinin kontrol grubu öğrencilerine oranla daha fazla geliştiği görülmüştür.

Tanışlı ve Dur (2018), nicel muhakeme gelişiminin problem çözme becerisinde nasıl bir değişime yol açtığını belirleyebilmek için 6. sınıfa devam eden 2 öğrenci ile beş hafta süren öğretim gerçekleştirilmiştir. Bu süreçte nicelik ve nicelikler arası ilişkiye vurgu yapan gerçek yaşam problemleri sorulmuş ve derinlemesine görüşmeler ile veri toplanmıştır. Araştırma sonucunda ön görüşmelerde düşük nicel muhakeme becerisine sahip olan iki öğrencinin öğretim süreci sonunda yapılan görüşmelerde nicel muhakeme becerilerinin gözle görülür şekilde olumlu yönde değiştiği gözlenmiştir. Bu değişimin öğrencilerin problem çözme süreçlerine yansıdığı, problem durumlarına uygun stratejileri seçebildikleri gözlenmiştir. Öğrencilerin problemlerde nicelikler ve nicelikler arası ilişkiden ziyade daha çok sayılara ve sayısal ilişkilere odaklandıkları ve genel olarak çözümünde zorlandıkları problemlerde deneme yanılma stratejisini kullandıkları görülmüştür. Bu araştırma ile benzer olarak Aydoğan Yenmez (2022), modelleme eğitimi sonucunda 8. sınıf öğrencilerinin nicel muhakemelerinin zaman içinde nasıl değiştiğini incelediği durum çalışmasında beş haftalık

bir müdahale programı uygulamıştır. Farklı düzeylerde nicel muhakeme başarısına sahip öğrencilerden oluşan katılımcı grubundan elde edilen bulgular öğrencilerin nicel muhakeme yapılarında önemli değişiklikler ortaya koymuştur: Nicel muhakemesi zayıf olan öğrenciler (i) problem bağlamında nicelikleri tanımlama ve yorumlama, (ii) problem bağlamında nicel ilişkileri belirleme ve niceliklerin değişimini analiz etme, (iii) problem bağlamında nicel süreçleri belirleme ve hesaplama, (iv) nicel bilgileri problem bağlamında yorumlama, kontrol etme ve sonuç çıkarma temalarında önemli gelişmeler göstermişlerdir. Buna ek olarak, modelleme süreci sonucunda öğrencilerin ilişkisel, çarpımsal ve orantısal muhakeme yaptığı belirlenmiştir.

Kabael ve Akın, (2016) 7. sınıf öğrencilerinin cebirsel hikaye problemi çözerken kullandıkları problem çözme stratejileri ve nicel muhakeme becerileri incelenmiştir. Sonuçta, öğrencilerin problem çözme sürecinde hem aritmetiksel ve hem de cebirsel stratejilerin etkili kullanabilmesinde nicel muhakeme becerisinin önemli bir rol oynadığı görülmüştür. Cebirsel düşünme ile ilgili araştırmaya başka bir örnek olarak Uyguç (2023) yürüttüğü çalışmada ortaokul öğrencilerinin resimsel, sembolik ve ikonik formlarda verilen erken cebir problemlerindeki nicel muhakemelerini incelemiştir. Çoklu durum araştırması deseni kullanılan çalışma, iki devlet ortaokulunda öğrenim gören toplam 60 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın sonuçları, problem türlerinin öğrencilerin nicel akıl yürütmelerinde belirleyici olmadığını göstermiştir. Bunun yerine, öğrencilerin nicel akıl yürütmelerinin, her bir problem türü içinde birimler arası ilişkinin karmaşıklık düzeyine göre farklılaştığı sonucuna varılmıştır. Öğrencilerin açıklamalarının ardında yatan nedenler ise her sınıf düzeyinde (5-8. sınıf) genel olarak benzerdir, dolayısıyla resimsel, ikonik ve sembolik formları ele alan problemlerde öğrencilerin farklı sınıf düzeylerindeki nicel akıl yürütmeleri arasında belirgin farklılıklar yoktur. Özaltun Çelik ve Bukova Güzel (2018) ise diğer araştırmalardan farklı olarak, doğrusal fonksiyonun öğrenilmesine yönelik tasarlanan bir modelleme etkinliği üzerinde çalışan 10. sınıf öğrencilerin nicel muhakemeleri öğretim deneyi yoluyla incelenmiştir. Araştırmaya katılan on öğrencinin deneyimledikleri ya da anlam yükleyebildikleri bir durum üzerinde çalışırlarken zihinsel olarak daha aktif eylemler sergiledikleri ve etkinliklerin nicel muhakeme göz önüne alarak tasarlanmasının öğrencilerin nicelikleri oluşturmalarını desteklemede önemli bir etken olduğu ortaya çıkarılmıştır.

Yurt içinde yer alan araştırmalara örnek olarak öğretmen adayları veya üniversite öğrencileriyle yapılmış araştırmalar da bulunmaktadır. Örneğin Belin (2016), 19 matematik

öğretmeni adayının reel sayıların ondalık açılımının geliştirilmesi sırasında gösterdikleri nicel muhakemeyi ve nicel muhakemenin matematik öğretmeni adaylarının konuyla ilgili verilen bir ispatı anlamalarına etkisini araştırmıştır. 2 oturumluk öğretim uygulanmış ve ispat anlama testi hem ön-test hem de son-test olarak kullanılmıştır. Sonuçlar, hem öğretim oturumlarında hem de son testte öğrencilerin örnekleri sadece sayısal varlıklar olarak düşünmediklerini, diyagramlar aracılığıyla düşünerek onları nicelikler olarak nitelendirdiklerini göstermiştir. Öğrencilerin nicel muhakeme yoluyla ispatı anlamlandırabildikleri sonucuna varılmıştır.

2.4.4. Nicel Muhakemeyle İlgili Yurt Dışında Yapılan Araştırmalar

Nicel muhakeme konusunda yurt dışında yapılmış araştırmalarda okul öncesinden üniversite düzeyine kadar birçok farklı katılımcı grubuyla çalışılmıştır. Bu çalışmalar arasında okul öncesi ve ilkokul düzeyinde gerçekleştirilen araştırmalarda ise özellikle sayı sistemleri, saymayı anlama, dört işlem kullanımı ve problem çözme ile ilgili konularda çalışmalar yürütüldüğü görülmüştür. Örneğin Nunes, Bryant, Evans ve Barros (2015) tarafından deneysel olarak yürütülen boylamsal araştırmada 7-9 yaşlarındaki 112 ilkokul öğrencisinin nicel muhakemelerini ve nicelikler hakkındaki kavramsal bilgileri ölçülmüş ve öğretmenler için bir değerlendirme testi geliştirilmiştir. Bu matematiksel muhakeme testlerindeki maddeler çocukların aritmetik veya hesaplama becerilerini değil nicelikler arasındaki ilişkiler hakkında akıl yürütmelerini ölçmeyi gerektirmektedir. Bu noktada araştırmacılar, sayı hissi görevleri ile toplamsal ve çarpımsal düşünme gerektiren problem çözme etkinlikleri uygulamışlardır. Öğrenciler 1. sınıfa başladıkları yıl ve 16 ay sonra nicel muhakeme testini yanıtlamıştır. Sonuçta çocukların nicelikler hakkında muhakeme edebildiği, matematiksel muhakeme ile nicel muhakeme arasında çok güçlü bir ilişki olduğu ortaya çıkarılmıştır. Geliştirilen testin okul öncesi ya da ilkokul başlangıcında öğrencilerin matematik bilgisini değerlendirme formatı olarak kullanılması, küçük çocukların matematik öğrenmedeki zorlukları önlemek için nicel muhakemeden faydalanabileceklerini ortaya çıkarmıştır. Ayrıca araştırmacılar bu çalışmayla, çocukların resmi olarak okula başlamadan önce de nicelikler arası ilişkiler hakkında düşünebildiklerini kanıtlamışlardır.

Nogues ve Dorneles (2019), Brezilya'da 3. ve 4. sınıflardan 143 öğrencinin sayı tahmini ve nicel muhakeme becerisindeki performansını ve her ikisi arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Bunun için öğrencilere ilk görevde sayı verip sayı doğrusunda gösterme, ikincisinde ise sayı doğrusunda belirlenen noktadaki sayıyı tahmin etme görevi verilmiştir. Öğrencilerin nicel

muhakemeleri ise toplamsal ve çarpımsal muhakeme kullanarak akıl yürütmeyi içeren durumları çözme becerileri ile değerlendirilmiştir. Sonuçlar, çocukların her iki yetenekteki performansı arasında doğrudan bir ilişki olduğunu göstermiştir. Ayrıca 4. sınıf öğrencilerinin 3. sınıflara daha güçlü nicel muhakeme ve sayı tahmini yapabildiği belirlenmiştir. Benzer bir araştırma örneği olarak Schalk, Saalbachb, Grabnerc ve Stern (2016), henüz okula yeni başlamış ve sayı sistemleri hakkında bilgisi olmayan 51 çocuğun ilişkisel nicel akıl yürütmenin uzun vadeli etkilerini test etmişlerdir. Araştırmacılar çocuklar okula başlamadan önce ve yaklaşık 2,5 yıl sonra üçüncü sınıftayken sayısal büyüklük ve gösterimi konusunda matematik başarısını, genel muhakeme yeteneğini ve okuma becerilerini ölçmüşlerdir. Sonuçta çocukların anaokulundaki ilişkisel nicel akıl yürütmelerinin, matematiksel başarıları üzerinde etkisini ortaya koymuştur. Nicel muhakeme teorisinin alanyazındaki yerini sağlamlaştıran Thompson (1993), 5. sınıf öğrencileri ile derinlemesine görüşmelerin yapıldığı dört günlük bir öğretim deneyinde 6 öğrenci ile toplama çıkarma problemleri üzerinde çalışmıştır. Araştırma, çocukların karmaşık olarak kabul edilebilen bir veya daha fazla öğenin akılda tutmadaki zorluklarını içermektedir. Öncelikle 25 öğrenci toplamsal karşılaştırma gerektiren sözel problemleri çözmüştür. Problemler, çocukların durumların niceliksel yapısını ne ölçüde ele aldıklarına göre puanlanmıştır. Devamında ise daha detaylı inceleme için bu öğrenciler arasından 6 öğrenci seçilmiştir. Sonuçta iki önemli zorluk tespit edilmiştir: (1) çıkarma işleminin sonucu olarak "fark" ile bir miktarın diğerini aşma miktarı olarak "fark" arasında ayrım yapmak ve (2) toplamsal karşılaştırmanın değerlendirmesi. Araştırmada gerçekleştirilen öğretim deneyleri ve görüşmeler sonucunda ise öğrencilerin problemlerdeki karmaşık durumlarla başa çıkma konusundaki yetkinliklerinin arttığı ve problem çözümünde aritmetik işlem öncesinde nicel işlem yapabildikleri belirlenmiştir.

Alanyazında yer alan araştırmalar arasında nicel muhakeme ve cebirsel düşünmeyi inceleyen çokça araştırma örneği bulunmaktadır. Thompson (1998), 8. sınıf öğrencilerinin gerçek yaşam bağlamına uygun cebir problemlerine dayanarak nicel muhakeme becerilerini test etmiştir. Sonuçta araştırmaya katılan 25 öğrencinin aritmetiksel ve cebirsel sözel problemleri çözmedeki performanslarının nicel muhakeme performanslarını yordadığı sonucuna varmıştır. Bu sayede cebirsel muhakemenin nicel muhakeme için bir dayanak oluşturduğunu belirtmiştir. Bu çalışma sayesinde öğrencilerin nicel muhakeme yaparken yalnızca niceliklere odaklanma, çarpımsal ilişkileri kavrayamama gibi konularda güçlük çektiğini gözlemlemiştir. Cebirsel düşünmenin önemli bir parçasını oluşturan genelleme becerisi de Ellis (2007) tarafından nicel muhakeme ile birlikte ele alınmıştır. Araştırmacı, 8.

sınıf öğrencilerinin genelleme becerilerini nicel muhakeme kapsamında incelemiştir. Bu araştırmada 34 öğrenci ile çalışılmış ve birinci gruptaki öğrencilere cebir konusunda nicelikler arası ilişkilere odaklanan öğretim yapılırken ikinci gruptaki öğrencilere niceliklerden bağımsız olarak sayı örüntüleri konusunda öğretim yapılmıştır. Sonucunda, nicelikler arası ilişkilere odaklanan öğretimde öğrencilerin günlük yaşam problemlerindeki durumlar arasında bağlantı kurup dinamik bir ilişki ortaya çıkarabildiklerini ve günlük yaşam problemlerinde istenen ilişkileri anlamlı olarak genelleyebildiklerini ortaya çıkarmıştır. Koedinger ve Nathan (2004) tarafından yürütülen araştırmada cebir dersi alan lise öğrencilerinin problem çözme temsillerindeki farklılıkların nicel muhakeme performansını ve muhakemelerin altında yatan bilişsel süreçlerini nasıl değiştirdiği araştırılmıştır. Problem temsilindeki farklılıkların problem çözmeyi ne zaman, neden ve nasıl etkilediğine ilişkin bilişsel süreç açıklamasının temeli olarak öğrencilerin stratejilerinin ve hatalarının analizine odaklanılmıştır. Elde edilen bulgular öğrenciler için cebirsel ifadelerin kullanıldığı sembolik problemlerin sözel problemlere göre daha zor olduğunu kanıtlamaktadır. Bir temsilin anlaşılması diğerinden daha kolay ve güvenilir olduğunda veya anlamlı çözüm stratejileri ortaya çıkardığında, dış temsillerdeki farklılıkların performansı ve öğrenmeyi etkileyebileceği sonucuna varılmıştır.

Nicel muhakeme ile matematiksel temsiller ve modelleme konularında yapılmış araştırma örnekleri de bulunmaktadır. Weber ve arkadaşları (2014) öğrencileri nicel muhakemeye yönlendirmenin gerçek yaşam durumlarına dayanan matematiksel modelleme becerilerini geliştirmelerine ve keşfetmelerine yardımcı olacağını ifade etmişlerdir. Bunun sonucunda, modelleme öğretiminde nicel akıl yürütmenin nasıl kullanılabileceğine dair altı ilke belirlemişlerdir: 1) Bir problem durumunu öğrencilerin çözümle ilgili miktarları belirlemelerini gerektirecek şekilde yeniden yazma, 2) Öğrencilerin neden belirli miktarları tanımlamayı seçtiklerine ve bu miktarları nasıl ölçmeyi düşündüklerine odaklanan bir problem hakkında sorular sorma, 3) Öğrencilerin ölçtükleri büyüklükler arasındaki ilişkileri belirlemelerini ve test etmelerini sağlama ve bu ilişkilerin neden her zaman geçerli olup olmadığını gerekçelendirmeyi isteme, 4) Öğrenciler bir model oluşturduktan sonra her bir niceliğin değişmesinin modeldeki diğer nicelikleri nasıl etkilediğini belirlemelerini isteme, 5) Öğrencilerden, modelledikleri durumun tüm büyüklükleri ve aralarındaki ilişkileri içeren bir temsilini (fiziksel, görsel, vb.) geliştirmelerini isteme, 6) Öğrencilerin modellerinin doğru olmayabilecek yönlerini gözden geçirmelerini ve yeniden test etmelerini sağlama. Yeo ve Webel (2022), ölçü birimleri ile nicelikler arasındaki ilişkilerin anlaşılmasını desteklemek

için tasarlanmış teknolojik bir ortamda 3. ve 5. sınıftaki öğrencilerin matematiksel muhakemelerini incelemişlerdir. 30 öğrencinin birim boyutlarını sürekli olarak genişletebilen bir dinamik cetvel kullanarak bir dizi ölçüm olarak kesir etkinliklerini nasıl yanıtladıkları gözlemlenmiştir. Bulgular, somut bir materyal olan dinamik cetvelin kesirlerde önemli kavramları ortaya çıkarabileceğini ve ölçme gibi yaklaşımların kullanılabileceğini göstermiştir.

Nicel muhakeme ve modelleme becerisini ilişkilendiren ve öğretmen adayları ile yapılan araştırmalar bulunmaktadır. Örneğin Glassmeyer, (2019) öğretmen eğitimine yönelik modelleme yaklaşımının, öğretmenleri derslere nicel muhakemeyi dahil etmelerini tanımlama ve destek sağladığını detaylandırmışlardır. Dört hafta boyunca 21 öğretmene "Model Ortaya Çıkarma Etkinliği" uygulandı ve öğretmenler öğrencileri için nicel akıl yürütme görevi tasarlamaya teşvik edildi. Öğretmenlerin başlangıçtaki nicel muhakeme görevleri nicel muhakemenin iki temel bileşeni olan nicelik veya nicel ilişkileri içermezken modelleme etkinliğinden sonra bu durumun tersine çevrildiği görülmüştür. Moore ve Carlson (2012) üniversite öğrencilerin problem bağlamlarına ilişkin oluşturdukları temsillerin grafikler oluşturma becerilerini nasıl etkilediğini belirlemişlerdir. Clement (2000) ve Goldin (2000) dört aşamalı problem çözme görevlerinde öğrencilerin çözüm denemeleri sırasında oluşturdukları temsilleri ve bir problem bağlamındaki niceliklerin birlikte nasıl değiştiğini hayal etmede ne derece başarılı olduklarını incelemişlerdir. Elde edilen bulgular, öğrencilerin formülleri veya grafikleri belirlemeden önce bir durumu görselleştirmek ve ilgili nicel ilişkiler kurmak için önce zihinsel aktiviteye girmelerinin kritik olduğunu göstermektedir. Bu araştırmalardan farklı olarak, nicel muhakeme ile ilgili araştırmalarda fonksiyon kavramı (Moore, Silverman, Paoletti & LaForest, 2014) ve kovaryasyonel muhakemenin gelişimi (Carlson vd., 2002; Saldanha & Thompson, 1998; Thompson & Carlson, 2017) konularında da çalışmalar olduğu görülmüştür.

Sonuç olarak, hem yurt içi hem yurt dışında nicel muhakeme ile ilgili yapılmış çeşitli araştırmaların olduğu belirlenmiştir. Özellikle cebirsel düşünme ile nicel muhakemeyi birleştiren ve inceleyen çalışmaların sayısının fazla olduğu görülmüştür (Ellis, 2007; Hackenberg, 2006; Kabael & Akın, 2016; Koedinger & Nathan, 2009; Smith III & Thompson, 2007; Thompson, 1988). Yurt içinde yapılan araştırmalardan farklı olarak yurt dışındaki araştırmaların genellikle öğrenme sürecini betimleme ve gelişimi raporlamayı içerdiği ortaya çıkarılmıştır (Nunes, Bryant, Evans & Barros, 2015; Thompson, 1993). Nicel

muhakeme konusunda yapılmış çalışmalar arasında ilkokul düzeyindeki öğrencilerle yürütülmüş olanların ve kesirler konusu ile nicel muhakemeyi birlikte ele alan çalışmaların sınırlı olduğu görülmüştür (Barros Baertl, 2020; Crawford vd., 2019). İlkokul öğrencileri ile yürütülen araştırmalarda ise matematiksel temsillerin vurgulandığı görülmüştür.

BÖLÜM III: YÖNTEM

Bu bölümde bu araştırmada kullanılan öğretim deneyi, katılımcı grubu, öğretim deneylerini hazırlama ve uygulama süreci, veri toplama araçları, verilerin analizi ve araştırmanın geçerlik ve güvenirlik çalışmaları açıklanmıştır.

3.1. Araştırmanın Modeli

Tasarım tabanlı araştırmalar, bütüncül bir yaklaşım ve özgün kuramlar temelinde ele alınarak karmaşık eğitim problemlerine odaklanır (Aşık & Yılmaz, 2017; Barab & Squire, 2004). Tasarım tabanlı araştırmalar matematik eğitimi çalışmalarında yoğun olarak uygulanmakta olup nitel araştırma geleneği içinde ele alınmaktadır. Bu araştırmalar, teorik temeller ışığında uygulamayı içerir ve böylece teori ile uygulama arasındaki ilişkileri anlamayı sağlar (Cobb, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003). Diğer birçok araştırma modellerinin aksine tasarım araştırmaları, betimleme veya açıklama odaklı olmasından öte tasarım geliştirme ve uygulama odaklıdır. Amaç, öğretmek istediğimiz herhangi bir performans için öğrenmeyi geliştirmek ve bunu çeşitli tasarımlar aracılığıyla yapmaktır (Reigeluth, 1999). Tasarım tabanlı araştırmalar, araştırma süreci boyunca elde edilen verilere dayanarak tasarımın sürekli olarak gözden geçirilmesi sebebiyle aşamalı bir iyileştirme sağlar. Tasarımın döngüleri, uygulama, veri analizi ve yeniden tasarım olarak araştırma süreci tamamlanır. Bu araştırma yöntemini kullanan araştırmacılar, elde edilen verileri göz önünde bulundurarak öğrencilerin öğrenme yörüngesi hakkında varsayımlarda bulunur ve bu varsayımları test eder (Collins vd., 2004). Bu süreçte etkili tasarımlar yaratmanın ötesinde, tasarımın neden işe yaradığını açıklar ve yeni koşullara uyarlanabileceği yollar önerir (Cobb vd., 2003). Tasarım araştırmalarının bu dinamik yapısı, öğrenme sürecinin nasıl gerçekleştiğine dair düşünmeyi gerekli kılmaktadır. Bu durumda bu araştırmanın da kuramsal çerçevesini oluşturan yapılandırmacı öğrenme kuramı öne çıkmaktadır.

Yapılandırmacı öğrenme, bilgiyi aktif yapılandırmayı ve uygulamayı gerektiren bir öğrenme kuramıdır ve bireyin bilgiyi yorumlamasına ve geliştirmesine fırsat verir (Perkins, 1999). Her yeni bilgi önceden var olan bilgiler üzerine inşa edilir ve kişi edindiği yeni bilgileri bu bilgilerle bütünleştirirerek öğrenir. Öğrenme, bireyin zihninde yapılandırdığı bir süreç olduğundan, bilginin nasıl öğrenildiği ve nasıl anlaşıldığı yapılandırmacı öğrenme kuramının odak noktasıdır. Matematik eğitimi araştırmacıları yapılandırmacı yaklaşıma

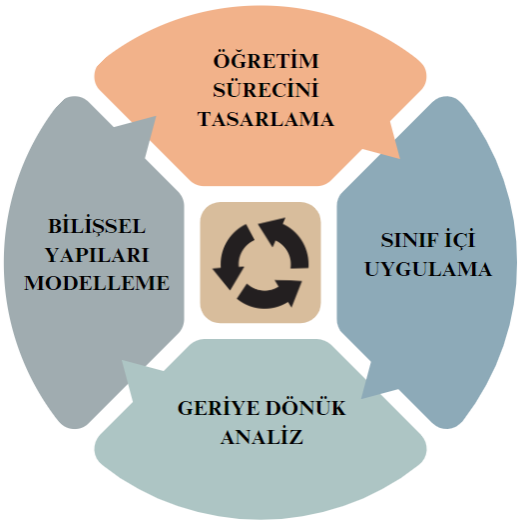
uygun olarak öğrencilerin zihinlerindeki matematiksel düşünceleri keşfetmeyi veya ortaya çıkarmayı amaçlamaktadır (Cobb & Steffe, 2011). Diğer yandan öğrenci zihnindeki matematiksel bilginin ne olduğunun ötesinde, bilginin yapılanırken hangi yolu izlediğine ve nasıl gelişim gösterdiğine ilişkin sorular, matematik eğitimi alanında süreç temelli yeni araştırma yöntemlerinin uygulanmasını gerektirmiştir. Bu sayede nitel araştırmalara olan meyil artmış, özellikle matematik eğitiminde öğrencilerin kavramları nasıl öğrendiğinin incelenmesini sağlayan öğretim deneylerine ihtiyaç duyulmuştur (Uygan, 2019).

Tasarım tabanlı araştırma geleneği içinde değerlendirilen öğretim deneyinin genel amacı fikirlerin, araçların veya modellerin gelişimini incelemektir (Barab, 2005). Bununla birlikte tasarım tabanlı araştırmalar öğretim deneylerinden daha farklı bir felsefeye sahiptir. Tasarım araştırmaları test edilecek belirli bir öğrenme biçimini destekleme araçları hakkında hipotetik bir varsayımdan oluşur. Devamında ise aynı varsayım ile veya başka bir varsayıma dayanan müdahaleleri içerir (Cobb vd., 2003). Sonuçta, belirli bir alanda ortaya çıkan zorlukların giderilmesine destek olmak amacıyla uygun müdahale programı oluşturarak yürütülür (Aşık & Yılmaz, 2017). Daha açık bir ifade ile sınırları daha belli ve daha az esnek olarak nitelendirilebilen araştırma türünü ifade eder. Öğretim deneyinin ise odak noktası öğrencilerin, öğretmenlerin, öğretim ortamlarının ve etkinliklerinin gelişimi üzerinde durmak (Kelly & Lesh, 2000) ve çoğunlukla öğrencilerin matematiği nasıl öğrendiğini araştırmaktır (Clements, Wilson & Sarama, 2004). Bunun sonucunda ise öğrencilerin öğrenmesine dayanan bir model geliştirmek nihai amaç olmaktadır (Kelly & Lesh, 2000). Öğretim deneyleri, gelişmesi beklenen hedeflere göre hazırlanmış öğretim bölümlerinden oluşmaktadır. Her öğretim bölümünde varsayımları test etmek ve yeni öğrenme yörüngelerini oluşturmak için öğretim yapılır. Öğretim deneyleri, kullanılan etkinlikleri ve görevleri, kullanılan öğretim yöntem ve tekniği, öğretim araçları ve öğretim ortamı gibi bilgileri içeren geniş bir plandır. Bu araştırmada kesirler konusu öğrencilerin nicel muhakeme yapabilmelerine olanak tanıyan özgün etkinlik tasarımları aracılığıyla öğretilmiş ve süreç boyunca öğrencilerdeki gelişim ve değişim raporlanmıştır.

3.1.1. Öğretim Deneyi

Öğretim deneyinde amaçlanan model oluşturma sürecinde önemli olan araştırmacının öğrenci gibi düşünmeye çalışmasıdır. Bu doğrultuda araştırmacılar öğretim bölümleri esnasında kendilerine daima “Bu görevlerin öğrencinin zihninde bir anlamı olması için, öğrencinin aklından hangi düşünceler geçiyor olabilir?” sorusunu sorması gerekmektedir

(Thompson, 1982). Araştırmacının bu soruya verdiği yanıtlar ise öğrenci matematiğine ilişkin yapılan modellemenin altyapısını oluşturmaktadır (Uygan, 2019). Öğretim deneyi uygulama süreci temel olarak dört aşamadan oluşan bir döngüye sahip olup bu süreç Şekil 3.1.1'de özetlenmiştir: i) Araştırmacının varsayımlarına dayalı öğretim sürecinin tasarlanması, ii) Öğretim bölümleri olarak adlandırılan sınıf içi uygulamalar, iii) Geriye dönük (retrospektif) analizler ve iv) Katılımcıların bilişsel yapılarının modellenmesi (Cobb & Steffe, 1983).



Şekil 3.1.1. Öğretim Deneyi Süreci

Her tasarım araştırması mikro düzeyde düşünsel deneylerin ve öğretim deneylerinin birbirini izlediği döngüsel bir süreçten oluşur. Cobb (2000), öğretim deneyi sürecine dair çeşitli vurgulamalar yapmıştır. Bunlar, öğretimin planlanması, uygulanması ve geriye dönük analizlerdir. Bu süreci ise bir varsayımsal öğrenme yol haritası olarak betimlemiş ve her bir öğretim deneyinde bu yol haritasının düzenlenmesi gerektiğini belirtmiştir. Öğretim deneylerine başlamadan önce araştırmacı incelemek istediği durumlara dair düşünsel deneyler oluşturur ve böylece öğretim sürecini planlar (Gravemeijer & van Eerde, 2009; Steffe & Thompson, 2000). Tasarımların geliştirilmesi olarak betimlenen bu düşünsel deney süreci, öğrencinin zihinsel eylemleri ve öğretim sürecinin teorik varsayımlarına ve önceki deneyimlerine dayanan varsayımlardan oluşur ve uygulamanın nasıl ilerleyeceği hakkında yapıcı tahminlerde bulunmayı gerektirir (Gravemeijer & Cobb, 2006). Öğretim süreci ise varsayılan öğrenme amaçlarına ne ölçüde ulaşıldığının test edildiği, eksik noktaların belirlenip uygulamaların yeniden düzenlendiği aşamadır. Bu sayede varsayımsal öğrenme yol haritasına dayanarak öğrencilerin zihin modellerinin nasıl gelişeceğine dair çıkarımlarda

bulunarak etkili bir süreç tamamlanabilir. Bu araştırmada belirlenen varsayımsal öğrenmeler, her bir etkinlik özelinde öğrencilerin söz konusu kavram ya da konu hakkında nasıl düşünebileceğine dayanan soruların cevaplarına dayandırılmıştır. Bu bağlamda araştırmacı hem geçmiş deneyimlerinden hem de literatürden faydalanarak varsayımsal öğrenmeleri belirlemiştir.

Öğretim deneyi, sınıf veya bireysel olmak üzere iki şekilde tasarlanabilir. Sınıf öğretim deneyinde hedeflenen, sosyal kültürel teori anlayışıyla konu ve kazanıma uygun öğrenme ortamının tasarlanmasıdır (Cobb, 2000). Buna göre kişi sosyal etkileşim içindeyken kendisinin ve akranlarının zihinsel işlemlerini harekete geçirmektedir (Vygotsky, 1978, akt.Wertsch, 1980). Dolayısıyla öğrenmenin sosyal boyutu da öne çıkmakta ve bilginin sosyal etkileşimler kanalıyla nasıl yapılandırıldığı incelenmektedir (Uygan, 2019). Sınıf öğretimi deneyi yürütülürken kullanılan tasarım araştırma döngüsüne rehberlik eden üç ilke bulunmaktadır; öğretim dizisinin gelişimine rehberlik eden varsayımsal bir öğrenme yörüngesinin geliştirilmesi, bir öğretim teorisine uygun ve konuya özgü öğretim bölümünün geliştirilmesi ve öğrencilerin sınıf etkinliklerine katılımının mikro analizlerine dayalı döngülerin oluşturulmasıdır (Cobb, 2000). Örneğin bu araştırma kapsamındaki kesirleri karşılaştırma teması için öncelikle öğrencilerin bu konudaki hangi bilgilere ulaşması gerektiği belirlenir ve buna dair öğrencilerin varsayımsal öğrenmeleri oluşturulur. Buna dayanarak ise öğretim bölümü oluşturulur ve hangi etkinliğin kullanılacağı, öğrenciye hangi görevlerin verileceğini içeren bir ders tasarımı yapılır. Son olarak ise bu tasarımlar uygulanır, gerekli görüldüğünde değiştirilerek tekrar uygulanır ve öğrenci yanıtları kaydedilir. Böylece döngüsel bir süreç olarak sınıf öğretimi deneyi tamamlanmış olur.

Sınıf öğretim deneyinde öğrenme sürecinin net bir biçimde anlaşılması için sosyal etkileşimlerin, sınıf kültüründeki normların ve bireysel öğrenme süreçlerinin birlikte ele alınması gerekmektedir. Bu sayede öğrencilerin matematiksel etkinlikleri sınıf içi sosyal etkileşimler bağlamında incelenirken, diğer yandan öğrencilerin bireysel bağlamdaki matematiksel süreçlerinin analizine odaklanılmaktadır (Uygan, 2019). Matematik öğrenme süreçlerinin sınıf mikro kültürüne ait normlar aracılığıyla incelenmesi kritik olup sınıftaki paylaşımların ve tartışmaların çözümlenmesi süreç sonunda oluşturulacak nihai model için önemli kaynaklar sağlamaktadır.

3.1.2. Öğretim Deneyi Gerekçesi

Bu çalışma en uygun şekilde öğretim deneyi olarak sınıflandırılmıştır çünkü tasarlanan etkinlikler aracılığıyla bir eğitim ortamında katılımcıların konuyla ilgili düşünme yollarının mevcut durumuna ve nasıl geliştirilebileceğine odaklanmıştır (Kelly & Lesh, 2000). Öğretim deneylerinde her bir katılımcı kendi öğrenme biçimleriyle meşgul olurken araştırmacı, açıklamalar ve gerekçeler oluşturarak ortak öğrenci deneyimlerini anlamlandırmaya çalışır (English, 2003). Bunu da her bir konu ya da kavrama özgü tasarımlar oluşturarak yapılandırıcı ve esnek biçimde inşa etmek için çabalar. Katılımcıların deneyimlerinin ve etkileşimlerinin iyi yapılandırılması, araştırmacının öğrencilerin düşünsel modelinin geliştirmesini sağlar (English, 2003). Bu araştırmada da kesirler konusu nicel muhakemelerini geliştirmeye dayandırılan öğretim deneyleri aracılığıyla işlenmiştir (Steffe, 2002). Tasarım araştırmaları hem model oluşturma hem de karmaşık bir durumu incelemede esneklik sağladığından, bu yaklaşım bu çalışmanın teorik perspektifiyle de uyumlu görülmektedir.

Matematik eğitiminde öğretim deneylerinin amacı, mutlaka neyin işe yaradığını belirlemek veya bir yaklaşımın öğrencilerin öğrenmesini geliştirdiğini kanıtlamak değil, öğrenme süreci hakkında teoriler ve araçlar geliştirmektir (Cobb vd., 2003). Bu araştırmanın da nihai hedefi bu süreçteki tüm tasarım ve modellerin uygulanabilirliğini ortaya koymaktır. Araştırmada 4. sınıf öğrencilerinin kesirler konusundaki düşünme yolları nicel muhakemelerini geliştirmeye dayanan öğretim bölümleri ile incelenmiştir. Bu süreç ise öğrencilerin belirli müdahaleler ile yeni anlayışlar geliştirdiği yapılandırmacı teorinin hakim olduğu bir ortamda gerçekleşebilir. Thompson (1994) da nicel muhakemeyi Piaget'in yapılandırmacılık teorisi üzerine inşa etmiş ve bu teorisi ile öğrencilerin yeni kavramlar ve zihinsel modeller geliştirebileceğini savunmuştur. Dolayısıyla, öğretim deneyi yönteminin yapılandırmacı yaklaşım anlayışıyla şekillendiği düşünüldüğünde bu araştırmada bu yöntemin kullanılmasının uygun olduğu kabul edilmiştir.

3.2. Katılımcılar

Bu araştırma Kocaeli ve İstanbul'da bulunan iki devlet okulunda 2022-2023 eğitim öğretim yılı içerisinde gerçekleştirilmiştir. Her iki grupta da yer alan katılımcılar uygun örnekleme yöntemiyle seçilmiştir (Yıldırım & Şimşek, 2016). Bu noktada araştırmada yakın ve erişilmesi kolay olan iki okul ve iki 4. sınıf şubesi seçilmiştir. 4. sınıf öğrencilerinin seçilmesinin sebeplerinden biri, kesirler konusunun bu sınıf seviyesinde temel kavramların ve kesir problemlerinin kullanılmasına olanak tanıyan kazanımlara yer vermesidir. Önceki

sınıf düzeylerinde kesirler ile ilgili yarım, çeyrek kavramları ve bunlar arasındaki ilişki, birim kesir, kesirlerde parça ve bütün ilişkisi konuları öğretilmektedir. Kesirler konusunun önemli bir bölümünü oluşturan ve ileri düzey konular için temel teşkil eden kesir türleri, kesirleri sıralama ve karşılaştırma ilk olarak 4. sınıf düzeyinde öğretilmektedir (MEB, 2018; 2024). Öğrencilerin kesirler konusunda nicel muhakemelerini geliştirmek için bilişsel anlamda olgun olmalarının da araştırmada elde edilecek sonuçları etkileyebileceği düşünülmektedir. Bu sebepler ile araştırmada 4. sınıf öğrencileri ile çalışılmıştır.

Araştırmanın birinci uygulamasının yürütüldüğü sınıf Kocaeli'de; ikinci uygulamanın yürütüldüğü sınıf ise İstanbul'un Anadolu yakasında yer alan ilçelerinden birinde yer almaktadır. Okulların sosyo-ekonomik durumlarına dair bilgileri bu okullarda çalışan öğretmenlerden, bu okullar ile işbirliği halinde çalışmalar yapan akademisyenlerden ve araştırmacının sınıf içerisinde yaptığı gözlemlerden elde edilmiştir. Buna göre birinci uygulama grubu, sosyoekonomik düzeyi düşük olarak nitelendirilen ve başarı düzeyi düşük-orta düzeyde olan öğrencilerden oluşan okuldaki tek 4. sınıf şubesidir. İkinci uygulamanın yürütüldüğü sınıftaki öğrenciler ise yüksek-orta düzeyde sosyoekonomik düzeye sahip olup başarı düzeyi orta olarak nitelendirilebilir. Her iki uygulama grubundaki öğrencilerin çok büyük bir kısmı aynı sınıfta bulunmakta ve 4 yıldır aynı sınıf öğretmeni ile eğitim görmektedir. Birinci uygulama grubunun öğretmeninden elde edilen görüşlere göre bu öğrenciler çoğunlukla emekçi ailelerin çocuklarıdır ve genellikle devamsızlık sorunları yaşamamış öğrencilerdir. İkinci uygulama grubunun sınıf öğretmeninin görüşlerine göre ise bu öğrenciler genellikle orta sınıf ailelerin çocukları olup okul başarıları orta-yüksek olarak kabul edilebilecek ve potansiyeli olan öğrencilerdir. Araştırmada farklı başarı düzeylerinden katılımcıların yer almasının sebebi; tasarlanan etkinliklerin farklı öğrenciler için uygulanabilirliğini teyit etmek ve birinci uygulamada yaşanabilecek olası eksiklikleri giderme şansı elde edebilmektir. Öğrencilere ait özellikler aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 3.2.1. Katılımcılara Ait Özellikler

Cinsiyet	1. Uygulama	2. Uygulama
Kız	12	14
Erkek	12	18
Toplam	24	32

Araştırmacı tarafından tasarlanan öğretim deneyleri tüm sınıfa uygulanmakla birlikte her iki çalışmada birer hedef grup belirlenmiş ve bu öğrenciler daha yakından takip edilmiştir. Bu sayede hedef gruptaki her bir öğrencinin akıl yürütme süreçlerinin gelişimi derinlemesine incelenmiştir. Öğrenci matematiğine ilişkin bir model oluşturmak için yürütülen öğretim bölümleri sırasında, araştırmacılar modelin ortaya çıkmasına neden olan durumları ve düşünme biçimlerini saptamak için bir grup öğrenciyle görüşebilirler (Steffe & Thompson, 2000). Bu durum araştırmacının öğrenciler ile daha çok etkileşimde bulunması ve onların bilişsel yapılarını daha iyi analiz edip yorumlamasını sağlar (Cobb & Steffe, 2011). Buna uygun olarak her iki uygulama aşamasında da sınıfın tamamını yansıtabilecek üçer öğrenci belirlenmiştir. Hedef grubunun belirlenmesi ise bazı ölçütlere göre yapılmıştır. Bu noktada hedef grubu öğrencilerinin seçilmesindeki ölçütler; öğretimler öncesi uygulanan ön değerlendirme formundaki başarı durumu, keşfedici öğretimlerde yapılan gözlemler, öğrencilerin kendini iyi ifade edebilmesi ve birbiriyle iyi iletişimde olmalarıdır. Hedef grupta yer alan öğrenciler aynı yaşta yani 9 yaşındadır. Öğrenciler ilkokul birinci sınıftan itibaren aynı sınıfta, aynı sınıf öğretmeninden eğitim almaktadırlar. Öğrencilerin akademik başarı durumu arasında çok büyük farklılık olmamakla birlikte bir miktar farklılık da bulunmaktadır. Bu doğrultuda Beren ve Buğra, gruplardaki daha başarılı olan öğrenci grubunu temsil ederken Yuşa ve İlknur orta düzeyde başarılı öğrencileri temsil etmektedir. Yavuz ve Azra ise daha az başarılı öğrenciler olarak tanımlanabilir. Bu durum, öğretmen görüşleri, keşfedici gözlem ve öğrencilerin ön değerlendirme formu yanıtlarına göre belirlenmiştir. Araştırmacı, önceden gerçekleştirdiği keşfedici öğretimler ve sınıf gözlemleri ile hedef grup hakkında ön liste oluşturmuştur. Bu liste ön değerlendirme formu ve öğretmenin önerileri sonucunda nihai hale gelmiş ve aşağıdaki tabloda özetlenmiştir:

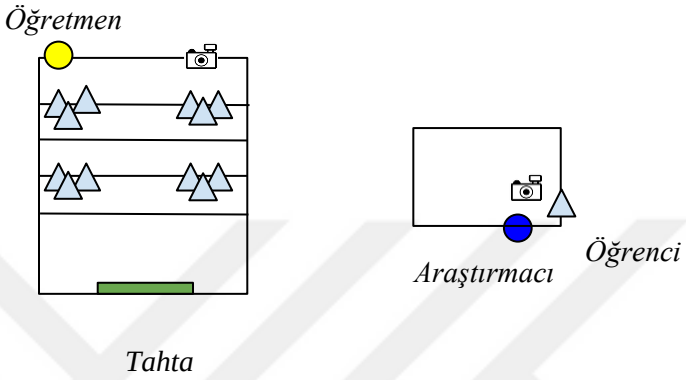
Tablo 3.2.2. Hedef Gruptaki Öğrenciler

1.Uygulama	2.Uygulama
Beren	Buğra
Yavuz	Azra
İlknur	Yuşa

Araştırmada çalışılacak öğrenci grubu belirlendikten sonra öncelikle öğrencilere süreçle ilgili bilgi verilmiş ve bu sürecin bilimsel bir araştırma için veri oluşturacağı belirtilmiştir. Öğrencilerin çalışmaya katılmak için gönüllü olmaları üzerine ailelerine araştırmacı

tarafından veli onam formu (EK 3) gönderilmiştir. Bu sayede araştırmanın amacından, öğrencilere faydasından, uygulamanın zaman aralığından ailelerin haberdar olmaları amaçlanmıştır.

Araştırma süresince sınıf uygulamalarının yürütüldüğü sınıfların ortamı ve görüşme sırasındaki fiziksel ortama ilişkin oluşturulan model Şekil 3.2'de gösterilmiştir.



Şekil 3.2. Sınıf Düzeni ve Görüşme Ortamı

Uygulamalar süresince sınıfça ya da bireysel olarak yürütülen etkinliklerde öğrenciler ikişerli olarak oturmuşlardır. Grup etkinlikleri sırasında ise öğrenciler üçerli olarak bir araya gelmişlerdir. Her bir grup çalışmasında aynı grup üyeleri birlikte çalışmışlardır. Araştırmada tek bir kamera kullanılmış ve sınıfın arkasına konumlandırılmıştır. Sınıf öğretmeni ise sınıfın en arkasındaki bir sırada oturmuştur. Birebir görüşmelerin yapıldığı ortamda ise araştırmacı ve öğrenci bir masa etrafında oturmuş, araştırmacı kamerayı öğrencinin çalışma kağıdını görecek pozisyonda konumlandırmıştır. Görüşmeler sırasında öğrencilerin yüzü görünmeyecek şekilde yalnızca üzerinde çalışılan kağıdın görüntüsü kaydedilmiştir. Araştırmanın hem birinci hem de ikinci aşamasında görüşme yapılan ortamın sessiz, sakin ve öğrencinin aşina ve rahat olduğu bir ortam olması göz önünde bulundurulmuştur.

Görüşmeler, hedef gruptaki her öğrenci ile bireysel olmak üzere, ele alınan konu ve kavrama göre değişmekle birlikte yaklaşık 8-28 dakika kadar sürmüştür. Öğrencilerin zorlandığı ya da model çizmeyi gerektiren durumlar söz konusu olduğunda görüşmeler daha uzun sürmüştür. Araştırmanın birinci uygulamasında görüşmelerin tamamı kütüphanede ve 2-3 öğretim bölümü sonunda, ikinci uygulamada ise okulun en üst katında bulunan fen laboratuvarlarından birinde ve 1 ya da 2 öğretim bölümü sonunda yapılmıştır. Her iki

ortamda da araştırmacı ve öğrencinin konumu ile kamera konumu değişmemiştir. Görüşme yapılan ortamın iyi ışık alması, hem öğrencinin hem araştırmacının bir masada yan yana oturmasına olanak tanıyacak özellikte olması ve diğer sınıflardan uzak olması ve dolayısıyla sesten rahatsız olma durumunun olmaması sebebiyle görüşmeler bu odada gerçekleşmiştir.

3.3. Veri Toplama Araçları

Araştırmada verilerin toplanma aşaması uygulamaların yürütülmesi ile birlikte ilerlemiştir. Araştırmada, öğrencilerin kesir kavramlarına dair düşünme yollarını belirlemek ve gelişimini analiz edebilmek için birçok veri toplama aracı kullanılmış ve bu sayede öğrenci matematiğinin değişimine yönelik bütüncül değerlendirmeler yapmak hedeflenmiştir. Araştırmada kullanılan veri toplama araçları Tablo 3.3'te özetlenmiştir.

Tablo 3.3. Araştırmada Kullanılan Veri Toplama Araçları

Veri Toplama Araçları		
➢ Ön Değerlendirme Formu	➢ Etkinlik Formları	➢ Alan Notları
➢ Video Kayıtları	➢ Gözlem Formları	➢ Derinlemesine Görüşmeler
➢ Öğrenci Günlüğü	➢ Öğretmen Günlüğü	➢ Araştırmacı Günlüğü

3.3.1.Etkinlik Formları: Araştırmada kullanılan etkinliklerin büyük bir çoğunluğu araştırmacı tarafından literatürde konu ile ilgili olan araştırmalar ile ders kitapları temel alınarak oluşturulmuştur. Etkinliklerin bir kısmı ise kesirler ve nicel muhakeme konularında yürütülen araştırmalardan alınarak bu araştırmaya uygun olarak uyarlanmıştır (Akın, 2016; Barros Baertl, 2020; Crawford vd., 2018; Fazio & Siegler, 2011; Hoon, Narayanan & Singh, 2021; Ching vd., 2020; Nogues & Dorneles, 2019; Olive & Steffe 2002; Siegler vd., 2011; Steffe, 2004; Steffe & Olive 2010; Tzur, 1999). Etkinlikler, yalnızca 4. sınıf kesirler konusu kazanımlarına yönelik değil; öğrencilerin önceki yıllarda edindiği bilgileri unutmuş olma ihtimaline karşı önceki sınıf düzeylerindeki kazanımları da kapsayacak şekilde kapsamlı bir biçimde oluşturulmuştur. Bu noktada matematik eğitimi alanında Doktora derecesine sahip üç uzmanın da görüşleri alınmıştır. Etkinlikler oluşturulurken öğrencilerin kesirler konusuna

ait kavramları nicel muhakeme ile öğrenmesini sağlayan görevlerin yer almasına dikkat edilmiştir. Ayrıca öğrencilerin seviyelerine uygun olarak tartışma, problem çözme, gösterip yaptırma, bilgisayar destekli öğretim, somut araçların kullanımı gibi farklı öğretim metodlarını barındıran görevler oluşturulmuştur. Öğrenci çalışma formları bazı derslerde bireysel bazı derslerde ise grup olarak uygulanmak üzere oluşturulmuştur. Her dersin sonunda da bu kağıtlar araştırmacı tarafından toplanmış, gün sonunda analiz yapılmak üzere ayrılmıştır.

3.3.2.Ders içi kamera kayıtları: Veri toplama süreci boyunca her ders tahtayı ve sınıfı gösteren bir kamera ile kayıt altına alınmıştır. Kamera ayrıca ses de kayıt etmiştir. Böylece sınıf tartışmaları, öğrencilerin jest ve mimikleri daha sonradan izlenip analiz edilmiştir. Ayrıca belirlenen hedef grubu daha yakından izleyebilmek için kamera bu gruba yakın bir konumda tutulmuştur. Öğrenciler ile yapılan birebir görüşmeler de kamera kaydına alınmıştır.

3.3.3.Görüşme formu: Araştırmada hedef grupta yer alan altı öğrenci ile bireysel olarak öğretim deneyinin önemli bir bölümünü oluşturan derinlemesine görüşmeler yapılmıştır. Matematik eğitimi araştırmalarında sıklıkla kullanılan bu görüşme tekniğinde, çocukların bilişsel süreçlerinin ayrıntılı olarak incelendiği bilinmektedir. Bu sebeple öğrencilerin matematik bilgisini çok boyutlu olarak araştırması nedeniyle matematik eğitimi araştırmalarında özel bir yere sahiptir (Ginsburg, 1997). Görüşme sürecinde araştırmacı, öğrencilerden düşüncelerini açıklamalarını istemeye devam ettikçe öğrencinin düşünme yolunu modelleme şansı elde eder. Bunlara ek olarak nicel muhakeme araştırmalarında açık uçlu sorular sormak matematiksel muhakeme ve öğrencinin matematiksel bilgisini tespit edip geliştirebilmek için oldukça önemlidir (Kruse & Drews, 2013). Bu sebeple her bir öğretim bölümünden sonra öğrencilerin kendi yanıtlarına dair yorumlar yapabilmesi ve araştırmacının öğrencideki gelişimi takip edebilmesi için açık uçlu sorulardan oluşan görüşme formu kullanılmıştır. Görüşme formunda yer alan sorular:

> "*Bunu nasıl yaptığını açıklar mısın? Nerden biliyorsun? Nasıl karar verdin? Gerekçen nedir?*
>
> *Bu yanıtın her zaman geçerli mi?*
>
> *Bu bulduğun kesir neyi ifade ediyor?*
>
> *Şu anda neyi bulmaya çalışıyorsun? Bu kesir neyi temsil ediyor? Bu model hangi kesri temsil ediyor?*

Bu soruyu başka şekilde de çözebilir misin? Bu soruyu çözmek için başka bir çözüm yolu var mı sence?

Bu çözümünü model ile gösterir misin?

Bu çözüm-soru-problem-işlem hakkında ne söyleyebilirsin?

Kendi cümlelerinle açıklar mısın?

Problemi çözmeden önce sonuca dair tahminde bulunur musun? Tahminin ve gerçek sonucun hakkında ne söyleyebilirsin?"

Görüşme aşamasında bu sorular çerçevesinde her bir öğretim bölümüne uygun olarak belirlenmiş detaylı sorular da sorulmuştur. Bu sorulara örnek olarak:

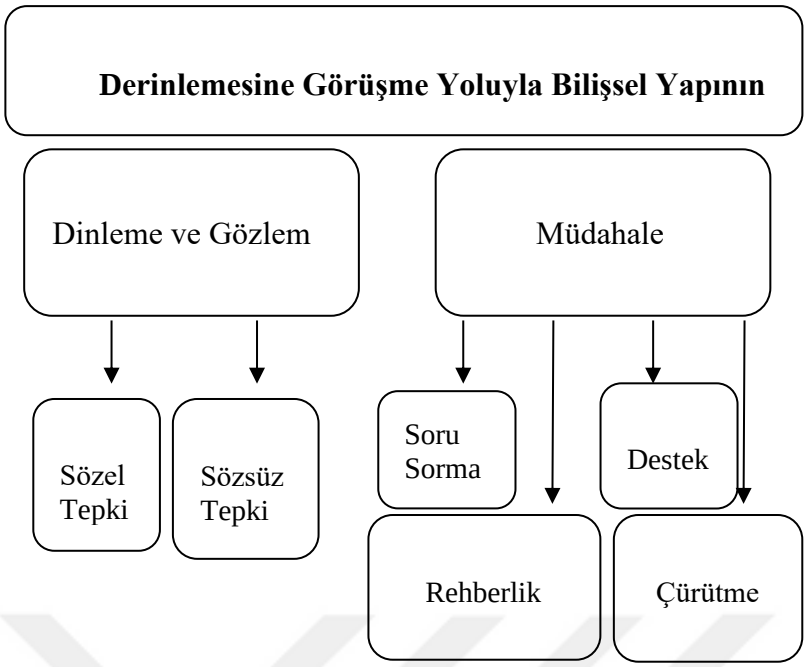
"Herkese eşit miktarda paylaşım yaptın mı? Nasıl? Bu bütünde kaç tane yarım vardır? Tüm alanın $\frac{1}{6}$'i ne demek? Kesir çubuklarını kullanarak birim kesirlerin hangi özelliğini vurguladık? Birim kesir ne demek? Birim kesirler sayı doğrusunda hangi doğal sayılar arasındadır? Bu kesirde kaç bütün vardır? Bu kesirlerden hangisi bir bütüne/bir yarıma en yakındır? Kesirlerin sayı doğrusunda birbirlerine uzak veya yakın olması neyi ifade eder? Bir bütünden büyük kesirlere örnek verir misin? Bu iki kesrin birbirinden farkı nedir? Neden bu işlemi yaptın? Sonuçta bir artış mı yoksa bir azalış mı bekliyorsun? Neden?"

3.3.3.1.Görüşme süreci

Bu araştırmada, öğretim deneyi araştırmalarının vazgeçilmez bir veri toplama aracı olarak görüşme yöntemi kullanılmıştır. Literatürde geçen klinik görüşme ifadesi yerine Türkçe ile uyumlu olması açısından bu araştırmada "derinlemesine görüşme" ifadesi kullanılmıştır. Piaget tarafından sıklıkla kullanılan derinlemesine görüşme tekniği öğretim deneyleri araştırmalarının vazgeçilmez bir parçasını oluşturmakta ve çocukların bilişsel yapıları ile öğretim sürecini ayrıntılı olarak incelemeyi ifade etmektedir (Ginsburg, 1981; Steffe & Thompson, 2000). Piaget için önemli olan, çocukları standart testlerle ölçmek değil, düşüncelerinin temel doğası hakkında fikir edinmektir. Mevcut psikolojik araştırma yöntemleri bilişsel gelişim araştırmaları için yetersiz göründüğünden, Piaget yeni bir teknik yaratmanın gerekli olduğunu düşünmüştür. Sonuç olarak, çocukların düşünce yapısını keşfetmeyi ve bilişsel yeterliliklerini belirlemeyi amaçlayan esnek bir sorgulama yöntemi olan "derinlemesine görüşmeyi" geliştirmiş ve kullanmıştır. Standart testlerde olmayan esneklik ve değiştirilebilirlik durumlarından yararlanan Piaget gerçekleştirdiği bu

görüşmeler sayesinde çocukların hatalarının, onların düşüncelerinin doğasına ilişkin önemli ipuçları verdiğini ve bunun yetişkin bilişinden niteliksel olarak farklı olduğunu ortaya koymuştur. (Ginsburg, 1981; 1997; Piaget, 1929).

Piaget'nin bu yöntemi neredeyse altmış yıl boyunca kullanmış olmasına rağmen, bu yönteme teorik olarak fazla ilgi göstermemiş olması oldukça şaşırtıcıdır (Ginsburg, 1981). Buna karşın Piaget, derinlemesine görüşmenin önemini ve kullanımını vurgulamış ve yöntemin özünü şu şekilde tanımlamıştır: "Derinlemesine (klinik) görüşme, doğrudan gözleme dayanır. Araştırmacı kendisinin yönlendirilmesine izin verir ve öğrencinin zihinsel bağlamının tamamını dikkate alır" (Piaget, 1929, s. 8). Bu durum genel olarak bilişsel gelişim araştırmaları için olduğu kadar matematik araştırmaları için oldukça değerlidir (Steffe & Thompson, 2000). Piaget'nin çalışmalarının matematiksel düşünme üzerine yapılan araştırmalar üzerinde de büyük bir etkisi olmuştur. Her şeyden önce Piaget temel araştırma hedefini, yani düşüncenin doğasını açıklamayı vurgulamıştır. Bu sebeple bu görüşmeyi kullanan araştırmacılar Piaget'i izleyerek, matematiksel bilginin altında yatan zihinsel süreçleri anlamaya çalışmaktadır. Sonuç olarak, salt davranışların araştırılması ya da başarı testlerinin sonuçları ile ilgilenmek yerine matematiksel düşünmeyi keşfetmeye odaklanılmaktadır. Şöyle ki, matematik eğitimi araştırmalarında başlangıçta "matematiksel düşünmeyi" tanımlamak pek mümkün değildir; bunun yerine çocukların matematiksel düşüncesinin temel gelişimsel özelliklerini belirlemek için bir keşif süreci kullanılmalıdır. Bu noktada bu keşif sürecini ifade eden derinlemesine görüşmenin kullanılması sonucunda matematiksel düşünmeyi kavramsallaştırmak ve tanımlamak mümkün hale gelir (Ginsburg, 1981). Matematiksel düşünme çalışmalarında da araştırmacıların benzer bir amacı vardır; matematik yapmaya dahil olan düşünme sürecini ("yapılar", "bilişsel faaliyetler", vb.) tam olarak tanımlamak (Ginsburg, 1981; Piaget, 1929). Bununla birlikte, geleneksel değerlendirme yöntemleri genellikle çocukların zihninde ne olup bittiği hakkında yetersiz kalırken derinlemesine görüşmeler, çocuğun zihnine girmemize yardımcı olur ve daha zengin veri kaynağı sağlar (Ginsburg, 1997). Dolayısıyla diğer araştırma türlerinde kullanılan görüşme tekniklerinden farklı olarak, öğrencinin zihnindeki imgeleri ve zihinsel eylemleri açığa çıkarmayı hedefler (Ginsburg, 1997). Özetle, Sommers-Flanagan'ın (2016) çalışmasından esinlenerek derinlemesine görüşme yoluyla öğrencilerin bilişsel yapılarının belirlenmesini özetleyen bir model geliştirilmiş ve aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 3.3.3.1. Derinlemesine Görüşme Yoluyla Bilişsel Yapıyı Belirleme Modeli

Şekil 3.3.3.1'de belirtildiği üzere, derinlemesine görüşme aracılığıyla katılımcıların bilişsel yapıları iki aşama ile belirlenir. Araştırmacı öncelikle, araştırmak istediği konuya dair katılımcıya çoğunlukla açık uçlu olmak üzere çeşitli sorular yöneltir, gerektiğinde aynı soruyu farklı ifadelerle tekrar sorar ve katılımcının yanıtını sorgular. Katılımcılarının yanıtlarını dinlerken bir yandan da gözlem yapar. Bu süreçte katılımcının ağzından çıkan her sözcük ve baş sallama, kaş kaldırma, vücut pozisyonu gibi diğer sözsüz tepkiler veri olarak kabul edilir. Araştırmacı tüm bu diyalog süresince katılımcıyı destekleyen veya onun yanıtını çürütmeyi hedefleyen başka sorular da sorabilir ve bunlar sonucunda da katılımcının zihnindeki duruma dair çeşitli tespitlerde bulunur. Derinlemesine görüşmelerin en önemli özelliği, katılımcının sorunu nasıl çözdüğüne dair açıklamasını ortaya çıkarmak için tasarlanmış "Nereden biliyorsun?" ya da "Nasıl yaptın?" gibi sorulardır. Bunun sonucunda araştırmacılar öğrencinin söylediğini ve yaptığını öğrencinin bilgisine, bağlama ve görüşmedeki etkileşime dayandırarak yorumlamaktadır. Böylece araştırmacıya tam yerinde hipotez oluşturma (on-the-spot hypothesis making) ve test etme olanağı tanır. Öğretim deneylerinde de amaç öğrencinin düşünme yolunu ortaya çıkarmak olduğundan derinlemesine görüşmeler öğretim deneyi araştırmalarının vazgeçilmez bir dinamiği olarak kendini göstermektedir (Steffe & Thompson, 2000). Piaget'nin (1929) derinlemesine (klinik) görüşme tekniği öncelikle "salt performans" ile değil, zihinsel " yetkinlik" ile ilgilidir. Temel yetkinliği yani çocuğun mevcut gelişim aşamasındaki en yüksek yeteneğini ortaya koymayı amaçlar ve genellikle tipik performansa yani çocuğun belirli bir durumdaki sıradan

davranışına odaklanmaz. Bu sebeple görüşme sırasında sıklıkla ve ısrarla sorular sorulması bu teknikte öne çıkmaktadır.

Etkili bir görüşmede uygun motivasyonu sağlamak için derinlemesine görüşme (a) görüşmeci ve çocuk arasındaki bire bir ilişkiden yararlanır; (b) görevlerin esnek bir şekilde oluşturulmasını ve sunulmasını içerir ve (c) görüşmeci ve çocuk arasındaki birebir ilişkide tekrardan yararlanır. Duyarlı ve tehditkar olmayan araştırmacı, asıl görevler verilmeden önce çocuğu tanımak için zaman ayırarak çocuğu rahatlatabilir. İkinci olarak, bazen belirsiz nedenlerden dolayı, bir çocuk bir görevi sıkıcı veya aşırı zor bulabilir. Böyle bir durumda öğrencide yetkinlik eksikliği olduğu sonucuna varmadan önce farklı görevler kullanılmalıdır. Örneğin, bir çocuk standart dikey formda sunulduğunda toplama işlemi yapamayabilir, ancak problem yatay olarak yazıldığında bunu yapabilir. Dolayısıyla araştırmacı söz konusu görevi başta sunulandan farklı olarak yani değiştirerek çocuğa sorabilir ve bunun sonucunda da çocuğun yetkinliğine dair daha doğru çıkarımlarda bulunabilir. Son olarak, çocuk bir problem ilk kez sunulduğunda onu denemek için yeterli yetkinlikte hissetmeyebilir. Görüşmeci pes etmez ve problemi daha sonra tekrarlarsa, çocuk o zaman yapmaya hazır hale gelebilir. Elbette görüşmecinin ısrarcı olmasının tehlikeleri de vardır. Tekrarlanan başarısızlıklar çocuğu aşağılamaktan başka bir işe yaramayabilir. Yine de bu teknik genellikle işe yarar (Ginsburg, 1981).

Bu araştırmada öğrencilerin birim kesir, bütün kavramı ve kesir büyüklükleri konularındaki düşünme yolları derinlemesine görüşme yoluyla belirlenmiş ve geliştirilmiştir. Bu noktada, araştırmada görüşmeler sırasında öğrencilerin zihinsel imgelerini açığa çıkarmaya dayanan sorular yöneltilmiş ve gerektiğinde farklı görevler vererek bu zihinsel imgeleri detaylandırılmaya çalışılmıştır. Derinlemesine görüşmeye uygun olarak hem görüşme hem gözlem yapılarak bu konuda net çıkarımlara ulaşılmak istenmiştir. Öğrencilerin kullandığı ifadeler, jest ve mimikleri, görevlere verdikleri yanıtların tamamı birer veri kaynağı olarak kullanılmıştır.

3.3.4. Gözlem formu: Öğretim deneyleri, katılımcıların genellikle bir araştırmacı-öğretmen, bir veya daha fazla öğrenci ve bir araştırmacı-gözlemci olduğu bir dizi öğretimden oluşur (Steffe & Thompson, 2000). Dolayısıyla görüşme kadar gözlemin de öğretim deneyi çalışmaları yürütmek için vazgeçilmez bir araç olduğu söylenebilir. Dolayısıyla araştırmada kullanılan gözlem formları titizlikle hazırlanmış ve uzman görüşleri de alınarak kullanılmıştır. Her bir öğretim bölümü için, o öğretim bölümünde uygulanması planlanan ve

öğrencilerin varsayımsal öğrenmelerine göre oluşturulan gözlem formları oluşturulmuştur. Araştırmada gözlemler aşağıdaki ölçütlere göre yapılmıştır:

- İçerik: Uygulanan içeriğin hangi kavram ve bilgilere odaklandığı
- Konu ve kavramlar: Etkinliklerin nicel muhakeme açısından çıktıları, kesirler konusuna ait kavramların öğrenci tarafından uygulanma biçimi, önceden hedeflenen kazanımların öğrenciler tarafından anlaşılma durumu
- Sınıf etkileşimi: Uygulamalar esnasında öğrencilerin birbirleriyle iletişimi, öğrencilerin sordukları sorular, verdikleri cevaplar, tartıştıkları durumlar, matematiksel dilin kullanımı
- Öğretim metodu: Bir ders saati içerisinde hangi öğretim yöntemlerinin uygulandığı
- Katılım türü: Bireysel, tüm sınıf ya da grup olarak çalışma

Araştırmada gözlem süreci ilk olarak veri toplama sürecine başlamadan önce keşfedici öğretim ile öğrencileri ve sınıfı tanıma amacıyla yapılmıştır. Bu gözlemlerde öğrencilerin kendilerini ifade edebilecek durumda olduğu görülmüştür. Bununla birlikte, tüm uygulamalar süresince grup içi ve sınıf tartışmalarının önemine vurgu yapılarak herkesin düşüncesinin değerli olduğu öğrencilere açıklanmıştır. Öğrencilerin bireysel çalışmaları gereken dersler hariç diğer tüm derslerde tartışma yöntemi kullanılmıştır.

Gözlem formları (EK 8) öğretimler sırasında ya da genellikle dersin hemen sonrasında araştırmacı tarafından, farklı görev ve kazanımların ele alınması sebebiyle her bir öğretim bölümü için öncelikle ayrı ayrı oluşturulmuştur. Örneğin birim kesirlerin işlendiği etkinliklerde araştırmacı şu soruların yer aldığı formu doldurmuştur: “Birim kesirlerin 0-1 doğal sayıları arasında olduğunu anladılar mı? Bütüne en yakın ve en uzak birim kesri buldular mı? Hangi noktalarda hata yaptılar ve hataları nasıl giderdiler? Belirledikleri birim kesirleri uzunluk modeli ile temsil ettiler mi?....” Buna ek olarak, her öğretim bölümünde kullanılan ve kontrol listesi olarak oluşturulmuş form da gözlem formları ile birlikte kullanılmıştır. Bu kontrol listesinde ise derste hangi konunun hangi yöntemle ne kadar sürede ele alındığı, hangi stratejilerin kullanıldığı gibi sorular “Evet-Hayır” soru tipine uygun olarak yanıtlanmıştır. Uygulama sürecinde iki öğretim bölümü birinci danışman tarafından yürütülmüş, araştırmacı ise gözlem yapmıştır. Böylece bu dersler için, öğretmen gözlem formu ile birlikte üç gözlem notu tutulmuş ve karşılaştırılmıştır.

3.3.5. Alan notları (EK 9): Araştırmacı tarafından sınıf uygulamalarını değerlendirmeye dayanarak günlük olarak alan notları formu doldurulmuştur. Sınıf gözlem ve öğrenci ürünlerini inceleme süreçlerinde dikkat çeken durumlar, öğrencilerin tartışma sırasındaki dikkat çeken yanıtları ve tutumları, sınıf içi uygulamalardan sonra yapılan değerlendirmeler sonucu değişimler, öğretimler öncesinde belirlenen olası öğrenci yanıtlarına ulaşılma durumları ve bunlar hakkındaki görüşler konusunda alan notları tutulmuştur. Görüşmelerin hangi ortamda ve şartlarda yapıldığı, öğrencilerle görüşülen zaman dilimi ve süresi, öğrencilerin görüşme sürecindeki tutumları ve görüşme sürecini etkileyen durumlara da yer verilmiştir.

3.3.6.Öğrenci günlüğü (EK 7): Her dersin sonunda öğrencilerin o günkü dersi genel olarak değerlendirmeleri istenmiştir. Açık uçlu sorular yardımıyla öğrenciler, o gün işlenen dersteki konu ve etkinliklere dair düşüncelerini yazmıştır. Öğrenciler bu yansıtıcı günlüklerine fikirlerini yazarak özellikle duyuşsal ve sosyal yönlerden veri kaynağı oluşturmuştur.

3.3.7.Öğretmen günlüğü (EK 7): Öğretmen günlüğü her öğretim deneyi sonucunda bir gün içinde işlenen dersler ile ilgili olarak öğretmen tarafından doldurulmuştur. Derslerin sonunda öğretmen öğrencilerin anlamakta zorlandıkları noktalar ve öğretim sürecinin nasıl gittiği hakkında görüşlerini bildirmek için form doldurmuştur. Öğretmenin görüşlerini de dikkate alarak araştırmacı sonraki öğretim deneyinde gerekli düzeltmeleri yapmıştır.

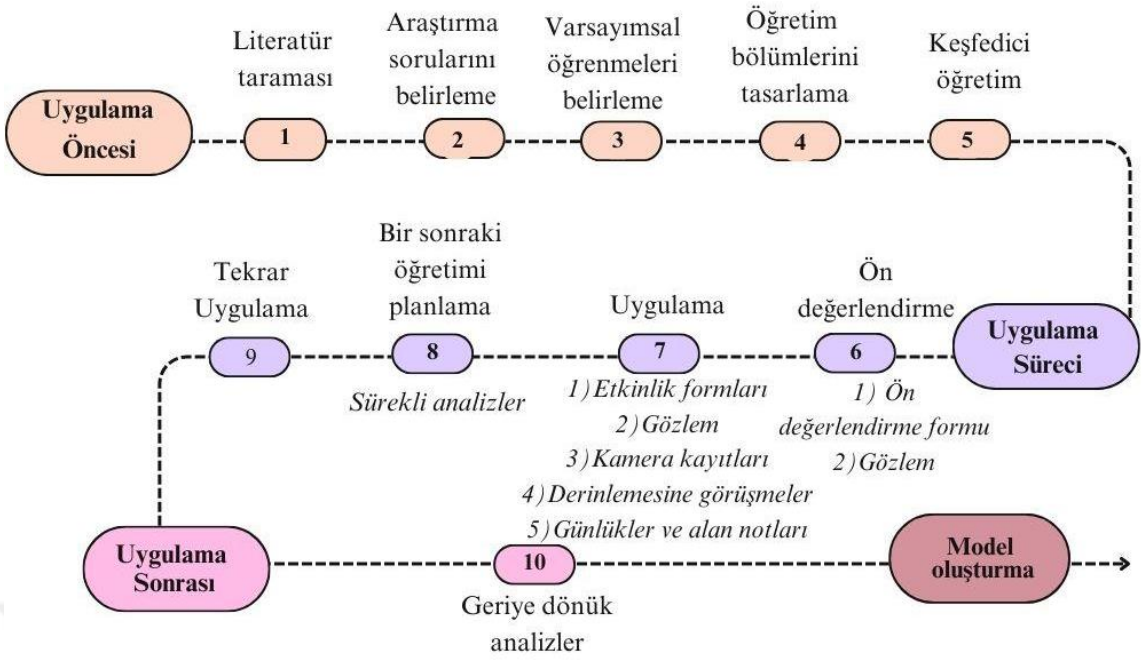
3.3.8.Araştırmacı günlüğü (EK 6): Araştırmacı tarafından tüm araştırma sürecine dair detaylı not tutulmuştur. Genel olarak belirli periyotlarla danışman hocalar ile yapılan görüşmelerde ele alınan konu ve değişikler, bu süreçte araştırmacının hangi konu ve noktalarda bakış açısının değiştiği, başlangıçta belirlenen varsayımlar ve karşılaşılan durumlar hakkındaki çıkarımlar bu günlüklerde raporlanmıştır. Özellikle araştırmanın birinci ve ikinci uygulamaları arasında bazı farklılıklar mevcuttur. İlk uygulama sırasında gelişen beklenmedik durumlar, varsayımsal hipotezlerin değişmesi ve bu değişimin sebepleri gibi açıklamalar araştırmacı günlüğünden elde edilmiştir.

3.3.9. Ön değerlendirme formu (EK 4) **:** Araştırmada, uygulamaya başlamadan önce öğrencilerin kesirler konusundaki bilgi düzeylerini ölçmek için araştırmacı tarafından geliştirilen "Ön Değerlendirme Bilgi Testi" kullanılmıştır. Öğretim deneyi araştırmalarında öğrencilerin ön bilgileri hakkında bilgi sahibi olmak ve güncel olarak hangi seviyede

olduklarını ölçmek için uygulama sürecinden önce ön görüşme ya da ön değerlendirmelerin yapılması önerilmektedir (Cobb & Steffe, 2011). Bu araştırma bir sınıf öğretim deneyi olduğundan ön görüşme yerine ön değerlendirme formunun uygulanması uygun görülmüştür. Bu test aynı zamanda hedef grupların belirlenmesinde kullanılmıştır. Test, gruplara uygulanmadan önce 4. sınıfta eğitim gören başka bir sınıftaki beş öğrenciye uygulanmış, soruların anlaşılır olup olmadığı ve zorluk düzeyi belirlenmiştir. Test, uygulamalardan önce yürütülen keşfedici öğretim deneylerinden sonra günün bir saatinde çözmek üzere tüm sınıfa dağıtılmıştır. Öğrencilere herhangi bir müdahalede bulunmadan, soruları bireysel olarak çözmeleri istenmiştir. Testte yer alan sorular Matematik Dersi Öğretim Programında belirtilen 1., 2. ve 3. sınıf kesirler konusundaki kazanımları dikkate alınarak ve uzman görüşlerinden de faydalanarak hazırlanmıştır (MEB, 2018). Bir 4. sınıf öğrencisinin bu seviyeye kadar öğretim programında yer alan kazanımlara uygun olarak kesirlerle ilgili bilmesi gereken kavramlara dair soru örneklerinin yer almasına özen gösterilmiştir. Bu doğrultuda testte yer alan 4 açık uçlu soru kesirlerde yarım ve çeyrek kavramı, birim kesir, bir bütünden küçük kesirlerin alan ve sayı doğrusu ile modellenmesi ve modellerin yorumlanması ile bütün oluşturma kazanımlarına dayandırılarak oluşturulmuştur.

3.4.Araştırma Süreci

Araştırmada katılımcıların zihinsel yapılarının modellenmesini amaçlayan bu öğretim deneyi süreci; uygulama öncesi, uygulama süreci ve uygulama sonrası olmak üzere üç aşamada açıklanmış ve her aşama detaylandırılmıştır (Cobb, 2000; Cobb & Steffe, 1983; Lesh & Kelly 2000; Steffe 1991; Steffe & Ulrich 2014; Steffe & Thompson 2000). Literatürde bulunan açıklamalardan elde edilen bilgilere dayanarak öğretim deneyi süreci Şekil 3.4.'te özetlenmiştir. Araştırmanın her iki uygulamasında da süreç, aşağıda açıklandığı gibi aynı sırayla ve aynı şekilde yürütülmüştür.



Şekil 3.4.Araştırma Süreci

Konu ile ilgili literatür tarama, araştırmanın amacının, kapsamının ve araştırma sorularının belirlenmesi, çalışılacak katılımcı grubunun tespit edilmesi ve öğretim bölümlerinin oluşturulması uygulama öncesinde gerçekleştirilmiştir. Keşfedici öğretimlerin yapılması, ön değerlendirme formunun uygulanması ve analizi ile uygulama süreci başlamıştır. Uygulamalar sırasındaki sürekli analizler ve uygulama bitiminde yapılan geriye dönük analizler; buna dayanarak öğrenci matematiğinin modellenmesi ve hedef gruptaki öğrencilerin kavramsal gelişimini belirten detaylar uygulama sonrasında ortaya koyulmuştur. Bu noktada araştırmacı devamlı olarak "öğrenci yanıtlarında hiyerarşik bir örüntü var mı, varsa nasıl oluştu ve yoksa ne gibi sebepler dolayısıyla beklenen gelişim gerçekleşmedi, farklı öğrenci cevaplarındaki ortak düşünme yolları var mı, bu düşünme yolları nelerdir ve neye dayanır, öğrenciler nicelikler hakkında düşünmekte mi, nicelleştirmeyi hangi şemalara dayanarak yapmakta" gibi sorular sormuştur. Bunların sonucunda ise öğrencilerin düşünme yollarını ve gelişimini hiyerarşik olarak ortaya koymuş; ve kesirlere ait kavramları öğrenmeyi temsil eden bir model geliştirmiştir. Araştırmanın bulgular ve tartışma bölümünde öğrenci yanıtları ve gelişimi detaylı açıklanmış, sonuç bölümünde ise elde edilen sonuçları özetleyen modele yer verilmiştir.

3.4.1.Keşfedici Öğretim

Öğretim deneylerinde çalışmayı yürütecek araştırmacıların daha önce öğretmenlik deneyimlerinin olmaması ve öğrencilerin başka bir öğretmen (araştırmacı) tarafından yürütülen derslere alışık olmamaları öğretim deneyi araştırmalarının sınırlılığı olarak görülebilmektedir. Bu sınırlılığı minimum düzeye indirmek ve araştırmacının öğrencilerle ilgili ön deneyimler kazanabilmesi amacıyla keşfedici öğretimler yapılması önerilmektedir (Steffe & Thompson, 2000). Bu süreç araştırmacıya öğrencilerin matematiksel kavramları nasıl anlamlandırdıkları ve öğrenmenin nasıl bir yol takip ettiği ile ilgili bilgiler sağlarken aynı zamanda öğretim deneyine katılacak öğrencilerin belirlenmesini de kolaylaştırmıştır. Araştırmacı bu süreçte sınıftaki öğrencilerin matematik başarı durumuna dair güçlü çıkarımlarda bulunmuştur. Keşfedici öğretimin bir diğer amacı da öğrencilerin matematik bilgilerini hangi müdahalelerle yapılandırabileceklerine ilişkin çıkarımlarda bulunmak ve öğretim süreciyle ilgili başlıca öğrenme hipotezleri oluşturmaktır. Bu hipotezler, uygulama boyunca test edilebilir ya da yeni baştan da oluşturulabilir (Steffe & Thompson, 2000).

Araştırmacı, araştırmanın uygulamaları başlamadan önceki iki hafta haftada iki saat olmak üzere toplamda 4 saat kadar gözlem yapmıştır. Bunu her iki uygulama öncesinde de yapmıştır ancak ikinci uygulama süreci dönem başında hemen yürütülmeye başladığından ikinci uygulamadaki keşfedici öğretim birinci dönemin sonunda yapılmıştır. Bu gözlemler yalnızca Matematik dersi değil Hayat Bilgisi ve Türkçe derslerine de denk gelmiştir. Araştırmacı, keşfedici öğretimler sayesinde sınıftaki öğrencilerin iletişim, kendini ifade edebilme durumlarına dair çıkarımlarda bulunmuş ve öncesinde hazırladığı öğretim planlarını danışmanları ile birlikte tekrar gözden geçirmiştir. Ayrıca bu süreç sonucunda sınıf öğretmeni ile de grupların belirlenmesi konusunda görüşülmüş ve onun da görüşleri not edilmiştir. Bunun sonucunda sınıfın tamamı gözlemlenmiş ve gruplar da nihai olarak belirlenmiştir. Araştırmanın yürütüldüğü sınıflardaki sınıf öğretmenlerinden biri 10 diğeri 24 yıldır MEB'e bağlı çeşitli okullarda çalışmış dört yıllık eğitim fakültesi mezunu kadın öğretmenlerdir. Her iki öğretmen de kendilerini yeniliklere açık ve kendilerini geliştirmekten keyif alan bireyler olarak tanımlamışlardır. Bir öğretmen matematik dersinin favori dersi olduğunu vurgulamıştır. Araştırma sürecinin başında yapılan keşfedici öğretimler sırasındaki gözlemlere dayanarak, öğretmenlerin ikisinin de anlatıma dayalı ve sunuş yoluyla ders işledikleri, önce konu anlatımı ve devamında örneklerden oluşan bir öğretim stili benimsedikleri gözlemlenmiştir. Buna ek olarak matematik derslerini sıklıkla işlemsel örneklendirmeler üzerinden işledikleri gözlemlenmiştir.

3.4.2.Öğretim Bölümlerinin Oluşturulması

Öğretim deneyinde oluşturulan öğretim bölümleri (teaching sessions) her araştırmada kendine özgü biçimde, araştırmanın doğasına ve amacına uygun olarak oluşturulmaktadır (Steffe & Ulrich, 2014). Şöyle ki öğretim bölümleri, söz konusu araştırmaya uygun olarak çeşitli etkinlikler, yöntem ve teknikler ile araç gereçlerden oluşur. Bu araştırmada öğretim bölümlerinde yer alan etkinlikleri tasarlarken şu şekilde bir yol izlenmiştir: Araştırmacı tarafından alanyazında ilkokul öğrencilerinin nicel muhakeme becerilerini geliştirmeyi amaçlayan çalışmalar ve kesirler konusunda yapılmış araştırmalar incelenmiş ve buradan elde edilen bilgiler ile Matematik Dersi Öğretim Programında (2018) belirtilen kazanımlar temel alınarak kesirler konusunda nicel muhakemeyi geliştirme hedefiyle etkinlikler tasarlanmıştır. Etkinliklerin gerçeğe uygun ve bağlamsal olarak oluşturulmasına dikkat edilmiştir. Alanyazındaki çalışmalarda kullanılan etkinliklerden bir kısmı bu araştırmanın amacına uygun olarak değiştirilmiş ya da farklı araştırmalardan ilham alınarak tasarlanmıştır. Her bir etkinlik öğrencide gelişmesi beklenen kesirler konusuna ait en az bir kazanımı içermekte ve öğrencilerin nicel muhakemelerini geliştirmeyi hedeflemektedir. Bunların sonucunda etkinlikleri uygulanmasından önce öğretim deneyi araştırmasına uygun olarak literatüre dayanarak ve danışmanlar rehberliğinde varsayımsal öğrenme yolları belirlenmiştir. Araştırmacı her bir öğretim bölümü için kendisine "*Bu öğretim bölümünde neyi geliştirmek istiyorum? Belirlediğim bu etkinliği nasıl uygulayacağım? Hangi yöntem ve teknikleri kullanacağım? Bu süreçte öğrencilerin hangi yanıtları vermelerini bekliyorum?*" gibi sorular sormuştur.

Araştırmanın 4. sınıf matematik dersi programında kesirler konusunun işlenmesinin belirtildiği Aralık 2022-Mart 2023 tarihleri arasında gerçekleştirilmiştir. İlk uygulama güz döneminin son konusu olarak dönem bitimine üç hafta kala Aralık-Ocak aylarında yürütülmüştür. İkinci uygulama ise bahar dönemi başladığı hafta olarak Şubat-Mart aylarında yürütülmüştür. Her iki uygulama da olağan akışın içerisinde, sınıf ortamında ve mevcut plan dahilinde yürütülmüştür. Her iki grupla öğretime başlamadan önce araştırmacı sürece dair bilgilendirme yapmış ve bu sürecin bir not getirmeyeceğini, hata yapmanın değil bu sürecin önemli olduğunu ifade etmiştir. Böylece araştırmacı öğretim ve derinlemesine görüşmelerde öğrencileri zihninden geçenleri açıkça ifade etmeleri için desteklemiştir. İkinci uygulama, iki haftalık sömestr tatilinden hemen sonra başlayacakken yaşanan deprem felaketi sebebiyle verilen iki haftalık tatilden sonra şubat ayının sonunda yürütülmüş ve ilk

uygulamadan farklı olarak üç değil dört hafta sürmüştür. MEB tarafından hazırlanan ünitelendirilmiş yıllık planda kesirler konusuna ayrılan ders saati 16 iken sınıf öğretmenlerinden izin isteyerek bu araştırmada ilk uygulamada 19; ikinci uygulamada ise 23 ders saati süresinde uygulanmıştır. Derslere ait belirtke tablosu aşağıda gösterilmiştir. MEB (2018) programda verilen kazanımlar ve bu kazanımlara uygun olarak planlanan öğretim bölümleri ile bu öğretim bölümlerinde öğrencide geliştirilmesi hedeflenen varsayımsal öğrenmeler açıklanmıştır. Öğretim bölümüne örnek olarak "Tema1.Öğretim Bölümü1" ifadesi kısaltılarak "T1ÖB1" şeklinde belirtilmiştir.

Tablo 3.4.2. Varsayımsal Öğrenmeler, Kazanımlar ve Öğretim Bölümleri

Varsayımsal Öğrenmeler	Kazanımlar	Tema ve Öğretim Bölümü	Kullanılan Etkinlikler
Pay, payda, bütün, yarım, çeyrek, eş parça ve birim kesir kavramlarını hatırlama	Önceki yıllarda öğrenilen kesir kavramları hatırlatılır.	T1.ÖB1, T1.ÖB2 T2.ÖB1	Kurabiye paylaşım, Değişen bütünler, Eş olmayan parçalar
Sayı doğrusunda kesir ve doğal sayıları göstererek aralarındaki ilişkiyi inceleme	M.4.1.6.4. Verilen bir kesri sayı doğrusu üzerinde sıfır, yarım ve bütünle karşılaştırma çalışmalarına yer verilir.	T1.ÖB3 T2.ÖB3,T2.ÖB5, T2.ÖB6 T3.ÖB3, T3.ÖB4	Dijital/somut kesir çubukları, Birim kesri sayı doğrusunda gösterme, Doğal sayıları sayı doğrusunda gösterme, Bir bütünden büyük kesirleri sayı doğrusunda gösterme
Basit, bileşik ve tam sayılı kesirleri alan modeli ile sayı doğrusu modelleri ile temsil etme	M.4.1.6.1. Basit, bileşik ve tam sayılı kesri tanır ve modellerle gösterir.	T1.ÖB6 T2.ÖB4 T3.ÖB1,T3.ÖB2, T3.ÖB3,T3.ÖB4, T3.ÖB5	Bir bütünden büyük kesirleri modelleme, Birim ve basit kesirleri sayı doğrusunda gösterme, Bileşik kesir modelleme, Bir bütünden büyük kesirleri modelleme, Bir bütünden büyük kesirleri sayı doğrusunda gösterme, Tam sayılı kesri modelleme
Kesir çubukları yardımıyla kesirlerin uzunluk anlamını kavrama	M.4.1.6.4.a) Karşılaştırma çalışmaları yapılırken uzunluk, alan, sayı doğrusu modelleri kullanılır.	T1.ÖB3,T1.ÖB4, T1.ÖB5 T2.ÖB2	Dijital/somut kesir çubukları, Pasta paylaşım, Bütüne en yakın kesir, Kesir çubukları
Problem bağlamıyla birim kesirleri karşılaştırma ve tahmin etme	M.4.1.6.2. Birim kesirleri karşılaştırır ve sıralar.	T1.ÖB3,T1.ÖB4, T1.ÖB5, T4.ÖB3	Dijital/somut kesir çubukları, Pasta paylaşım, Bütüne en yakın kesir, Birim kesirleri karşılaştırma
Farklı kesir türlerini birbiriyle ilişkilendirerek karşılaştırma	M.4.1.6.4. Paydaları eşit olan en çok üç kesri karşılaştırır.	T4.ÖB1, T4.ÖB2, T4.ÖB4,	Basit kesirleri karşılaştırma, Farklı kesir türlerini karşılaştırma

Tablo 3.4.2'de belirtildiği üzere araştırma sürecinde tasarlanan ve kesirlerde nicel muhakemeyi geliştirmeyi hedefleyen öğretim deneylerinde kesirlerdeki tek bir kavram değil birçok kavram farklı derslerde farklı etkinliklerde ele alınmıştır. Böylelikle öğrencilerin bir kavrama dair düşünme yolunun gelişimi ve değişimi belirlenmiştir. Bu süreçte, tasarlanan ve uygulanan etkinlikler alanyazında yer alan çeşitli araştırma bulgularına dayandırılmıştır.

Aşağıdaki tabloda, uygulanan öğretimlerin amaçları, bunların nicel muhakeme kapsamında literatürden elde edilen karşılıkları ile bu süreçte öğrencilerden beklenen matematiksel fikir ve işlemler verilmiştir:

Tablo 3.4.3. Tasarım Prensipleri ve Görevler

Tasarım Prensipleri	Kaynaklar	Görevler
Günlük hayattaki deneyimlerden yararlanma, problem durumu ve gerçek hayat arasında bağlantı kurma	Madison (2006) Smith & Thompson (2007)	Kesirler konusundaki otantik ve bağlamsal görevler verme
Modelleme etkinlikleri ile matematiksel fikirleri ve ilişkileri keşfetme	Thompson & Saldanha (2000) Weber vd. (2014)	Kesirleri görsel temsiller kullanarak temsil etme
Niceliklere dayalı temsiller geliştirerek anlamlı genellemeler oluşturma	Ellis (2007) Weber (2012)	Kesirler konusunda genellemelere ulaşma
Bir niceliğin farklı temsilleri arasında ilişki kurabilme	Nunes & Csapó (2011) Thompson & Saldanha (2000)	Aynı kesri farklı temsillerle gösterme
Tahmin içeren nicel muhakeme görevleri aracılığıyla toplamsal ve çarpımsal muhakeme beceri geliştirme	Madison (2006) Nogues & Dorneles (2019)	Sayı doğrusunda kesrin yerini tahmin etme
Somut materyal aracılığıyla nicelikler üzerinde akıl yürütme	Thompson (2011)	Kesir çubukları kullanma
Gerçeğe uygun sorulara ve performansa dayalı görevlere yer verme	Belue (2015) Kruse & Drews (2013)	Gerçeğe uygun ve açık uçlu sorular sorma
Grup çalışmaları yaparak nicel muhakeme sürecinde matematiksel söylemler geliştirme	Goos, Galbraith & Renshaw (2002) NCTM (2014)	Çeşitli etkinlikleri grupça uygulama
Parça-bütün ilişkilerine dayanan nicelikler hakkında çıkarım yaparak toplamsal akıl yürütme geliştirme	Nunes & Bryant (2015) Serrazina & Rodrigues (2018)	Kesirlerin parça-bütün anlamına vurgu yapan problemler çözme
Niceliksel olarak zengin içerikler kullanma	Thompson (1993)	Birden fazla matematiksel düşünme gerektiren problem çözme
Nicel ilişkilere dayanan sözel ifadeler kullanma	McMullen,Hannula-Sormunen & Lehtinenn (2014)	Etkinlik sırasında tartışma ve yorum yapma

3.4.3. Araştırmada Uygulanan Etkinlikler

Araştırmada uygulanan öğretim bölümleri ve etkinlikler Tablo 3.4.2'de açıklanmış ve EK 5'te gösterilmiştir. Her bir öğretim deneyi kapsamında uygulanan etkinliklerde gerçekleşmesi planlanan varsayımsal öğrenmeler ise bu başlık altında ve ayrıca "Bulgular" bölümünde açıklanmıştır.

Kurabiye Paylaşım Etkinliği. Araştırmanın birinci öğretim bölümünde 6 kurabiyenin önce 12 sonra 24 öğrenci arasında eş paylaşımına dayanan etkinlik uygulanmıştır. Bu

etkinlikteki varsayımsal öğrenmeler; öğrencilerin kişi sayısının ve kurabiye sayısının birer nicelik olarak düşünmesi ve bu nicelikleri birbirleriyle ilişkilendirerek önce yarım sonra çeyrek kavramını vurgulayarak $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{4}$ kesirlerine ulaşmaları ve kişi sayısı arttıkça bir kişiye düşen kurabiye miktarının azaldığı fikrini anlamalarıdır. Bunun için ise öğrencilerin problemi dikkatlice okuyarak nicelikler üzerinde zihinsel model oluşturmak için muhakeme etmesi gerekmektedir. Bununla birlikte, öğrencilerin kavramsal olarak eş parçalama düşüncesini zihninde işlemesi gerekir. Dolayısıyla etkinlikteki bir diğer varsayımsal öğrenme öğrencilerin her bir parçanın eş olması gerektiği fikrini anlamalarıdır.

Değişen Bütünler Etkinliği. Bir kesrin bütüne göre değişebildiği fikrini anlamaları için verilen, $\frac{3}{4}$'ü taralı olan bir dairenin önce taralı alanının $\frac{1}{6}$'ini; sonra ise buldukları kesir miktarını bütüne yani $\frac{4}{4}$'e göre yorumlamalarını gerektiren etkinliktir. Bu etkinlik kesirlerde çarpma işlemi ile de çözülebilir ancak 4. sınıf düzeyinde bu konu öğretilmediği için çarpma işleminden bahsedilmeden yalnızca bütün referans alınarak yorum yapma amaçlanmıştır. Etkinlikte, değişen bütünlere göre taralı alan hesaplaması yer almaktadır. Böylece bir kesir miktarının bütüne göre değişebildiği anlaşılmalıdır.

Dijital ve Somut Kesir Çubukları Etkinliği. Araştırmada ikinci olarak somut ve dijital kesir çubukları kullanarak birim kesir kavramı işlenmiştir. Öğrenciler somut araçlarla grup olarak çalışırken, dijital kesir çubukları ile etkinlikler tüm sınıfın katılımıyla yürütülmüştür. Birim kesir kavramının "bir bütünün eş parçalarından biri" olarak öğrenciler tarafından doğru biçimde anlaşılması, öğrenci zihninde doğru bir kavram imajı olarak oluşturulması bu öğretimlerdeki asıl amaçtır. Öğrenciler kesir çubuklarını kullanarak kesirlerin uzunluk kavramını anlarlar ve birim kesirleri yalnızca sayı sembolleri olarak değil temsil ettikleri uzunluklara dayanarak birbirleriyle ilişkilendirir ve büyüklükleri hakkında yorum yaparlar. Eş paylaşım fikrine dayanarak uzunlukları eş parçalara bölme, bölünmüş eş uzunlukları bir araya getirme, birim kesirlerin 0-1 doğal sayıları arasında olduğunu fark etme ve bunu açıklayabilme, birim kesirleri aynı bütünler üzerinde alan modeli ile modelleyebilme, bütüne yakın-uzak olan birim kesirleri belirleyebilme, birim kesirlerin büyüklükleri hakkında genellemeye varabilme, modellenen ya da birim kesri sorulan bir kesri sayısal ifade olarak ifade edebilme, birim kesirleri bir araya getirerek bir basit kesre ulaşma gibi fikirler öğrencilerden beklenen nicel muhakeme becerisine dayanan fikirler olarak kabul edilmiştir.

Pasta Paylaşım Etkinliği. Bu etkinlik eş paylaşım fikrini içermekte ve kişi sayısı ile paylaşılan miktar arasındaki ilişkiyi yorumlamayı gerektirmektedir. Varsayımsal öğrenme olarak öğrencilerden eş parçalama, nicelikleri zihinde görselleştirme ve karşılaştırma, kişi sayısı ve pasta miktarları arasında ilişki kurma ve sonuçta herkese eşit çoklukta düştüğünü anlama fikirlerini geliştirmeleri beklenmiştir. Etkinlikte yalnızca eş paylaşım yapılmasının ötesinde, birinci grupta 4 öğrenci ve 1 pasta, ikinci grupta ise 8 öğrenci ve 2 pastanın paylaşılma durumunu karşılaştırmaları istenmiştir. Öğrencilerin farklı nicelikler olarak gruptaki kişiler ve pasta miktarları arasındaki doğrusal ilişkiyi anlaması, bu kesirleri karşılaştırması ve bu nicelikleri zihninde modelleyerek orantısal olarak düşünmesi ya da modelleyerek eşit miktarda düştüğü fikrini geliştirmesi beklenmiştir. Bu matematiksel fikirler öğrencilerin nicel muhakeme edebildiğine dayanan zihinsel modellerinin sonucu olarak kabul edilmiştir.

Bütüne En Yakın Kesri Bulma Etkinliği. Bu etkinlik bir önceki etkinliğin üzerine inşa edilerek birim kesirlerin büyüklüklerini anlamayı ve karşılaştırmayı gerektirmektedir. Bununla birlikte, kesirlerde bütün kavramı ve birim kesirlerin bütün ile ilişkisi de vurgulanmıştır. Öğrenciler bir önceki etkinlikte kesir çubuklarıyla çalışarak birim kesirler üzerinde düşünmüş ve büyüklüklerini karşılaştırmışlardır. Bu etkinlikte ise birim kesirlerin bir bütüne yakınlık-uzaklık bakımından karşılaştırması istenmiştir.

Bir bütünden Büyük Kesirleri Modelleme Etkinliği. Bu etkinlik ile birlikte öğrencilerin bir bütünden büyük kesirleri anlamlandırması hedeflenmiştir. Bileşik ve tam sayılı kesirleri birer nicelik olarak zihinde işleyebilmesi için öğrencilere öncelikle kesirlerin parça-bütün anlamına dayanan görevler verilmiştir. Öğrenciler birim kesirleri birleştirerek veya yineleyerek bir bütünden büyük kesirlerin nasıl modelleneceğine dair matematiksel fikirler üretmiş ve bunları açıklamışlardır. Aynı zamanda bileşik ve tam sayılı kesirlerin aynı niceliği ifade ettiği fikrine dayanarak çeşitli modellerle bir bütünden büyük kesirlerin modellenmesi bu öğretimdeki varsayımsal öğrenme yollarını oluşturmuştur.

Kesirleri Sayı Doğrusunda Gösterme Etkinliği. Kesirlerin sayı doğrusunda gösterimi, referans noktalarına dayanarak kesirlerin büyüklüklerini yorumlamada nicel muhakemelerini geliştirmek amacıyla kullanılmıştır. Bu etkinlik, çeşitli öğretim bölümlerinde farklı kesir türlerini içererek birkaç kez uygulanmıştır. Böylece kesirlerin ölçme anlamına dayanan dijital sayı doğrusu modeli kullanılmış ve ayrıca nicel muhakemede önemli bir beceri olan tahmin becerisinin yoğun olduğu etkinliklere yer verilmiştir.

Varsayımsal öğrenme yolları olarak değeri bir bütüne eş, bir bütünden küçük ve bir bütünden büyük kesirleri nicelik olarak zihinde yapılandırma, bu kesirleri sayı doğrusu üzerinde eşit aralıklar oluşturarak konumlandırma, kesirler ve doğal sayılar arasında ilişki kurma, sayı doğrusu kullanarak kesrin değerine dair genellemelere ulaşma fikirleri ön plana çıkmıştır.

Kesir Karşılaştırma Etkinlikleri: Bu etkinlikte değeri bir bütüne eş, bir bütünden küçük ve bir bütünden büyük kesirleri hem alan modeli hem sayı doğrusu modeli kullanarak karşılaştırma amaçlanmıştır. Varsayımsal öğrenmeler farklı kesir türlerini birer nicelik olarak zihinden yapılandırma ve kesir büyüklüklerini yüzeysel ya da kapsamlı nicelleştirmeye dayanarak karşılaştırmadır. Öğrenciler sırasıyla birim kesirleri, basit kesirleri, bileşik kesirleri ve tam sayılı kesirleri karşılaştırmıştır. Son olarak ise hem alıştırma olarak hem de bağlamsal bir problem kullanarak farklı kesir türlerini karşılaştırmışlardır.

3.4.4.Öğretim Bölümlerinin Uygulanması

Araştırma süresince her bir öğretim bölümüne öğrencilerin o gün öğrenecekleri konulara dair kısa bir bilgilendirmeyle ve önceki dersin kısa bir hatırlatmasıyla başlanmıştır. Öğrencilere bireysel ya da grupla çalışacakları formlar dağıtılıp formda belirtilen görevler üzerinde çalışmaları için süre verilmiştir. Araştırmacı bu süreçte gözlemler yapmış, öğrencilerin konuşmalarına dikkat kesilmiş ve öğrencilere sorular sorarak onları yaptıkları çözümler üzerinde düşündürmeye ve kavramsal anlayışın gelişmesi için açık uçlu sorularla yönlendirmeye çalışmıştır. Örneğin bir kesrin bir bütünden büyük olup olmadığı konusunda endişeye düşen öğrenciler için sıklıkla modelleme çalışmaları önermiştir. Araştırmacı, özellikle alan modeli kullanılmasıyla öğrencilerin doğru yanıta kolaylıkla ulaşabildiğini bu gözlemler sonucunda elde etmiştir. Sınıf öğretmeni ise öğretimler boyunca hiçbir müdahalede bulunmamıştır. Etkinliklerin uygulanması sonrasında herkesin ne düşündüğünü çekinmeden söylemesi sağlanmış ve sınıfça tartışarak çözüm yolları üzerinde durulmuştur. Böylece farklı öğrenci çözümleri hakkında tartışılıp hep birlikte çözüm yollarına ulaşılmıştır. Sürecin tamamı kamera ile kayıt altına alınmıştır.

Araştırmada öğrencilerin kesir kavramlarını öğrenmelerine ilişkin daha net ve doğru bir model oluşturmak adına tek bir uygulama yürütmek yerine art arda iki uygulama yapılmıştır. Birinci uygulama, araştırmacıya çeşitli hata ve eksiklikleri gösterme ve düzeltme şansı tanımıştır. Uygulama sırasında yapılan gözlemler ve sürekli analizler sayesinde bir sonraki uygulama aşamasının daha doğru ve hatasız şekilde yapılması sağlanmıştır. Her iki

uygulama da aynı şartlar altında yürütülmüştür. Öğretim deneyinin doğasında yer alan esneklik özelliğine uygun olarak araştırma sürecinde gerek etkinlikler sırasında gerekse uygulama bitiminde araştırmacı uygun olan başka bir yol ve seçenekle sürece devam etmiştir. Örneğin araştırmacı etkinlik sırasında öğrencide gelişmesi beklenen varsayımsal bir öğrenmenin gerçekleşmediğini gördüğünde farklı bir müdahalede bulunmanın daha doğru olacağına dair fikir geliştirebilir ve bunu o görev sırasında ya da sonraki uygulama sırasında uygulayabilir. Öğretim deneyleri süresinde anlık değişimler genellikle öğrencilerin anlamakta güçlük çektiği konuların benzer etkinlikler ile sonraki ders/derslerde tekrar ele almasını ifade etmektedir. Örnek olarak, öğrenciler bir bütünden büyük kesirlerin anlaşılmasında zorlandıkları için başlangıçta tasarlanan ders saatinin dışına çıkılarak bu konuda daha fazla zaman harcanmıştır.

Uygulamalar süresince hedef gruptaki öğrencilerle belirli aralıklarla derinlemesine görüşmeler gerçekleştirilmiştir. İlk uygulamanın dönem sonuna denk gelmesi sebebiyle hedef gruptaki her bir öğrenci ile üçer defa; ikinci uygulamada ise her bir öğrenci ile 7-8 defa görüşülmüştür. İlk uygulamada yapılan görüşmelerin uzun sürmesi ve dolayısıyla öğrencinin kavrama dair gelişiminin izlenmesinin zor olması sebebiyle ikinci uygulamada sık sık ve daha kısa görüşmeler yapılmıştır. Her bir kavrama dair uygulanan etkinlikler sırasında veya sonrasında mutlaka en az bir görüşme yapılmıştır. Böylece bu süreçte yapılan sürekli analizler sayesinde öğrencilerin söz konusu kavramı nasıl geliştirdiğine dair çıkarımlar yapılmış ve bir sonraki uygulamada hangi değişikliklerin yapılacağı konusunda danışmanlarla birlikte karar verilmiştir.

Öğrencilerin akıl yürütme becerilerini geliştiren, iyi seçilmiş ve öğrencilere matematiksel ilişkilerin yanı sıra nicelikler ve semboller arasındaki bağlantıları tartışmalarına izin verecek şekilde sunulan matematiksel görevler, matematiksel öğrenmeye ve bilişsel gelişime katkıda bulunur (Nunes & Csapó, 2011). Araştırmada uygulanan ve yukarıdaki açıklanan öğretim deneylerinin her birinde nicel muhakemede öne çıkan matematiksel fikirlere vurgu yapılmıştır. Literatürde yer alan kesirler ve nicel muhakeme çalışmalarından faydalanarak hem etkinliklerin tasarım sürecinde hem analiz aşamasında varsayımsal öğrenmelerden faydalanılmış ve öğrenci yanıtları analiz edilmiştir. Örneğin; nicelikleri belirleme ve yorumlama göstergesi olarak etkinlikte yer alan nicelikleri yani kesirleri belirleme, kesirlerde eş paylaşım fikrini vurgulama, niceliklere ait temsil oluşturma ve niceliği problem bağlamında yorumlayabilme gibi fikirleri temel alınmıştır.

3.5. Verilerin Analizi

Nitel araştırmada veri analizi veri toplama süreci ile birlikte gerçekleşir (Patton, 2018). Araştırmada elde edilen veriler, veri toplama süreci ile birlikte ilerlediğinden öğretim deneyi çalışmalarına uygun olarak veri toplama ile birlikte devam eden "sürekli (ongoing) analizler" yapılmıştır. Tüm veri toplama süreci tamamlandıktan sonra ise elde edilen tüm veriler ve sürekli analizlerden elde edilen bulgular tekrar değerlendirilerek geriye dönük analiz yapılmıştır.

3.5.1.Sürekli (Ongoing) Analizler

Öğretim deneyi araştırmalarında sürekli analizler, bir öğretim deneyinin değerlendirilmesi olarak öğrencide gerçekleşmesi beklenen değişimin gerçekleşme durumunu ve sonraki etkinlikler için gerekli düzeltmelerin yapılmasını içermektedir (Molina, Castro & Castro, 2007). Her sınıf içi müdahaleden sonra verilerin analizinden oluşan sürekli analiz, gelecekteki müdahaleler hakkında karar verilmesini sağlar ve araştırmacıların varsayımlarının gözden geçirilmesini ve geliştirilmesini kolaylaştırır. Öğretim deneyi sürecinde yapılan sürekli analizler, uygulamanın öğretimsel amaçlarına ulaşıp ulaşmamasının incelendiği ve hızlı analizlerin yapıldığı bir süreçtir. Bu sebeple araştırmacı her öğretimin sonunda detaylı gözlem notları tutmuş ve sonraki görev için yapılabilecek değişiklikler hakkında danışmanlarıyla görüşerek uygulama sürecini tamamlamıştır. Tüm süreç boyunca araştırmacı hangi uygulamaların ve etkinliklerin işe yaradığını ve hangilerinin beklenildiği gibi işe yaramadığının altını çizmiştir (Cobb vd., 2004).

Araştırmada tasarlanan ve uygulanan etkinliklerde öğrencilerin yazılı ve sözlü yanıtları, kamera kayıtları, öğrencilerin oluşturduğu görsel temsiller, araştırmacının gözlem notları, öğretmen ve öğrenci günlüklerinin tamamı analizlerin kaynağını oluşturmaktadır. Araştırmacı, her öğretim bölümleri sonrasında bir sonraki öğretim bölümünü planlamak ya da gerektiğinde var olan planı değiştirmek için bu veri kaynaklarını incelemiştir. Araştırmacı bu süreçte kesirler konusunda ele aldığı kavramların öğrencide nasıl gerçekleştiğine dair geçici kodlar (tentative codes) oluşturmuştur. Bu kod listesi, çeşitli veri setlerinde yinelenen örüntülerin sınıflandırılmasının ilk taslağı olarak kabul edilmektedir. Araştırmacı ve gerekli durumlarda danışmanlar da kamera kayıtlarını izleyerek bir sonraki dersin görevleri üzerinde fikir alışverişinde bulunulmuştur. Sonuç olarak sürekli analizler, öğretim deneyleri devam

ederken öğrencilerin matematiksel bilgilerinin ve eylemlerinin incelenmesi sonucunda oluşturulmakta olan modeli düzenlemeye olanak sağlamıştır.

Araştırmada sürekli analizler sayesinde bazı değişiklikler yapılmıştır. Örneğin bileşik kesirlerin sayı doğrusunda gösterilmesinin konu edindiği öğretim bölümünde öğrencilerin zorlanmaları sebebiyle benzer farklı etkinlik örnekleri kullanılmıştır. Ek olarak ilk ve ikinci uygulama arasında da bazı değişiklikler yapılmıştır. Bu noktada bazı örnekler vermek gerekirse araştırmanın ilk uygulamasında elde edilen veriler sonucunda etkinlik formlarında şekilsel düzenlemeler yapıldı, soruları cevaplamadan önce daha sık tahmin etme seçeneği eklendi, bazı etkinliklerde amaca hizmet etmeyen ve diğer sorulara benzer olan sorular çıkarıldı, ilk uygulamalarda sayı doğrusu da çizmeyi gerektiren sorularda boş sayı doğrusu çizilmiş şekilde öğrencilere verilerek cevaplamaları istendi. Örnek olarak, öğrenciler bir bütünden büyük kesirlerin anlaşılmasında zorlandıkları için başlangıçta tasarlanan ders saatinin dışına çıkılarak bu konuda daha fazla etkinlik yürütülmüştür. Benzer şekilde araştırmacı kendi müdahalelerine dair de mikro analizler yapmıştır. Örneğin görüşme sürecinde öğrenciye sorduğu bir sorunun öğrenci tarafından beklenen düzeyde anlaşılmadığını fark ettiğinde bu sorusunu daha farklı şekilde sorması gerektiğini not almıştır.

3.5.2. Geriye Dönük (Retrospective) Analiz

Öğretim deneyi sürecinin en son aşaması geriye dönük analizlerin tamamlanmasıdır. Bu analiz türü, tüm uygulama süreci tamamlandıktan sonra, süreç boyunca yapılan sürekli analizleri de içerir ve eldeki verilerin son olarak tamamıyla incelenmesini ifade eder. Böylece araştırmacıların varsayımlarının ve sınıf içi müdahaleler boyunca öğrencilerin davranışlarındaki örüntünün veya sıklığın modelini ortaya koymayı sağlar (Molina vd., 2007). Sonuç olarak geriye dönük analizler tüm verilerin daha geniş bir çerçevede değerlendirilmesini ifade eder ve kodlama yoluyla verilerin altında yatan kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya çıkardığından tümevarımcı analiz veya kuram oluşturma olarak nitelendirilebilir (Cobb, Jackson & Dunlap, 2015).

Araştırmada verilerin analizi tüm veri toplama araçlarından elde edilen verilerin detaylı incelemesine dayandırılmıştır. Geriye dönük analizler öncelikle uygulamalar ve sürekli analizlerin yapıldığı sırada araştırmacı tarafından tutulan gözlem notları ve alan notları okunarak yapılmaya başlanmıştır. Böylece araştırmacı baştan itibaren ne yaptığını

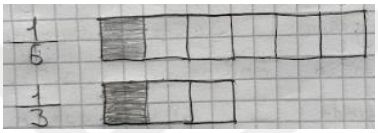
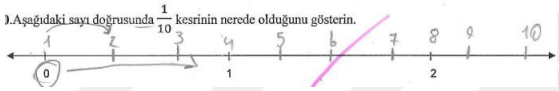
hatırlayarak söz konusu kavrama dair öğrenci yanıtları hakkında genel olarak fikir sahibi olmuştur (Gravemeijer & Van Eerde, 2009). Bunun devamında araştırmacı, ders içi video kayıtlarını tekrar izlemiş diyalogların geçtiği bölümleri yazıya dökmüştür. Videoları ilk izleme sonucunda, araştırmacının zihninde ilk temalar oluşmuş ve neler olup bittiğine dair bir fikir edinmiştir. Bunun devamında ise her bir öğretim bölümü kapsamında uygulanan etkinliklere dair öğrenci formları incelenmiştir. Bu öğrenci yanıtlarına dayanarak gerekli görüldüğü yerlerde videolar ikinci defa izlenmiş ve sınıftaki tüm öğrencilerin hangi düşünme yollarına sahip olduğu daha net şekilde belirlenmiştir.

Araştırmada sınıftaki tüm öğrencilerin genel durumunu ortaya çıkaran betimlemeden sonra hedef gruptaki öğrencilerle yapılan derinlemesine görüşme kayıtları izlenmiş ve öğrenci söylemleri yazıya dökülmüştür. Buna ek olarak, öğrencilerin yazılı yanıtları taranarak bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Böylece araştırmacının oluşturduğu ve öğrencilerde gelişmesi beklenen düşünme yollarının nasıl ortaya çıktığı, öğrencilerin söz konusu görevde hangi hataları yaptığı ve araştırmacının hangi müdahalesi sonrasında öğrencilerin farklı bir şemaya geçtiği raporlanmıştır. Bunun sonucunda araştırmacı, devam eden analizleri yürüttüğü sırada oluşturduğu geçici kodlara (tentative codes) nihai halini vermiştir (bkz. Tablo 3.5.2). Bu süreçte veriler tekrar tekrar incelenerek araştırma süreci tekrar yaşanıyormuş gibi hayal edilir ve hangi eylemlerin veya söylemlerin hangi amaçla ortaya konduğu üzerine detaylı inceleme yapılır. Tüm verilerin tek tek incelenmesi zengin bir veri havuzu oluşturmaya ve aynı zamanda verileri doğrulamaya da olanak tanır. Böylece doğru bir kodlama süreci gerçekleştirilmiş olur. Araştırmada, her bir veri kaynağından elde edilen veriler kullanılarak her bir temada analizin ilk birkaç kodlama süreci araştırmacı ve danışmanlar ile birlikte yapılmıştır. Geri kalan kodlamalar ve bulguların her biri de danışmanlar tarafından incelenmiştir. Böylece tutarlı ve gerçeğe uygun veriler ve kodlama süreci tamamlanmıştır.

Creswell (2003) kodlama sürecini "verileri parçalara ayırma ve bu parçalara anlam kazandırma süreci" olarak tanımlamıştır (s.192). Araştırmacı, öğrenci yanıtlarını inceleyerek kendi içinde anlamlı bütünler oluşturan yanıtları kodlar ve bir araya getirir. Öğrencilerin yanıtları, konuşmaları, düşünceleri ve diğer eylemleri, benzer kodların birbirine bağlanarak yerleştirildiği uygun kategorileri veya temaları ortaya çıkarır (Yıldırım & Şimşek, 2016). Merriam (2015) kategorileri "verilerin birçok bireysel örneğini kapsayan kavramsal sınıflamalar" olarak tanımlamıştır (s.182). Kategoriler, incelenen olguları yorumlamak için

kullanılabilecek verilerden çıkarılan genel soyutlamalardır. Bu aşamada kodlar bir araya getirilir ve aralarındaki ortak yönler bulunur. Bu adım aynı zamanda kategorilere isim verilmesini de içerir ve kategori isimleri araştırmacıların kendisinden ya da literatürden gelebilir (Merriam, 2015). Başlangıçta, her bir kategori için sınıftaki öğrencilerin tamamının nasıl bir düşünme yolu olduğu betimlenmiştir. Çeşitli müdahaleler sonucunda ise hedef gruptaki öğrencilerin düşünme yolu belirlenmiş ve bu öğrencilerin gelişimleri raporlanmıştır. Öğrencilerin düşünme yollarını belirlemek için takip edilen analiz süreci Tablo 3.5.2'de örnek olarak gösterilmiştir.

Tablo 3.5.2. Analiz Örneği

Etkinlik	Öğrenci Yanıtı Örneği	Kod	Tema
Birim kesirleri modelleme		Farklı bütünler üzerinde temsil etme	Farklı bütünleri referans alan düşünme
Birim kesri sayı doğrusunda gösterme		Sayı doğrusunun tamamını 10 parçaya ayırma, $\frac{1}{10}$ kesrini belirtememe	Doğal sayı temelli düşünme

Her iki uygulamanın verileri, veri toplama süreçleri tamamlandıktan sonra sırasıyla analiz edilmiştir. İlk uygulamadan elde edilen verilere göre kod ve kategoriler oluşturulmuş olup ikinci uygulamada elde edilen veriler bu bulgularla karşılaştırılmıştır. Her iki uygulamadaki farklılıklar ve benzerlikler not alınmıştır. Verilerin analizi sürecinde araştırmacı kesir kavramlarının gelişmesini amaçladığından bulguların raporlanması da kavram temeliyle ilerlemiştir. Bu sebeple bütün, birim kesir, kesir büyüklükleri temaları altında bulgular detaylandırlmıştır. Bu süreçte aynı zamanda literatürde yer alan benzer çalışmalar incelenmiş, bulguların oluşturulması için literatür de referans alınmıştır. Öğrencilerin kesirler konusundaki düşünme yollarını yorumlayabilmek için Tablo 3.5.3' te belirtilen nicel muhakeme bileşenlerinden ve ölçütlerinden yararlanılmış ve Bulgular bölümünde detaylı açıklanmıştır.

Tablo 3.5.3. Nicel Muhakeme Değerlendirme Ölçütleri

Bileşenler	Ölçütler ve Tanımları	Örnek Durumlar
1.Nicelik	a) Nicelikler, dört bileşenden oluşan bilişsel nesnelerdir: Somut veya soyut bir nesne, nesnenin ölçülebilir bir niteliği, bir ölçüm birimi ve bir sayısal değer (Thompson, 2011).	Öğrencilerin şu sorulara cevap verebilmesi: "Problemde ne isteniyor, buradaki birim kesir nedir, bu değer neyi ifade ediyor?"
	b) Nicel muhakeme bir niceliğin temsili olup nicelikleri, ilgili temsil ile ilişkilendirmedir (Nunes vd, 2015; Weber vd., 2014). c) Kesir, bütüne göre değişen, nisbi bir büyüklüktür (Hackenberg, Norton & Wright, 2016; Tobias, 2013)	İç ve dış temsiller kullanma Kesirler arasındaki ilişkiyi zihinde canlandırabilme Nisbi bir büyüklük olarak kesrin bütüne göre değiştiğini anlama
2.Nicelleştirme	a) Nicelleştirme, birime dayalı bir ölçüm ile özdeşleştirilir (Schwartz, 1988).	Birim kesri kullanarak bütünü ve kesir büyüklüğünü anlama
	b) Yüzeysel (gross) nicelleştirme, bir niteliğin algısal ve bazı deneyimsel kriterlere göre değerlendirilebileceği şekilde kavranması anlamına gelir (Piaget, 1965).	Kesir büyüklüğünü, dayanak noktalarından göre anlamlandırma İki kesir çubuğu uzunluklarını görünüşlerine göre karşılaştırma
	c) Kapsamlı (extensive) nicelleştirme, bir niteliği birimleştirme veya bölümlere ayırma işlemleriyle ortaya çıkar (Steffe, 1991).	Birim kesirleri birleştirme, ayırma
	d) Nicel muhakeme görevleri karar verme ve tahmin becerileri gerektiren durumlardan oluşur (Nogues & Dorneles, 2019).	Kesrin büyüklüğüne dair tahminde bulunma
	e) Parçalara ayırma (partitioning), yineleme (iterating), splitting (bölümleme), disembedding (ayırma; bir kesri, bütünü bozmadan çıkarma) gibi şemalar nicelleştirmenin göstergesidir (Steffe, 1991).	Eş parçalara ayırma Birim kesirleri yineleyerek bütüne ulaşma Bir eş parçanın verildiği modelde bütünü bulma
3.Nicel İşlem	İnsanlar nicel işlemleri iki farklı yolla düşünebilir (Nunes & Bryant, 2015; 2023). Bu nicelleştirme türleri ise kesir büyüklüğünü anlamayı ifade eder (Thompson vd., 2014):	
	a) Toplamsal düşünme (additive thinking) niceliklerin parça-bütün ilişkisi, fark ve fazlalık kavramları ile ilişkilidir. Toplamsal düşünmenin temeli olan parça-bütün anlayışı ise bir araya getirme, ayırma ve birebir eşleme eylem şemalarından oluşur.	Kesirleri bir araya getirerek bir bütün yapma, bir bütünü parçalarına ayırma, karşılaştırma yaparken fazlalık ve eksiklik kavramları üzerinde düşünme
	b) Çarpımsal düşünme (multiplicative thinking) niceliklerin çarpımsal ilişkisini ve oranı ifade eder.	Kesirler arasındaki orantısal ilişkiyi, oransal artış ve azalışı düşünme
4.Aritmetik İşlem	a) Aritmetik işlem, matematiksel sembolleri kullanmaya dayanan hesaplamadır (Thompson, 1994).	Kesirlerde aritmetiksel işlemler yapabilme

3.6.Araştırmanın Geçerlik ve Güvenilirliği

Tasarım temelli araştırmalar sonucunda elde edilen veriler yoğun olarak nitel verilerden oluştuğundan geçerlilik ve güvenilirlikten söz ederken nitel paradigmaya göre bir yolun izlenmesi gerekmektedir. Şöyle ki, bu araştırmalarda elde edilen sonuçların genellenebilirliği değil; oluşturulan tasarımların tekrar uygulanabilmesinden, verilerin doğruluğundan, tutarlılığından bahsetmek gerekebilir. Bu araştırmada kesirler konusu her iki grupta da olabildiğince uzun bir zaman dilimine yayılarak işlenmiştir. Çalışmada öğretim bölümlerinin hazırlanması, uygulama ve analiz süreci, araştırmacının rolü, analiz ve bulgular detaylı olarak açıklanmaya çalışılmıştır.

Nitel araştırmalarda geçerlik ve güvenirlik kavramları genel olarak inandırıcılık kavramıyla ilişkilendirilir ve inandırıcılık ise verilerin doğruluğu anlamına gelmektedir (Merriam, 2015). Yıldırım ve Şimşek (2016) ise nitel araştırmalarda geçerlik ve güvenirliği şu boyutlarda ele almıştır: İnandırıcılık, aktarılabilirlik, tutarlılık ve teyit edilebilirlik. Aktarılabilirlik, sonuçların benzer ortam ve durumlara transfer edilebilir olmasını; yani genellemeyi ifade etmektedir. Ancak nitel araştırmalarda genelleme yapma gibi bir amaç yoktur. Bu bakımdan nitel araştırmalarda genelleme yerine benzer durum ve ortamlara aktarım yapılarak dolaylı genellemeler yapılmaktadır (Merriam, 2015). Bu araştırmada ise aktarılabilirliği arttırabilmek için öğretim deneyi tek bir grup ile değil iki farklı grupta yürütülmüş ve bu sayede benzer sonuçlara ulaşılmıştır.

Nitel araştırmalarda tutarlılık, nicel araştırmalarda güvenirlik anlamına gelmekte ve tekrar edilebilirlik olarak da adlandırılmaktadır. Bu doğrultuda tutarlılık olay ve olgulardaki değişkenliği araştırmaya yansıtmaktır (Yıldırım & Şimşek, 2016). Ancak nitel araştırmalar kendine özgü yapılarıyla tekrar edilebilmesi pek mümkün değildir. Dolayısıyla tutarlılık nitel araştırma sürecinin zaman, araştırmacı ve mekâna göre sabit olmasıyla ilgilidir (Miles & Huberman, 2015). Teyit edilebilirlik başka bir ifadeyle nesnellik; bir araştırmanın başka bir araştırma ya da aynı araştırmanın farklı uygulamalarında kopyalanabilir olmasıyla ilgilidir. Bu araştırma iki farklı katılımcı grubuyla farklı zaman ve mekanlarda uygulandığından, burada bahsi geçen sabit olma durumunu tam anlamıyla karşılamasa bile çok benzer iki durumu kapsadığından güçlü bir teyit edilebilir durumdan söz edebiliriz.

Bu araştırmanın planlanan tüm süreç ve uygulamalarında bilimsellik daima göz önünde bulundurulmuştur. Araştırmanın bilimselliğini güçlendirmek için dikkate alınan ilk adım

olarak veri üçgenleme tekniği kullanılmıştır. Araştırmalarda farklı veri toplama araçlarının birlikte kullanılması fikrine dayanan veri üçgenlemesi çalışmanın güvenirliğini ve geçerliğini sağlamada önemli bir tekniktir (Miles & Huberman, 2015). Böylece aynı kavrama veya olguyu belirlemeye yönelik farklı teknik ve araçlarla veri toplanarak bulgular bu verilerle karşılaştırılarak çapraz kontrol sağlanır. Bu araştırmada da kamera kayıtları ile desteklenmiş gözlem, görüşme, alan notları, araştırmacı, öğretmen ve öğrenci günlükleri gibi farklı veri toplama araçları kullanılarak veriler devamlı olarak birbirleriyle karşılaştırılarak incelenmiş, veri kaybının önüne geçilmiş ve araştırmanın geçerlik ve güvenirliğini artırmak hedeflenmiştir. Uygulama ve görüşme sürecinin tamamı video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Böylece araştırmacı, elde ettiği yazılı verileri doğrulamak ve tekrar değerlendirmek istediğinde bu kayıtlara kolaylıkla ulaşma şansı elde etmiştir. Bu kayıtlar gerekli görüldüğü durumlarda danışmanlar tarafından da incelenerek verilerin analizine dair daha doğru ve net bilgiler elde etmeye olanak tanımıştır.

Kayıt altına alınan görüşmelere dair direkt alıntılar da bulgular bölümünde gerekli yerlerde paylaşılmıştır. Araştırmacı, öğrencilerle her görüşmeyi aynı çevrede ve aynı şartlar altında uygun olan zaman dilimlerinde yapmıştır. Böylece görüşme sırasında öğrencilerin dış etkenlerden etkilenme durumları önlenmeye çalışılmıştır. Uygulanan etkinliklere dair öğrenci çalışma kağıtlarının bir kısmı araştırmacı dışında kesirler konusunda uzman ve kıdemli bir matematik öğretmeni tarafından da incelenmiş ve güvenilir sonuçların elde edilmesi sağlanmıştır. Etkinliklerin hazırlanması sonucunda katılımcı grubunun dışında başka öğrencilere de uygulanması, öğretmenler ile yapılan görüş alışverişi sonucunda gerekli düzenlemelerin yapılması ve tüm etkinlik planlarına dair uzman görüşünün de alınması araştırmanın geçerliliğini ve güvenirliğini sağlayan önemli bir unsur olarak görülmektedir (Miles & Huberman, 2015).

Bu araştırma bir öğretim deneyi çalışması olarak iki ayrı döngü şeklinde tasarlandığından elde edilen veriler birbirleriyle karşılaştırılmış, devamlı olarak yapılan analizler sayesinde de süreç iyileştirilmeye çalışılarak araştırma süreci yürütülmüştür. Araştırmanın birinci aşamasında elde edilen veriler bir sonraki döngü için temel olarak görülmüş ve çeşitli revizyonlar yaparak bir sonraki döngü de tamamlanmıştır. Araştırmanın birinci ve ikinci döngüleri iki ayrı şehirde gerçekleştirilmesi, bölgeye bağlı örneklem grubuna ait olası benzerlikleri bertaraf etmeyi sağlamıştır. Araştırmada asıl uygulamalardan önce gerçekleştirilen keşfedici öğretimler sayesinde araştırmacının yeterli öğretmenlik

deneyiminin bulunmaması durumu tersine çevrilmiştir. Bu sayede araştırmacı ve öğrenciler tüm süreç başlamadan birbirlerini tanımış ve araştırma sürecine hazırlanmıştır.

Araştırmacı tüm araştırma sürecini nesnel, gerçek verilere dayanarak ve etik kuralları göz önünde bulundurarak süreci tamamlamıştır. Uygulamaların devlet okullarına ait sınıflarda yürütülmesi sebebiyle Kocaeli ve İstanbul İl Milli Eğitim Müdürlüklerinden gerekli izinleri almıştır. Araştırma sürecinin tamamlanması halinde elde ettiği verileri MEB ile paylaşacağını da taahhüt etmiştir.

3.7. Araştırmacının Rolü

Bu araştırmada araştırmacı ilk olarak, nicel muhakeme ve kesirler konularındaki ulusal ve uluslararası literatürdeki temel kaynakları ve yapılan çalışmaları inceleyerek nicel muhakeme, kesir kavramları ve matematikte görsel temsillere ait bilgisini genişletmiştir. Böylelikle ilkokul kesirler konusuna ilişkin temel ilkeleri daha iyi anlama şansı elde etmiş ve nicel muhakeme teorisi hakkında detaylı bilgiye ulaşmıştır. 4. sınıf kesirler konusunun öğretim bölümlerinin içeriklerinin hazırlanması ve planlarının yapılması aşamasını sınıf öğretmenleri ile iş birliği yaparak ve matematik eğitimi alanında uzman akademisyenlerden görüş alarak yapılandırmıştır. Araştırmada görüşlerinden yararlanılan araştırmacılar; bu tez çalışmasının danışmanlığını da üstlenen matematik eğitimi alanında doktora derecesine sahip akademisyenler, bir devlet üniversitesinde akademisyen olarak görev yapan diğer iki matematik eğitimcisi ve soruların öğrenciler tarafından anlaşılır olma durumunu inceleyen Türkçe Eğitimi alanında uzman bir akademisyen, MEB'e bağlı ilkokullarda çalışan iki matematik öğretmeni ile iki sınıf öğretmenidir.

Araştırmacı, araştırmacı-öğretmen (teacher-researcher) rolünü üstlenerek her iki uygulamayı da kendisi gerçekleştirmiştir. Öğretim deneyi araştırmaları araştırmacılara esnek bir yöntem olarak sunulduğundan ve araştırmacı ile öğretmen ayrımı da net olmadığından araştırmacının öğretmen olarak süreci yürütmesinde bir sakınca görülmemektedir. Bu sebeple araştırmacı gözlemci rolünü de üstlenebileceği için uygulama sırasında ve hemen akabinde alan notları almış ve sınıfta notlar tutmuştur (Engelhardt vd., 2004). Buna ek olarak araştırmacı, öğrencilerin kesirler konusundaki düşünme yollarını belirlemek, bu noktada var olan hatalarını gidermek ve doğru bilgilerini geliştirmek için derinlemesine görüşmeler yapmıştır. Araştırmacı, araştırmanın başından itibaren her öğretim günü sonunda o gün gerçekleştirilen konular hakkında günlük tutmuştur. Bu günlüklerde söz konusu öğretim

bölümünde ve etkinliklerde nelerin hedeflendiği ve sonucunda ne gibi çıktılar elde edildiğine dair bilgiler yer almaktadır.

Araştırmacı, tasarladığı tüm öğretim deneylerinde öğrencilerin varsayımsal öğrenme yollarını belirlemiştir. Öğrencilerin yanıtları ve ifadeleri sonucunda onların düşünme yollarını ortaya çıkaran model oluşturmuş, bu süreç boyunca da öğrencilere sık sık geri dönütler vermiştir. Öğretim deneyi araştırmalarında öğrenci hataları üzerinde kafa yormak gerekmektedir. Bu sayede öğrencinin anlık mı yoksa sistematik bir hata mı yaptığı netleşir ve böylece kendi zihin şemasına dair doğru çıkarımda bulunabilir (Silverman & Thompson, 2008). Bu sebeple araştırmacı, öğretim deneyi çalışmalarına uygun olarak öğrenci hataları üzerinde yoğun bir şekilde çalışmış; süreç boyunca kesirler konusundaki ulusal ve uluslararası literatürdeki araştırmaları okumaya devam etmiştir.

Araştırmacı, uygulamalara başlamadan her iki grubu tanımak adına matematik derslerinde ikişer ders saati gözlemci olarak bulunmuştur. Böylece uygulama yapıldığı süreçte öğrencilerle doğrudan görüşme ve rahatlıkla iletişim kurabilme imkanı sağlamıştır. Araştırma sürecinden hemen önce ve araştırma sonuna kadar geçen sürede hem öğrencileri hem de sınıf öğretmenini süreç ile ilgili bilgilendirme rolünü üstlenmiştir. Sınıf öğretmeni ile iş birliği yaparak araştırmada kullanılan tüm etkinlikleri ve ders planlarını uzman görüşlerine de dayanarak oluşturmuştur.

BÖLÜM IV: BULGULAR

Bu araştırmada, Uygulama 1 ve Uygulama 2 olmak üzere iki farklı öğretim deneyi uygulaması yapılmıştır. Uygulamalar, öğrencilerin mevcut düşünme yapılarının değerlendirilmesi amacıyla bir ön-değerlendirme ile başlamıştır. Bunu takiben öğrencilerin kesirlerdeki anlamalarını geliştirmek için öğretim bölümleri tasarlanmış ve uygulanmıştır. Öğretim bölümleri çoğunlukla bir etkinlikten oluşmaktadır. Birinci uygulama bitiminde yapılan veri analizi ve değerlendirmeler sonucunda öğretim bölümleri güncellenmiş ve ikinci uygulama farklı bir okulda gerçekleştirilmiştir. Bulgular; "Kesirlerde bütün kavramı", "Bir bütünden küçük kesirlerin büyüklüğü", "Bir bütüne eşit ve bir bütünden büyük kesirlerin büyüklüğü" ve "Kesirleri karşılaştırma" temaları altında nicel muhakemeye göre yorumlanmıştır.

Bulgular sunulurken öğretim bölümlerinin altında önce birinci uygulamadaki verilerin analizi açıklanmıştır. İkinci uygulama sonucunda elde edilen veriler ise gerekli yerlerde açıklanmıştır. Genellikle her iki uygulamada da aynı etkinlikler uygulanmıştır ancak ilk uygulama sonrası yapılan düzeltmeler neticesinde ikinci uygulamada farklı müdahale veya etkinliklerin uygulanması da söz konusu olmuştur. Bu sebeple ikinci uygulamadan elde edilen veriler arasında ilk uygulamaya göre farklı ve dikkate değer yanıtlar oluştuğunda bu bölümde raporlanmıştır. Bulgular verilirken önce sınıfın tamamına dair bulgulara; ardından da hedef gruptaki bir öğrenciye ait bulgulara yer verilmiştir. Temalar arasında bir hiyerarşi durumu söz konusu olmayıp her temadaki kavram kendi içerisinde sıralı olarak açıklanmıştır. Bazı temalarda yer alan etkinliklerin aynı ya da benzer olmasının sebebi ise bazı durumlarda bir etkinlikte birden fazla kavramın ele alınmasıdır. Öğrenci yanıtları ve gözlemlere dayanarak, öğrenciler konu ile ilgili sorulara doğru yanıt veremediğinde veya yanıtsız kaldığında öğrencinin o kavramı anlamakta zorlandığı veya yorumlayamadığı varsayılmıştır. Her bir temada detaylı incelenen öğrenciler ise, genellikle o konuda daha fazla hata yapan öğrenciler arasından seçilmiştir. Böylece öğrencilerin hataları üzerinden düşünme yolları incelikle açıklanmaya çalışılmıştır.

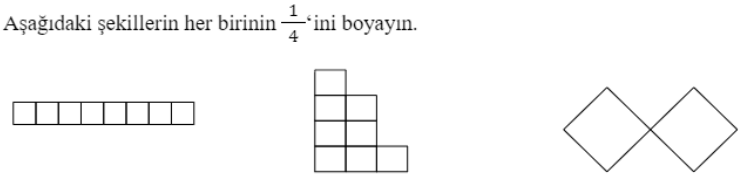
4.1.Öğrencilerin Kesirlerde "Bütün" Kavramına Dair Düşünme Yolları ve Değişimi

Araştırmanın bu bölümünde kesirlerde temel bir kavram olan "bütün"e ait düşünme yolları ve değişimi, öğrencilerin süreç boyunca farklı öğretim bölümlerinde ve görevlerde verdikleri yanıtlara göre kronolojik olarak raporlanmıştır. Birim kesir birçok kesir

kavramının temelini oluşturduğundan, öğrencilerde bütün kavramının gelişimi de birime dayanarak açıklanmıştır. Bu tema kapsamında hedef grup öğrencilerinden Beren ve Buğra'nın yanıtları detaylı olarak incelenmiştir.

4.1.1. Ön Değerlendirme: Uygulama 1 ve Uygulama 2

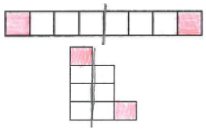
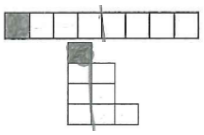
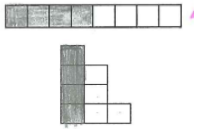
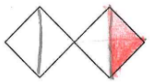
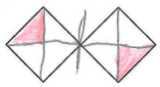
Ön değerlendirmede amaç öğrencilerin daha önce kesirlerle ilgili geliştirmiş oldukları şemaları ortaya çıkarmaktır. Bu doğrultuda kesirlerde bütün kavramına yönelik olarak kullanılan etkinlikte, öğrencilerden her bir bütünde $\frac{1}{4}$'i göstermeleri istenmiştir (Şekil 4.1.1.1.).

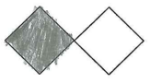


Şekil 4.1.1.1. Bütün Teması Ön Değerlendirme Etkinliği

Öğrenci yanıtlarına dair düşünme yolları araştırmacı tarafından tanımlanmıştır. Düşünme yolları, açıklamaları ve ilişkili bir örnek öğrenci yanıtı Tablo 4.1.1.'de verilmiştir.

Tablo 4.1.1. Bütün Teması Ön Değerlendirmede Ortaya Çıkan Düşünme Yolları

	Düşünme Yolları	Kod	Açıklama	Örnekler
Paydadan fazla eş parçalı bütünler	Yeniden bütün oluşturma ve buna göre yorumlayabilme	DY1	Modellerin $\frac{1}{4}$'ini boyama	
	Yeniden bütün oluşturma ancak buna göre yorumlayamama	DY2	Modellerin $\frac{1}{8}$'ini boyama	
	Yarım ve çeyrek kavram yanılgısı	DY3	Modellerin $\frac{1}{2}$'ini boyama	
Paydadan az eş parçalı bütün	Kesir büyüklüğü ve temsili arasında ilişki kurabilme	DY4a	Modellerin $\frac{1}{4}$'ini boyama	
		DY4b	Modellerin $\frac{2}{8}$'sini boyama	

	Yarım ve çeyrek kavram yanılgısı	DY5	Modellerin $\frac{1}{2}$'ini boyama	

Kesirlerde eş parçalama yapan bir öğrencinin, (i) parçalara ayrılan bir bütün, (ii) eş parçaların sayısı ve (iii) bu eş parçalama sonucunda elde edilen parçanın değeri olmak üzere üç farklı nicelik hakkında düşünmesi beklenir (Ohlsson, 1988). Bununla birlikte yineleme eylemine dayanarak farklı birimleri ilişkilendirmeyi yani bileşik birim üzerinde düşünmeyi gerektirir (Steffe, 1992). Tablo 4.1.1.'de de belirtilen örnek yanıtlara bakıldığında öğrencilerin bütün kavramına ilişkin düşünme yolları soruda verilen modele göre farklılık göstermektedir. Öğrenciler genel olarak, paydadan fazla eş parçalara bölünmüş modellerde DY2; paydadan az sayıda eş parçaya bölünmüş modelde ise genellikle DY5 düşünme yolunu kullanmışlardır. Öğrencilerin her iki modelde de hatalı gösterim yaptıkları görülmüştür. Buna göre, öğrencilerin pay, payda ve bütün arasındaki ilişkiyi ve buna dayanarak kesirlerin parça-bütün ilişkisini anlamlandırmakta zorlandıkları söylenebilir. Ancak DY2 ve DY3 modellerinde görüldüğü gibi eş parçalanmış modellerde nispeten daha fazla hata yaptıkları görülmüştür. Paydadaki sayıdan daha az eş parçalara ayrılmış model üzerinde ise doğru yanıt sayısı daha fazla olduğu görülmüştür. Bu durum, bu modellerin eş parçalama (partitioning) yapmaya uygun olması ve öğrencilerin de eş parçalama yaparak kesirleri modellemeye daha aşina olmalarıyla açıklanabilir. Bu öğrencilerin nicelikleri temsil eden parçaların eş olması fikrine sahip olduklarını ve dolayısıyla kesirlerde kavramsal anlamaya sahip olduklarının bir göstergesidir (Steffe, 2002). Öğrenciler, paydadan fazla eş parçalara ayrılmış olarak verilen modellerde birimleri yeniden düzenleyemedikleri için hatalı gösterim yapmışlardır. Daha açık bir ifade ile, $\frac{1}{4}$ kesri ile sekiz eş parçadan oluşan bütün arasındaki ilişkiyi kuramamışlar, orantısal muhakeme ve dolayısıyla çarpımsal muhakeme yapamamışlardır (Nunes & Bryant, 2015). Sonuçta ise öğrenciler aynı çokluğu farklı birim ve kesir sembolleriyle ifade edememişlerdir (Nunes & Bryant, 2022).

Öğrenci yanıtlarına bakıldığında denk kesir kavramından bahsetmek gerekebilir çünkü öğrenciler bu sınıf düzeyinde denk kesir kavramını okulda henüz öğrenmediklerinden, kesrin farklı sembolik gösteriminin aynı miktarda çokluğu belirttiğine dair düşünme yolları henüz gelişmemiş olabilir. Hart vd (1985) ilkokul öğrencileri için kesrin alışılmış olandan farklı gösterimlerin aynı miktarı temsil edip etmeyeceği açık olmadığını belirtmiştir. Dolayısıyla bir miktarın farklı gösterimleri hakkında akıl yürütememek, öğrencilerin bu konuda esnek düşünmemelerine ve dolayısıyla da bundan kaynaklı olarak hata yapmalarına sebep olmuş

olabilir (Hoon, Narayanan & Singh, 2021). Genel olarak değerlendirildiğinde ise sınıftaki tüm öğrencilerin "bütün" konusuna ait tamamen doğru bir zihinsel imgesinin olduğunu söylemek oldukça güçtür. Birçok öğrenci modeller üzerinde $\frac{1}{4}$ yerine $\frac{1}{8}$ veya $\frac{1}{2}$ kesirlerini göstermişlerdir. Bu durum, öğrencilerin farklı birimlerden oluşan bütünlerin farklı birimlerle ifade edilmesi gerektiği konusundaki hatalı zihinsel imgesini göstermektedir. Hedef grup öğrencilerinden Beren'in yanıtı aşağıda açıklanmıştır.

Beren

Beren, üç modelin $\frac{1}{4}$'ini boyamayı gerektiren etkinlikte DY2 ve DY4(a)'da belirtilen düşünme yollarını kullanmıştır. Bu düşünme yollarına dair tabloda belirtilen örnek gösterimler de Beren'e aittir. Buna göre Beren 1. ve 3. modelde $\frac{1}{4}$'i boyamak yerine $\frac{1}{8}$ kesrini temsil etmiştir. Dikkatli bakıldığında Beren'in 1. ve 3. modelleri çizerek 4 eş parçadan oluşan hayali bir bütüne ulaştığı görülmektedir. Buna göre Beren, bütünü dört eş parçaya bölüp bir tanesini alması gerektiğini düşünmüştür. Bu düşünme yoluna göre şöyle bir çıkarımda bulunmak doğru olabilir; Beren, bir kesrin farklı görsel temsilleri oluşturabildiğini, $\frac{1}{4}$'in sekiz eş parçadan ikisini oluşturan bir modeli de temsil edebildiğini düşünmemiştir. Bu noktada, kesir ve bu kesrin temsil ettiği çokluk arasındaki ilişkinin doğru bir biçimde kuramadığını söyleyebiliriz. Buna karşın Beren, bitişik şekilde bir bütün oluşturan dörtgen modelini eş parçalara ayırarak $\frac{1}{4}$ kesrini doğru temsil etmiştir. Dolayısıyla kendisi model üzerinde eş parçalara ayırmış ve $\frac{1}{4}$ kesrini model üzerinde boyayabilmiştir. Beren'in yanıtına bakıldığında $\frac{1}{4}$ kesrinin büyüklüğü hakkında tamamen hatalı bir düşünme yoluna sahip olduğunu söylenemez çünkü paydadaki sayıdan daha az eş parçalara ayrılmış modeldeki gösterimi doğrudur. Ancak paydada belirtilen kesirden büyük bir sayıda eş parçadan oluşan modellerde $\frac{1}{4}$ kesrini belirtememiş; $\frac{1}{4}$'e denk olan başka bir kesir büyüklüğü olarak yorumlayamamıştır.

Uygulama 2: Ön Değerlendirme

Araştırmanın ikinci uygulaması da öğrencilerin ön bilgilerini belirlemeyi hedefleyen ön değerlendirme ile başlamıştır. Buna göre Tablo 3.5.3'te gösterilen düşünme yolları kullanılarak yapılan kodlama, ikinci uygulamada da geçerlidir. İkinci uygulamada hedef grupta yer alan öğrencilerden Azra ve Yuşa DY3 ve DY5; Buğra ise DY2 ve DY5'te

belirtilen yanıtları vermiştir. Buna göre her iki uygulamada da öğrenciler problemlere benzer düşünme yolları kullanmışlardır. Sorunun çözümüyle ilgili görüşmede Buğra ile araştırmacı arasında geçen diyalog şöyledir:

Araştırmacı: *Bu soruyu nasıl çözdüğünü anlatır mısın?*

Buğra: *Bir parçayı boyadım ama emin değilim. Burda 4 parça olmalıydı ama 8 parça var* (DY2).

Araştırmacı: *Emin olmadığını söyledin. Senin bu gösterdiğin kesir ne olabilir?*

Buğra: *Bence benimki* $\frac{1}{8}$ *oluyor.* $\frac{1}{4}$ *yapamıyorum.*

Araştırmacı: $\frac{1}{4}$*'i gösterebilmek için nasıl bir modele ihtiyacın var?*

Buğra: *Dört parçaya bölünmesi lazım modelin ama burası sekiz parçaya bölünmüş.*

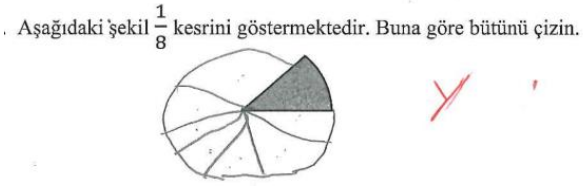
Araştırmacı: *Peki bu modeli dört parçadan oluşan bir model haline getiremez miyiz?*

Buğra: (Biraz bekledi) *Evet! O zaman şimdi 2 tane kareyi boyarım.*

Yukarıdaki diyalogda görüldüğü üzere, Buğra sekiz eş parçaya bölünmüş olarak verilen bir model üzerinde ¼ kesri için tek parça boyamış ve bunun da $\frac{1}{8}$ olduğunu ifade etmiştir. Buradan Buğra'nın ilk başta 8 eş parçaya bölünmüş bir model üzerinde eş parçaları 2'şerli gruplayarak 4 eş parça olarak yorumlayamadığı görülmektedir. Araştırmacının yönlendirmesiyle öğrenci birim kesirleri 2'şerli gruplayabileceğini söylemiştir. Dolayısıyla araştırmacının sorduğu sorular yardımıyla Buğra aynı bütün üzerinde birimlerin değişebileceğini de fark ettiği görülmektedir. Buğra'nın başlangıçta verdiği yanıt, bütünün orantısal olarak değişebilmeye; diğer bir deyişle denk kesirlere dayanmayan bir düşünme yolunu göstermektedir. Öğrenciler 4. sınıf düzeyinde denk kesirleri öğrenmedikleri için denklik kavramına değinilmemiştir. Ancak bu yaş grubundaki öğrencilerin çarpımsal muhakeme yapabildiği bilinmektedir (Nunes & Bryant, 2015). Bu sebeple görüşme sırasında Buğra'dan aynı bütünü farklı eş parçalara ayırarak tekrar yorumlaması istenmiştir. Sonuçta da bu yönlendirme sayesinde Buğra aynı bütünü farklı birimlere ayırabileceğini fark etmiştir.

Birinci uygulamanın ön değerlendirmesinde öğrencilerin "bütün" ve "birim" kavramlarını yorumlamakta zorlandıkları fark edilerek, ikinci uygulamanın ön değerlendirmesine "bütün" kavramına ulaşmayı gerektiren bir soru eklenmesine karar verilmiştir. Öğrencilere tek bir fikir temelinde oluşturulmuş görevler vermek yerine birim kesirleri iyice anlamaları için bir birim kesir verip bütünü sormak ve bütünü verip birim kesri sorma gibi etkinlikler yaptırılmalıdır (Siebert & Gaskin, 2006). Bu etkinlikteki varsayımsal

öğrenmeler, birim kesri kullanarak bir bütüne ulaşma yani Steffe'nin (1991) belirttiği gibi yineleme yaparak bütüne ulaşma (iterating), kesirlerde eş parçalar ile bütün arasındaki kavramsal ilişkiyi anlama ve bu iki şemaya dayanarak ayırma (disembedding) yapabilmedir. Buna ek olarak eş parçalara ayırma ve yineleme yapmayı belirten bölümleme (splitting) eylem şemasına (Steffe, 2002) dayanır. İkinci uygulama için eklenen soru ve hedef gruptaki öğrencilerden Buğra'nın bu soruya yanıtı Şekil 4.1.1.2'de gösterilmiştir.



Şekil 4.1.1.2. Buğra'nın Ön Değerlendirme Etkinliği 2'ye Verdiği Yanıt

Buğra'nın yanıtı aynı zamanda sınıftaki birçok öğrencinin yanıtını da temsil etmektedir. Öğrenciler çoğunlukla, bir bütüne ulaşabilmiş ancak yineleme yaparken eş parçalar oluşturmayı önemsememiştir. Bu durum öğrencilerde bütün ve eş parça kavramları arasındaki ilişkiye dayanan parça-bütün anlayışının net bir biçimde oluşmadığının bir göstergesi olabilir (Steffe, 2002; Hackenberg vd., 2016). Bununla birlikte, daire modelini eş parçalara ayırmak diğer dörtgensel alan modellerini ayırmaya göre daha zor olduğundan (Hackenberg, 2013; Tunç-Pekkan, 2015) Buğra doğru bir şekilde yineleme yapamamış olabilir. Ek olarak, yineleme anlamı daha üst düzey bir beceridir ve birim kesri kavramsallaştırmaya dayanır (Steffe & Olive, 2010). Bu sebeple kesirlerde eş parçalar anlayışı ile birim kesir büyüklüğüne dair zihninde henüz tam bir olgunlaşma olmadığı da düşünülebilir.

Nicel muhakemenin gelişimi, öğrencilerin olgun bir kavramsallaştırmaya ulaşmalarını gerektirir; bu da işlemler arasındaki ters ilişkinin açık bir şekilde anlaşılmasını içerir. Piaget'nin fikirlerinin merkezinde, eylem şemalarından işlemsel düşünceye geçişin işlemler arasındaki ters ilişkinin anlaşılmasına dayandığı yer almaktadır. Piaget bu anlayışı düşüncenin tersine çevrilebilirliği (reversibility- reversible thinking, reversible reasoning) olarak adlandırmıştır (Nunes & Bryant, 2023). Bu etkinlikte de öğrencilerin alışık olduğu düşünme yolu olarak bütünü eş parçalara ayırma değil; bunun tersi olarak birim kesri yineleyerek bütüne ulaşma eylemini kullanmaları gerekmiştir. Bu düşünme yolunun temelinde ise bir ölçüm olarak birim kesir miktarı ve bu birim kesirlerin bir araya gelerek bir bütünü oluşturması yer almaktadır. Thompson ve arkadaşları (2014) bu zihinsel imgeye

“ölçü büyüklüğü (measure magnitude)” ismini vermiştir. Buna göre bir miktarın büyüklüğü "ölçüm" ve "birim sayısı" ile özdeşleştirilir. Bu durum, birim kesir ve bu birim kesirden kaç tane olduğu; birimlerin bir araya getirilerek büyüklüğe karar verme durumunu ifade eder. Söz konusu etkinlikte de bir ölçü birimi olan $\frac{1}{8}$ kesrinin paydadaki sayı kadar yani 8 defa yineleyerek bir bütüne ulaşmayı gerektirir.

Yapılan görüşmelerde Buğra’nın akıl yürütürken kullandığı düşünme yolunu sözlü olarak ifade etmesi istenmiştir (Gersten vd., 2009). Buğra modeli oluştururken yineleme şemasıyla parçaları çizerek bütüne ulaşmaya çalışmış ve orantısız birimler çizmiştir. Görüşme sürecinde Buğra’nın yanıtı üzerinde konuşularak doğru bir model çizmesi için yönlendirici sorular sorulmuştur. “Burada ne oluyor?” gibi sorular yöneltmek öğrencilerin verilen durumu nasıl gördüklerini ve nicelikler arası ilişkileri nasıl kurduklarına yönelik betimlemelerini sağlamaktır (Smith & Thompson, 2008). Buna ek olarak, bir problem durumuna dair neler olup bittiği hakkında konuşma, çocukları aritmetikle ilgili aceleci yargılardan uzaklaştırmayı sağlamaktadır (Bruce, 2009; Thompson, 1993). Sonuçta Buğra’nın ve sınıftaki birçok öğrencinin, soruda verilen alanın yani bir birim büyüklüğünün dayanak niceliğini oluşturduğunu anlaması ve bunu bütün ile ilişkilendirmesi konusunda gelişmiş bir nicelleştirmeye henüz uzak oldukları söylenebilir.

Özetle, ön-testten elde edilen bulgulara dayanarak öğrencilerin kesirlerde bütün anlayışı ile gelişmiş bir zihinsel imgeleri olduğundan bahsetmek oldukça güçtür. Birçok öğrenci eş parçaların her birini ifade ettiğimiz birim kesir ile birim kesirlerden oluşan bütün arasında doğru bir ilişki kuramamış ve bütünün değişkenliğinin kesir büyüklüğünü de etkilediğini fark etmemiştir. Bu sebeple araştırmada kesirlerde bütün kavramının geliştirilmesi için çeşitli etkinlikler geliştirilmiş ve uygulanmıştır.

4.1.2. Öğretim Bölümü 1: Kurabiye Paylaşım Etkinliği

Uygulama 1

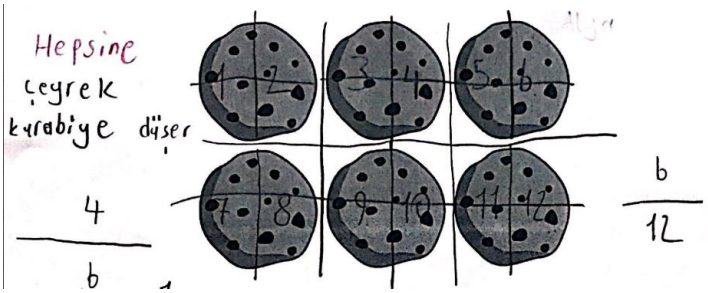
Ön değerlendirme sonrasındaki birinci öğretim bölümünde altı eş kurabiyeyi önce 12 kişi, sonra 24 kişi arasında paylaştırma etkinliği uygulanmıştır. Bu görevde hedeflenen varsayımsal öğrenme öğrencilerin eş paylaşım anlayışını geliştirmektir. Bu etkinlik, çocukların erken yaşlardan itibaren maruz kaldığı ortak bir deneyim olan adil paylaşıma dayandığından kesirlerde eş paylaşımın anlaşılması ve izlenmesi daha kolay olmaktadır

(Streefland, 1991; Nunes & Bryant, 2009). Böylece öğrenciler doğal sayılardaki bölme işlemi şemalarını kesirlerde de kullanabileceklerini anlar ve bu da kesirlere geçiş için iyi bir başlangıçtır (Toluk & Middleton, 2004). Ayrıca kesirlerde eş parçalama kavramına yönelik öğrenci anlayışlarının kesrin diğer anlamlarına (ölçme, oran vb.) göre daha kolay ölçüldüğü de bilinmektedir (Behr vd.1983; Tunç-Pekkan, 2015). Buna ek olarak Streefland (1991), çok soyut bir düzeyde başlatmaktan kaçınmak ve öğrencileri teşvik etmek amacıyla kesir kavramını gerçekçi ve somut durumlar kullanarak öğretmeyi savunmaktadır. Dolayısıyla, bu araştırmada da kesir kavramına öğrencilerin gerçek hayattan aşina oldukları bölme ve paylaştırma anlamına dayanan etkinlik kullanılarak başlanması uygun görülmüştür. Örnek olarak Beren'in yanıtı Şekil 4.1.2'de gösterilmiştir.

Bu etkinlikte sınıftaki öğrencilerin birçoğunun benzer düşünme yolları kullanarak doğru yanıt verdiği görülmüştür. Bu durum, başka araştırmalarda da kanıtlanmış olup parça-bütün anlayışına dayanan kesir problemlerinde öğrencilerin probleme kolaylıkla yanıt verebildikleri belirlenmiştir (Hackenberg, 2013; Hansen vd., 2015; Jordan vd., 2016; Kornilaki & Nunes, 2005). Öğrenciler 6 eş kurabiyeyi 12 kişiye paylaştırmakta neredeyse hiç sorun yaşamamışlar, kurabiye modellerini yatay ya da dikey bir çizgiyle iki eş parçaya ayırarak yarımı $\frac{1}{2}$ ya da $\frac{6}{12}$ şeklinde ifade etmişlerdir. $\frac{1}{2}$ yanıtını veren öğrencilerin düşünme yolunun "yarım" kavramına ve yarımın kesir sembolü olarak $\frac{1}{2}$ ile göstermeye dayalı olduğu söylenebilir. $\frac{6}{12}$ şeklinde soruyu yanıtlayan öğrencilerin düşünme yolunun ise genellikle parça-bütün anlamına dayandığı söylenebilir. Yani $\frac{6}{12}$ cevabı veren öğrenciler ilk etapta bunun "yarım" kurabiye olduğunu fark etmemiş olabilirler. Bu durum aynı zamanda öğrencinin bir kesrin farklı gösterimleri arasında dönüşüm yapamadığını göstermektedir (Duval, 1993).

Aynı etkinliğin devamı olarak, öğrenciler 6 eş kurabiyeyi 24 kişiye paylaştırırken problemin ilk sorusuna verdikleri yanıtlardan farklı yanıtlar vermişlerdir. Bu noktada $\frac{1}{4}$ doğru yanıtını ve çeyreğin farklı bir gösterimi olarak $\frac{6}{24}$ yanıtını veren 14 öğrencinin olması dikkat çekicidir. Bunun dışında, $\frac{4}{6}$ yanıtını veren 5 öğrenci bulunmaktadır. Bu yanıt, öğrencilerin bütünü toplam kurabiye sayısı ile ilişkilendirdiğini ve bütüne dair hatalı zihinsel imgeye sahip olduklarını göstermektedir. Lamon (2005) bu gibi durumlara ilişkin soruda verilenler

ne ise öğrencilerin anladığı bütünün de o olduğunu belirtmiştir. Beren'in yanıtları ise aşağıda açıklanmıştır.



Şekil 4.1.2. Beren'in Kurabiye Paylaşımı Problemine Verdiği Yanıt

Beren

Beren, 6 kurabiyeyi 12 kişiye paylaştırırken öncelikle her bir kurabiyenin yarısını bularak parçaları saymış ve sonrasında bir kişinin alacağı kurabiye miktarını $\frac{6}{12}$ kesriyle ifade etmiştir (görsel üzerinde sağda). Buna göre Beren eş parçalama yaparak bütünü 12 birim kesir olarak kabul etmiş ve kurabiye sayısı ile parça sayısını ilişkilendirmiştir. Beren'in bu düşünme yolu kapsamlı (extensive) nicelleştirme örneği olarak kabul edilmekte ve düşünme yolunun kesirlerde parça-bütün anlamına dayandığı görülmektedir. Şöyle ki Beren bütünü birimlere ayırarak birim kesir sayısı ile alınan parça sayısını ilişkilendirebilmiştir.

Beren kurabiyeleri 24 kişi arasında paylaştırırken ise 6 kurabiyeyi 4 eş parçaya bölüp bir kişiye $\frac{4}{6}$ düştüğünü ifade etmiştir. Bu durum, Beren'in bütün ve sayılan parça arasındaki ilişkiyi kuramadığını göstermektedir. Beren bu yanıtta her bir kurabiyeyi dört eş parçaya bölmesi gerektiğini düşünmüş ve her bir kişinin çeyrek kurabiye alması gerektiğini de belirtmiştir. Bu yanıt, nicel muhakeme anlamında güçlü olduğunun bir kanıtıdır. Fakat, bu güçlü nicel muhakemeyi doğru sembolik gösterim ile ifade edememiş, "bütün"ün birim kesirler bakımından büyüklüğünü doğru sayısal değerle gösterememiştir. Beren kurabiyeleri dörder parçaya ayırabilmiştir. Dolayısıyla nicelik ve niceliği temsil eden görsel sembol ile matematiksel sembol arasındaki kopukluktan söz etmek doğru olabilir. Şahin (2019) çalışmasında öğrencilerin kesirler konusunda problemlerde temsil kullanmalarını ve temsiller arası geçişlerini incelemiştir. Çalışma sonucunda öğrencilerin temsilleri ayrı ayrı bildikleri ancak temsiller arası geçişte zorlandıkları görülmüştür. Farklı araştırmalarda da araştırmacılar benzer bir sonuç olarak öğrencilerin matematiksel ilişkilerin sözel, tablosal,

grafiksel ve cebirsel temsilleri arasında doğru dönüşüm yapmakta zorlandıklarını ortaya koymuştur (Duval, 1993; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Galbraith & Haines, 2000).

Uygulama 2

Araştırmanın ikinci uygulamasında aynı etkinlik uygulanmış olup ilkinden farklı olarak öğrencilerden önce sonucu tahmin edip yazmaları istenmiştir. Tahmine dayalı etkinlikler, öğrencilerin kendi çözüm stratejilerini geliştirmeleri, çözümlerini gerekçelendirme ve kontrol etmeye yardımcı oldukları için öğrencilerin aritmetik hesaplama becerilerini geliştirmek için bir fırsat olduğu ifade edilmektedir (Resnick vd., 2016; Siegler & Lortie-Forgues, 2014). Matematik eğitiminde öğrencilerin tahmin becerisini desteklemek için sınıf içi pratiklerde sayı tahmini ve nicel muhakeme görevlerinin sıklıkla kullanılması önerilmektedir (Nogues & Dorneles, 2019). Bununla birlikte, günlük hayatta kesirlere neden ihtiyaç duyulduğu; nerelerde kullanıldığı; pay, payda ve kesir çizgisi kavramlarının anlamları üzerinde sınıfça konuşulmuştur. Örneğin; "*Bazı durumlarda doğal sayılar bize tam sonucu vermediğinde kesirlere ihtiyaç duyarız. İşte bu problem de bu durumlardan bir tanesidir. Kesirlerde doğal sayılar gibi bir miktar belirtir ancak bütünlerin değil parçaların kaç tane olduğunu belirtir."* sonucuna ulaşıldı. Devamında ise öğrencilere "*Siz buna benzer olarak kesirleri daha önce kullandınız mı? Örnek vermek ister misiniz*?" soruları yöneltildi. Öğrencilerin kesirlerin genellikle bölme-paylaştırma ve parça-bütün anlamına dayanan ifadeleri örnek verdiği görülmüştür. Örneğin bir çikolatanın birkaç arkadaş arasında paylaştırılması, sınıftaki kitapların birkaç çocuk arasında paylaştırılması gibi. Bu sonuç, alanyazında kesirlerin parça-bütün anlamı diğer anlamlarına göre öğrenciler için anlaşılması daha kolay olması ile açıklanmaktadır (Hackenberg, 2013; Hansen vd., 2015; Jordan vd, 2016). Bu uygulamada ayrıca öğrencilerin tahmin becerisini desteklemek için, "Eğer şöyle olsaydı, ne olurdu? (what if)" sorusuna da yer verilmiştir (Van de Walle vd., 2018). Örneğin, kurabiye paylaştırma etkinliğinde, öğrencilere kişi sayısı arttığında veya azaldığında kişi başı düşen kurabiye miktarının nasıl olacağına dair sorular soruldu.

Elde edilen bulgularda, öğrencilerin çözümlerinde 6 kurabiyenin 12 kişiye paylaştırılmasına ilişkin, kişi başına düşen kurabiye miktarını $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, 2 ve 10 gibi farklı değerlerle tahmin ettikleri görülmüştür. Bu yanıtlara göre öğrenciler tahminlerini gerekçelendirmişlerdir. Örneğin ⅙ tahmininde bulunan öğrenciler 6 kurabiye olduğu için; $\frac{1}{12}$ yanıtını veren öğrenciler kurabiyeleri ikiye bölmesi gerektiği için bu tahminlerde

bulunduklarını belirtmişlerdir. Daha sonra 6 kurabiyenin 24 kişiye paylaştırılmasına ilişkin olarak ise öğrenciler kişi başına $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{24}$, $\frac{6}{24}$ miktarlarda kurabiye düştüğünü tahmin etmiştir. Genel olarak bakıldığında ise öğrencilerin büyük bir çoğunluğu $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ve $\frac{6}{24}$ yanıtlarını vermişlerdir. 6 kurabiyenin 12 kişiye paylaştırılmasına ilişkin soruya yönelik olarak yapılan sınıf içi konuşmalarda bazı öğrencilerin 6 kurabiyenin tamamını bir bütün olarak kabul ettiği gözlemlenmiştir. Böyle bir durumda öğrencilerin bir kısmı "Eğer tüm kurabiyeler bir bütünse o halde bir kişinin aldığı kurabiye nasıl $\frac{1}{2}$ olacak?" sorusunu sormuştur. Bu soru, bütün kavramı üzerinde muhakeme edilmesi bakımından etkili bir soru olarak kabul edilebilir. Bu durum aynı zamanda kesirlerde bütünün büyüklüğünün belirlenmesinin önemini belirtmektedir. Öğrencilerin problemdeki niceliklerin ve problemin çözümü üzerine tartışarak karar vermeleri nicel muhakemelerini etkileyen önemli bir süreç olduğundan (Robinson, 2017; Thompson, 1993) sınıftaki öğrencilerin birbirlerini ikna etmeleri desteklenmiştir. Tobias (2013) kesirlerde bütünü anlayabilmek için dilin etkili bir araç olduğunu ve öğrencilerde bütün kavramının gelişimi için bütüne yapılan sözel vurgunun oldukça önemli olduğunu belirtmiştir. Elde edilen sonuçlar da bunu doğrular niteliktedir. Öğrencilerin yanıtlarının altında yatan düşünme süreçleri hakkında ipuçları elde etmek için onların zihinsel süreçlerini açığa çıkaran sorular yöneltmek etkili bir teknik sayılabilir (Diezmann & English, 2001; Ellis, 2011; Lee 2013; Siebert & Gaskin, 2006; Smith & Thompson, 2008). Bu sebeple Araştırmacı Buğra'ya yanıtlarını açıklaması için sorular yöneltmiştir:

Araştırmacı: *Bu problemi nasıl çözdün?*

Buğra: *12'yi 6'ya böldüm 2 buldum ama bu 2 tane değil aslında yarımı gösteriyor.*

Araştırmacı: *Neden 12'yi 6'ya bölmeyi düşündün?*

Buğra: *Kesirler demek bölme yapmak gibi düşündüm. O yüzden yarımı böyle bulmaya çalıştım.*

Araştırmacı: *Kurabiyeleri 24 kişi paylaşırsa ne olur?*

Buğra: *O zaman 24'ü 6'ya bölerdim*.

Araştırmacı: *Tamam, böl bakalım. Neyi gösteriyor buradaki dört sayısı?*

Buğra: *Kurabiye parçaları mı acaba…* (Sessiz kalıyor, nasıl yapacağını bilemiyor.)

Araştırmacı: *Herkese bir yarım düşer mi?*

Buğra: *Düşmez, daha az düşer.* (Kurabiyeleri tek tek dörder parçaya bölüp sayıyor ve sonunda doğru çözüme ulaşıyor.)

Araştırmacı: *Bu etkinlikteki kurabiye sayısı 6 değil de 10 olsaydı bir kişiye düşen kurabiye miktarı nasıl değişirdi?*

Buğra: *Herkese daha çok düşerdi.*

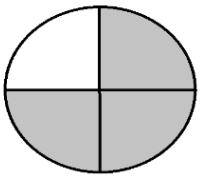
Buğra bu problemin çözümüne dair tahminini önce 10 olarak belirtmiş, sonrasında problemi çözerken 12'yi 6'ya bölme işlemini yaparak 2 sonucunu bulmuştur. Bu yanıt, Buğra'nın problemdeki niceliklerin neyi belirttiğini ve bu nicelikleri nasıl kullanacağına dair yeterli bir nicel muhakeme yapamadığını göstermektedir. Diyalogda görüldüğü üzere Buğra, 12'yi 6'ya bölerek aritmetik işlem yapmış ve buradaki niceliklerin ve bulduğu 2 değerinin anlamını yorumlamakta zorlanmıştır. Aslında bulduğu 2 değerinin yarım olduğunu ifade etmeye çalışmakta fakat zihnindeki yarım ile işlem sonucunda bulduğu 2 değerinin çeliştiği gözlemlenmektedir. Buğra daha sonrasında araştırmacının "Kurabiyeleri 24 kişiye paylaştırırsak ne olur?" sorusuna yine aritmetik işlem yaparak 24'ü 6'ya bölerim şeklinde cevap vermiştir. Bulduğu değerin ne anlama geldiği sorusuna ise cevap verememiştir. Burada Buğra'nın aritmetik işlem odaklı düşündüğünden bulduğu 2 ve 4 sayısal değerlerini bir kurabiyenin kaç kişiye paylaştırılacağını ifade edememiştir. Bir kurabiyenin 2 kişiye paylaştırılmasını yarım ile ilişkilendirmeye çalışmış fakat açıklamakta zorlanmıştır. Daha sonra Buğra paylaştırmayı görsel üzerinde yaparak kişi başına düşen kurabiye miktarının $\frac{1}{2}$ (yarım) ve $\frac{1}{4}$ (çeyrek) fikrine ulaşabilmiştir. Bu etkinlik, ilk uygulanan öğretim bölümü olduğu için bu düşünme yolunun önceden oluştuğu söylenebilir. Araştırmacının sınıf içinde ve görüşme sürecindeki yönlendirmeleri ve kesir büyüklüğünün anlaşılmasında etkili bir strateji olan dayanak noktalarına vurgu yapılmıştır (Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012; Johanning, 2011; Teoh, Mohamed, Parmjit, & Kor, 2020). Sonuç olarak Buğra başlangıçta yetersiz yüzeysel (gross) nicelleştirme yaparken sınıf tartışmaları ve araştırmacı yönlendirmesi sonucunda kişi sayısı ve kurabiye miktarını ilişkilendirerek doğru nicelleştirme yapabilmiştir.

4.1.3. Öğretim Bölümü 2: Değişen Bütünler Etkinliği

Uygulama 1

Bu öğretim bölümünde yer alan etkinlik, bir kısmı boyanmış bir alan modelinin, değişen bütünlere göre yani tüm alan ve boyalı alana göre yorumlanması gerekmektedir. Böylece öğrencilerin değişen taralı alana göre bütünü nasıl yorumladıkları incelenmiştir. Kesrin büyüklüğünün bütüne göre değiştiğini yani kesrin nisbi bir büyüklük olduğunu fark etme

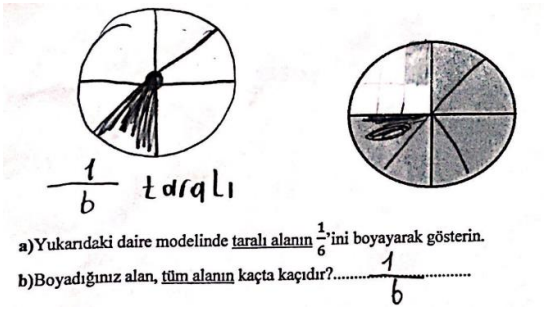
nicel muhakemenin gelişimi için oldukça elzemdir (Castillo-Garsow, 2012; Nunes & Bryant, 2022). Bu görevde amaçlanan varsayımsal öğrenme, boyalı parçanın kesir büyüklüğünün bütünün büyüklüğüne göre değişebileceğine dair akıl yürütebilmedir. Etkinlik aşağıda gösterilmiştir.



a)Yukarıdaki daire modelinde taralı alanın $\frac{1}{6}$'ini boyayarak gösterin.

b)Boyadığınız alan, tüm alanın kaçta kaçıdır?.....

Öğrencilerin birçoğu benzer düşünme yolları kullanarak soruda dairenin tamamını bütün kabul etmiş ve $\frac{1}{6}$'i temsil eden alanı göstermiştir. Sorunun b şıkkında ise öğrenciler a'daki yanıtın aynısını ya da yalnızca taralı alanı bütün kabul ederek doğru bir düşünme yoluyla soruyu yanıtlamışlardır. Sonuç olarak, birçok öğrenci taralı alan ve tüm alanın farklı bütünleri temsil ettiğini fark etmemiş ya da önemsememiştir. Bu öğretim bölümünde yer alan problemin bir önceki kurabiye etkinliğine göre daha soyut olması ve nispeten daha zor olması öğrencilerin hata yapma olasılıklarını artırmıştır. Sonuç olarak ise öğrenciler aynı taralı alanı farklı bütünlere göre yorumlayamamış ve değişen bütünler ile birimleri ilişkilendirememiştir. Buna ek olarak, bütünün büyüklüğünü bozmadan, zihinde parçaları bütünden ayrı olarak düşünmeyi ifade eden ayırma şemasının öğrencilerde henüz gelişmediği söylenebilir.



Şekil 4.1.3. Beren'in Değişen Bütünler Etkinliğine Yanıtı

Beren

Beren, bir bütün olarak taralı alanın $\frac{1}{6}$'ini doğru temsil etmiş ve bunu yaparken de eş parçalamaya dayanan düşünme yolu kullanmıştır. Ancak taralı bölgede boyadığı $\frac{1}{6}$'lik alanı tüm alana göre yorumlarken bu düşünme yolunu kullanmamış ve dolayısıyla dairenin tamamı ile taralı bölgesi arasında ilişki kuramadığından bütünlerin farklılaştığını görememiştir. Bu durumda Beren'in zihninde ayırma (disembedding) şemasının gelişmediği söylenebilir. Thompson ve arkadaşları (2014) böyle bir düşünme yolu için "Wildi magnitude-Wildi büyüklüğü" kavramını kullanmış ve bir nicelikte birim değişse de asıl miktarın değişmediğini anlama durumu olarak nitelendirmiştir. Beren, soruyu yorumlarken kapsamlı (extensive) nicelleştirme yapabilmiş, birimlere ayırarak $\frac{1}{6}$'i model üzerinde gösterilmiştir. Bununla birlikte, taralı alanın $\frac{1}{6}$'inin tüm alana göre yorumlayamadığından, kendisi başka bir bütün çizmiş (görselde sol üstte) ve $\frac{1}{6}$'i bu bütünde temsil etmiştir. Boş bir model üzerinde kolaylıkla kesri temsil edebilmekte ancak taralı alanı farklı bütün referansı ile değerlendirirken ilk kullandığı düşünme yolunun burada da geçerli olduğuna karar vermiş, bütünün değiştiğini düşünmemiştir. Hackenberg vd (2016) burada olduğu gibi bir yanıt veren öğrencilerin birim kesir ve bütün büyüklüklerini aynı anda akılda tutamadıklarını ve bu sebeple de hata yaptıklarını belirtmiştir.

Uygulama 2

Araştırmanın ikinci uygulamasında etkinliğin aynısı tekrar uygulanmış ve ilk uygulamaya benzer sonuçlar elde edilmiştir. Ancak bu uygulamada sınıf tartışması daha fazla desteklenmiş ve ilk uygulamaya göre daha uzun süre verilerek tartışma için daha fazla vakit yaratılmıştır. Böylece öğrenciler, birbirlerini ikna ederek ve cevaplara ilişkin gerekçeler sunarak soruyu yanıtlamışlardır. Bunun sonucunda da daha fazla öğrenci hatalı düşünme yolunu değiştirerek bütünün değişebildiğini fark edebilmiştir. Bu öğretim bölümünün ikinci uygulamasına yeni bir etkinlik olarak "kurdele etkinliği" eklenmiştir. Birinci uygulamada öğrencilerin verilen bütünü eş parçalara ayırırken hata yaptıkları gözlemlenmişti. Bu sebeple ilk gün uygulanan ve yukarıda açıklanan etkinliklere ek olarak ikinci uygulamada her bir öğrenciye yaklaşık 20 cm uzunluğunda kurdele verilmiş ve bu kurdeleyi önce iki sonra dört ve sonra 8 eş parçaya ayırma görevi verilmiştir. Böylece kesirlerde eş parçalar kavramını vurgulamak amaçlanmıştır. Bir nesneyi iki ve sonra dörde bölme gibi sürekli ikiye bölerek ilerlemeye dayanan bir strateji ile eş parçalara ayırma tekniği Piaget, Inhelder ve Szeminska (1960) tarafından yapılan araştırma sonuçlarına

dayanmaktadır. Bir uzunluğu farklı stratejilerle ikiye ya da dörde bölebilmek mümkündür. Ancak sürekli olarak ikiye katlama yöntemi öğrencilerde geliştirilmesi hedeflenen, üst düzey bir düşünme yoludur (Nunes & Bryant, 2022; Pothier & Sawada, 1983; Steffe & Olive, 2010; Tunç-Pekkan, 2015). Bu etkinlikte yapılan gözlemler sonucunda genellikle öğrencilerin kurdeleyi göz kararı böldükleri ve birkaç öğrencinin ise cetvel kullanarak parçalara ayırdığı gözlemlenmiştir. Sınıfta yalnızca beş öğrencinin kurdeleyi ikiye katlama tekniği ile parçalara ayırdığı gözlemlenmiştir. Dersin devamında sınıfça hangi yöntemin daha doğru bir yöntem olduğu konusunda tartışılarak cetvel kullanarak ya da ikiye bölme stratejisi ile eş parçalara ayırmanın en doğru seçenek olduğuna karar verildi.

4.1.4.Öğretim Bölümü 3: Dijital ve Somut Kesir Çubukları Etkinliği

Uygulama 1

Bu öğretim bölümünde kesirlerin uzunluk ve ölçme anlamları ele alınmıştır. Uzunluk anlamı öğrenciler için anlaması daha kolay iken ölçme anlamı oldukça karmaşık görülmektedir. Buna ek olarak kesirleri bir ölçüm olarak anlamak, güçlü bir kesir bilgisine sahip olmak için elzemdir. Uygulama sürecinde öğrencilerin bütünler üzerinde düşünmelerini sağlamak için hem somut hem de dijital kesir çubukları kullanarak "bütün" oluşturma görevleri verilmiştir. Kesirleri ölçüm olarak anlayabilmek için ise sayı doğrusu aracılığıyla birim kesirlerin büyüklükleri ve bütüne uzaklıkları hakkında muhakeme etmeleri desteklenmiştir. Bununla birlikte bu etkinlikte öğrencilerin bileşik birim (composite unit) hakkında düşünebilmeleri için çeşitli sorular yöneltilmiştir. Örneğin "$\frac{1}{4}$ birim kesrinin büyüklüğü hakkında konuştuktan sonra bu kesrin yarısını hangi birim kesir ile ifade ederiz? Böyle bir durumda bir bütün oluşturmak için kaç tane $\frac{1}{8}$ kesri kullanırız?" gibi sorular yöneltilmiştir. Böyle bir durumda $\frac{1}{4}$ kesrinin $\frac{1}{2}$ kadarını ifade eden bileşik birim olan $\frac{1}{8}$ kesri üzerinde düşünmeleri desteklenmiştir.

Etkinlik, grup çalışması olarak planlanmış ve uygulanmıştır. Bu görevde amaçlanan varsayımsal öğrenmeler kesir çubukları kullanarak kesirlerde uzunluk anlamını; sayı doğrusu kullanarak ise kesirlerde ölçme anlamı yani bir uzunluğun eş birimlerle ölçümünü anlamaktır. Parçalara ayrılmış birim kesirleri birleştirip bütüne ulaşmayı gerektiren görevde öncelikle $\frac{1}{2}$ ve $\frac{1}{3}$ gibi değeri büyük birim kesirlerle başlanmıştır. Etkinlikte kesir çubukları uzunluklarını gösterme seçeneği bulunmaktadır ve öncelikle birim kesirlerin yazılmadığı

haliyle uygulama yapılmıştır ve böylece öğrenciler kesir uzunluklarını tahmin etmeye çalışmış ve yüzeysel nicelleştirme yapabilmesine fırsat verilmiştir. Bu görev, didax.com websitesinde, akıllı tahtaya yansıtarak tüm sınıfın katılımıyla yürütülmüş olup uygulamanın ekran görüntüsü aşağıda belirtilmiştir.



Bu etkinlikte öğrenciler, parçalara ayırma (separating), karşılaştırma (comparing), yineleme (iterating) ve birleştirme (joining) eylem şemalarını aktif olarak kullanmıştır. Öğrencilerin tamamı kesir çubuklarından ½ birim kesir uzunluklarını bir araya getirerek kolaylıkla bütüne ulaşmışlardır. Öğrencilerin bu düşünme yolu Steffe ve Olive (2010) tarafından belirtilen bütünden parçalar kesir şemasını (Parts out of Wholes Fraction Scheme) kullanabildiklerini göstermektedir. Buna göre öğrenci, birim kesri bütünün eş parçalarından biri olarak anlamlandırır ve bunu ayırma ve yineleme eylem şemalarına dayanarak yapar. Örneğin öğrenci bir bütünü 5 eş parçaya bölerek ⅕ birim kesrini gösterir ve bununla birlikte $\frac{1}{5}$ birim kesrini yineleyerek de bütüne ulaşır.

Bununla birlikte, kesir değeri küçüldükçe öğrencilerin daha fazla hata yaptığı görülmüştür. Örneğin öğrenciler $\frac{1}{4}$ uzunluklarını kolaylıkla bir araya getirebilirken $\frac{1}{8}$ uzunluklarını bir araya getirirken daha sık hata yapmıştır. Bazı öğrenciler ise eş olmayan uzunlukları bir araya getirerek bütüne ulaşmaya çalışmışlardır. Bu durum, bu öğrencilerin kesirlerde eş parçalar oluşturmanın gerekliliğini ve birim kesir kavramını içselleştiremediğini gösterebilir. Bu durumda öğrencilerin yanıtlarının gruptaki diğer arkadaşları tarafından kontrol edilmesi yöntemi ve grupla tartışma tekniği uygulanmıştır. Böylece öğrenciler hem kendi çözümlerini açıklayabilmiş hem de diğer arkadaşları ile tartışabilmişlerdir.

Somut kesir çubukları ile çalışırken $\frac{1}{2}$'i bütün kabul edip birim kesirleri bir araya getirme görevi uygulanmıştır. Ancak bu durumda öğrenciler bir bütünün ½ olduğu durumu anlamakta zorlanmışlardır. Bunun sebebi ise öğrencilerin bütünü her zaman 1 ile

ilişkilendiriyor olmasıdır. ½ kesrinin de bir bütün olabileceği zihinlerinde daha önceden var olan zihinsel imgeye oldukça aykırı bir durumdur. Bu durumda birim kesirlerin üzerinde durarak büyüklükleri hakkında konuşulmuş ve modelleme etkinlikleri yapılmıştır. Kesir büyüklüğünü anlama ve birimi bütüne göre yorumlama birlikte gelişen anlayışlardır çünkü bir kesrin ne kadar büyük olduğunu anlamayan bir öğrenci bu kesrin bütün ile ilişkisini de kavramakta da güçlük yaşayabilir (Steffe, 2002). Hackenberg, Norton ve Wright (2016), bağlamsal problem kullanarak çeşitli uzunlukları bir araya getirerek bütün yapmayı gerektiren problem kullanmışlar ve ilkokulda bu tür bütüne ulaşmayı gerektiren problemlerin kullanılması gerektiğini belirtmişlerdir. Bu problemler kesirlerde eş parçaya ayırma ve bölme anlamlarını vurgular böylece kesir dilini geliştirir (Nunes & Bryant, 2023). Bu etkinlikte de öğrencilerin uzunluk, birim, eş parça, yineleme gibi kesir kavramlarına vurgu yapması ve kesir dilini geliştirmesi desteklenmiştir.

Öğrencilerin büyük çoğunluğu hem kesir çubukları kullanırken hem de sayı doğrusunda kesirlerin yerini bulurken birim kesirleri 0-1 sayıları arasında gösterebilmişlerdir ancak büyük bir kısmı birim kesirleri sayı doğrusu üzerinde gösterirken bütüne yakınlık konusunda yüzeysel ve kapsamlı nicelleştirme yapamamıştır. Örneğin $\frac{1}{4}$'i sayı doğrusunda gösterme görevinde öğrenciler sayı doğrusunu eş parçalara ayıramamış; çoğunlukla görece tahminle veya $\frac{1}{4}$'i sıfıra yakın bir noktada konumlandırmıştır. Kesir çubukları arasında hangisinin bir bütüne yakın veya uzak olduğunu bulmak için ise genellikle kesir çubuklarının görünüşlerine dayanarak yanıt vermişlerdir. Hackenberg ve diğerleri (2016) böyle bir düşünme yoluna sahip öğrencileri "Düzey 1" olarak betimlemiş ve bunun birim ilişkilendirme, yineleme ve büyüklük ilişkilerini yorumlamadaki yoksunluk olarak değerlendirmiştir. Thompson vd. (2014) böyle bir düşünme yolu için "büyüklük farkındalığı (awareness of size)" tanımlamasını yapmışlardır. Buna göre öğrenci bir niceliğin görsel temsiline bakarak büyüklük hakkında çıkarımda bulunur. Dolayısıyla böyle bir durumda algısal bir büyüklük anlayışından da söz edilebilir.

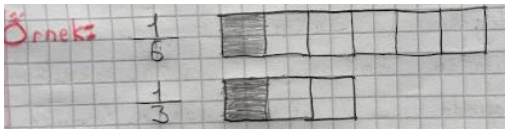
Öğrenciler somut kesir çubuklarını daha fazla kullanmışlar ve birim kesirleri birleştirerek bütün oluşturma görevinde daha doğru yanıtlar vermişlerdir. Dijital kesir çubukları kullanmayı gerektiren etkinlik akıllı tahtaya yansıtılarak uygulandığından tüm öğrenciler eşit düzeyde aktif katılamamış olmasına rağmen öğrenciler için daha motive edici bir görev olmuştur. Bu duruma benzer olarak Riconscente (2013) kesirleri öğretmeye yönelik dijital araçların çocukların kesirlerden keyif almalarının yanı sıra motivasyonlarını

ve öz yeterliliklerini de artırdığını belirtmiştir. Bununla birlikte dijital araçlar kesir kavramını derinleştirmek ve kesir öğretiminde sıklıkla kullanılan kesirlerin parça-bütün anlayışını artırmak için bir araç olarak kullanılabilir (Simon vd., 2018; Yeo & Webel, 2022). Bu öğretim deneyinde her bir öğrencinin dijital kesir çubukları kullanması mümkün olmadığından daha çok somut kesir çubukları ile çalışmışlardır. Araştırmacılar, birçok temsil türünün kullanımına ek olarak özellikle somut materyal kullanımının matematikte kullanılması gerektiğinin altını çizmişlerdir (Duval, 1993; Resnick & Omanson, 1987; Thompson, 1992). Gabriel ve arkadaşları (2012), ilkokul öğrencilerinin kesir büyüklüğü anlayışını geliştirmek için önce somut ve sonra soyut temsiller kullanmıştır. Bu süreçte, öğrencilerden basit kart oyunlarını oynamaları istenmiştir. On hafta sonra öğrencilerin kesir büyüklüğü konusundaki kavramsal anlayışlarında %15 ile %20 arasında bir iyileşme olduğunu raporlamışlardır. Sonuç olarak, yapılan gözlemlere dayanarak bu öğretim bölümündeki görsel temsil ve etkileşimli uygulamalar öğrencilerin nicelikleri ve nicelikler arası ilişkileri anlamaları bakımından yardımcı olmuştur.

Beren

Bu öğretim bölümündeki gözlemlere dayanarak Beren'in kesir çubukları ile bütün oluşturmada nicelleştirme yapabildiği görülmüştür. Şöyle ki, aynı birim kesirleri yineleyerek bütüne ulaşabilmiş ve kesir büyüklükleri hakkında doğru çıkarımlarda bulunabilmiştir. Ancak Beren de sınıftaki birçok arkadaşı gibi bütünün her zaman 1'e eşit olduğu imgesini benimsemişti. Bu düşünme yolunu değiştirmek için $\frac{1}{4}$ ve $\frac{1}{2}$ gibi birim kesirleri bütün kabul ederek kesir çubukları kullanılmış ve aynı zamanda kesir büyüklükleri üzerinde konuşulmuştur. Buna ek olarak, birim kesirleri modelleme göreviyle kesir büyüklüğüne dair Beren'in yeni bir düşünme yolu oluşturulması amaçlanmıştır. Modelleme etkinliklerinde de $\frac{1}{2}$ kesri ile $\frac{1}{8}$ kesri gibi birbiriyle orantısal kesirlerin alt alta modellenmesi istenmiştir. Böylece birim kesirler arasındaki ortantısal ilişkiyi fark etmesi desteklenmiştir. Steffe'nin (2002) yineleme şeması kapsamında değerlendirdiği öğrenci örneklerinden biri de birim kesirleri bir araya getirip bir bütün yapma çalışmalarıdır. Öğrenci birimleri yineleyerek bütünlere ulaşabilir, örneğin 3 tane $\frac{1}{3}$'i yineler ve bir bütüne ulaşır. Böyle bir durumda öğrenciye "$\frac{1}{6}$'i gösterir misin?" gibi bir soru sorulduğunda öğrenci birim kesrin de değiştiğini fark edebiliyorsa eş parçalama şemasını gerçekten benimseyip benimsemediği anlaşılır (Hackenberg, 2013). Bu etkinlikte Beren, böyle bir soruya doğru yanıt verememiştir. Ancak birim kesirlerle çalışmaya henüz başladığından bu durum normal kabul edilmiştir. Onun bu

düşünme yolunun değişmesi için kesirleri modelleme gibi etkinlikler uygulanmıştır. Belirlenen iki birim kesri alt alta modelleyerek kesirlerin uzunluk anlamını daha fazla vurgulamak ve aynı büyüklükteki bütünler üzerinde farklı birim kesirleri göstererek taralı alanların büyüklüklerini karşılaştırmak amaçlanmıştır. Şekil 4.1.4'te Beren'in birim kesir modelleme örneği gösterilmiştir.



Şekil 4.1.4. Beren'in Birim Kesirleri Modellemesi

Beren bütün konusunda doğru bir zihinsel imge geliştiremediğinden iki birim kesri modellerken farklı bütünler çizmiş ve taradığı miktarları aynı büyüklükler olarak göstermiştir. Bu sebeple de bu iki birim kesir büyüklüklerini ilişkilendirirken hata yapmıştır. Wilkins, Norton ve Boyce (2013) araştırmalarında birim kesirleri karşılaştırma görevinde öğrencinin Beren'in çözümünde olduğu gibi bir düşünme yolu kullandığını belirlemişlerdir. Bu düşünme yolunu ise parça-bütün anlamı gelişmiş ancak kesrin ölçme anlamı gelişmemiş öğrencinin yanıtı olarak belirtmişlerdir. Buna ek olarak aynı araştırmacılar bu çözümün çarpımsal muhakeme eksikliğinden kaynaklı bir düşünme yolu olduğunu da vurgulamışlardır. Bu düşünme yolunu kullanan öğrenci, modeli kesrin büyüklüğüne göre değil parça sayısına göre oluşturmuştur.

Böyle bir durumda kesrin temsil ettiği bölgesel büyüklük ile kesir büyüklüğü arasında doğru bir ilişkilendirme yapabilmek oldukça zordur. Öğrenci iki alan modeli çizecekse bunları aynı büyüklükte bütünler çizeceğini bilmesi çok önemli bir düşünme yoludur ve çok az öğrencide bu düşünme hakimdir (Hackenberg vd., 2016). Bu durum öğrencilerin modelleme becerilerinin de geliştirilmesini gerekli kılmıştır. Öğrencilerin aynı bütünler üzerinde modelleme yapmalarını sağlamak için öncelikle kesirlerin parça-bütün anlamına dayanan ve gerçek yaşam durumlarından örnekler verilerek sayılan parçanın büyüklüğü hakkında konuşulmuştur. Kesirlerde sıklıkla kullanılan pizza ve pasta gibi örneklendirmeler ile aynı ve farklı bütünlere göre paylaştırmanın ne gibi farklılıklar doğurduğu üzerinde sınıfça tartışılmıştır.

Uygulama 2

Araştırmanın ikinci uygulamasında ilk uygulamada olduğu gibi başlangıçta en büyük birim kesrin 1 veya $\frac{1}{10}$ olduğunu, en küçük birim kesrin ise $\frac{1}{2}$ olduğunu, 1'den büyük birim kesirler de olabileceğini belirtmişlerdi. Ancak birim kesirlerin modellenmesi ve bir bütüne göre yorumlanması sonucunda birim kesirlerin bir bütünden büyük olamayacağını anladıkları gözlemlenmiştir. Birim kesirlerin büyüklüğü ve karşılaştırılması noktasında da hem dijital hem somut kesir çubuklarını kullanarak öğrencilerin hatalı düşünme yollarının doğru bir akıl yürütmeye çevrilmesi konusunda olumlu olarak etkilediğini söylemek yerinde olacaktır.

4.1.5.Öğretim Bölümü 4: Pasta Paylaşım Etkinliği

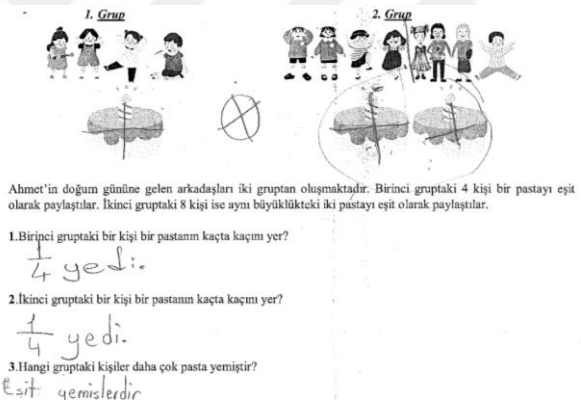
Uygulama 1

Bu öğretim bölümünde iki farklı bütünü karşılaştırmayı gerektiren bağlamsal bir problem kullanılmış ve grupça çalışılmıştır. İki aşamalı çözüm gerektiren bir problem kullanılması sebebiyle bu etkinlik niceliksel olarak zengin bir durum örneği ve nicel muhakemenin kesirlerde uygulanması konusunda iyi bir örnek olarak kabul edilmiştir (Barros Baertl, 2020). Problem: "Ahmet'in doğum gününe gelen arkadaşları iki gruptan oluşmaktadır. 1.gruptaki 4 kişi bir pastayı; 2.gruptaki 8 kişi ise iki pastayı eşit olarak paylaşırlar. İlk gruptaki bir kişi pastanın kaçta kaçını yer? Hangi gruptaki kişiler daha fazla pasta yer?" Bu etkinlik kesirlerde parça-bütün anlamı ve çarpımsal düşünme üzerine inşa edilmiş olup dolaylı nicelleştirme kullanmayı gerektirmektedir çünkü niceliklerin değişebilmesi ancak ilişkinin aynı kalması söz konusudur (Nunes & Bryant, 2009).

Öğrencilerin büyük çoğunluğu her iki gruptan bir çocuğun pastanın $\frac{1}{4}$'ini yediğini belirterek soruyu doğru yanıtlamıştır. Bu yanıtlar arasından bazı öğrenciler pastaları eş paylaştırarak ve birimlere ayırarak çözerken bazı öğrenciler kişi sayısı ve bütün arasındaki oransal ilişkiye dayanarak soruyu çözmüşlerdir. Farklı bir deyişle öğrenciler, ikinci gruptaki kişi sayısı ve bütünün birinci grubun iki katı olması sebebiyle aynı miktarda pasta yediklerini düşünürler. Bu durumda, bütün olarak pastaları birimlere ayırarak çözen öğrencilerin kapsamlı nicelleştirme yaptığı; ikinci gruptaki öğrencilerin ise orantısal muhakeme ettiği ve yüzeysel nicelleştirme yaptığı söylenebilir.

Daha az sayıda öğrenci ise ikinci gruptaki çocukların daha fazla pasta yediğini çünkü ikinci grupta daha fazla pasta olduğunu belirtmişlerdir. Dolayısıyla böyle bir yanıtta henüz

oluşmamış veya gelişmemiş bir yüzeysel nicelleştirmeden bahsedilebilir. Bu öğrenciler, bütünün ve bütünün eş parçalarından birini alabilmiş ancak bütün sayısının ve kişi sayısının değiştiğini düşünmemiştir. Öğrencilerin ikinci gruptaki bir kişinin yediği pasta miktarını $\frac{1}{8}$ olarak düşünmeleri, iki pastayı bir bütün kabul ettiğinden hem yüzeysel hem kapsamlı nicelleştirmeden sınırlı bir düşünme yolunu işaret edebilir. Buna göre bu öğrenciler bütün ve kesir büyüklükleri hakkında farklı düşünme yollarına sahiptirler ve bu problemde kullandıkları düşünme yolu çarpımsal olmaktan ziyade toplamsal bir düşünme yolunun kullanıldığını göstermektedir. Toplamsal akıl yürütme, çocukların problemleri parça-bütün ilişkilerine dair sezgisel bilgilerine bağlayarak nicelikler hakkında çıkarımlarda bulunma yeteneği ile ilişkilendirilir. İlkokul düzeyindeki öğrencilerin gelişimi gözetildiğinde niceliklerin toplamsal olarak birleştirilmesi ve karşılaştırılması eylemlerinin sıklıkla kullanıldığı; buna karşın çarpımsal düşünmenin oldukça kısıtlı kullanıldığı görülmektedir (Nunes & Bryant, 2015). Beren'in bu etkinliğe yanıtı Şekil 4.1.5'te gösterilmiştir.



Şekil 4.1.5. Beren'in Pasta Paylaşım Etkinliğine Yanıtı

Beren

Beren'in, etkinlikte yer alan görseldeki pastaları birimlere ayırarak paylaştırma yaptığı görülmektedir (Şekil 4.1.5.). Bu çözüm yolu ise kapsamlı nicelleştirmeyi işaret etmektedir. Beren bu etkinlikten sonra, daha önceki öğretim bölümlerinde işlediğimiz kurabiye paylaştırma etkinliğinden farklı olarak bütün kavramı hakkında artık doğru bir kavramsal anlayış geliştirebilmiştir. Bu durum, sınıf içi tartışmaların ve grup çalışmasının olumlu etkisini göstermektedir. Ancak bu etkinlik grupça uygulandığından yalnızca Beren'in fikrini belirleyebilmek için araştırmacı Beren'e sormuştur:

Araştırmacı: *Burada belirttiğin $\frac{1}{4}$ kesri neyi gösteriyor?*

Beren: *Bir tane çocuk ne kadar yemiş, onu gösteriyor.*

Araştırmacı: *Peki sana başka bir soru sormak istiyorum. Ahmet bir pastanın $\frac{1}{4}$'ini; arkadaşı ise başka bir pastanın $\frac{1}{2}$'ini yemiştir. Ahmet'in, arkadaşından daha fazla pasta yemiş olma ihtimali var mıdır sence?*

Beren: (Beren'in kafası karışmış görünüyordu. Bir süre sessiz kaldı). *Bence Ahmet'in arkadaşı daha çok yemiştir öğretmenim.*

Araştırmacı: *Neden böyle düşündün?*

Beren: *Çünkü ½ daha büyük bir kesir öğretmenim.*

Pasta paylaştırma etkinliğindeki yanıtına bakarak Beren'in bu soruyu doğru yanıtlayabileceği varsayılmıştı. Ancak bu yanıta bakılırsa Beren'in bütün kavramıyla ilgili henüz içselleştirilmemiş bir zihinsel imgesi olduğu söylenebilir. Şöyle ki Beren pasta paylaştırma etkinliğinde bütün sayısı ile paylaştırılacak kişi sayısı arasında doğru ilişkilendirme yapabilmişti. Ancak bu problem durumundaki gibi, kesrin bütüne bağlı bir çokluk olduğunu düşünmemişti (Schifter, 1998). Bu problemi Hart ve arkadaşları (1985) araştırmalarında öğrencilere sormuştur. Sonuçta ise ilkokul öğrencilerinin %42'si bir pastanın $\frac{1}{2}$'inin $\frac{1}{4}$'den her zaman daha fazla olacağını belirtmiştir. Bu durum, ortaokul öğrencilerinde %34 olarak hesaplanmıştır. Benzer bir problemi Bednarz & Proulx (2014) araştırmalarında kullanmış ve bazı öğretmenlerin de Beren'in yanıtına benzer yanıtlar verdiklerini belirtmişlerdir. Bu durum, problemdeki niceliklerin mutlak olarak ele alındığının da altını çizmektedir. Bu örnekte kesirlerin sayı olarak ele alındığını söylemek doğru olabilir ancak bununla birlikte, öğretmenlerin kesirleri sayı olarak açıklamadıklarını, ancak esas olarak onları apaçık bir mutlak olarak kabul ettiklerini göstermektedir. Dolayısıyla, bütünün anlaşılmasına yarayan etkili bir problem olmasına karşın ilkokul öğrencilerin değişen bütünlere göre kesir büyüklüklerini yorumlamaları pek de kolay gözükmemektedir ve bu durum bilişsel olgunluk veya yaş ile bağlantılı olabilir. Buna uygun olarak Nunes vd. (2013) yürüttükleri araştırmada ilkokul öğrencilerinin orantısal ve çarpımsal muhakemelerinin yaşla birlikte arttığını tespit etmişlerdir. İlkokulda öğrenciler, bir pizza altı kişi arasında paylaştırıldığında ve aynı pizza sekiz kişi arasında paylaştırıldığında, ilk gruptaki kişilerin daha büyük parçalara sahip olacağını anlayabilirler ancak yine de $\frac{1}{8}$'in $\frac{1}{6}$'dan daha büyük bir sayı olduğunu söyleyebilirler (Nunes & Bryant, 2023). Bu durumda bu öğrencilerin paylaşımdaki çoklukların kesir ile ifade edilmesi arasındaki bağlantı ile ilişkilendirmede hatalı oldukları söylenebilir.

Uygulama 2

Araştırmanın ikinci uygulamasında aynı etkinlik uygulanmıştır. İlk uygulamadan farklı olarak bu uygulamada bazı öğrenciler problemdeki her çocuğun eşit miktarda yediğini de belirtmişlerdir. Bu oldukça farklı bir sonuçtur ve öğrencilerin düşünme yoluna dair net bir çıkarımı da güçleştirmektedir. Öğrenciler pasta miktarı ile kişi sayısı arasındaki çarpımsal ilişkiyi düşünmeden farklı kesirlerle miktarları temsil ederek her iki gruptaki çocukların eşit miktarlarda pasta yediğini nasıl düşünebilir? Bu durumda öğrenciler, zihinlerinden çarpımsal muhakeme edebilmiş olmalılar ki her iki gruptaki çocukların eşit miktarda pasta yediğini belirttiler. Ancak kesirsel olarak yedikleri miktarın aynı olması gerekmediğini, aynı miktarı farklı kesirlerle gösterebileceklerini düşünmüş olmalılar (Hoon, Narayanan & Singh, 2021).

Problem çözüldükten sonra öğrencilere "Eğer…..olsaydı, ne olurdu? (what if)" soruları sorulmuştur. Örneğin "Birinci grupta 4 kişi değil de 2 kişi olsaydı son durum ne olurdu? İki arkadaşları daha gelirse ve iki pastayı adil bir şekilde paylaşmaya karar verirlerse, çocuklar arkadaşları gelmeden önceki kadar pasta alırlar mıydı?" soruları yöneltilerek öğrencilerin değişen nicelikleri fark edip ilişkilendirmeleri desteklenmiştir. Ders içi gözlemlere dayanarak, öğrencilerin bu sorulara verdiği yanıtların da çoğunlukla doğru olduğu görülmüştür. Özellikle artma, azalma gibi nicelikler arası ilişkilendirmede oldukça başarılı oldukları ancak nicelikleri kesir olarak ifade ederken daha büyük-daha küçük bir kesir yazma konusunda zorlandıkları gözlemlenmiştir. Azra ile araştırmacı arasında geçen bir diyalog şöyledir:

Araştırmacı: *Bu problemi nasıl çözdün?*

Azra: *Herkesin yemesi için ilk grupta bir pastayı dört parçaya böldüm çünkü 4 kişi var. İkinci grupta eğer pastaları ikiye bölseydim sadece 4 kişi yerdi ama burda sekiz kişi var o yüzden pastaları tekrar böldüm ve bir kişinin* $\frac{1}{8}$ *kadar yiyeceğini buldum.*

Araştırmacı: *Bana bütünü gösterir misin?*

Azra ilk görselde bir pastayı, ikinci görselde de iki pastayı gösterdi.

Araştırmacı: *Şekil üzerinde gösterir misin?*

Azra ilk pastayı dört eş parçaya böldü ve bir tanesini boyadı. İkinci gruba ait pastalardan ilk pastayı sekiz eş parçaya böldü ve bir parçasını boyadı.

Araştırmacı: *Hala yiyecek bir pasta daha bulunuyor. Ne yapmayı düşünüyorsun?*

Azra daha önce yaptığı gibi ikinci pastayı da sekiz eş parçaya böldü ve paylaştırdı.

Araştırmacı: *Şimdi düşünelim bakalım, bir kişi ne kadar pasta yemiş oldu?*

Azra: *İki tane $\frac{1}{8}$ yedi öğretmenim.*

Araştırmacı: *İki tane $\frac{1}{8}$ ne demek?*

Bir süre bekledim ve tekrar aynı soruyu sordum ancak Azra yanıt veremedi.

Araştırmacı: *Kaç bütün var burada?*

Azra: *İki tane öğretmenim.*

Azra'nın bu yanıtından sonra iki birim kesri toplama işlemi ($\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$) yaptırmak bir seçenek olabilirdi ancak henüz kesirlerde toplama işlemi yapmayı öğrenmemişti ve böyle bir çözümün onu niceliklerin büyüklükleri üzerinden düşünmekten ziyade aritmetiksel işleme yöneltebilirdi. Bu sebeple görev temelli başka bir problem sorarak bütün üzerinde biraz daha düşünmesi desteklenmiştir. Tobias (2013) kesirlerde bütünü anlayabilmek için dilin etkili bir araç olduğunu ve öğrencilerde bütün kavramının gelişimi için paydaya ve dolayısıyla bütüne yapılan sözel vurgunun oldukça önemli olduğunu belirtmiştir. Bu sebeple Azra'ya başka bir problem soruldu:

Araştırmacı: *İki boyacı farklı büyüklüklerde iki bahçe duvarını boyamıştır. İkisi de boyaması gereken farklı büyüklükteki alanın $\frac{1}{4}$'ini boyamıştır. Hangisi daha çok alanı boyamış olabilir?*

Azra: *İkisi de eşit boyamıştır öğretmenim.*

Araştırmacı: *Boyanması gereken duvarların büyüklüklerinin farklı olması ne anlama geliyor?*

Azra yanıt vermedi. Araştırmacı benzer, başka bir problem sordu:

Araştırmacı: *Tamam öyleyse şöyle düşünelim. İkimizin de önünde bir tepsi börek var. Ancak senin tepsin benim önümdeki tepsiden daha büyük. İkimiz de böreklerimizin çeyreğini yersek hangimiz daha çok yemiş oluruz*?

Azra: *Siz daha çok yersiniz.*

Azra her ne kadar yanlış yanıt verse de bu yanıtıyla ikimizin eşit yemeyeceğine, farklı bütünlerden alınan çeyrek miktarın farklı büyüklükler oluşturacağına karar vermişti. Bu düşünme yolu iyi bir başlangıç olarak yorumlanabilir.

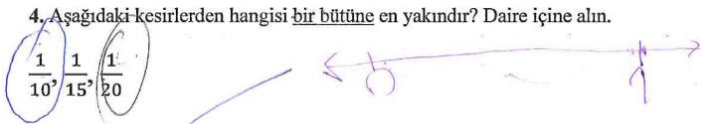
4.1.6. Öğretim Bölümü 5: Bütüne En Yakın Kesri Bulma Etkinliği

Uygulama 1

Bu öğretim bölümünde amaçlanan varsayımsal öğrenme yüzeysel ya da kapsamlı nicelleştirme yaparak verilen birim kesirlerin büyüklükleri üzerinde düşünmek ve kesirlerin

bütüne yakınlığı konusunda muhakeme etmektir. Bu doğrultuda öğrencilere $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ ve $\frac{1}{20}$ kesirlerinden hangisinin bir bütüne en yakın olduğunu bulmaları istenmiştir. Sonuçta öğrencilerin büyük bir çoğunluğu doğal sayı bilgisine dayanan bir düşünme yolu ile soruyu yanıtlamışlardır. Yani öğrenciler, paydada belirtilen doğal sayıların büyüklüğüne bakarak soruyu yanıtlamışlardır. Böyle bir durumda ise öğrencilerin kapsamlı ya da yüzeysel nicelleştirme yapabildiklerini söylemek oldukça zordur. Bu durum öğrencilerin kesir büyüklükleri üzerinde düşünmeden önceki bilgilerine dayanan doğal sayı bilgisi ile soruyu çözdüklerini göstermektedir. Bu bulgu, benzer araştırmalarda da öne çıkmıştır. Önal ve Yorulmaz (2017) öğrencilerin kesirleri sıralarken en sık yaptığı hatalardan birinin kesirleri doğal sayı gibi kabul ederek sıralama olduğunu belirtmişlerdir. Benzer olarak Hansen, vd. (2017) kesir karşılaştırmalarında öğrencilerin çoğunlukla önceki bilgilerine dayalı olarak yeni durumu dikkate almayan stratejiler kullandıklarını; Siegler ve Pyke (2013) ile Schneider ve Siegler (2010) ise öğrencilerin doğal sayı temelli düşünme biçimini sıklıkla kullandıklarını belirtmiştir. Gould (2005) ise aynı stratejileri toplamsal düşünme ile ilişkilendirmiştir. Ni ve Zhou (2005) ve Nunes ve Bryant (2009) "doğal sayı önyargısı (natural number bias)" kavramını vurgulayarak öğrencilerin kesirlerdeki hatalı düşünme yollarını doğal sayılar ve kesirler arasındaki farklılıklara dayandırmışlardır. Benzer olarak Saenz-Ludlow (1994) ilkokul öğrencileri ile yürüttüğü araştırmada öğrencilerin kesirlerle ilgili akıl yürütmelerinin doğal sayılarla ilgili nicel akıl yürütmelerine dayandığını kanıtlamıştır. Bu şemaya sahip öğrenciler pay ve paydanın birbirinden bağımsız iki sayı olduğunu düşünür ve her ikisi arasındaki ilişkiyi anlamazlar (González-Forte vd., 2022).

Öğrencilerin doğal sayı bilgilerine dayanarak soruyu yanıtlamaları aşırı genelleme (overgeneralisation) kavramı ile de açıklanabilir olup bu durum ilkokul öğrencilerinde sıklıkla görülmektedir. Aşırı genellemede öğrencilerin daha önce geliştirdiği düşünme yollarını daha sonra benzer olmayan durumlara hatalı biçimde transfer ettiğini ifade eder (Ni & Zhou, 2005; Nunes & Bryant, 2009; Siegler & Pyke, 2013; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Bu problemin çözümünde de birçok öğrenci daha önce geliştirdiği ve kullandığı doğal sayı bilgisini birim kesirlerde de kullanmış ve soruyu yanlış yanıtlamıştır. Bu durum öğrencilerin kesir büyüklüklerine dair doğru bir zihinsel imge oluşturamamalarından kaynaklanabilir. Beren'in bu soruya yanıtı aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 4.1.6. Beren'in Bütüne En Yakın Kesri Bulma Etkinliğine Yanıtı

Beren

Şekil 4.1.6'da gösterilen çözümde kurşun kalem ile işaretlenen yanıt Beren'in ilk yanıtıdır. Mavi ile işaretli olan yanıt ise Beren'in sonradan görüşme esnasında verdiği yanıttır. Buna göre, Beren'in ilk başta sınıftaki diğer arkadaşları gibi doğal sayı bilgisine dayanarak soruyu yanıtladığı görülmektedir. Beren'in ilk çözümüne bakıldığında, birim kesirlerin büyüklüklerini dikkate almayan bir düşünme yolunun kullanıldığı görülmektedir.

Araştırmacı: *Neden $\frac{1}{20}$'in bir bütüne daha yakın olduğunu düşündün?*

Beren: *Çünkü 20 daha büyük bir sayı.*

Araştırmacı: *Ancak burada 20 değil, $\frac{1}{20}$ yazıyor. 20 ve $\frac{1}{20}$ aynı mı sayılar mı?*

Beren: *Hayır değil. Ama 20 büyük olduğu için öyle düşündüm.*

Araştırmacı: *Daha önce kesir çubukları ve sayı doğrusunda gösterme etkinlikleri yapmıştık. $\frac{1}{20}$'i bu sayı doğrusunda nasıl gösterirsin?*

Beren bir sayı doğrusu çizip sıfır ve 1'i uçlara yerleştirdi.

Beren: (0-1 arasını gösterir) *Burayı 20 tane bölerim ilk parçasını alırım.*

Araştırmacı: *Burada bütün nerede? Gösterir misin?*

Beren: *Bütün 1'dir öğretmenim.*

Araştırmacı: *Peki diğer kesirleri sayı doğrusunda nasıl gösterirsin?*

Beren: *$\frac{1}{10}$ için sayı doğrusunu 10 parçaya bölerim ilk parçayı gösteririm.*

Araştırmacı: *Şimdi bütünü gösterir misin?*

Beren: *Bütün yine 1 öğretmenim.*

Araştırmacı: *Bu kesirleri sayı doğrusunda gösterdiğin yerler nasıl değişti? Hangisini 0'a daha yakın bir noktada göstermiş oldun?*

Beren: *$\frac{1}{20}$ öğretmenim. Çünkü sayı doğrusunu daha fazla bölmüştüm.*

Araştırmacı: *O halde ilk verdiğin yanıta tekrar bakalım. Hala aynı mı düşünüyorsun?*

Beren: *Hayır. Cevap $\frac{1}{10}$ olacak.*

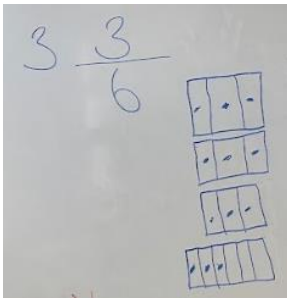
Beren'in ilk başta doğal sayı temelli düşündüğünü fark ettikten sonra bu kesirlerin farklı büyüklükleri olduğunu görmesi hedeflenmişti. Bu sebeple kesir büyüklüklerini anlamak için etkili bir yöntem olarak sayı doğrusu kullanılmıştır. Böylece yüzeysel nicelleştirme yapmak ve kesrin ölçme anlamına dayanarak birim kesirleri sayı doğrusu üzerinde göstermek etkili olabilirdi (Watanabe, 2006). Öğrencilerin problem bağlamındaki nicelikleri oluşturması ve

ilişkilendirmesi öğretmenin nicel muhakemeyi geliştirmek amacıyla yaptığı iyi yapılandırılmış yönlendirmeler ile mümkün olabilir (Akın, 2016; Ellis, 2011). Dolayısıyla yönlendirici müdahaleler sayesinde Beren, birim kesirlerin büyüklüğünü fark edebildi. Böylece 1 ya da 0'a uzaklıklardan yola çıkarak yüzeysel nicelleştirme; sayı doğrusunu paydadaki sayı kadar birimlere ayırarak da kapsamlı nicelleştirme yapabilmişti. Bu sebeple kesirler konusundaki diğer kavramları öğretirken birim ve bütüne vurgu yapan yüzeysel ve kapsamlı nicelleştirmeyi geliştirmeyi hedefleyen görevler üzerinde çalışmaya devam edildi.

4.1.7.Öğretim Bölümü 6: Bir Bütünden Büyük Kesirleri Modelleme Etkinliği

Uygulama 1

Bu öğretim bölümünde amaçlanan varsayılan öğrenmeler; eş parçalama ve yineleme yaparak bir bütünden büyük bileşik ve tam sayılı kesirleri alan modeli ile temsil etmektir. Bir bütünden büyük kesirler konusuna geçildiğinde sınıftaki öğrencilerin oldukça farklı düşünme yolları kullandıkları belirlenmiştir. Burada dikkat çekici olan, bir bütünden büyük kesirlere geçtikten sonra öğrencilerin zihinlerinde öncekilerden oldukça farklı bir "bütün*"* imgesi geliştirmeleridir. Öğrenciler bütünün değişebildiğini, kesir büyüklüğünün bütüne göre farklılaştığını, farklı bütünler referans alındığında da aynı kesir ile ifade edilebileceğini anlayabilmiştir. Ancak bir bütünden büyük kesirlere geçildiğinde sınıfta birçok öğrencinin bütünü belirleme ve eş parçalara bölerek modelleme konularında eksik ya da fazla sayıda bütün çizme gibi hatalar yaptığı görülmüştür. Öğrencileri hata yapmaya iten bu düşünme yolları, kesir büyüklüğünü anlayamama, kesri oluşturan pay, payda ve bütün bileşenlerini yorumlayamama, kesrin matematiksel sembolü ve görsel temsilleri arasında ilişki kuramama gibi durumlardan kaynaklanıyor olabilir. Örnek olarak Beren'in bir bütünden büyük kesirleri yorumlarken kullandığı düşünme yolu Şekil 4.1.7'de gösterilmiştir.



Şekil 4.1.7. Beren'in Tam Sayılı Kesir Modellemesi

Beren

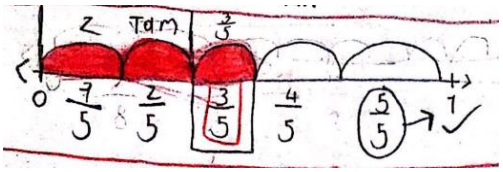
Beren, 3 $\frac{3}{6}$ kesrini modellerken bütün sayısını belirten 3'ü, $\frac{3}{6}$ kesrinin üç kez tekrarlanması olarak yorumlamış ve modellemiştir. Her ne kadar önceki öğretim bölümünde bütün kavramına dair doğru bir anlayış görüldüyse de bir bütünden büyük kesirlere geçildiğinde Beren'in de sınıftaki diğer arkadaşları gibi, "bütün"e dair zihinsel imgesi farklılaşmıştır. Beren'in bu yanıtı bütün ve birim arasındaki ilişkiyi doğru biçimde nicelleştiremediğini ve tam sayılı kesirleri modelleme konusundaki bilgi eksikliğini gösterebilir. Şöyle ki Beren, 3 bütün oluşturması gerektiğini düşünebilmiş ancak bu bütünleri $\frac{1}{3}$ birim kesrini yineleyerek oluştururken $\frac{3}{6}$ kesrini daha büyük bir bütünü altı eş parçaya ayırarak doğru bir zihinsel imgeyle $\frac{1}{6}$ birim kesrini yineleyerek oluşturmuştur. Dolayısıyla bütünler ve birimler birbirinden farklıdır. Öğrencilerin bu hatalı düşünme yollarını değiştirebilmek için sınıf içerisinde iki ders saati boyunca bileşik ve tam sayılı kesir modelleme etkinlikleri uygulanmış ve çözümler üzerinde tartışarak öğrencilerin düşünme yollarını değiştirmek ve geliştirmek hedeflenmiştir (Robinson, 2017; Thompson, 1993).

4.1.8. Öğretim Bölümü 7: Bir Bütünden Büyük Kesirleri Sayı Doğrusunda Gösterme Etkinliği

Uygulama 1

Öğrencilerin bir bütünden büyük kesirleri alan modeli üzerinde gösterdikten sonra kesirlerde ölçme anlamını geliştirmek amacıyla sayı doğrusu üzerindeki gösterimleri incelenmiştir. Bu öğretim bölümünde amaçlanan varsayımsal öğrenme bir bütünden büyük kesirleri sayı doğrusu üzerinde göstermektir. Elde edilen bulgulara göre, bir bütünden büyük kesirlerin sayı doğrusunda gösterilmesi etkinliğinde öğrenciler bütünü yorumlamakta zorlandığı için kesirleri temsil ederken oldukça farklı düşünme yolları kullanmışlardır. Öğrenci yanıtları genel olarak değerlendirildiğinde birçok öğrencinin bütünü referans almada zorlandığından sayı doğrusunda gösterimde hata yaptığı gözlemlenmiştir. Saxe vd (2007) öğrencilerin sayı doğrusu etkinliklerinde her zaman 1'in bütün olması gerektiğini, dolayısıyla sayı doğrusunda kesir gösterimlerinin 0 ile 1 arasına yazılması gerektiğini düşündüklerini belirtmiştir. Bu durum, kesir öğretiminde basit kesirlere yapılan vurgu ile başlanması ile de ilişkilendirilmektedir (Stafylidou & Vosniadou, 2004; Vosniadou, Vamvakoussi & Skopeliti, 2008). Öğrenciler kesirler konusunda ilk olarak basit kesirleri ve bu kesirleri farklı modellerle temsil etmeyi öğrenirler. Dolayısıyla tıpkı doğal sayıların önce

öğrenilmesinin kesirlerde doğal sayı bilgisi kullanmayı neredeyse zorunlu kılması gibi basit kesirlerin öğrenilmesi de öğrencilerin diğer kesirleri basit kesir gibi temsil etmesine yol açmaktadır. Örnek olarak Beren'in yanıtı Şekil 4.1.8.1'de gösterilmiştir.



Şekil 4.1.8.1. Beren'in Tam Sayılı Kesri Sayı Doğrusundaki Gösterimi

Beren

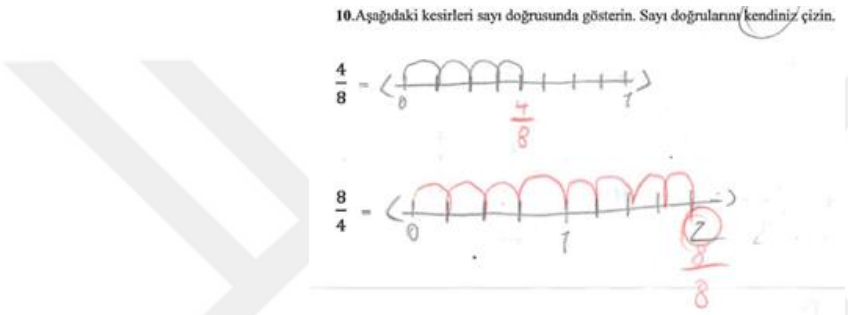
Beren $2\frac{3}{5}$ kesrini sayı doğrusunda 0-1 arasında bir noktaya yerleştirmiştir. Bu yanıt, Beren'in bu kesrin büyüklüğü ve bütün konusundaki düşünme yolu ile ilişkilendirilmektedir. Beren, önceki bilgilerine dayanarak değeri bir bütünden büyük kesirlerin 0-1 arasında olması gerektiğini düşünmüş ve 2 bütünü sayı doğrusundakı ilk iki birim olarak kabul etmiştir. Beren, $\frac{5}{5}$ 'in de bir bütün olduğunu düşünmüş ancak belirtilen kesrin 2 bütün de içerdiğini dolayısıyla sayı doğrusunda da 1'den büyük bir noktada olması gerektiğini anlamamış olabilir. Sonuç olarak önceki öğretim bölümlerinde alan modeli oluştururken fazla bir müdahaleye gerek kalmadan tam sayılı kesrin kaç bütünden oluştuğunu bilirken, sayı doğrusu üzerinde modelleme etkinliklerinde hata yapmıştır. Dolayısıyla bileşik ve tam sayılı kesirlere geçtikten sonra bütüne dair düşünme yolu değişmiş, kesrin sembolik gösterimi ile sayı doğrusu gösterimi arasındaki ilişkilendirmeyi yapamamıştı. Alan modelinde yaşanan durum sayı doğrusu gösteriminde de yaşanmış; Beren bir bütünden büyük kesirlere geçtiğinde de basit kesir bilgisini kullanmaya devam etmiştir. Beren bu düşünme yoluna karşın, sınıftaki birçok öğrenciden farklı olarak sayı doğrusunda çizgileri değil aralıkları saymış ve sayı doğrusunda birim birim ilerleyip yineleme yaparak gösterebilmiştir. Yineleme anlamı daha üst düzey bir beceridir ve birim kesri kavramsallaştırmaya dayanır (Steffe & Olive, 2010). Dolayısıyla Beren birimi belirleme konusunda doğru bir zihinsel imgeye sahip olması sebebiyle kapsamlı nicelleştirme yapabildiği söylenebilir.

Beren, sayı doğrusunda $\frac{5}{5}$ ile 1 bütünü farklı noktalarda göstermiş ancak bir ok ekleyerek aynı çokluklar olduğunu belli etmiştir. Bu durum Beren'in sayı doğrusu kullanımına dair eksik bilgisinden kaynaklanabilir. Bu görevlerin akabinde sayı doğrusu modeli kullanmayı

gerektiren "ters kesirler (reversed fractions)" olarak $\frac{4}{8}$ ve $\frac{8}{4}$ kesirlerinin sayı doğrusunda gösterilmesi etkinliği uygulanmıştır.

4.1.9. Öğretim Bölümü 8: Ters Kesirler Etkinliği

Bu etkinlik ile Beren'in sayı doğrusu kullanımı ve kesir büyüklüğü konusundaki düşünme yolunu geliştirmek hedeflenmişti. Ters kesirler etkinliği, birden fazla sayı doğrusu kullanımı gerektirerek sorulmuştur. Böylece çocukların basit kesirden bileşik kesirlere geçişini kolaylaştırabileceği varsayılmıştır (Tian & Siegler, 2017). Beren'in yanıtı aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 4.1.9. Beren'in Ters Kesirleri Sayı Doğrularında Gösterimi

Beren bu yanıtıyla, $\frac{4}{8}$ ve $\frac{8}{4}$ kesirlerinin büyüklükleri hakkında doğru muhakeme edebilmiş ve sayı doğrusunda temsil ederken birimlere ayırarak kapsamlı (extensive) nicelleştirme yapabilmiştir. Öyle ki bir kesir büyüklüğüne dayanan bu zihinsel yapılandırma süreci, Beren'i nicelikler üzerinde düşünmeye sevk etmiştir (Thompson, 2011). Beren, bir önceki öğretimde $2\frac{3}{5}$'i modellerken $\frac{5}{5}$ kesri ile 1'i farklı noktalarda belirtmesinden tamamen farklı olarak $\frac{8}{4}$'ün iki bütünden oluştuğunu ve sayı doğrusunda 2 noktasına karşılık geldiğini fark etmiştir. Beren'in bu yanıtı aynı zamanda çarpımsal düşünme yapabildiğini; farklı gösterimdeki kesirlerin aynı büyüklüğü temsil ettiğini anlayabildiğini göstermektedir. Sonuç olarak ters kesirler etkinliği Beren'in farklı kesir büyüklüklerine dair doğru bir zihinsel imge gelişmesine ve bunu temsillerle ifade edebilmesine katkı sağlamıştır. Beren'in düşünme yollarının süreç içerisindeki değişimi ve bu süreçteki müdahaleler Tablo 4.1.8' de özetlenmiştir.

Tablo 4.1.8. Beren'in "Bütün" Kavramına Dair Gelişen Düşünme Yolları ve Müdahaleler

Öğretim Bölümleri	**Ö.B. 1**	**Ö.B. 2**	**Ö.B. 3**	**Ö.B. 4**	**Ö.B. 5**	**Ö.B. 6** **Ö.B. 7**	**Ö.B. 8**
Müdahale	Parça-bütün vurgusu ve alan modeli	Birim kesir ile bütün ilişkisi ve alan modeli	Uzunluk modeli ve sayı doğrusu ile birim kesir-bütün ilişkisi	Bütün ve kişi sayısı vurgusu	Kesir büyüklüğü vurgusu ve bütüne yakınlığı yorumlama	Alan ve sayı doğrusu modelleri ile kesir büyüklüğü, birim kesir ve bütün ilişkisini vurgulama	Basit ve bileşik kesirleri sayı doğrusunda gösterme
Düşünme Yolu	Kapsamlı nicelleştirme	Toplamsal düşünme	Yüzeysel nicelleştirme	Çarpımsal düşünme ve kapsamlı nicelleştirme	Aritmetik işlem ve yüzeysel nicelleştirme	Aritmetik işlem ve toplamsal düşünme	Kapsamlı nicelleştirme

Beren'in kesirlerde bütün kavramına dair uygulamalar başlamadan önce sahip olduğu düşünme yolu kesrin göreceli olduğunu ve dolayısıyla bütünü kısmen yorumlayabildiğini ve bütünün büyüklüğü konusunda kısmen esnek düşündüğünü göstermektedir. Öğretim bölümlerinin uygulanması ile birlikte Beren farklı düşünme yolları geliştirmiş ve bütüne dair farklı şemalar kullanmaya başlamıştır. Öğretim bölümü 1'de uygulanan kurabiye etkinliğinde bütünün ne olduğuna dair net bir zihinsel imge geliştirememiş ancak kapsamlı nicelleştirme yapabilmiştir. Her bir kişiye $\frac{1}{2}$ yerine $\frac{6}{12}$ kurabiye düştüğünü belirtmesi bunun sonucudur. Öğretim bölümü 2'de uygulanan, değişen bütünler etkinliğinde Beren birim kesrin bütüne göre değiştiğini düşünmemiş ve birimi, ilk oluşturduğu bütüne göre yorumlamıştır. Dolayısıyla burada kapsamlı nicelleştirme ve çarpımsal düşünmenin varlığından bahsedemeyiz. Öğretim bölümü 3'te Beren önceki etkinliklerden farklı ve daha doğru düşünme yolları kullanmıştır. Diğer bir ifade ile kesir çubukları ile çalışırken birimleştirmeye dayanan bir düşünme yoluyla bütüne dair doğru bir zihinsel imge geliştirmiş ve kapsamlı nicelleştirme yapabilmiştir. Öğretim bölümü 4'te farklı sayıda bütün ve kişilerden oluşan gruplara göre eş paylaşım yaptırma etkinliği uygulanmış ve Beren de buna uygun olarak çarpımsal düşünme yolu kullanmıştı. Bir sonraki öğretim bölümünde ise birim kesirleri ilişkilendirerek bütüne en yakın kesri bulma etkinliği uygulanmış ve Beren iki farklı düşünme yolu kullanmıştır. Öncelikle soru ile ilk karşılaştığında paydadaki doğal sayılara bakarak soruyu yanıtlamış; sonrasında görüşme sırasında ise bu hatalı düşünme yolunu bırakıp yüzeysel nicelleştirme yapabilmiştir. Öğretim bölümü 6 ve 7 ile birlikte değeri bir bütünden büyük olan kesir konusuna geçilmiş ve Beren, bir bütünden büyük kesirlere

geçtikten sonra daha önce geliştirdiği doğru düşünme yollarını değiştirmiştir. Bu durumun üstesinden gelebilmek için ise alan ve sayı doğrusu modelleri kullanılarak kesir büyüklüklerini ve bütünü yorumlayabilmesi için destek verilmiştir. Son olarak ise bütün içeren ve içermeyen kesir büyüklerini sayı doğrusu modeli ile gösterme etkinliği uygulanmış ve Beren birimlere ayırarak kapsamlı nicelleştirme yapmıştır.

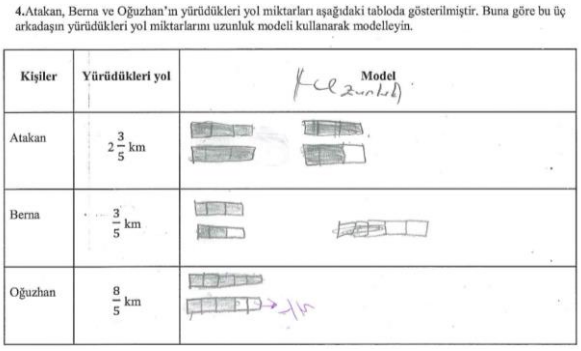
Uygulama 2

Araştırmanın ikinci uygulamasında sayı doğrusu ile modelleme etkinlikleri birinci uygulamadan farklı olarak yürütülmüştür. Öğrencilere, üç kişinin yürüdüğü yol miktarlarını karşılaştırmayı gerektiren bağlamsal bir problem sorulmuştur. Problem: "*Atakan, Berna ve Oğuzhan'ın yürüdükleri yol miktarları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. Buna göre bu üç arkadaşın yürüdükleri yol miktarlarını uzunluk modeli kullanarak modelleyin.*" Bu öğretim bölümü ayrıca yönlendirici sorular desteğiyle yürütülmüştür. Örneğin öğrencilere "*Sayı doğrusunda* $\frac{2}{6}$ *noktasına geldiysem sona kadar yürümem için kaç birim daha ilerlemeliyim, belirttiğim noktalarda iki kesir arasında kaç birim vardır, iki birim arasındaki mesafeler eşit mi?*" gibi sorular sorulmuştur. Böylece öğrenciler hem bağlamsal bir temelde soruyu yanıtlamışlardır hem de sayı doğrusunda çizgileri saymak yerine aralıkları saymayı vurgulayan ölçme anlayışını derinleştirme şansı elde etmişlerdir. Bu süreçte yapılan gözlemlere göre ise öğrencilerin ilk uygulamaya kıyasla daha doğru yanıtlar verdiği, sınıfta daha fazla öğrencinin sayı doğrusundaki aralıkları sayarak sonucu bulduğu bulgularına ulaşılmıştır. Bu durum, Öğretim Bölümü 1'de uygulanan kurdele etkinliğinin pozitif etkisi olarak yorumlanmıştır. Buna ek olarak bu uygulama sonucunda sayı doğrusu üzerinde sağa doğru ilerledikçe kesrin değerinin arttığı gibi genellemelere ulaşılmıştır. Sonuçta daha fazla öğrencinin doğru eş parçalama, kapsamlı ve yüzeysel nicelleştirme yapıldığı görülmüştür. Örnek olarak Azra (Şekil 4.1.8.4.) ve Buğra'nın (Şekil 4.1.8.3.) yanıtları aşağıda gösterilmiştir.

4.Atakan, Berna ve Oğuzhan'ın yürüdükleri yol miktarları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. Buna göre bu üç arkadaşın yürüdükleri yol miktarlarını uzunluk modeli kullanarak modelleyin.

Kişiler	Yürüdükleri yol	Model
Atakan	$2\frac{3}{5}$ km	
Berna	$\frac{3}{5}$ km	
Oğuzhan	$\frac{8}{5}$ km	

Şekil 4.1.8.3. Buğra'nın Yürünen Yol Etkinliğine Yanıtı


4.Atakan, Berna ve Oğuzhan'ın yürüdükleri yol miktarları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. Buna göre bu üç arkadaşın yürüdükleri yol miktarlarını uzunluk modeli kullanarak modelleyin.

Kişiler	Yürüdükleri yol	Model
Atakan	$2\frac{3}{5}$ km	
Berna	$\frac{3}{5}$ km	
Oğuzhan	$\frac{8}{5}$ km	

Şekil 4.1.8.4. Azra'nın Yürünen Yol Etkinliğine Yanıtı

Şekil 4.1.8.3'te görüldüğü üzere Azra fazladan bütün çizerek, Buğra ise kesirdeki bütün ile basit kesir kısmını farklı modelle göstererek hata yapmıştır. Buğra'nın yanıtında dikkat çekici nokta farklı bütünler kullanarak kesirleri modellemesidir.

Araştırmacı: *Neden bütünleri daire, $\frac{3}{5}$'ü uzunluk ile modelledin?*

Buğra: *Çünkü daireyi 5 eş parçaya bölemem.*

Araştırmacı: *Bütünleri göstermek için de uzunluk modeli kullanamaz mıydın?*

Buğra: *Kullanabilirdim aslında…*

Araştırmacı: *Kesirleri modellerken neden aynı bütünleri kullanmamız gerekiyor?*

Buğra: *Siz öyle söylemiştiniz, öyle yapınca doğru oluyordu.*

Buğra eş parçalara bölmesi gerektiğini farkındaydı ancak bütün ve kesrin geri kalan kısmını farklı model ile temsil etmede bir hata görmüyordu. Son yanıtına bakıldığında ise farklı bütünlerin farklı çokluğu temsil ettiğini düşünmemişti.

Araştırmacı: *Bana hem daire hem de uzunluk modelinde birim kesri gösterir misin?*

Buğra: *Yuvarlağı tam olarak beşe bölemiyorum ama.*

Araştırmacı: *Olsun, yine de bir denemeni istiyorum.*

Buğra tahmin ederek daireyi beş parçaya böldü ve hem daire hem uzunluk modellerinde birer parçayı göstererek birim kesir olduğu ifade etti.

Araştırmacı: *Modellerdeki birer parça, yani birim kesirler aynı büyüklükte mi?*

Buğra: *Yok… Bence aynı değil.*

Araştırmacı: *Ama ikisi de $\frac{1}{5}$… Ne düşünüyorsun?*

Buğra*: Bence dediğiniz gibi yapmalıyım, $\frac{3}{5}$'ü de yuvarlakla göstermeliyim.*

Buğra'nın düşünme yolundaki kavramsal değişim gerçekleştiği an bu olmuştu. Farklı model kullanımının farklı büyüklükleri temsil etmesi sonucunda Buğra bütünlerin ve birim kesir büyüklüğünün önemli olduğunu fark etmişti.

Şekil 4.1.8.4' te gösterilen Azra'nın yanıtına dair düşünme yolu birinci uygulamada ortaya çıkan düşünme yolundan farklıdır. Azra bu etkinlikte $\frac{5}{5}$'i değil $\frac{3}{3}$'ü bir bütün kabul etmiş ve modellemiştir. Aynı zamanda bir tane fazla bütün çizmiştir.

Araştırmacı: *Nasıl çözdün bu problemi bana anlatır mısın?*

Azra: *Önce iki tam çizdim* (alt alta çizdiği iki bütünü gösterdi). *Sonra $\frac{3}{5}$'i çizmek için önce yine $\frac{3}{3}$ çizdim ama iki tane eksik olduğu için bir de sondaki modeli çizdim.*

Araştırmacı: *Ben bu modellere baktığımda üç tane bütün modellendiğini görüyorum. Sen bu modellere tekrar bakar mısın? H*angi *kesri modellediğini düşünmeni istiyorum.*

Azra*: 3 tam $\frac{3}{5}$ kesri öğretmenim.*

Azra bütün konusunda yaptığı hatayı fark etmişti ancak hala $\frac{2}{3}$ yerine $\frac{3}{5}$ diyordu. Bu sebeple bir alttaki basit kesir olan ⅗ modelini göstererek aynı soru soruldu.

Araştırmacı: *Peki burada Berna'nın yürüdüğü yol miktarının modellenmesi hakkında ne düşünüyorsun?*

Azra yanıt vermedi.

Araştırmacı: *Bu kesirde pay nedir? Neyi ifade ediyor?*

Azra: *Boyanan kısımları mı?*

Araştırmacı: *Evet, bak zaten kesri okurken de beşte üç şeklinde okuyoruz, değil mi? 5 parçadan 3 tanesi gibi. Şimdi $\frac{3}{5}$ kesrini tekrar modeller misin?*

Kesir öğretimi sürecinde kesir diline yapılan vurgunun etkili olabileceği varsayılarak bu örnekte de olduğu gibi araştırmacı belli aralıklarla pay ve paydanın ne olduğuna dair öğrencilere sorular sorarak hatırlatmalar yapmıştır. Şekil 4.1.8.4' te görüldüğü üzere Azra $\frac{3}{5}$'ün alan modeli ile temsilini sağ tarafta doğru biçimde gösterebilmiştir. Bunu referans alarak $2\frac{3}{5}$ kesrini hatalı modellediğini de anlamıştı. Peki Azra henüz gerçekleşen kavramsal değişimini sayı doğrusu etkinliklerinde uygulayabilir miydi? Bunu değerlendirmek için ise ters kesirler etkinliğindeki yanıtı incelenmiştir. Bu etkinlikte ise Azra sayı doğrusunu

orantısız olarak bölerek kesirleri göstermişti. Daha açık bir ifade ile $\frac{4}{8}$'ü sayı doğrusunda gösterirken 1'e çok yakın bir noktayı belirlemiş, dolayısıyla kesirlerde yarım-bütün gibi dayanak noktalarını kullanmamış ve yüzeysel nicelleştirme yapamamıştır.

Farklı türde kesirleri alan modeli ve sayı doğrusu ile modellemeyi gerektiren etkinliğe dair Azra farklı bir yanıt vermiş; $\frac{8}{8}$ kesrini sayı doğrusunda 1'den önceki noktaya yerleştirip 1'in olduğu noktada $\frac{9}{8}$ olacağını belirtmişti. Hart vd (1985), bu yaştaki öğrenciler için kesrin alışılmış olandan farklı gösterimlerin aynı miktarı temsil edip etmeyeceğinin açık olmadığını belirtmiştir.

Araştırmacı: $\frac{9}{8}$ *kesri 1'e eşit midir?*
Azra: *Hayır değil. Ama yer yok…*

Bu yanıtına göre Azra sayı doğrusu kullanmayı bilmediği için yanlış cevap vermiş olabilir. Bu sebeple bütüne vurgu yaparak ilerlemek doğru görülmüştür:

Araştırmacı: $\frac{9}{8}$ *içinde bir bütün var mı?*

Azra kararsız görünüyordu ve cevap vermedi. Bu sebeple alan modeliyle modellemeyi ve böylece niceliğin büyüklüğü hakkında doğru bir düşünme yolu geliştirmesi hedeflenmiştir. Azra da diğer arkadaşları gibi bunu yapmakta zorlanmadı. Sonrasında sayı doğrusunda $\frac{10}{8}$ kesrini göstermesi istenmiştir. Bu noktada bu kesrin önce hangi aralıkta olduğu sorulmuş ve yüzeysel nicelleştirme yapması beklenmiştir. Bunu bildikten sonra artık sayı doğrusunda birim birim ilerleyerek tam doğru bir nokta belirlemesi istenmiştir. Ancak Azra hep ikiye bölme stratejisi ile sayı doğrusunu eş parçalara bölmeyip birim kesirle başlayıp tek tek ilerlemiştir (Piaget, Inhelder & Szeminska, 1960; Pothier & Sawada, 1983; Steffe & Olive, 2010; Tunç-Pekkan, 2015). Buna göre öğrencilerin, kurdelenin eş parçalara ayrılmasının arkasındaki fikri çok benimsemedikleri ve bu bilgiyi başka konu ve etkinliklere transfer etmedikleri söylenebilir.

İlknur

İlknur'un bütün kavramına dair düşünme yolu büyük oranda sınıftaki diğer öğrencilerle benzerdir. Ancak ön-test verilerine göre İlknur'un birim kesir ve bütün kavramına dair zihinsel imgesi birçok öğrenciye göre daha doğrudur. Örneğin ön değerlendirmede yer alan

üç modelin de $\frac{1}{4}$'ini bulmayı gerektiren soruyu hatasız olarak yanıtlamıştı. Buna göre, İlknur birim kesre dayanarak eş parçalara ayırma ve birim kesirler ile bütüne ulaşmada zihninde doğru bir zihinsel imge oluşturabilmiş ve nicelleştirme yapabilmiştir. Başlangıçtan itibaren uygulanan öğretimlerdeki yanıtlarını değerlendirirsek, kurabiye paylaşım etkinliğinde doğru bir eş paylaşım yaparak ve yarım ile çeyreği doğru kesir sembolü ile temsil etmiş, daire modelinin taralı alanlarını bütüne göre yorumlayabilmiş, pasta paylaşım etkinliğinde de kesir büyüklükleri ile bütünü ilişkilendirerek ile yüzeysel ve kapsamlı nicelleştirme yapabilmiştir.

Yavuz, ön değerlendirmede alan modellerinin $\frac{1}{4}$'ini taramayı gerektiren soruda modellerin tamamına doğru yanıt vermiştir. Buna göre nicelikleri belirleme, bütünü yorumlama ve eş parçalara ayırma konularında doğru bir düşünme yolu kullandığı söylenebilir. Ancak iki grubun yedikleri pastaları karşılaştırma görevi içeren etkinlikte Yavuz ikinci gruptaki çocukların daha çok pasta yediğini çünkü bu grupta daha çok pasta olduğunu belirtmiştir. Bu, Yavuz'un bütünü yorumlama, nicelikleri ilişkilendirme, yüzeysel nicelleştirme yapmada sorun yaşadığını gösterebilir. Buna göre Yavuz, aritmetiksel bir bakış açısı ile yalnızca sayılara odaklanmış ve toplamsal düşünme yolu kullanmıştır. Soruyu bütün ve birim kavramlarına dayanarak çözmeyip çocuk sayısı ve bütün miktarı ilişkilendirememiştir.

Bir bütünden büyük kesirler konusuna geçildiğinde diğer katılımcılarda olduğu gibi Yavuz'un da düşünme yolu değişmişir. Özellikle ters kesirler (reversed fractions) etkinliklerinde hem alan modeli hem de sayı doğrusu modelinde bütünün büyüklüğünü yorumlamada oldukça zorlanmıştır. Alan modeli kullanımında bir bütünden büyük kesirleri modellerken bütünü farklı model ile temsil etme ve dolayısıyla bütünlerin büyüklüklerini birer nicelik olarak birbirleriyle ilişkilendiremediği; sayı doğrusu modelinde ise birimler arasındaki uzunlukları dikkate almadığı ve temsilleri birbiriyle ilişkilendirdiği gözlemlenmiştir. Genel olarak, Yavuz'un bütünün büyüklüğünü anlama, yüzeysel nicelleştirme yapma ve niceliklerin farklı temsilleri arasında ilişki kurabilmede zorlandığı belirlenmiştir. Kapsamlı nicelleştirme yaparken de çoğunlukla hatalı bir biçimde, eş parçalar ve eş birimler kavramlarını göz ardı ederek ilerlemiştir. Yavuz'un bütün kavramına dair zihin modeli sınıf içi etkileşim, tartışma ve sıklıkla model kullanmasıyla nispeten gelişmiştir. Ancak bu gelişim Beren ve İlknur'da olduğu gibi net biçimde gerçekleşmemiştir.

4.2.Öğrencilerin Bir Bütünden Küçük Kesirlerin Büyüklüğüne Dair Düşünme Yolları ve Değişimi

Öğrencilerin bu temadaki düşünme yolları ve değişimi birim kesir ve basit kesir kapsamında değerlendirilmiştir. Bu tema kapsamında hedef grup öğrencilerinden Yavuz'un yanıtları detaylı olarak incelenmiştir.

4.2.1. Ön Değerlendirme

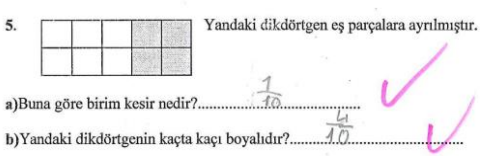
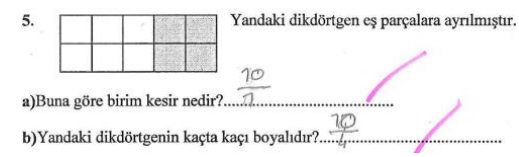
Uygulama 1 ve Uygulama 2

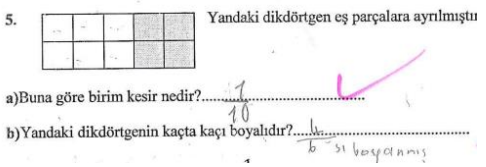
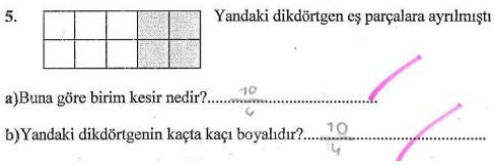
Birim kesir kavramına dair öğrencilerin zihninde oluşan imgeyi ortaya çıkarabilmek için ön değerlendirmede yer alan etkinliklerdeki yanıtlar değerlendirilmiştir. Öğrencilerin birim kesir büyüklüğüne dair düşünme yolları önce parça-bütün sonra ise ölçme anlamına dayanan iki farklı etkinlik ile ölçülmüştür. Kesirleri parça-bütün anlamı kapsamında yorumlayarak birim kesir ve basit kesri belirlemeyi gerektiren etkinlik ve sınıftaki öğrencilerin düşünme yolları Tablo 4.2.1.1.'de gösterilmiştir. Tüm sınıfın ve detaylı olarak Yavuz'un birim kesir büyüklüğüne dair zihinlerinde oluşan ilk düşünme yolunu gösteren yanıtlar aşağıda açıklanmıştır. Bu öğretim bölümündeki varsayımsal öğrenmeler şunlardır:

-Parça-bütün bağlamına dayanarak değeri bir bütünden küçük kesir büyüklüklerini yorumlamak

-Ölçme bağlamına dayanarak $\frac{1}{10}$ birim kesrini sayı doğrusu üzerine göstermek

Tablo 4.2.1.1.Öğrencilerin Parça-Bütün Bağlamı Kapsamında Basit Kesirleri Düşünme Yolları

Düşünme Yolu	Kod	Açıklama	Örnek
Kesrin büyüklüğü ve temsili arasında ilişki kurabilme	DY1	Birim kesri ve basit kesri doğru yorumlayabilme	
Kesrin büyüklüğü ve temsili arasında ilişki kurabilme ve hatalı sembolik gösterim	DY2	Pay ve paydayı ters yazma	

Birim kesir büyüklüğü ve temsili ilişkisi kurabilme ancak zayıf Ayırma(disembedding) şeması kullanımı	DY3	Birim kesri doğru belirtme ancak basit kesirde boyanmayan parçaları bütün kabul etme	
Birim kesir ve basit kesir kavramlarını karıştırma	DY4	Birim kesir ve basit kesre dair anlam karmaşası ve kesrin sembolik gösteriminde hata	

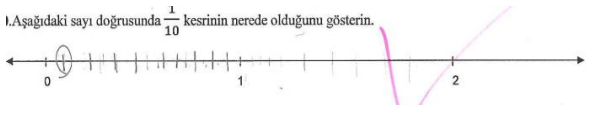
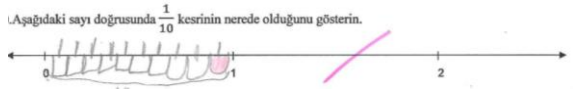
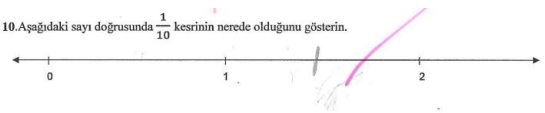
Tablo 4.2.1.1' de görüldüğü üzere öğrenciler alan modeli üzerinde birim kesir ve basit kesir büyüklüklerini anlama ve yorumlamada farklı düşünme yollarına sahiplerdir. Bu düşünme yolları arasında öğrencilerin sıklıkla kullandığı düşünme yolları DY1 ve DY2'dir. Buna göre kesri sembolik olarak ifade etmede hata yapanlar olsa da öğrencilerin birçoğu alan modelinde birim kesir ve basit kesir büyüklüklerini doğru yorulmayabilmiştir. Bu soruda, sıklıkla karşılaşılan dikdörtgen alan modelinin yorumlanması gerekirken ön değerlendirmede yer alan ve "bütün" teması altında yorumlanan soruda öğrencilerden alan modellerinde $\frac{1}{4}$ kesrini göstermeleri istenmişti. Bu iki soruya verilen yanıtlar karşılaştırıldığında bu soruya daha fazla öğrencinin doğru yanıt verdiği görülmüştür. Bu durumda öğrencilerin kesirleri göstermekten ziyade kesirleri yorumlamakta daha başarılı olduğu söylenebilir.

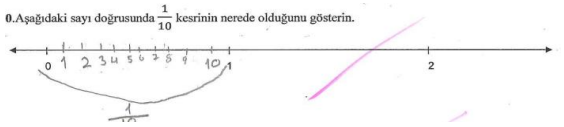
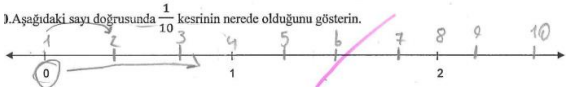
Öğrenci yanıtlarına bakıldığında bazı öğrencilerin pay ve paydayı belirten kesrin sembolik gösteriminde hata yaptıkları görülmektedir. Öğrenciler modelde belirtilen çoklukları kesir diline aktarma ve sembolik gösterimde hata yapmışlardır ve bu durum farklı araştırmalarda da öğrencilerin zorlandığı durumlar olarak raporlanmıştır (Ayyıldız & Cansız Aktaş, 2022; Kamacı, 2021; Mokhtar vd, 2019; Nunes & Bryant, 2023). DY3 kodundaki öğrenciler birim kesir konusunda doğru yorumlama yaparken sorunun ikinci kısmında modeli boyanmış ve boyanmamış olarak yorumlamıştır. Bu öğrenciler, taranmış parçaları bütünden farklı parçalar olduğunu düşünerek pay olarak yorumlarken taranmamış parçaların bütün olduğunu düşünmüşlerdir. Dolayısıyla bu öğrencilerde ayırma (disembedding) eylem şemasının henüz gelişmediği veya yeterli düzeyde olmadığı söylenebilir. Hackenberg ve arkadaşları (2016) ayırma şemasının kesirleri öğrenen öğrenciler için oldukça zor gelişen bir şema olduğunu belirtmiştir. DY4 kodundaki öğrencilerin ise birim kesir ile basit kesri ayırt

edemediği ya da bunların aynı kesirler olduğunu düşündükleri ve kesirlerin sembolik gösterimine dair doğru düşünme yoluna sahip olmadıkları söylenebilir.

Kesirleri parça-bütün olarak yorumlamak oldukça önemli ve gereklidir ancak kesri bir nicelik olarak kabul edebilmek için kesir büyüklüğü ve ölçme anlamlarını kavramak gerekir. Nicel muhakemede nicelikler üzerinde düşünebilmek için o niceliğin bir biriminin olduğunu ve bu sayede bir ölçüm yapabileceğimizi düşünürüz (Thompson, 1994). Bu sebeple doğru bir ölçüme ve bir birime ihtiyaç vardır. Kesirlerin büyüklükleri hakkında doğru değerlendirmelere ulaşabilmek için de ölçü birimi olarak birim kesirleri çok iyi anlamak gerekmektedir. Şöyle ki, birim kesrin yinelenmesine dayanan ölçme kavramının altında yatan anlayış, bütünü oluşturan parça sayısı ile parçaların büyüklükleri arasındaki ilişkiyi ifade eder. Bu durumu tanımlayan kavram ise "karşılıklı ilişki (reciprocal relationship)" olarak belirtilir (Hackenberg vd. 2016). Böylece birim kesri kullanarak öğrenci bir bütünü fazla sayıda parçaya ayırdığında daha küçük büyüklükler elde edeceğini bilir. Gould (2012) bunu "quantity fractions-nicelik kesirleri" olarak betimlemiştir. Dolayısıyla kesirlerin öğretiminde en az parça-bütün anlayışı kadar birim kesir ve buna bağlı olarak ölçüm kavramları önemli yer tutmaktadır. Bu doğrultuda Fennell ve Karp (2017), kesir büyüklüğünü kavramsal olarak anlamak için sayı doğrusunun bir temsil aracı olarak kullanılmasının önemine dikkat çekerek sayı doğrusu aracılığı ile kesir büyüklüklerine dair şema geliştiren öğrencilerin kesirlerin ölçme anlamı hakkında daha doğru bir muhakeme stratejisi geliştirebildiğini belirtmiştir. Öğrencilerin ölçme anlamına dayanan düşünme yolları Tablo 4.2.1.2'de gösterilmiştir.

Tablo 4.2.1.2. Öğrencilerin Ölçme Bağlamı Kapsamında Birim Kesirleri Düşünme Yolları

Düşünme Yolu	Kod	Açıklama	Örnek
Kapsamlı nicelleştirme	DY1	Eşit aralıklara bölme ve doğru gösterim	
Bütünü ve kesir büyüklüğünü ilişkilendirememe	DY2a	Eşit aralıklara bölme ancak 1 bütüne en yakın noktayı belirleme	
	DY2b	$\frac{1}{10}$ u 1-2 arasında belirtme	

Doğal sayı temelli düşünme	DY3a	0-1 arasını eş parçalara ayırıp doğal sayı yazma ve aralığın tamamını $\frac{1}{10}$ belirtme	
	DY3b	Sayı doğrusunun tamamını 10 parçaya ayırma, $\frac{1}{10}$ kesrini belirtememe	

Tablo 4.2.1.2'de görüldüğü üzere öğrenciler $\frac{1}{10}$ birim kesrini sayı doğrusundaki yerini belirtme etkinliğinde farklı düşünme yolları kullanmışlardır. Öğrencilerin sıklıkla kullandığı düşünme yolu, kesirleri doğal sayılar kümesine ait sayılar olarak varsayma ve sayı doğrusunda göstermedir. Sınıftaki 4 öğrenci $\frac{1}{10}$ kesrinin sayı doğrusunda 0-1 doğal sayıları arasında olduğunu bilebilmiştir ancak bu öğrencilerden ikisi 0-1 arasını uzunluklara ayırırken, 10 eş parça yerine çoğunlukla 9 ya da 11 eş olmayan parçalara bölmüşlerdir. Buna göre öğrenciler sayı doğrusunda aralıkları değil sıfırı dahil ederek ya da etmeyerek çizgileri sayarak kesrin yerini göstermişlerdir. Sınıftaki diğer öğrencilerin düşünme yollarına bakıldığında ise öğrenciler birim kesrin büyüklüğü hakkında önemli oranda hatalı zihinsel imgelere sahiplerdir. Öğrenciler birim kesir kavramını bir önceki yıl öğrendiklerinden bu kavramı unutmuş veya hatalı olarak öğrenmiş olabilirler. Ancak her iki durumda da öğrencilerin birim kesirleri sayı doğrusunda göstermede zorlandıkları söylenebilir. Nitekim araştırmalar, öğrencilerin sayı doğrusu kullanırken büyük zorluk yaşadıklarını kanıtlamıştır (Bright, Behr, Post, & Wachsmuth, 1988; Siegler & Pyke, 2013; Patahuddin, Usman & Ramful, 2017; Tunç-Pekkan, 2015; Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2018).

Öğrencilerin $\frac{1}{10}$ kesrinin büyüklüğü ve sayı doğrusunda gösterimi konusundaki düşünme yolları iki seçenek altında yorumlanabilir: i) Birim kesrin sayı doğrusunda 0-1 arasında olması gerektiğini düşünenler ile ii) Birim kesrin sayı doğrusunda 1'den sonraki bir aralıkta olması gerektiğini düşünenler. Öğrenci yanıtları ve gözlemlere göre hatalı birim kesir büyüklüğü imgesine sahip öğrenciler sayı doğrusunda 1-2 aralığını kullanmışlardır. Dolayısıyla bu öğrenciler kesir büyüklüklerini kavrayamadığından yüzeysel nicelleştirme yapabilmek için desteğe ihtiyaç duymaktadırlar. DY1 ve DY2(a) düşünme yollarını kullanan öğrenciler sayı doğrusunu birimlere ayırabilmiş ve her bir birimi bir kesir ile ifade edebilmesi sebebiyle kapsamlı nicelleştirme yapabilmiştir. Bununla birlikte, DY2 (a) kodlu düşünme yolunu kullanan öğrenciler yüzeysel nicelleştirme yapamadığı için birim kesri bir bütüne en yakın noktada göstermiştir. DY2 (b)'de ise öğrenciler ne kapsamlı ne de yüzeysel

nicelleştirme yapabilmişlerdir; çünkü hem kesrin 0-1 aralığında yer aldığını düşünmemişler hem de birimlere ayırarak detaylı bir şekilde kesrin yerini tanımlamamışlardır. Bu öğrencilerin, birim kesrin büyüklüğüne ve kesirlerin sayı doğrusunda gösterimine dair ciddi bir kavramsal bilgi eksikliğine sahip oldukları söylenebilir. Son olarak DY3'te ise öğrenciler önceki doğal sayı bilgilerine dayanarak birim kesri sayı doğrusunda göstermeye çalışmışlardır. DY3 (a) kodundaki öğrenciler, sayı doğrusunu hatalı biçimde kullansalar da birim kesrin 0-1 arasında konumlandırabilmişlerdir. Ancak sayı doğrusunu paydadaki sayı kadar yani 10 parçaya ayırmışlardır. Resnick vd. (2016) ile Rodrigues, Jordan ve Hansen (2019) tarafından yürütülen araştırmalarda öğrencilerin doğal sayı stratejisine güvenerek birim kesri paydanın büyüklüğüne göre 0-1 arasına ya da 1'den sonraki noktalara yerleştirdikleri görülmüştür. Bu durum, bu araştırmadan elde edilen bulgular ile paralellik göstermektedir.

Yavuz

Yavuz, ön değerlendirmede yer alan ve alan modeli üzerinde birim kesir ve basit kesri belirlemeyi gerektiren etkinlikte Tablo 4.2.1.1.'de DY2'de belirtilen yanıtı vermiştir. Buna göre Yavuz, parça-bütün anlamına dayanan etkinliklerde hem birim kesrin hem de basit kesrin büyüklüğüne dair doğru bir kavramsal anlayışa sahiptir. Ancak bu düşünme yolunu kesir diline aktarmakta hata yapmıştır. Bu durum, öğrencilerin sıklıkla yaptıkları hatalardan biridir (Kamacı, 2021; Kullberg & Runesson,2013; Mokhtar vd, 2019).

Sayı doğrusu üzerinde $\frac{1}{10}$ birim kesrini göstermeyi gerektiren soruda Yavuz DY2 (a)'da belirtildiği üzere birim kesrin 0-1 arasında olduğunu düşünmüş ancak bu kesri bir bütüne en yakın noktada göstermiştir. Dolayısıyla Yavuz'un bir $\frac{1}{10}$ kesrinin büyüklüğü hakkında tam olarak doğru bir düşünme yolu gelişmemiş olabilir. Bundan dolayı da bütüne yakınlık ve uzaklık konusunda düşünmeyi gerektiren yüzeysel nicelleştirme yapamamıştır. Buna karşın, sayı doğrusunu eş parçalara ayırmış ve aralıkları saymıştır. Bu durumda kapsamlı nicelleştirme yaptığı söylenebilir.

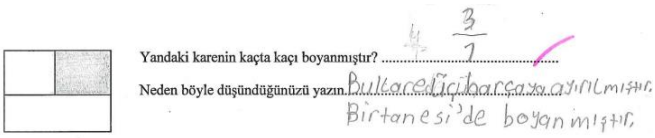
4.2.2. Öğretim Bölümü 1: Eş Olmayan Parçalar Etkinliği

Uygulama 1

Ön değerlendirmenin uygulanması ve yanıtların incelenmesinden sonra sınıftaki birçok öğrencinin birim kesir kavramına dair hatalı düşünme yollarına sahip olduğu görülmüştür.

Bu sebeple bu öğretim bölümünde sınıf içerisinde kesirlerde parça-bütün anlamına uygun olarak eş parçalara ayrılmamış bir alan modelinde taralı bir parçanın büyüklüğü sorulmuştur. Araştırmanın ilk etkinliklerinde kesirlerin parça-bütün anlamına dayalı görevlere yer verilmiştir çünkü kesirlerin öğretimine daha kolay anlaşılan parça-bütün anlamına dayanarak başlamanın iyi fikir olduğu varsayılmıştır (Hansen vd., 2015; Jordan vd., 2016). Bu etkinlikte varsayımsal öğrenme, bir bütünün eş parçalarından birinin birim kesri belirttiğini anlamaktır.

Birim kesri ve dolayısıyla eş parça kavramlarını vurgulayan soruya öğrencilerin birçoğu ⅓ yanıtını vermişlerdir. Sebep olarak da modelin üç parçaya bölünüp bir parçasının alınmasını gerekçe göstermişlerdir. Öğrencilerin bu soruya verdikleri yanıtlarından yola çıkarak birim kesir kavramına dair zihinlerindeki imgenin "eş parçalardan biri" olarak değil; "parçalardan biri" olarak kodlandığı sonucuna varılabilir. Bu durum, eş parçalara ayırma konusunda da öğrencilerin hatalı zihinsel imgelere sahip olduğunu göstermektedir. Steffe (2002) böyle bir şemayı "Bütünler içinde parçalar kesir şeması (Parts-within-wholes fraction scheme)" olarak isimlendirmiş; Hackenberg (2013), Norton ve McCloskey (2008) ile McCloskey ve Norton (2009) ise bu şemayı başka araştırmalarda da test etmişlerdir. Bu öğretim bölümünde öğrencilerde "Birim kesir, payı 1 olan kesirdir" bilgisinin baskın olduğu görülmüştür. Örnek olarak Yavuz'un yanıtı aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 4.2.2. Yavuz'un Eş Olmayan Parçalar Etkinliğine Yanıtı

Yavuz

Yavuz, sembolik temsil ile görsel temsil arasındaki ilişkiyi kurmada ve kesrin doğasını oluşturan eş parçalara ayırma ile birim kesir kavramlarına dair hatalı zihinsel imgeye sahiptir. Matematikteki kavramlara ait farklı temsil türleri kullanmak ve bu temsilleri birbiriyle ilişkilendirmek, öğrencinin bilgisini transfer edebilmesi ile ilişkilendirildiğinden oldukça önemlidir (Ainsworth, 2006; Goldin, & Shteingold, 2001; Weber vd., 2014). Soruda da belirtilen taralı alanın ne kadarlık bir alanı temsil ettiğini öncelikle zihninde canlandırmalı ve sonrasında bunu bir kesir ile ifade edebilmelidir. Ancak Yavuz taralı alana dair zihninde yanlış bir imge oluşturduğu için bunu kesir ile ifade ederken de hata yapmıştır. Dolayısıyla

kesrin sembolik gösterimine dair hatalı düşünme yolu burada da devam etmiştir. Bu sorunun üstesinden gelebilmek için sınıf içi etkinliklerde sıklıkla pay ve payda kavramlarının ne anlama geldiğine dair hatırlatmalar yapılmış ve burada olduğu gibi sembolik gösterim ile kullanılan temsil arasında ilişki kurması hedeflenmiştir. Bunun sonucunda ise temsiller aracılığı ile kesri birer nicelik olarak görmesi desteklenmiştir.

Uygulama 2

Araştırmanın ikinci uygulamasında da öğrencilerin konuyla ilgili bilgi düzeyleri birinci uygulamadaki öğrencilerden farklı değildir. Hedef grupta yer alan üç öğrenci de sorunun yanıtını $\frac{1}{3}$ olarak düşünmüştür. Araştırmanın ikinci uygulamasında farklı bir yöntem veya farklı bir etkinlik uygulanmamıştır.

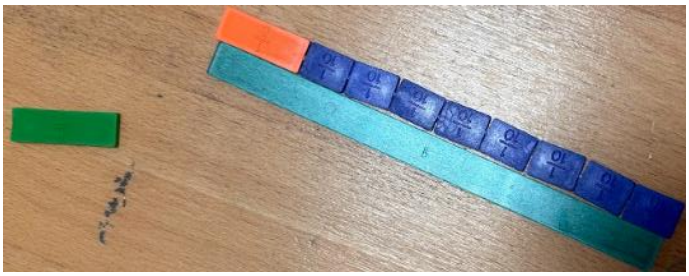
4.2.3.Öğretim Bölümü 2: Kesir Çubukları Etkinliği

Uygulama 1

Bu öğretimde kesir çubukları ile kesirlerin uzunluk anlamına dayanan görevler üzerinde çalışılmıştır. "Bütün" teması Öğretim Bölümü 3'te de açıklandığı üzere bu derste somut ve dijital kesir çubukları kullanarak bütün ve eş parça kavramları ile birim kesir ve basit kesirlerin büyüklüğü vurgulanmıştır. Bu etkinlikte aynı zamanda kesir büyüklüğünün anlaşılmasında "karşılıklı ilişki (reciprocal relationship) kavramının da anlaşılması öngörülmüştür. Bu kavram bir bütün ve bu bütünün parçaları arasındaki ters ilişki üzerinde düşünmeyi gerektirir. Diğer bir deyişle, bir bütün ne kadar büyük parçalardan oluşursa her bir parçanın büyüklüğü o kadar küçük olur (Hackenberg vd., 2016; Steffe, 2002). Bununla birlikte bu etkinlikte öğrencilerin bileşik birim (composite unit) hakkında da düşünebilmeleri için çeşitli sorular yöneltilmiştir. Örneğin $\frac{1}{4}$ birim kesrinin büyüklüğü hakkında konuştuktan sonra bu kesrin yarısını hangi birim kesir ile ifade ederiz? Böyle bir durumda, "Bir bütün oluşturmak için kaç tane $\frac{1}{8}$ kesri kullanırız?" gibi sorular yöneltilmiştir. Bu doğrultuda, bu görevde amaçlanan varsayımsal öğrenmeler birim kesir büyüklüğünü anlama, toplamsal ya da çarpımsal düşünme ile kesir çubuklarının uzunluklarını ilişkilendirme ve birim kesirleri kullanarak basit kesir oluşturmadır. Bu süreçte öğrencilerden eş parçaları birleştirme, ayırma, yineleme ve ayırma (disembedding) kesir şemalarını kullanmaları desteklenmiştir (Steffe & Olive, 2010).

Ön değerlendirmede birim kesir büyüklüğü hakkında düşünmeyi gerektiren sorulara verilen yanıtlardan sonra öğrencilerin büyük çoğunluğunun birim kesir konusunda hatalı düşünme yollarına sahip olduğu ortaya çıkmıştı. Ayrıca en büyük birim kesrin 1 veya $\frac{1}{10}$ olduğunu, en küçük birim kesrin ise $\frac{1}{2}$ olduğunu, 1'den büyük birim kesirler de olabileceğini belirtmişlerdi. Öğrencilerin bu zihinsel imgesini değiştirmek için kesir çubukları ile sayı doğrusunu bir arada kullanmayı gerektiren bir görev tasarlandı ve uygulandı. Böylece öğrenciler akıllı tahtaya yansıtılarak işlenen dijital kesir çubukları ve sayı doğrusu modeliyle birim kesirlerin bir bütünden küçük olduğunu fark edebildiler. Farklı araştırma sonuçları da bu araştırmadan elde edilen bu bulguyu desteklemekte olup kesirlerin öğretiminde dijital teknoloji kullanımının öğrencilere etkileşimli yollarla nicelikler üzerinde işlem yapma fırsatları sağlayabileceğini göstermektedir (Hackenberg vd., 2016; Steffe & Olive, 2002; Suh, Moyer & Heo, 2005).

Bu öğretim bölümünde öğrencilerden nicelikleri ilişkilendirme amacıyla somut kesir çubuklarını kullanarak birim kesirleri birbiriyle ilişkilendirmeleri ve kesirlerin büyüklükleri hakkında yorum yapmaları istenmiştir. Bu noktada öğrencilere "*Kaç tane* $\frac{1}{10}$ *uzunlukları yan yana getirirsem 1 bütüne ulaşırım? Bütün birim kesirler bir bütünden küçük müdür? Bir bütünden büyük birim kesirler var mıdır? Dört tane* $\frac{1}{8}$ *uzunluğunu bir araya getirirsem hangi kesri elde ederim?* $\frac{4}{5}$ *basit kesri kaç birim kesirden oluşur?*" gibi sorular soruldu ve uzunluk niteliği vurgulandı. Öğrencilerin hem dijital hem somut kesir çubukları kullanarak birim kesir büyüklükleri hakkında tartıştıkları ve bu tartışmalar sayesinde kesir büyüklüklerini ilişkilendirerek nicelleştirme yapabildikleri gözlemlenmiştir. Öğrenciler başlangıçta deneme-yanılma yöntemiyle kesir çubuklarının görüntüsüne bakarak karar vermeye çalıştılar ancak grup çalışmasının desteğiyle daha etkili stratejiler kullanmaya başladılar. Bu sonuç, grupça çalışmanın ve sınıf içi tartışmaların olumlu bir sonucu olarak yorumlanmıştır (NCTM, 2014; Robinson, 2017; Schoenfeld, 2014; Thompson, 1993). Öğrenciler grup olarak çalışarak birim kesirleri birleştirme ve ayırma yapabilmişler ve birim kavramını somut/dijital araçlar kullanarak anlamlandırmaya çalışmışlardır. Sonuçta öğrencilerin basit kesir oluşturma ve birimlere ayırma noktasında oldukça iyi performans sergiledikleri gözlemlenmiştir. Yavuz ve grup arkadaşlarının çalışma örneği aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 4.2.3. Somut Kesir Çubuklarıyla Çalışma Etkinliğinden Örnek

Yavuz

Bu etkinlikte önemli olan toplamsal ya da çarpımsal olarak nicelleştirme yapabilmek ve aynı zamanda öğrencilerin birim kesirlerin büyüklükleri hakkında genel bir sonuca varmasını sağlamaktı. Yavuz'un, etkinlik sırasındaki eylemleri ve araştırmacı gözlemlerine göre çoğunlukla toplamsal düşünmeye dayalı nicelleştirme yaptığı fark edilmiştir. Öyle ki, Şekil 4.2.3' te $\frac{1}{10}$ uzunluklarını bir araya getirerek bir bütün oluşturmaya çalışmış ancak farklı birim kesirleri (turuncu kesir çubuğu) kullanarak bütüne ulaşmaya çalışmış yani farklı birimlerden oluşan bütün oluşturmuştur. Bu durum, toplamsal düşünmeye dayalı bir düşünme yolunu işaret etmekte olup böyle bir etkinlik için hatalı kabul edilmiştir. Aynı zamanda, birim kesirleri birbiriyleriyle ilişkilendirirken kesir çubukları önünde olmadan birim kesir uzunlukları hakkında karar verememiştir. Bu durum, Yavuz'un birim kesirlerin büyüklüklerini anlamada doğru bir kavramsal anlayışı henüz geliştirmediğini gösterebilir. Basit kesir büyüklüğünü anlama konusunda ise Yavuz da diğer arkadaşları gibi doğru bir düşünme yolu kullanmış ve birimlere ayırma ile yineleme yaparak basit kesir ile birim kesir ilişkisini anlayabilmişti. Bu süreçte değeri daha küçük veya daha büyük birim kesirleri bir araya getirdiğinde uzunlukların da değişebildiğini fark etmiştir. Karşılıklı ilişki (reciprocal relationship) olarak yorumlanan bu kavrama göre Yavuz önce beş adet $\frac{1}{5}$ kesir çubuğunu sonra ise 4 adet $\frac{1}{4}$ kesir çubuğunu bir araya getirerek bütüne ulaşmış; birim kesir sayısı arttıkça her bir birim kesir büyüklüğünün (uzunluk) azaldığını fark etmiştir.

Uygulama 2

Araştırmanın ikinci uygulamasında ilk uygulamadan farklı olarak öğrencilere modelleme ve yazma görevleri verilmiştir. Bu görev, aynı kesir çubuklarını bir araya getirerek bir bütün oluşturma ve belirlenen iki birim kesri alt alta modelleme etkinliklerden oluşmuştur. Alt alta modelleme yapılmasındaki amaç kesirlerin uzunluk anlamını

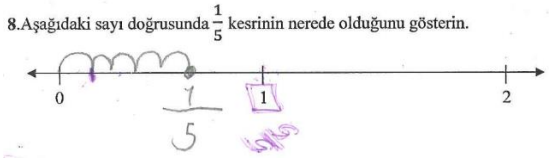
vurgulamak ve aynı büyüklükteki bütünler üzerinde farklı birim kesirleri göstererek taralı alanların büyüklüklerini karşılaştırmaktı. Birim kesir büyüklüğüne dair öğrencilerin zihinsel imgesini belirlemek için ikinci uygulamada "Sonuçta ne söyleyebiliriz? Nasıl bir genellemeye ulaşırız?" soruları daha sık sorulmuştur. Böylece birim kesirlerde payda ile kesir büyüklüğü arasındaki ters ilişkiye dayalı genelleme; karşılıklı ilişkiyi (reciprocal relationship) anlamaları konusundaki muhakemeleri desteklenmiştir. Önce kesirlerin uzunluk anlamı ile ve sonra sayı doğrusu modeli kullanarak birim kesirlerin 0-1 doğal sayıları arasında olduğu vurgulanmıştır. Bu süreçte, kesirler ve doğal sayıların farklı sayılar olduğu, sonucun doğal sayılarla ifade edilemediği durumlarda kesirleri kullandığımız ve birim kesirlerin her zaman bir bütünden küçük olduğu araştırmacı tarafından açıklamıştır. Örneğin, kişi sayısının çikolata sayısından fazla olduğu bir problem durumunu örnek alırsak çocuklar, her bir kişiye bütün bir çikolata vermenin mümkün olmadığını kolayca fark ederler. Paylaşımın adil olması halinde hiçbir çocuk çikolatanın tamamını alamayacağından, çözüm çikolataları parçalara ayırmaktır ki bu da birimden daha küçük miktarlar hakkında nasıl konuşulabileceğini ortaya çıkarır. Böylece bazı çocuklar, doğal bir sayma birimi olduğunda ve miktarın bu birimden daha küçük olduğunun farkına varır (Nunes & Bryant, 2015).

4.2.4. Öğretim Bölümü 3: Birim Kesri Sayı Doğrusunda Gösterme Etkinliği

Uygulama 1

Bu öğretim bölümünde birim kesir kullanarak kesirlerde ölçme anlamı üzerinde çalışılmıştır. Bu görevde amaçlanan varsayımsal öğrenme, $\frac{1}{5}$ birim kesrinin büyüklüğünü anlamak ve sayı doğrusunda göstermektir. Ön değerlendirmede bulunan sayı doğrusunda birim kesrin yerini belirleme sorusunun benzeri bu derste de öğrencilere sorulmuş ve bu konuda bir gelişim gösterip göstermedikleri ortaya çıkarılmak istenmiştir. Ön değerlendirmede sayı doğrusunda birim kesri göstermeyi ölçen soruya doğru yanıt veren öğrenci sayısı oldukça az iken, bu öğretim bölümünde işlenen etkinlikte tüm öğrenciler $\frac{1}{5}$ kesrini 0-1 arasına yerleştirmişlerdir. Bu sonuç, önceki derslerde işlenen ve kesirlerde ölçme anlamını vurgulayan etkinliklerin birim kesir büyüklüğünü anlamada olumlu bir müdahale olduğunu kanıtlamaktadır. Öğrencilerin büyük çoğunluğu $\frac{1}{5}$ kesrini 0-1 noktaları ortasında veya bir bütüne yakın bir noktada belirtmişlerdir. Bu durum, öğrencilerin birçoğunun sınırlı biçimde yüzeysel ve kapsamlı nicelleştirme yapabildiğini; bazı öğrencilerin ise sayı doğrusu

kullanımındaki mevcut hatalarının hala devam ettiğini göstermektedir. Şöyle ki, gelişmiş bir yüzeysel nicelleştirmeye sahip olan bir öğrenci sayı doğrusunda dayanak noktalarına göre birim kesrin yerini belirleyebilirdi. Aynı şekilde gelişmiş bir kapsamlı nicelleştirmeye sahip bir öğrenci sayı doğrusunu doğru şekilde birimlere ayırarak $\frac{1}{5}$'in yerini doğru belirtebilirdi. Örnek olarak Yavuz'un bu soruya yanıtı Şekil 4.2.4'de gösterilmiştir.



Şekil 4.2.4.Yavuz'un Birim Kesri Sayı Doğrusunda Gösterme Etkinliğine Yanıtı

Yavuz

Yavuz'un ön değerlendirmede yer alan benzer soruya verdiği yanıtı ile yukarıda gösterilen çözümü karşılaştırıldığında mevcut düşünme yolunda büyük bir gelişim göstermediği görülmektedir. Yavuz, daha önce de yaptığı gibi sayı doğrusunu birimlere ayırarak kapsamlı nicelleştirme yapabilmiş ancak $\frac{1}{5}$ kesrinin büyüklüğü hakkında doğru bir zihinsel imge geliştirmediğinden ve doğru bir şekilde birimlere ayırarak kapsamlı nicelleştirme yapamadığından birim kesri bir bütüne en yakın noktada göstermiştir. Bu sonuç, Yavuz'un dayanak noktalarını referans almadan kesri konumlandırması sebebiyle sınırlı yüzeysel nicelleştirmeye sahip olduğunu ve sayı doğrusu kullanımında da hatalı bir düşünme yoluna sahip olduğunu gösterebilir. Bu bulguya benzer olarak Obersteiner ve Tumpek, (2016) dördüncü ve beşinci sınıf öğrencilerinin kesirleri karşılaştırırken kesir birimini anlamaya başladıklarını ancak kesirleri sayı doğrusu üzerinde gösterirken büyüklüklerini anlamakta oldukça zorlandıklarını belirtmiştir. Araştırmacı bireysel ve görev temelli (task-based) bir görüşmenin etkili olacağını düşünerek Yavuz ile görüşmüştür:

Araştırmacı: $\frac{1}{5}$ *kesrini zihninde nasıl canlandırıyorsun?*

Yavuz: *Beş tane parçadan 1 tane parçayı aldığımı düşünürüm.*

Araştırmacı: *Peki* $\frac{3}{5}$ *ne kadar büyük bir kesir?*

Yavuz: *O zaman 3 tane parçasını boyamak gerekir.*

Araştırmacı: *Sayı doğrusunda parçaları boyamıyoruz ki. Nasıl yanıtladın soruyu?*

Yavuz: *Sayı doğrusunda sıfırdan başlayarak adım adım ilerledim 5 tane saydım.*

Araştırmacı: *Kaçıncı saymada $\frac{1}{5}$'e ulaştın?*

Yavuz: *Beşincide öğretmenim.*

Araştırmacı: *$\frac{1}{5}$ kesri mi daha büyük bir kesirdir $\frac{3}{5}$ kesri mi? Neden?*

Bu soruyu sormaktaki amaç Yavuz'un $\frac{1}{5}$ kesrinin öncesi ve sonrasında kesirleri düşünmesini sağlamak ve böylece 1 bütüne yakın olan bu kesrin $\frac{1}{5}$ olamayacağını fark etmesidir. Ayrıca, Yavuz'un yanıtlayabileceği kolay bir soruydu çünkü aynı paydaya sahip iki kesrin büyüklüklerini karşılaştırmak için payların büyüklüklerini karşılaştırmak yeterli olup kesirlerin büyüklüklerini bir bütün olarak düşünmek gerekli değildir. Bu durum öğrencileri kesir büyüklükleri hakkında fazla derin düşünmemeye itiyor olsa da (Obersteiner & Tumpek, 2016) öğrencilerin alışık olduğu ve sıklıkla kullandığı doğal sayı şemasına uygun yanıt vermelerini gerektirir (Siegler & Pyke, 2013).

Yavuz: *$\frac{3}{5}$ öğretmenim. Daha çok parça boyarız o zaman.*

Araştırmacı: *Hangi kesir 0'a yakındır o halde?*

Yavuz: *Tabiki küçük olan kesir, yani $\frac{1}{5}$.*

Araştırmacı: *Küçük olan kesri sayı doğrusunda neden 1'e yakın noktada gösterdin?*

Yavuz: *Galiba yanlış yere yazdım. Şuralarda bir yerlerde olmalı.* (Konumlandırdığı noktanın solundaki çizgileri gösterdi ancak tam olarak bir yer belirtmedi.)

Araştırmacı: *$\frac{1}{5}$'i tam olarak nerede gösterdiğini anlayamadım.*

Yavuz: *Şurda bence öğretmenim* ($\frac{1}{5}$'i konumlandırdığı noktanın bir öncesini gösterdi)

Bu yanıta göre Yavuz $\frac{1}{5}$ kesrinin 1'e değil 0'a daha yakın olması gerektiğini fark etmeye başlamıştı. Ancak birim kesrin diğer basit kesirler arasında en küçük kesir olduğunu ve dolayısıyla sıfır noktasına en yakın olduğunu hala fark etmemişti. Birçok öğrenci kesirleri karşılaştırırken dayanak noktalarından yararlanır ve bu oldukça doğru bir yöntemdir (Markovits & Sowder, 1994). Dolayısıyla Yavuz'un yüzeysel nicelleştirme yaparak dayanak noktalarını yorumlaması ve eş parçalama yaparak birim kesri doğru bir noktada konumlandırması desteklenmiştir:

Araştırmacı: *Sayı doğrusunda $\frac{5}{5}$ kes*rinin yerini gösterir misin?

Yavuz: *1'e eşit öğretmenim. ($\frac{5}{5}$ kesrini sayı doğrusunda göstererek)*

Araştırmacı: $\frac{4}{5}$ *kesri nerde olurdu peki?*

Yavuz: *Şurada öğretmenim. 1'den bir önce* $\frac{4}{5}$ *olmalı.* (Bir süre sessizce düşündü). *Sanırım ben yanlış yapmışım.*

Araştırmacı: *Nerede yanlış yaptığını düşünüyorsun?*

Yavuz: *Birim kesir bence şurdadır* (0'a yakın bir noktayı gösterdi.)

Yavuz, bu yanıta göre birim kesir büyüklükleri hakkında düşünürken biraz müdahale ile dayanak noktalarını referans aldığından yüzeysel nicelleştirme yapabildiğini göstermişti. Yavuz'un ihtiyacı olan şey açık uçlu, yönlendirici sorular ve öğrenme desteğiydi. Araştırmacılar da böylesi bir desteğin muhakeme etmeyi ve nicel muhakemeyi geliştirdiğini çeşitli araştırmalarda ortaya koymuşlardır (Kruse & Drews, 2013; Mayes, vd., 2014). Bunun sonucunda da Yavuz düşünme yolunu değiştirmiştir. Kesir çubukları kullanılan derste birim kesirleri karşılaştırma etkinliklerinde Yavuz doğru yanıtlar verebilmiş ve kesir büyüklükleri üzerinde doğru muhakeme edebilmişti. Ancak somut araçlar ile yürütülen etkinliklerdeki performansı ile sayı doğrusundaki performansı arasında oldukça büyük fark olduğu görülmektedir. Sayı doğrusu etkinliklerinde daha kolay ve daha sık hata yapmakta; nicelleştirme yapmadan ve kesir büyüklükleri üzerinde düşünmeden yanıtlamaktadır. Yavuz ile ilgili elde edilen diğer bir bilgi ise, ölçüm kavramına dair diğer öğrencilerde olduğu gibi Yavuz'un da daha fazla müdahaleye ihtiyacı olduğuydu. Yavuz'un başlangıçta verdiği yanıta göre, ölçme anlamını vurguladığımız etkinliklerde de parça-bütün anlamına dayanan bir düşünme yolunu sürdürmekteydi. Daha sonrasında birim kesir büyüklüğü üzerinde düşünerek sayı doğrusunu birimlere ayırabilmekteydi. Ancak bunu yaparken sayı doğrusunda aradaki mesafeleri tamamen göz ardı ediyor, bunun o kadar da önemli bir şey olmadığına inanıyordu. Öğrencilerin bu konudaki düşünme yollarını değiştirmek için sayı doğrusunda aradaki uzunlukların ve alan modelinde parçaların eş olması sıklıkla vurgulanmıştır.

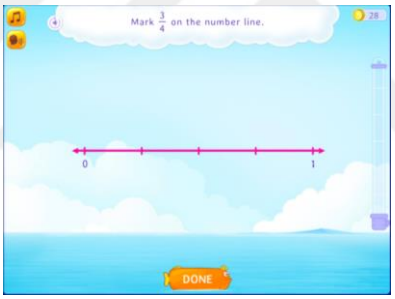
4.2.5. Öğretim Bölümü 4: Birim ve Basit Kesirleri Sayı Doğrusunda Gösterme Etkinliği

Uygulama 1

Bu öğretim bölümünde bir bütünden büyük kesirler dahil edilerek Splashlearn web sitesindeki oyun etkinlikleri akıllı tahtaya yansıtılarak sınıfça uygulanmıştır. Dijital araçlar

kesir kavramını derinleştirmek ve parça-bütün ile ölçme anlayışını geliştirmek için kullanılabilir (Simon vd., 2018; Yeo & Webel, 2022). Daha önceki etkinliklerdeki gözlemlere dayanarak öğrencilerin sanal araçlarla çalışmaya istekli oldukları bilindiğinden bu derste de teknolojik araç kullanılmıştır. Ayrıca, önceki öğrenci yanıtlarına bakıldığında birim kesir ile basit kesir büyüklüklerinin hala tam olarak anlaşılmadığı görülmüştür.

Bu görevde amaçlanan varsayımsal öğrenme sayı doğrusu üzerinde birim kesir ve basit kesirlerin yerlerini belirlemektir. Sınıf ortamında tartışma yöntemine dayanarak öğrencilerin kesir büyüklükleri hakkındaki düşünme yollarını geliştirmek amaçlanmıştır. Etkinlikte, bir kesrin sayı doğrusundaki yerinin belirtilmesi gerekmektedir. Böylece kesirlerin ölçme ve uzunluk anlamına dayanarak öğrenciler birden fazla kesrin yerini tahmin edip kesirlerin büyüklüğü hakkında daha doğru karşılaştırmalar yapabilmektedir. Kullanılan website İngilizce olduğundan ilk etkinlik araştırmacı tarafından yapılmış ve öğrencilere de soruda ne yazdığı Türkçe olarak belirtilmiştir. Dersin devamında ise aynı etkinlik bireysel olarak kağıt üzerinde uygulanmıştır.



Öğrenciler sayı doğrusunda belirtilen noktalardaki kesirleri bulurken çizgileri veya aralıkları sayarak soruları genellikle doğru yanıtlamışlardır. Sayma işlemi yaparken 0'ı saymaya dahil edip etmeme konusunda tartışma yaşanmış olup öğrencilerin büyük çoğunluğu sayı doğrusundaki çentikleri sayarak soruyu yanıtlamışlardır. Bu bulgu ile benzer olarak Saxe ve arkadaşları (2007), 3. ve 5. sınıf öğrencilerinin sayı doğrusu üzerindeki çentikleri saymaya meyilli olduklarını belirlemiştir. Öğrenciler, Öğretim Bölümü 3'te olduğu gibi aynı düşünme yolunu kullanmaya devam etmişlerdir. Önceki derslerde sayı doğrusunda gösterim ile kesrin pay ve paydasının nasıl kullanıldığına dair tam olarak doğru bir düşünme yolu geliştirememişlerdi. Ancak bu ders içerisindeki etkinlikler süresince paydanın 0-1 arasını kaç eş parçaya ayırdığını; payın ise kaç parçayı saymak olduğunu daha net biçimde anlamışlar ve bu bilgiyi sayı doğrusunda kullanabilmişlerdir.

Sayı doğrusunda tahmin etme etkinlikleri öğrencilerin kesir büyüklüğüne dair doğru düşünme yolları oluşturmasını desteklemektedir (Hamdan & Gunderson, 2017). Bu sebeple öğrenciler etkinlikleri yanıtlamadan önce belirtilen kesrin hangi doğal sayıya yakın olduğuna dair de tahminde bulunmuşlardır. Böylece öğrencilerin yüzeysel nicelleştirme yapmasına ve kesir büyüklüğü üzerinde düşünmesine de olanak sağlanmıştır. Dijital araç etkinliğinin bir çıktısı olarak öğrencilerin motivasyonunun arttığı gözlemlenmiştir. Yapılan araştırmalar teknolojiden yararlanarak öğretilen matematik konularında öğrencilerin söz konusu konu ve kavrama dair bilişsel ve duyuşsal bilgilerini ve nicel muhakemelerini geliştirdiğini göstermektedir (Ainsworth, 2006; Debrenti, 2015; Ergene, 2011; Hwang & Hu, 2013; İzgiol, 2014; McMullen, Kainulainen & Lehtinen, 2019; Rau, Aleven & Rummel, 2009; Riconscente, 2013; Özdemir & Reis, 2013). Bununla birlikte öğrencileri matematiksel ilişkileri görmeye teşvik edip görsel ve sembolik temsil biçimlerini ilişkilendirmelerini desteklediği belirtilmiştir (Suh, Moyer & Heo, 2005).

Yavuz

Dijital sayı doğrusu etkinliği sırasında Yavuz'a "Bu kesirden önce hangi kesir gelir? Bu kesirden büyük bir kesir söyleyip bu sayı doğrusunda gösterir misin?" gibi yönlendirici sorular sorarak birim hem de basit kesirlerin büyüklüğünü anlaması ve böylece nicel muhakemesini geliştirmesi hedeflenmiştir (Akın, 2016; Ellis, 2011; Kruse & Drews, 2013; Mayes vd., 2014). Bu sayede Yavuz, başlangıçta 0'dan itibaren sayarak ilerleyip kesrin değerini bulmaya çalışırken önceki veya sonraki kesirler hakkında konuşarak bu hatasını anlamış ve 0'ı saymamak gerektiğini fark etmişti. Ancak bu fark ediş, tam olarak kavramsal bir zeminde değildi. Yavuz burada ezbere bir yolla ve sadece sayılara odaklanmış ve hata yaptığını gördükten sonra bu düşünme yolunu değiştirmiştir. Sıfırın bulunduğu noktanın zaten bir sayı (0) gösterdiğini bilmesi ve dolayısıyla aynı noktayı başka bir kesir ile ifade edemeyeceğine dair net bir görüşü yoktu. Buna karşın, Yavuz'un bu yanıtı vermiş olması önceki derslerde ortaya çıkan düşünme yolundan farklı olarak daha olumlu bir yanıt olarak kabul edilmiştir. Benzer olarak, Gunderson, Hamdan, Hildebrand ve Bartek (2019), çocukların sayı doğrusu üzerinde kesirleri tahmin etme becerilerini incelemiş ve sayı doğrusu üzerinde kesir belirlemenin kesir büyüklüğü anlayışını destekleyebileceğini ortaya koymuştur. Ayrıca Yavuz'un sayı doğrusunda kesir gösteriminde birimlere ayırarak kapsamlı nicelleştirme yapabilmesi desteklenmiştir. Yavuz'un yüzeysel nicelleştirme de yapmasını sağlamak için söz konusu kesrin sayı doğrusundaki yerini belirtmeden önce "Bu

kesir sıfıra mı yoksa 1'e mi daha yakındır? Neden?" gibi sorular sorulmuştur. Bunun sonucunda kesir büyüklüğü ve kesrin sayı doğrusunda gösterimine dair gelişme kaydettiği gözlemlenmiştir.

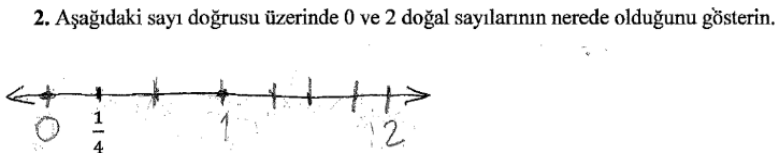
4.2.6. Öğretim Bölümü 5: Doğal Sayıları Sayı Doğrusunda Gösterme Etkinliği

Uygulama 1

Buraya kadarki bulgular öğrencilerin kesir büyüklüğü konusunda çoğunlukla doğal sayı bilgilerine dayanan yanıtlar verdiğini göstermiştir. Bu beklendik bir durumdur çünkü öğrenciler kesirleri tek bir sayı olarak değil, iki farklı doğal sayı olarak görmeye meyillidirler (Ni & Zhou, 2005; Siegler & Pyke, 2013; Smith, 2002; Yeo & Webel, 2022). Bu sebeple bu öğretim bölümünde kesirler ve doğal sayıları ilişkilendirmeyi ölçen bir soruya yer verilmiştir. Gabriel ve arkadaşları (2012) kesirlerin öğretiminde kullanılan öğretim yöntemlerinin tam sayılar ve kesirler arasındaki ilişkiye dayanarak kullanılması gerektiğinin altını çizmiştir. Bu sebeple öğrencilerin önceki yıllarda deneyimlediği doğal sayıların sayı doğrusunda gösterilmesi etkinlikleri hatırlatılarak kesirlerin de birer sayı olduğu ve sayı doğrusunda bir yeri olduğu vurgulanmıştır. Amaçlanan varsayımsal öğrenmeler; i)$\frac{1}{4}$ kesrinin olduğu sayı doğrusunda birim kesirleri kullanarak yineleme ve eş parçalama yaparak 0 ve 2 doğal sayılarının yerini belirleme ii) Sayı doğrusunda kesirlerin yerini belirlerken kapsamlı ve yüzeysel nicelleştirme yapabilmedir.

Öğrencilerin birçoğu doğru ya da yanlış olmasına bakılmaksızın sayı doğrusunu birimlere ayırarak soruyu yanıtlamışlardır. Böylece öğrenciler önce 1 bütüne sonra 2 bütüne ulaşmış ve çoğunlukla da doğru yanıt vermişlerdir. Bazı öğrenciler ise bu soruda tamamen yüzeysel nicelleştirmeye ve tahmine dayanarak 0, 1 ve 2'nin yerlerini belirtmişlerdir. Bu öğrenciler de çoğunlukla doğal sayıların yerini doğru gösterebilmişlerdir. Öğrencilerin bu soruda kullandığı hataların öne çıkanları sayı doğrusunu eş uzunluklara ayıramama veya olması gerekenden bir eksik ya da fazla birime ayırmaktır. Bu durum, öğrencilerin önceki derslerde kullandıkları düşünme yolunun devam ettiğini göstermektedir. Öğrenciler sayı doğrusunu birimlere ayırmaları gerektiğini biliyor ve bunu pay ya da paydadaki sayıya göre yapabiliyordu ancak iki bütün arasını eş parçalara ayırmakta hata yapmışlardı. Dolayısıyla kesrin parça-bütün anlamında olduğu gibi doğru ve belirgin bir eş parçalama anlayışı kesrin ölçme anlamında ortaya çıkmamıştır. Bununla birlikte öğrenciler sayı doğrusundaki her bir çizgiye bir kesir karşılık geldiğinin farkında ancak sayı doğrusunda kesirlerin yerini

saptarken sıfırı veya 1 sayısını sayıp saymama konusunda kararsızdı. Ancak tüm bu hatalı düşünme yollarına rağmen sınıfın geneline bakıldığında bu düşünme yoluna sahip öğrenci sayısının azalmakta olduğu söylenebilir. Dolayısıyla sınıf içi etkinliklerin, tartışmaların, grup çalışmalarının ve modellemenin olumlu etkileri gözlenmiştir. Yavuz'un yanıtı Şekil 4.2.6.'da gösterilmiştir.



Şekil 4.2.6. Yavuz'un Doğal Sayıları Sayı Doğrusunda Gösterme Etkinliğine Yanıtı

Yavuz

Yavuz ¼ birim kesrinin sıfıra en yakın noktada bulunduğunu belirtmiştir. Yavuz'un, birim kesrin bir nicelik olarak ne kadar büyük olduğu, hangi kesir ve doğal sayılara yakın olduğu ve kesir-doğal sayı ilişkisine dair akıl yürütebildiği söylenebilir. Dikkat çekici bir nokta, Yavuz'un sayı doğrusunda 1-2 arasını doğru şekilde birimlere ayırırken 0-1 arasında hata yapmasıdır. Onun bu yanıtı, 0-1 arasını birimlere ayırırken 0'ı da sayma mantığı ile hareket ettiğini gösterebilir.

Araştırmacı: *Bu soruyu nasıl çözdün bana anlatır mısın?*

Yavuz: $\frac{1}{4}$ *kesri 0 ve 1 arasında olduğu için 0 ve 2 burada olmalı.*

Araştırmacı: *0 ve 1 arasını kaç eş parçaya ayırdın?*

Yavuz: *0'ı da sayacak mıyım öğretmenim?*

Araştırmacı: *Bilmem, sen ne düşünüyorsun?*

Yavuz: *2 parça öğretmenim.*

Araştırmacı: *Peki 1 ve 2 arasını kaç eş parçaya ayırdın?*

Yavuz: *3 öğretmenim.*

Araştırmacı: *Neden farklı parçalara ayırmayı tercih ettin?*

Yavuz: *Sayı doğrusunda eşit yapamadım öğretmenim.*

Araştırmacı: *Kendin çizmek ister misin?* (Araştırmacı boş sayı doğrusu çizerek Yavuz'a verir)

Yavuz: *0 burda öğretmenim*. (Başlangıç noktasını gösterir)

Araştırmacı: *Sıfırdan sonraki noktaya ne gelir?*

Yavuz ¼'ten başlayarak kesirleri tek tek sayı doğrusunda yazar ve en son $\frac{8}{4}$, ulaşır.

Araştırmacı: *Peki sayı doğrusunu kaç eş parçaya ayırdın?*

Yavuz: *İkisini de (0-1 ve 1-2) dört parçaya ayırdım öğretmenim.*

Araştırmacı: *İlk yaptığın çözüme geri dönelim. Sence nerede hata yaptın?*

Yavuz: *Eksik saymışım öğretmenim. Sıfırı da saymalıydım*.

Yavuz, sorular aracılığıyla hatasını anlamıştı. Ancak yanlış yapmasının sebebi sıfırı dahil ederek sayması değil; sayı doğrusunda aralıkları saymamasıdır. Bu yanıtına göre, yaptığı hatanın sebebini hala doğal sayı zemininde bir düşünme yoluyla yorumladığı görülmektedir. Bu bulguya benzer olarak Bright vd., (1988) iki bütün arasına kesirleri konumlandırma görevinde öğrencilerin 0'ı veya 1'i dahil edip etmeme kararsızlığı ile birlikte sayı doğrusundaki çizgileri sayma eğiliminde olduklarını; Saxe vd (2007) 3. ve 5. sınıf öğrencilerinin sayı doğrusu üzerindeki aralıkları saymak yerine çentikleri saymaya meyilli olduklarını belirtmişlerdir. Izsák, Tillema & Tunç-Pekkan (2008) da araştırma sonucunda bu durumu doğrulamış ve ortaokul öğrencilerinde de benzer yanıtlar gözlemlemişlerdir. Bu tarihe kadar yürütülen etkinlikler ve sınıf içi tartışmalar Yavuz'un ve sınıftaki birçok öğrencinin de bir bütünden küçük kesirlerin büyüklüğünü anlama ve farklı sembollerle temsil etmesini geliştirmiştir. Bu durum, diğer araştırmalarda da kanıtlanmış ve sınıf içi söylemlerin ve tartışmaların öğrencilerin düşüncelerini olumlu anlamda değiştirdiği belirlenmiştir (Lee vd., 2003; Lee 2013; Robinson, 2017; Thompson, 1993). Ancak düşünme yollarındaki gelişmelere rağmen öğrenciler sahip oldukları düşünme yolundan kolayca vazgeçmemektedir. Yavuz'un düşünme yollarının süreç içerisindeki değişimi ve bu süreçteki müdahaleler Tablo 4.2.6' da özetlenmiştir.

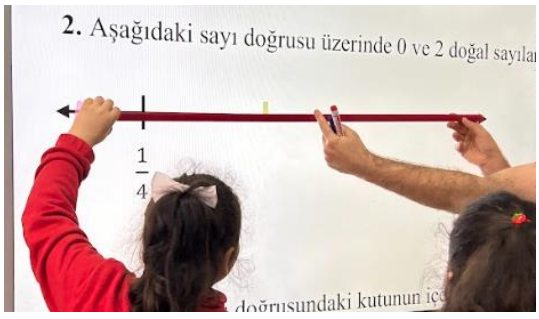
Tablo 4.2.6. Yavuz'un Birim Kesre Dair Süreç Boyunca Gelişen Düşünme Yolları

Öğretim Bölümleri	Öğretim Bölümü 1	Öğretim Bölümü 2	Öğretim Bölümü 3	Öğretim Bölümü 4	Öğretim Bölümü 5
Müdahale	Kesir gösterimi, pay, payda kavramları vurgulandı.	Birim kesirlerin büyüklüklerini kesir çubukları kullanarak parça bütün bağlamına göre birim kesir vurgulandı.	Sayı doğrusu üzerinde birim kesir gösteriminde birim kavramı vurgulandı ve parça-bütün bağlamındaki eş parçalar sayı doğrusuna transfer edildi.		Doğal sayılar ve kesirlerin yer aldığı sayı doğrusu kullanımı ile nicelleştirme geliştirildi.
Düşünme Yolları	Hatalı kesir sembolü ve payı 1 olan kesir	Toplamsal düşünmeye dayanan düşünme yolu	Birimlere ayırmaya dayanan kapsamlı nicelleştirme		Kapsamlı ve yüzeysel nicelleştirme

Yavuz'un ön değerlendirme formundaki yanıtı birim kesir konusunda "payı 1 olan kesir" anlayışı ve birim kesri ifade ederken payı ve paydayı ters yazan kesir sembolü kullanımını içermektedir. Birim kesir büyüklüğü ve kullanımına dair öncelikle kesrin parça-bütün bağlamı üzerinde durularak "eş parçalardan biri" anlayışının geliştirilmesi hedeflenmiştir. Bu konuda ise Yavuz öncelikle herhangi bir parçanın birim kesir olduğunu düşünmüştür. Buna dayanarak, toplamsal düşünme becerisinin etkin olduğu görülmüştür. Alan modeli kullanımı etkinliğinden sonra ise kesrin ölçme bağlamında birim kesrin bir ölçü birimi olarak anlaşılması hedeflenmiştir. Yavuz bu noktada birimlere ayırma anlayışı ve dolayısıyla kapsamlı nicelleştirme geliştirmiş ancak parça-bütün bağlamında olduğu gibi başlangıçta bu parçaları eş olarak ayıramamıştır. Bu durum sayı doğrusu kullanımında hata olarak da yorumlanmıştır. Sayı doğrusunda eş birimlere ayırmayı ve dayanak noktalarını kullanarak yüzeysel nicelleştirme yapmayı vurgulayan etkinlikler ile devam edilmiştir. Sonuçta ise doğal sayıların verildiği bir sayı doğrusunda kesirlerin yerini bulmayı hedefleyen etkinlik ile bu tema sonlandırılmış ve Yavuz'da yüzeysel nicelleştirmeye dayanan ölçü birimi olarak birim kesir anlayışı gelişmiştir.

Uygulama 2

Bu öğretim bölümünde ilk uygulamadan farklı olarak cetvel kullanarak doğru bir hesaplama yapmışlardır. Sayı doğrusunda 0 ve 2 doğal sayılarını bulmayı gerektiren soruda öğrenciler eş parçalara dikkat ederek ve yineleme yaparak göstermişlerdir. Bu yöntem, uzunluk niteliğine bağlı olarak ölçüm kavramına, birimleştirmeye ve kesirler ile doğal sayılar arasındaki ilişkiye de olumlu etkide bulunmuştur.



İlknur

İlknur'un bir bütünden küçük kesirler konusundaki zihinsel imgesi başlangıçta Yavuz'un düşünme yolu ile oldukça benzerdi. Nitekim ön değerlendirmedeki soruya Yavuz'un yanıtının aynısını vermiş; pay ve paydayı ters yazmıştır. Buna göre İlknur birim

kesrin, bir bütünün eş parçalarından biri olduğunu bilmesine rağmen bunu kesir diline aktarmakta yani sembol olarak ifade etmekte hata yapmıştır. Birim kesrin sayı doğrusundaki yerinin belirlenmesinde ise diğer katılımcılardan farklı ve daha doğru bir düşünme yolu kullanarak 0-1 arasını payda kadar parçaya ayırarak 0'a en yakın noktaya birim kesri yazmıştır. İlknur'un bu çözümüne bakılırsa birim kesrin sıfıra yakın bir büyüklükte olduğunu, paydanın ise sayı doğrusundaki eş parça sayısını temsil ettiğini yorumlayabilmiştir. İlknur'un düşünme yolu eş parçalama ve birimlere ayırmaya dayandığı için kapsamlı nicelleştirme; dayanak noktalarını gözeterek yanıtladığı için de yüzeysel nicelleştirme olarak tanımlanabilir.

Burada birçok öğrencinin kullandığı düşünme yolu ise payda kadar eş parçaya ayırma fikrinden ziyade sayı doğrusundaki çizgilerin sayısını dikkate almaktır. İlknur da Yavuz gibi sayı doğrusunu parçalara ayırırken çizgileri saymış ancak 0'ı saymadığı için daha az hata yapmıştır. İlknur'un bir bütünden küçük kesirlerin büyüklüğü konusundaki zihin modelinin başlangıçtan itibaren hızla geliştiği söylenebilir. Alan modeli ile temsil etme çalışmalarından ve kesir çubukları ile işlenen derslerden sonra İlknur'un bir birim kesrin büyüklüğüne dair çıkarımları oldukça doğruydu ve farklı temsiller arasında ilişki kurabildiği net biçimde fark edilmişti. Bu önemli bir sonuçtur çünkü farklı temsilleri birbirinden bağımsız olarak kullanmak başlangıçta o temsilin nasıl kullanılacağını anlama noktasında önemli olsa da bu temsillerin birbirleriyle ilişkilendirilmesi daha üst düzey bir düşünme yolu gerektirir (Goldin, & Shteingold, 2001; Lesh vd., 1987). Bir matematiksel nesnenin birden fazla temsili vardır ve bu temsilleri birlikte kullanmak kavram gelişimini destekler (Keller & Hirsch, 1998; Panasuk, 2010) ve etkili matematik öğrenimi için güçlü bir araç olarak kabul edilir (Bossé, Adu-Gyamfi & Cheetham, 2011; Fennell & Rowan, 2001; Rau vd., 2013). Öğrencilerin kavramsal bir öğrenme anlayışına sahip olmaları için, matematiksel bilgiyi bir temsille ifade etmenin yanı sıra, farklı temsilleri anlamlı bir şekilde birbirine bağlayabilmeleri de gerekir (Garofalo & Trinter, 2009). En nihayetinde de bu durum, öğrencilerin nicel muhakemelerini geliştirir (Nunes & Csapó, 2011; Thompson & Saldanha, 2000; Weber vd., 2014).

Basit kesirlerin büyüklüğünü anlamaya dayanan etkinliklerde de benzer sonuçlara ulaşılmıştır. Öyle ki İlknur ön değerlendirmede yer alan $\frac{2}{5}$ kesrinin sayı doğrusunda yerini bulma, verilen kesirden büyük bir basit kesir yazma sorularına neredeyse tamamen doğru yanıt vermiştir. Sonraki birçok derste alan, uzunluk ve sayı doğrusu modelleri sıklıkla

kullanılmış, birçok etkinlik tartışma yöntemi ve sınıf içi etkileşim desteğiyle yürütülmüş ve İlknur'un her bir etkinlikte gelişme gösterdiği kaydedilmiştir. Ancak bir basit kesri sayı doğrusunda gösterme etkinliğinde İlknur $\frac{3}{5}$ kesrini sayı doğrusunda gösterirken eş parçalar kuralına uymayarak sayı doğrusunu gelişigüzel biçimde ayırmıştır. Sayı doğrusundaki bu hatalı durum İlknur'da ve sınıftaki birçok öğrencide görülmüştür. Öğrenciler, sayı doğrusundaki her bir aralığın bir uzunluğu, bir kesri temsil ettiğini anlamakta oldukça zorlanmışlardır. Ancak soru tam tersi şekilde sorulduğunda, örneğin sayı doğrusunda doğal sayının (0 ve 2) yerini bulma etkinliğinde İlknur doğru yanıt vermiştir. Buna göre öğrencinin aslında kesir büyüklüğünü anlamada değil bunu sayı doğrusunda temsil ederken sorun yaşadığı söylenebilir.

Beren

Beren'in ön değerlendirmede yer alan ve modeldeki taralı alanın belirttiği kesirli ifadeyi soran soruda diğer arkadaşları gibi yanıt verdiği görülmüştür. Bununla birlikte, sayı doğrusu üzerinde birim kesri temsil etmesindeki düşünme yoluna bakıldığında kesrin değerini uzunluk modeliyle belirlemekte hata yaptığı görülmüştür. Beren sayı doğrusunu parçalara ayırıp kesirleri yazmak yerine doğal sayılar yazmış ve kesrin yerini belirtmemişti. Bu durum, Beren'in söz konusu kesrin hangi doğal sayılar arasında olduğunu bilemediğini yani niceliğin diğer niceliklerle (bu durumda doğal sayılar) ilişkisini yorumlayamadığını göstermektedir. Dolayısıyla birim kesir büyüklüklerine dair doğru bir nicelleştirme yapamadığı görülmektedir. Beren sayı doğrusunda kesirlerin yerini gösterirken çizgileri saymayıp, aralıkları saymış ve bu düşünme yoluyla diğer arkadaşlarından farklılaşmıştı. Kesir çubukları etkinliklerinde de aynı şekilde gruptaki diğer arkadaşları ile birlikte birim kesirleri ilişkilendirme görevlerini doğru şekilde yerine getirebilmişti.

Beren'in, kesrin büyüklüğüne dair hem alan modeli hem de sayı doğrusu modelinde doğru bir düşünme yolu kullanarak nicelleştirme yaptığı görülmüştür. Örneğin Öğretim Bölümü 3'te gerçekleştirilen sayı doğrusu etkinliklerinde Beren'in $\frac{2}{6}$'nin yerini gösterirken çizgileri değil aralıkları sayması kesrin nicelik olarak bir uzunluğu temsil ettiğini gösterdiğini anlaması bakımından oldukça ümit vericidir. Benzer olarak, ters kesirler (reversed fractions) etkinliğini sınıfta tartışırken Yavuz'un çizimine atıfta bulunarak "$\frac{4}{8}$*'ü sıfıra yakın çizmemiz gerekiyor burada 1'e çok yakın görünüyor.*" ifadesi Beren'in sayı doğrusu temsiline dayanarak kesrin uzunluk değerinin temsili hakkında gelişmiş bir

düşünme yoluna sahip olduğunu belirtmektedir. Basit kesir büyüklüğünü anlama ve temsil etme görevlerinde de Beren $\frac{4}{10}$ kesrinden büyük bir kesir örneği yazabilmiş ve modelleyebilmişti. Buna göre Beren, niceliğin sembolik ve görsel olmak üzere farklı temsilleri arasında ilişki kurabilmekte ve niceliklerin büyüklüğü ve temsili hakkında akıl yürütebilmektedir. Sonuçta ise birden fazla temsil kullanma ve temsiller arası dönüşüm fikri matematik öğrenenler için etkili bir yol olarak kabul edildiğinden (Bossé, Adu-Gyamfi & Cheetham, 2011; Fennell & Rowan, 2001; Rau vd., 2013), Beren'in yanıtları olumlu bir sonuç olarak yorumlanmaktadır.

4.3.Öğrencilerin Bir Bütünden Büyük Kesirlere Dair Düşünme Yolları ve Değişimi

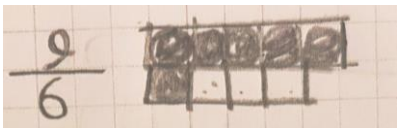
Öğrencilerin bu temadaki var olan düşünme yolları ve değişimi bileşik kesir ve tam sayılı kesir çerçevesinde yorumlanmıştır. Devamında ise öğrencilerin bileşik ve tam sayılı kesirlerin ilişkilendirilmesi hakkındaki düşünme yollarına yer verilmiştir. Uygulama sürecinde basit kesirlerden bileşik kesirlere ve hemen sonrasında da tam sayılı kesirlere geçiş etkinlikleri yürütülmüştür. Bu tema, diğer temalarda olduğundan farklı olarak, bir bütünden büyük kesirlere dair öğrencilerin ön bilgilerine dair bulgu içermemektedir çünkü öğrenciler bu araştırma ile birlikte bu konuyu yeni öğrenmişlerdir. Bu tema kapsamında hedef grup öğrencilerinden İlknur'un yanıtları detaylı olarak incelenmiştir.

4.3.1. Öğretim Bölümü 1: Bileşik Kesir Modelleme Etkinliği

Uygulama 1

Bu öğretim bölümünde öncelikle payı paydasına eşit bir kesir örneği verilerek bir bütünden küçük-büyük-eşit olma durumları üzerinde konuşuldu. Sınıf içi tartışmalarda, $\frac{6}{6}$ kesrinin basit kesir olamayacağına karar verildikten sonra bütün kavramını vurgulayarak ve payı 1 artırarak bir bütünden büyük kesirlerin varlığına dikkat çekildi. İlk olarak ise bu kesirler alan modeli ile modellendi. Önce öğrencilerden $\frac{6}{6}$ kesrini; sonra ise paydası 6 olmak kaydıyla $\frac{6}{6}$'dan büyük bir kesri modellemeleri istendi. Bu görevde amaçlanan varsayımsal öğrenme kesirlerin bir bütünden büyük olabildiğini anlama ve bir bütünden büyük kesirleri modellerken en az iki bütüne ihtiyaç duyulduğunu fark etmedir. Öğrencilerin ilk defa kesirlerin bir bütünden büyük de olabileceğini deneyimlemeleri sebebiyle çeşitli ve aynı

zamanda hatalı yanıtlar vermeleri beklenmekteydi. Yanıtlara bakıldığında ise öğrencilerin bir kısmı $\frac{9}{6}$ kesrini nasıl modelleyeceğine dair bir yanıt vermediği görülmüş ve gözlemlere dayanarak ise sınıfta birçok öğrencinin zorlandığı fark edilmiştir. Araştırmalara göre de pek çok öğrenci basit kesirlere kıyasla bileşik kesirleri anlamakta daha fazla güçlük çekmektedir (Resnick vd., 2016; Siegler vd., 2011). Buna karşın sınıfta bazı öğrenciler aşağıda gösterilen İlknur'un yanıtına benzer cevaplar vermiştir.



Şekil 4.3.1. İlknur'un Bileşik Kesir Modellemesi

İlknur

Şekil 4.3.1'de belirtilen yanıt İlknur'un bileşik kesirlere dair ilk düşünme yoludur ve İlknur $\frac{9}{6}$ kesrini $\frac{6}{9}$ kesri olarak kabul ederek modellemiştir. Buradaki düşünme yolu için şu varsayımlar düşünülebilir; ilkokul öğrencilerinde sıklıkla karşılaşılan bir düşünme yolu olarak İlknur $\frac{9}{6}$ ile $\frac{6}{9}$ kesirlerini birbiri yerine kullanmış yani bu kesirlerin aynı nicelikler olduğunu düşünmüştür (Kamacı, 2021) veya $\frac{9}{6}$ kesri ile ilk defa karşılaştığı için nasıl modelleyeceğini bilememiş ve daha önceki bilgilerini kullanarak basit kesir gibi modellemeyi tercih etmişti. Buna dair araştırmacı ile İlknur arasında geçen diyalog şöyledir:

Araştırmacı: $\frac{9}{6}$ *ve* $\frac{6}{9}$ *aynı kesirler mi?*

İlknur: *Değil öğretmenim.*

Araştırmacı: *Ne fa*rkı var?

İlknur: *Bunun payı 6 bunun da paydası. Payları da farklı*.

Araştırmacı: *Hangisi daha büyük bir kesir?*

İlknur: $\frac{9}{6}$ *kesri öğretmenim. Payı paydasından büyük çünkü.*

Araştırmacı: *Bu kesir bir bütünden büyükse tek bir bütün ile temsil edebilir miyiz?*

İlknur yanıt vermedi. Hata yaptığının farkındaydı ancak nerede hata yaptığını bilemiyordu.

Araştırmacı: *Peki bu kesri modellemek için sence kaç tane modele ihtiyacım var?*

Bu oldukça yönlendirici bir soruydu ancak bileşik kesirleri modellemeye dair daha önce herhangi bir deneyimleri olmadığı için araştırmacı böyle bir soru sormayı uygun bulmuştu.

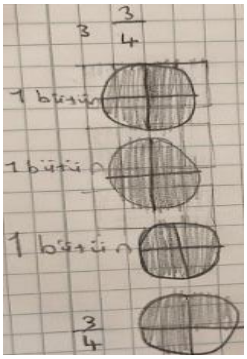
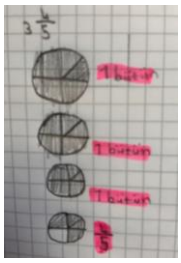
Ancak İlknur bu soruya da bir cevap vermedi. Bileşik kesirlerde kaç bütünün olduğu direkt olarak görülmediğinden öğrenciler için kesrin büyüklüğünü anlamak ve modellemek daha zor olabilir. Buna uygun olarak da İlknur $\frac{9}{6}$ kesrinin ne kadar büyük bir nicelik olduğu hakkında muhakeme edememiş ve daha önceki bilgilerine dayanan bir modelleme tercih etmişti. Sınıf içi tartışmaları destekleyerek, öğrencilerden bileşik kesir modellemeleri ve tartışma yöntemiyle hangi modelin daha uygun olduğu üzerinde konuşmaları desteklenmiştir.

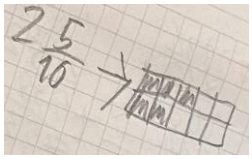
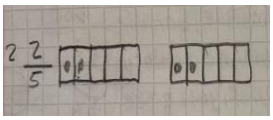
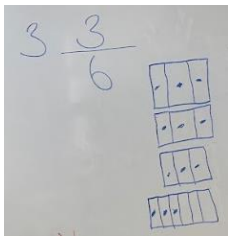
4.3.2. Öğretim Bölümü 2: Bir Bütünden Büyük Kesirleri Modelleme Etkinliği

Uygulama 1

Bu öğretim bölümünde bir bütünden büyük kesirlerin tam sayılı kesir olarak gösterimi ele alınmıştır. Öğrenciler tarafından örnek kesirler yine öğrenciler tarafından modellenmiştir. Bu görevde amaçlanan varsayılan öğrenmeler; eş parçalama ve yineleme yaparak tam sayılı kesirleri alan modeli ile temsil etmektir. Uygulama 1'de ortaya çıkan tüm yanıtlar Tablo 4.3.2'de gösterilmiştir.

Tablo 4.3.2. Öğrencilerin Parça-Bütün Bağlamında Tam Sayılı Kesirlere Dair Düşünme Yolları

Düşünme Yolu	Kod	Açıklama	Örnek
Kavramsal anlama	DY1	Eş parçalara ayırabilme, bütünü belirleyebilme ve kesir büyüklüğünü anlayabilme	
Eş parçalara ayırmadan yoksun düşünme	DY2	Kesrin büyüklüğünü doğru anlama ancak eş parçalar oluşturamama	

Basit kesir bilgisine dayanan düşünme	DY3	a) Bütünleri görmezden gelerek yalnızca basit kesir kadarını model ile gösterme	
		b)Bütünleri model sayısı olarak düşünme	
Farklı birim ve bütün kullanımına dayanan düşünme	DY4	Bütünleri ve kesirli ifadeyi farklı bütünler olarak düşünme	

Bir bütünden büyük kesirler konusuna geçildiğinde sınıftaki öğrencilerin oldukça farklı düşünme yolları kullandıkları belirlenmiştir. Bu derste öğrenciler ilk defa tam sayılı kesirlerle karşılaştıklarından tamamen doğru bir zihinsel model oluştururken zorlanmaları beklenmekteydi. Bununla beraber, kesirleri doğru şekilde temsil eden öğrenciler de bulunmaktaydı. DY1'de belirtilen ve kavramsal anlamayı yansıtan bir düşünme yolu olarak kabul edilen yanıtları sınıfta daha başarılı sayılabilecek öğrenciler tarafından verildiği dikkat çekmiştir. Siegler, Thompson, ve Schneider (2011) tam sayılarda olduğu gibi kesir büyüklüğü temsillerinin de doğruluğunun hem kesirlerdeki aritmetik yeterliliği hem de genel matematik başarıları ile yakından ilişkili olduğunu tespit etmişlerdir. Benzer olarak Douville ve Pugalee (2003), problem çözerken zihinde bir imge oluşturmanın ve bunu temsil etmenin matematik başarısıyla pozitif yönde ilişkisi olduğunu belirtmiştir. Bununla birlikte DY1'de belirtilen yanıtı veren öğrencilerin kesir büyüklüğü hakkında doğru bir zihinsel imgeye sahip olduğu, kesirlerde eş parçalama ve yineleme eylemlerini benimsediği söylenebilir.

Sınıftaki birçok öğrencinin nicelik olarak kesir büyüklüğüne dair doğru zihinsel imge oluşturamadığı ve bundan dolayı da bu nicelikleri temsil edemedikleri görülmüştür. Bu sebeple Tablo 4.3.2.'de de belirtilen düşünme yollarını kullanan öğrencilerin nicelleştirme yaparken zorluk yaşadığı görülmektedir. Öğrencileri hata yapmaya iten bu düşünme yolları, kesir büyüklüğünü anlayamama, kesri oluşturan pay, payda ve bütün bileşenlerini yorumlayamama, kesrin matematiksel sembolü ve görsel temsilleri arasında ilişki kuramama gibi durumlardan kaynaklanıyor olabilir.

DY2'de belirtilen düşünme yoluna sahip öğrencilerin bütüne dair doğru bir zihinsel imge oluşturulduğu söylenebilir. Ancak bu düşünme yolundaki öğrenciler bütünü belirleme ve eş parçalara bölerek modelleme konularında hatalar yapmıştır. Bu yanıt, Hackenberg (2013) ve Steffe ve Olive'in (2010) "bütünler içinde parçalar kesir şeması" (Parts-within-wholes fraction scheme) ile benzeşmektedir. Bu şema, sadece parçalara ayırma eyleminin olduğu ve parçaların büyüklüğünün eşit olmayabileceği şema türüdür ve ilkokulda birçok öğrenci bu şemaya sahiptir. Bununla birlikte, modellemede kullanılan daire modelinde simetrik çizgilerin olmaması sebebiyle öğrenciler daireyi eş parçalara ayırmakta zorluk yaşayabilirler (Nunes & Bryant, 2022; Tunç-Pekkan, 2015). Alan modelinin eş parçalara bölünmesi konusu modellenecek kesir büyüklüklerinden yani paydadaki sayıdan da kaynaklanmaktadır. Şöyle ki, Pothier ve Sawada (1983) yürüttükleri araştırmada 8-9 yaş aralığındaki çocukların şekilleri iki, dört ve sekiz parçaya bölmeyi iyi bir şekilde başardığını ancak şekilleri üç, beş, yedi ve dokuz parçaya bölmekte zorlandıklarını bulmuşlardır.

Bununla birlikte bu araştırmada öğrencilerin ikiye bölme tekniğini kullanmamaları dikkat çekici bir sonuç olmuştur. Hackenberg (2013) yürüttüğü araştırmada öğrencilerin daireyi gelişigüzel olarak, eş olmalarına dikkat etmeden böldüklerini ve kalan küçük parçanın da "artan miktar-fazlalık" olarak nitelendirdiklerini belirtmiştir. Charles ve Nason (2000) ise araştırmasında ilkokul öğrencilerinin bir daireyi yatay çizgiler kullanarak parçalara ayırdıklarını gözlemlemiştir. Bu araştırmada, bahsedilen araştırmalarda elde edilen sonuçlara uygun yanıtlarla karşılaşılmamıştır ancak elde edilen sonuçlar öğrencilerin daire modelinde dörtgen veya uzunluk gibi modellere göre daha fazla zorlandığı ve hata yaptığını göstermektedir.

DY3'te belirtilen yanıt, öğrencilerin önceki deneyimlerinden elde ettiği bilgileri kullandıklarını göstermektedir. DY3a'da tam sayılı kesrin bütün kısmını görmezden gelerek; DY3b'de ise bütünleri model sayısı olarak düşünerek yanıt vermişlerdir. Bu düşünme yollarını kullanan öğrencilerin tam sayılı kesirlere dair zihinsel imgelerinin henüz gelişmediği veya olgunlaşmadığı söylenebilir. DY4'te belirtilen yanıtta ise birim farklılığından kaynaklanan bir durum söz konusudur. Burada öğrenciler bütünleri ve kesirli ifadeyi farklı bütünler olarak düşünmenin yanı sıra farklı birimler kullanmayı da uygun görmüşlerdir. Dolayısıyla modelden de görüldüğü üzere bütünler ve basit kesir farklı birimlerden oluştuğundan aynı dili konuşmamaktadır. Bu durumda öğrenciler aynı büyüklükte bütün oluşturma ve birim kesri yineleme konularında desteğe ihtiyaç

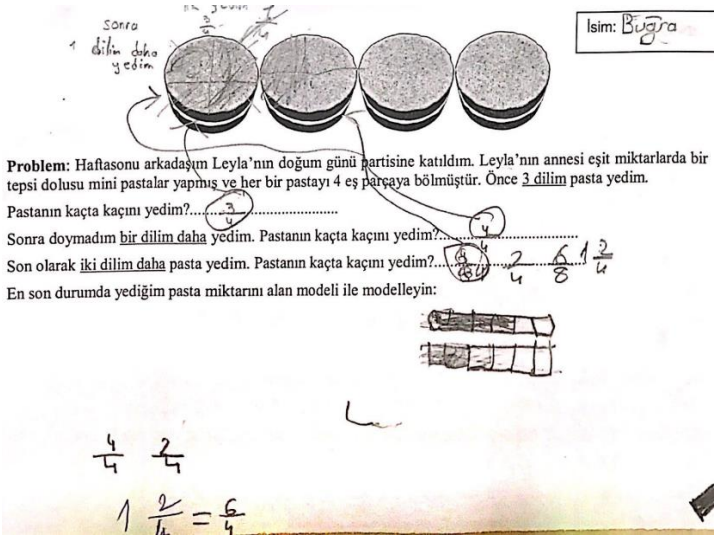
duymaktadırlar. Alan modelleri oluştururken aynı bütünleri kullanma en temel kesir bilgilerinden biridir ve çeşitli modelleme etkinlikleri ile bunun üstesinden gelinebilir (Hackenberg vd. 2016).

İlknur

Tam sayılı kesri modelleme etkinliğinde İlknur'un ilk düşünme yolu DY3b'de belirtilen yanıttır. İlknur, 2 bütünü $\frac{2}{5}$ kesrinden farklı bir nicelik olarak yorumlamıştır. Öğretimlerin ilerlemesiyle öğrencilerin birim kesir ve bütünün büyüklüklerini anlamış olmaları oldukça belirgin bir sonuçtu ancak kesirlerin bir bütünden büyük olması durumunda bütün büyüklüğüne dair zihinsel imgesini tamamen değiştiği gözlemlenmiştir. Jordan, Carrique, Hansen & Resnick (2016) inceledikleri 500 ortaokul öğrencisinin % 42'sinin çok kısıtlı kesir büyüklüğüne sahip olarak sınıflarını geçtiklerini tespit etmiştir. Öyle ki, kesir büyüklükleri tam olarak anlaşılmadan kesrin farklı modeller ile temsil edilmesi de pek mümkün olmamıştır. Bir niceliğin ya da niceliklerin farklı temsilleri arasında ilişki kurabilme öğrencilerin nicel muhakemelerini geliştirdiğinden (Nunes & Csapó, 2011; Thompson & Saldanha, 2000; Weber vd., 2014) sınıf içerisinde sıklıkla farklı temsil kullanımları uygulanmış ve kesir büyüklükleri üzerinde konuşulmuştur.

Uygulama 2

Değeri bir bütünden büyük kesirlerin öğretiminde öncelikle bileşik sonra tam sayılı kesirler modellenmişti. İkinci uygulamada ise bağlamsal bir problem olarak "Pasta Dilimleri Etkinliği" uygulanmıştır. Bu süreçte ise "İçinde bir bütün var mı, kaç bütün var? İki bütün var mı? Bu kesir bir bütünden küçük mü? Büyük mü?" gibi sorular sorularak öğrencilerin bileşik ve tam sayılı kesirleri bütünü referans alarak öğrenmesi desteklendi. Birinci uygulamadan farklı olarak bu etkinlikte öğrencilerin kendilerinin bir bütünü aşan miktarı keşfetmeleri desteklenmiştir. Sonuçta ise ilk uygulamaya göre daha fazla öğrencinin doğru yanıt verdiği veya yanlış yanıt verse bile bir bütünden fazla olma fikrini benimseyebildiği görülmüştür. Kullanılan bağlamsal problem örnek olarak Buğra'nın yanıtı Şekil 4.3.2'de gösterilmiştir.



Şekil 4.3.2. Buğra'nın Pasta Dilimleri Etkinliğine Yanıtı

Buğra problemin çözümünde bir bütünden büyük kesri gösterirken birkaç farklı düşünme yolu kullanmıştır. Yanıtlarına ilişkin diyalog örneği şu şekildedir:

Araştırmacı: *Pay ve payda neyi gösteriyor?*

Buğra: *Pastayı kaç parçaya böldüğümüzü pay*da; *kaç tane saydığımız da pay oluyor.*

Araştırmacı: *Burada* $\frac{4}{6}$ *yazmışsın. Pastayı 6 eş parçaya bölüp 4 tanesini mi aldın?*

Buğra: *Yok... O zaman* $\frac{4}{4}$ *olacak.*

Araştırmacı: *Bir bütün mü olacak yani? Bir bütünden iki dilim fazla yediği yazıyor.*

Buğra: *Doğru... Burası* $\frac{6}{6}$ *olacak o zaman.*

Araştırmacı: *Pastaları dört eş parçaya bölmüştük, payda nasıl 6 oldu bu durumda?*

Buğra: *Olmaz. Payda 4 olcak, o zaman bu model* $\frac{2}{4}$ *olacak.* (ikinci modeli gösterdi)

Araştırmacı: *Ne kadar pasta yemiştir o zaman?*

Buğra: $\frac{4}{4}$ *ile* $\frac{2}{4}$*'ü mü toplayacağım? Yani* $\frac{6}{8}$ *mi?*

Araştırmacı: *Nasıl yaptın anlatır mısın?*

Buğra: *İki pastanın bir tam olduğunu düşünürsek böyle olur. Ama bunlar iki tane bütün olduğu için bilmiyorum… Hepsi ayrı bütün.*

Araştırmacı: *Bir bütünü kaç eş parçaya ayırdığımızı sayalım.* (Önce araştırmacı saymaya başladı ve birim kesirleri yazarak ilerledi: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ ve

$\frac{4}{4}$….İkinci bütüne geçildiğinde Buğra tekrar $\frac{1}{4}$'ten itibaren parçaları saymaya başladı.)

Araştırmacı: *Şimdi yenen miktarları yazalım. Bir bütün yemiş ve bir de…?*

Buğra: *Bir de* $\frac{2}{4}$ *yemiş.*

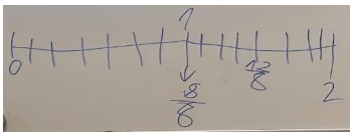
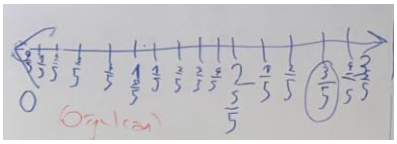
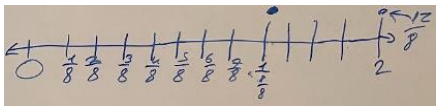
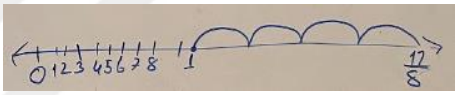
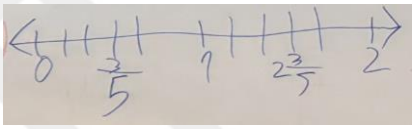
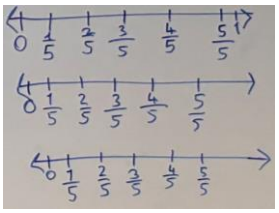
Buğra sonunda problemi doğru yanıtlamıştı ancak bunu kavramsal bir anlamaya dayanarak mı yapıyordu, net değildi. $\frac{4}{4}$ ile $\frac{2}{4}$ kesrini toplamayı düşündüğü yanıta göre Buğra aritmetiksel nicelleştirme yapmış ve sıklıkla karşılaşılan kavram yanılgısı olan paydaları toplama stratejisi kullanmıştır (Newton, Willard, & Teufel, 2014). Henüz yeni tam sayılı kesirleri öğrendikleri için didaktik bir yaklaşım yerine tartışma yöntemiyle hatalarını kendilerinin bulması hedeflenmişti. Bu sebeple öğrenciler bireysel olarak problemi çözdükten sonra tekrar bir araya gelip kendi yanıtları üzerinde tartışmışlardır. Bunun sonucunda ise doğru yanıt üzerinde karar kılarak hatalı düşünme yollarını değiştirme şansı elde etmişlerdir.

4.3.3. Öğretim Bölümü 3: Bir Bütünden Büyük Kesirleri Sayı Doğrusunda Gösterme Etkinliği

Uygulama 1 ve Uygulama 2

Bir bütünden büyük kesirlerin anlaşılması için kesrin parça bütün anlamının ötesine geçerek ölçme anlamı üzerinde durulmalıdır (Steffe, 2002). Bununla birlikte kesrin ölçme anlamıyla yakından ilişkili olan sayı doğrusu modeli, çocukların basit kesirlerden bileşik kesirlere geçişini kolaylaştırabilir (Tian & Siegler, 2017). Bu öğretim bölümünde bir bütünden büyük kesirlerde ölçme anlamı üzerinde çalışılmış; uzunluk niteliğine örnek olarak yürünen yol miktarlarının sayı doğrusunda gösterilmesi istenmiştir. Etkinlikte $\frac{10}{8}$, $\frac{12}{8}$ ve $2\frac{3}{5}$ olmak üzere üç kesir sayı doğrusunda gösterilmiştir. Ek olarak, kesir büyüklüğünü kavramsal olarak anlamak için sayı doğrusunun bir temsil aracı olarak kullanılmasının önemine dikkat çekilmiştir (Fennell & Karp, 2017). Amaçlanan varsayımsal öğrenme ise bir bütünden büyük kesirleri kapsamlı nicelleştirme yaparak sayı doğrusu üzerinde göstermektir. Ortaya çıkan düşünme yollarını gösteren öğrenci yanıtları Tablo 4.3.2'te belirtilmiştir.

Tablo 4.3.3.Öğrencilerin Ölçme Bağlamında Bir Bütünden Büyük Kesirlere Dair Düşünme Yolları

Düşünme Yolu	Kod	Açıklama	Örnek
Kavramsal anlama	DY1	Bütünü ve birim kesri referans alarak kesri doğru konumlandırma	
Sayı doğrusu kullanımında eksik kavramsal anlama	DY2	Birim kesri referans alarak bütüne ulaştıktan sonra tekrar birim kesirle başlama	
Bir bütüne kadar kapsamlı nicelleştirme	DY3	Eş parçalara ayırarak yalnızca ilk bütüne ulaşabilme	
Doğal sayı bilgisine dayanan düşünme	DY4	Paydadaki sayıya göre birimlere ayırma ve bütün konusunda hatalı düşünme	
Aşırı genelleme (overgeneralisation)	DY5	a) Bir bütünden büyük kesirlerin 1-2 aralığında olması gerektiğini düşünme	
		b) Alan modelindeki düşünme yolunu sayı doğrusunda kullanma	

Kesirleri sayı doğrusunda konumlandırma etkinliklerinde öğrenciler önce birim kesri belirler ve kapsamlı nicelleştirme yaparak sayı doğrusunu birimlere ayırır; sonrasında ise birim kesri kullanarak bileşik ve tam sayılı kesirlerin büyüklüğünü anlar ve sayı doğrusundaki yerini bulur (Resnick vd., 2015). Bu tanımlamada olduğu gibi DY1'deki öğrenciler birim kesri bir ölçü birimi olarak kabul ederek yineleme yapabilmiş ve diğer kesir ile bütünlerle ilişkilendirerek sayı doğrusunda doğru gösterebilmiştir. Dolayısıyla bu şekilde kesirleri sayı doğrusunda konumlandırabilen öğrencilerin kavramsal düşünme yoluna sahip olduğu kabul edilmiştir. Stephens ve Pearn (2003), kesirleri doğru bir biçimde ve diğer kesir büyüklükleriyle ilişkilendirerek sayı doğrusunda konumlandırabilen öğrencileri "yetkin çarpımsal düşünürler-proficient multiplicative thinkers" olarak adlandırmıştır. DY1, DY2 ve

DY5b'de bulunan öğrencilerin sayı doğrusunu eş parçalara ayırmaya dikkat ettikleri belirgin bir şekilde görülmekte iken DY4 ve DY5a'da bulunan öğrencilerin sayı doğrusunda genellikle 0-1 arası uzunluk ile 1-2 arasındaki uzunluğu eşit parçalamadığı görülmektedir. Sayı doğrusunda bütünlerin arasını eş parçalar yerine gelişigüzel şekilde parçalara ayıran öğrencilerin kapsamlı nicelleştirme konusunda sınırlı düzeyde olgunlaşmaya sahip olduğu düşünülmektedir. Sayı doğrusundaki her bir aralığın bir birimi temsil ettiği ve dolayısıyla eş olması gerektiğine dair doğru çıkarım yapan öğrencilerin oldukça az olduğu gözlemlenmiştir. Bu durumdaki bazı öğrenciler, sayı doğrusunda aralıkların eşit olması için çabalamış ancak bu bilgiyi bir ezber gibi kabul etmiştir. Sonuçta, eş parçaların her birinin aynı birim kesrin tekrarı olduğu ve her bir aralığın bir birim kesri belirttiği tam olarak anlaşılmamıştır (Hackenberg vd., 2016). Bununla benzer olarak Pesen (2008), öğrencilerin sayı doğrusu üzerindeki bir bütünü eş parçalara ayırmada zorluk çektiklerini ve sayı doğrusu üzerinde belirlenen noktaya karşılık gelen kesir sayısını yazma becerisi gösteremediklerini belirtmiştir.

Öğrenciler, birimlere ayırarak kapsamlı nicelleştirme yapmaya çabalamışlar ancak bütün kavramı üzerinde ve bir bütünün sayı doğrusundaki gösterimine bakarak akıl yürütmedikleri için yüzeysel nicelleştirme yapmakta geri kalmışlardır. Öğrencilerin bütünü belirleme ve bütünü referans almadaki hatalarının sebebi ise kesir büyüklüklerine dair doğru bir zihinsel imge geliştirememeleri olabilir. Obersteiner ve Tumpek (2016) dördüncü ve beşinci sınıf öğrencilerinin kesirleri karşılaştırırken kesir birimini, payı ve paydayı anlamaya başladıklarını ancak kesirleri sayı doğrusu üzerinde gösterirken büyüklüklerini anlamakta oldukça zorlandıklarını belirtmiştir. Ek olarak, Pearn ve Stephens (2007) 5. ve 6. sınıflar için geliştirdiği kesirler tarama testi sonucunda öğrencilerin kesirleri sayı doğrusu üzerinde konumlandırmayla ilgili çeşitli kavram yanılgılarına sahip olduklarını bulmuşlardır. Bu araştırma bulgusuna benzer olarak Resnick vd., (2016) çoğu 4. sınıf öğrencisinin bileşik kesirleri de bir bütünden küçük olarak kabul ettiğini tespit etmiştir. Benzer olarak Jordan ve arkadaşları (2016) 4. sınıftaki öğrencilerin hem basit hem de bileşik kesirleri bir bütünden küçük olarak tahmin ettiklerini, bu da pay ve payda arasındaki ilişkiye dikkat etmediklerini belirtmiştir. Gunderson, Hamdan, Hildebrand ve Bartek (2019), kesrin sayı doğrusu üzerinde yerini belirlemenin kesir büyüklüğü anlayışını destekleyebileceğini ortaya koymuştur. Bu sebeple bu öğretim bölümünde kesirleri sayı doğrusu üzerinde gösterme alıştırmaları yapılmıştır.

Tüm bileşik ve tam sayılı kesirlerin sayı doğrusunda 0-1 veya 1-2 arasında olması gerektiğini düşünen ve sayı doğrusu modelini de alan modelinde olduğu gibi birden fazla bütün ile ilişkilendiren öğrencilerin bu yanıtı aşırı genelleme olarak yorumlanmıştır. Buna benzer olarak Saxe ve arkadaşları (2007) öğrencilerin sayı doğrusu etkinliklerinde her zaman 1'in bütün olması gerektiğini, dolayısıyla sayı doğrusunda kesir gösterimlerinin 0 ile 1 arasına yazılması gerektiğini düşündüklerini belirtmiştir. Siegler ve Pyke (2013), aşırı genelleme kavramını kesirlerle işlemler konusunda incelemiş ve aşırı genellemeden kaynaklı hataların çok yaygın olduğunu belirtmişlerdir. Bu durum, kesir öğretiminde basit kesirlere yapılan vurgu ile başlanması ile de ilişkilendirilmiştir (Stafylidou & Vosniadou, 2004; Vosniadou, Vamvakoussi, & Skopeliti, 2008). Öğrenciler kesirler konusunda ilk olarak birim kesirleri ve dolayısıyla basit kesirleri öğrenir ve bu kesirleri farklı modellerle temsil etmeyi öğrenirler. Dolayısıyla tıpkı doğal sayıların önce öğrenilmesinin kesirlerde de doğal sayı bilgisi kullanmayı neredeyse zorunlu kılması gibi basit kesirlerin öğrenilmesi de öğrencilerin bütün diğer kesirleri basit kesir gibi kabul edip temsil etmesine yol açabilir.

Elde edilen bulgulara dair bir diğer sonuç ise öğrencilerin sayı doğrusunu nasıl kullanacaklarına dair bilgi eksikliğidir. Örneğin DY5'te belirtilen örnek düşünme yolu, öğrencilerin önceki derslerde uyguladıkları alan modeline dayalı düşünme yolunun kopyalanması olarak görülmüştür. Aslında, bu öğrenciler bir tam sayılı kesrin bir bütünden büyük olduğunun farkındadır ancak bunu sayı doğrusunda nasıl temsil edeceğini bilememiştir. Jordan ve arkadaşlarına (2013) göre sayı doğrusu kullanımı aritmetik işlem veya işlemsel anlama ile özdeşleştirilir ve öğrenciler aritmetik bilgisi gerektiren durumlarda daha sık hata yaparlar (Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001). Dolayısıyla bu sonuçlar beklenen bir durumdur. Bu sebepledir ki iki bütün arasına kesirleri konumlandırma görevinde öğrenciler 0'ı veya 1'i dahil etme kararsızlığı ile birlikte sayı doğrusundaki çizgileri sayma eğiliminde olurlar (Bright vd., 1988).

İlknur

İlknur bu etkinlikte, DY3'te örnek olarak gösterilen yanıtı vermiştir. Buna göre tam sayılı bir kesri sayı doğrusunda gösterme etkinliğinde sayı doğrusunda ilk bütüne ulaşmada herhangi bir hata yapmamış ancak 0-1 arası ile 1-2 arasını farklı uzunluklara ayırmıştır. İlknur, doğru bir düşünme yolu ile kapsamlı ve yüzeysel nicelleştirme yaparak kesirlerin büyüklükleri hakkında doğru akıl yürütebilmiştir ancak bir bütünden büyük kesirleri sayı doğrusunda göstermede yetersiz bilgi ve deneyim sebebiyle hata yapmış gibi görünmektedir.

Araştırmacı: *Sayı doğrusunda 1-2 arasını 4 parçaya ayırmışsın. Neden böyle yaptın?*

İlknur: *1'den sonra 4 tane saydım öğretmenim.* $\frac{12}{8}$*'e gelince durdum.*

Araştırmacı: $\frac{12}{8}$ *kesri 2 bütüne mi eşit?*

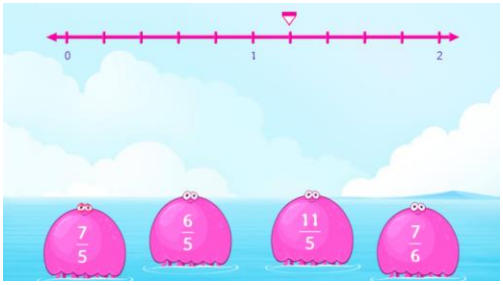
İlknur: *Hayır ama sayı doğrusu orada bitmişti o yüzden oraya yazdım.*

Buna göre İlknur, $\frac{12}{8}$ kesrinin 2 bütüne eşit olmadığının farkındaydı ve bu oldukça olumlu bir sonuç olarak kabul edilebilir. Ancak sayı doğrusu uzunluğunu bütünsel olarak ele almayıp rastgele bir uzunluk birimi belirleyip sayı doğrusunda ilerlediği için sayı doğrusu bittiğinde son kesre ulaştığını düşünmüştür. Bu durum İlknur'un bir ölçme olarak sayı doğrusuna bütüncül bakamadığı, daha aritmetiksel bir bakış açısı kullandığı ve hem kapsamlı hem yüzeysel nicelleştirmede yeterli düzeyde olmadığını göstermektedir.

4.3.4.Öğretim Bölümü 4: Dijital Sayı Doğrusunda Bir Bütünden Büyük Kesirleri Belirtme Etkinliği

Uygulama 1

Bu öğretim bölümünde kesirleri sayı doğrusu üzerinde gösterme alıştırmaları uygulanmıştır. Splashlearn websitesindeki oyun etkinlikleri akıllı tahtaya yansıtılarak sınıfça uygulanmıştır. Öğrenciler önce bileşik sonra tam sayılı kesirleri bireysel olarak sayı doğrusu üzerinde göstermiş ve tüm sınıf katılımıyla bu yanıtlar üzerinde tartışılmıştır. Bu görevde amaçlanan varsayımsal öğrenme değeri bir bütünden büyük kesirlerin sayı doğrusundaki yerini tahmin etme ve birim kesirleri yineleyerek bileşik kesirleri sayı doğrusunda göstermektir.



Bir bütünden büyük kesirleri sayı doğrusunda gösterme görevlerinde öğrencilerin sıkça hata yapması bütünün ne olduğuna dair net ve kalıcı bir zihinsel imge geliştirememeleri ve sayı doğrusunun nasıl kullanıldığını bilmemeleri ile ilişkilendirilmiştir. Birim kesir ve basit kesir büyüklüklerinin gelişiminde olduğu gibi öğrenciler alan modeli ile temsil etmeyi daha

önce ve daha kolay öğrenirken sayı doğrusuna geldiklerinde büsbütün farklı düşünme yolları kullanma eğiliminde olmaktadır. Bu sebeple benzer etkinlikleri sınıfça tartışarak ve yönlendirici sorular sorarak "dijital sayı doğrusu oyunu" oynanmıştır. Öğrenciler bir bütünden büyük kesirlerin yerlerini gösterirken tıpkı basit kesrin yerini bulmak gibi bir bütünün kaç eş parçaya ayrıldığını sayması gerektiğini biliyordu. Bazı öğrenciler 0-1 arasını doğru sayıp bileşik kesrin yerini doğru şekilde 1 bütünden sonraki kısımlarda gösterirken bazı öğrenciler, sıfırı sayıp saymama konusunda hala tam olarak doğru bir düşünme yolu geliştiremediği için bileşik kesrin yerini doğru gösterememiştir. Sonuç olarak öğrencilerin bileşik kesirlerle tahmin becerileri, basit ve tam sayılarla olan becerilerine göre daha hatalı ve daha geç gelişmiştir ve bu durum başka araştırmacılar tarafından da çeşitli araştırmalarda ortaya konmuştur (Jordan vd., 2016; Siegler & Lortie-Forgues, 2014).

Sınıf içi uygulamada öğrencilerin belirtilen kesrin hangi doğal sayıya ve kaçıncı bütüne yakın olduğuna dair tahminde bulunmuş ve böylece yüzeysel nicelleştirme yapabildikleri gözlemlenmiştir. Öğrencilerin kapsamlı nicelleştirmelerini geliştirebilmek için ise sayı doğrusunun kaç eş parçaya ayrıldığı, birimin ne olduğu ve bu birimi kesrin hangi noktada olduğunu bulmak için nasıl kullanıldığı gibi konularda muhakeme etmeleri desteklenmiştir. Sonuçta, öğrencilerin bileşik kesirleri 1 noktasının sağına yerleştirebildiği ve kesir büyüklükleri üzerinde muhakeme edebildikleri gözlemlenmiştir. Gunderson, Hamdan, Hildebrand ve Bartek (2019), çocukların sayı doğrusu üzerinde kesirleri tahmin etme becerilerini incelemiş ve sayı doğrusu üzerinde kesirleri konumlandırmanın kesir büyüklüğü anlayışını desteklediğini ortaya koymuştur. Hansen ve arkadaşları (2017) kesirleri karşılaştırma ve sayı doğrusunda kesirlerin yerlerini tahmin etme etkinlikleri aracılığıyla kesir büyüklüğü bilgisi ve matematik başarısını incelemiş ve kesir büyüklük bilgisi ile daha geniş matematik başarılarının karşılıklı olarak birbirini desteklediğini göstermektedir. Başka araştırmacılar da öğrencilerin kesir büyüklüklerini kavramak için tahmin etkinliklerine sıklıkla yer verilmesi ve sayı doğrusu modelinin kullanılmasını önermektedir (Hecht & Vagi, 2010; Jordan vd., 2017; Siegler vd., 2011).

Bu öğretim bölümünde öğrencilerin motivasyonlarının gözle görülür şekilde arttığı ve dersten keyif aldıkları gözlemlenmiştir. Riconscente (2013), kesirleri öğretmeye yönelik eğlenceli bir yaklaşımın, çocukların kesirlerden keyif almalarının yanı sıra motivasyonlarını ve öz yeterliliklerini de artırdığını belirtmiştir. Bununla birlikte, öğrencilerin birim kesirleri kolaylıkla yineleyebildiği ve bu yineleme sonucunda bir bütünden büyük kesirlere

ulaşabildiği gözlemlenmiştir. Ayrıca sayı doğrusunda yineleme yaparak kesrin bütün ile ilişkisini fark edebilmişlerdir. Benzer olarak Tzur (1999), 4. sınıf öğrencileriyle 3 yıl boyunca yürüttüğü öğretim deneyinde çocukların bileşik kesirlerin oluşumunu destekleyen kavramları nasıl öğrendiklerini incelemiştir. Bu süreçte bilgisayarda problem çözme görevleri öğrencilerin kesir şemalarında olumlu anlamda değişikliğe sebep olmuştur; öğrenciler birim kesri bir bütünün parçası olarak düşünmekten, onu bir referans bütünle çarpımsal bir ilişki içinde birim olarak düşünmüşlerdir.

Uygulama 2

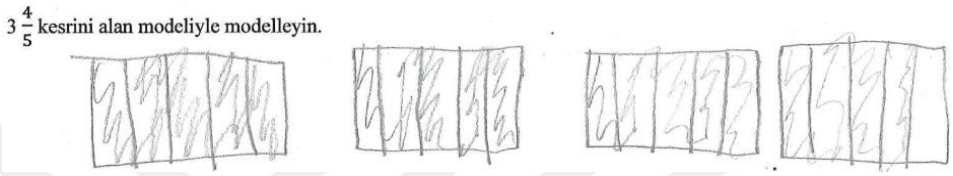
Araştırmanın ikinci uygulamasında sayı doğrusu etkinliklerinde öğrencilerin kesir büyüklüğünü anlamaları ve kesir duyusu geliştirmeleri için tahmin becerisi üzerinde daha fazla durulmuştur çünkü tahmin becerisi kesir duyusu kavramıyla da ilişkilendirilmektedir. Kesir duyusu; kesir büyüklüğü, kesirlerin karşılaştırılması ve sıralanması, kesirlerde dayanak noktalarının anlaşılması tahmin becerisini içeren öğretim fırsatları aracılığıyla geliştirilir (Fennell & Karp, 2017; Teoh, Mohamed, Parmjit, & Kor, 2020). Buna ek olarak Johanning (2011) tahmin gerektiren ve modeller ya da diyagramlar kullanılarak çözülebilen basit bağlamsal problemler sunmanın kesirlerle çalışırken sayı duyusunun kullanımını teşvik edeceğini belirtmiştir. Sonuçta da ikinci uygulamada daha az öğrencinin bileşik kesirleri 0-1 arasına yerleştirdiği gözlemlenmiştir. Araştırmada "bütün" teması altında uygulanan kurdele etkinliğinin pozitif etkisi olarak öğrenciler sayı doğrusunu eş parçalara ayırırken daha dikkatli ve doğru çözümler bulabiliyorlardı. Ancak ilk uygulamaya benzer olarak öğrenciler genellikle sayı doğrusundaki aralıkları değil çentikleri saymayı tercih etmişlerdi. Bu durumu düzeltmek için ikinci uygulamada sayı doğrusu modelinde aralıkların bir kesir uzunluğunu temsil ettiği vurgulanmış; tahtaya çıkan öğrenciler yanıtlarını açıklarken de devamlı olarak bu vurgu yapılarak kalıcı bir düşünme yolu olarak aralık sayma alışkanlığı geliştirmeleri desteklenmiştir.

4.3.5. Öğretim Bölümü 5: Tam Sayılı Kesri Modelleme Etkinliği

Uygulama 1

Bu öğretim bölümünde değeri bir bütünden büyük kesirlerin modellenmesi etkinliği uygulanmıştır. Öğrencilerin bir bütünden büyük kesirleri alan modeli ile ilk olarak nasıl modellediklerine dair düşünme yolları Tablo 4.3.2'de açıklanmıştı. Öğrencilerin kesirleri modellerken parça-bütün bağlamındaki ilk düşünme yollarından farklı olarak bu bölümde

DY2 ve DY3b'da belirtilen yanıtları veren öğrencilerin olmaması dikkat çekicidir. Bu durum, araştırma sürecindeki müdahalelerin olumlu etkisi olarak yorumlanmıştır. Daha önceki bölümlerde bir bütünden büyük kesirleri alan, uzunluk ve sayı doğrusu modelleriyle temsil etmeye dayanan çeşitli görevler yürütülmüştür. Ayrıca sınıf tartışmaları, grup çalışmaları ve akran öğretimi desteklenmiştir. Derinlemesine görüşmeler sonrasında hedef gruptaki öğrencilerde daha fazla gelişim olduğu görülmüştür. Bunun sonucunda sınıf içi etkinliklere ek olarak öğrenciler için nispeten zor olan temalarda bu görüşmelerin öğrencilerdeki gelişimin önünü açtığı görülmüştür. Şekil 4.3.5.'te gösterilen İlknur'un yanıtı bu durumu açıkça göstermektedir.



Şekil 4.3.5. İlknur'un Tam Sayılı Kesir Modellemesi

İlknur

İlknur'un bu yanıtı önceki yanıtlarına göre ilerleme kaydettiğini kanıtlar niteliktedir. İlknur, ilk tam sayılı kesir modelleme etkinliğinde DY3b düşünme yolunu yani bütünü, modellenecek kesir olarak kabul ederek modellemişti. Modellerken doğru sayıda ve eşit büyüklüklerde bütün oluşturma gayreti içinde olmuş ve birim kesri yineleyerek ilerlemiştir. Dolayısıyla İlknur'un kesir büyüklüğü üzerinde muhakeme edebildiği, hem niceliği oluşturmada hem de nicelleştirmede büyük bir ilerleme kaydettiği görülmektedir.

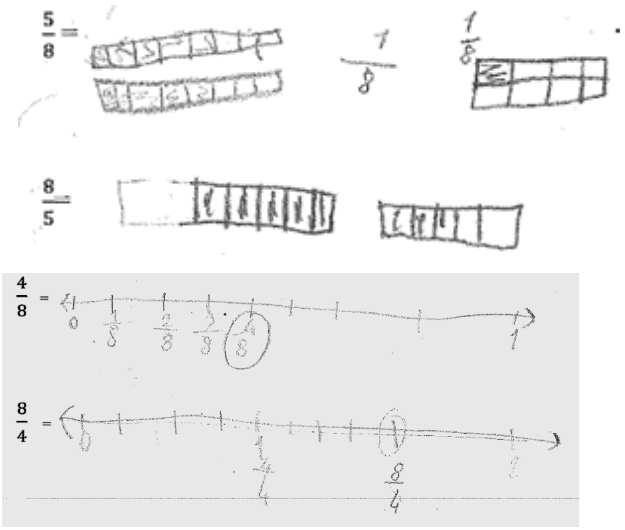
4.3.6. Öğretim Bölümü 6: Ters Kesirleri Modelleme Etkinliği

Uygulama 1

Bu öğretim bölümünde bir bütünden büyük kesirlerin büyüklüğünü anlayabilmek adına daha önceki öğretim bölümlerinde uygulanan alan modeli ve sayı doğrusu modeli ile temsil edilmesi amaçlanmıştır. Bu doğrultuda, bir bütünden küçük ve büyük kesirleri ilişkilendirerek kesir büyüklükleri hakkında düşünmeyi destekleyen ters kesirler (reversed fractions) kullanılmıştır. Bu öğretim bölümünde varsayılan öğrenmeler, ters kesirleri parça bütün anlayışına dayanarak alan modeli; kesirlerde ölçmeyi anlamak için sayı doğrusu modeli kullanarak temsil etmedir.

Etkinlik planlanırken, alanyazından da elde edilen bilgilere dayanarak öğrencilerin ters kesirleri temsil ederken hata yapabilecekleri, birbirinin tersi iki kesrin aynı kesirler olabileceğini düşünebilecekleri oldukça olasıydı. Daha önce yürütülen öğretimlerde alan ve sayı doğrusu modelleri ile çeşitli alıştırmalar yapılmış ve öğrencilerde gelişme gözlemlenmiştir. Ancak bu öğretim bölümünde öğrenciler için nispeten kafa karıştırıcı etkinliklerde nasıl düşünebileceklerini ölçmek için ters kesirler etkinliği uygulanmıştır. Bu sebeple sırasıyla $\frac{5}{8}$ ve $\frac{8}{5}$ kesirlerini alan modeli ile; $\frac{4}{8}$ ve $\frac{4}{4}$ kesirlerini sayı doğrusu ile temsil etme görevi verilmiştir. Matematikteki kavramlara ait farklı temsil türleri kullanmak öğrencinin bilgisini transfer edebilmesi ile ilişkilendirildiğinden oldukça önemlidir (Ainsworth, 2006; Goldin, & Shteingold, 2001; Weber vd., 2014). Bununla birlikte birim kesirlere dayanarak kesirlerde ölçme anlamına çalışmak yineleme, eş parçalama gibi kesir şemalarının oluşmasında gereklidir (Steffe, 2002). Ek olarak, kesirlerde ölçme anlamının gelişmesi için yalnızca sayı doğrusu değil, alan modeliyle de öğrenciler kesirleri temsil etmelidir (Hackenberg, 2013; Norton & Wilkins, 2012; Tunç-Pekkan, 2015). Sayı doğrusu etkinliğinde öğrencilerden iki sayı doğrusunu alt alta çizmeleri istenerek bu durum iki ölçü birimini koordine etmek için bir destek aracı olarak kullanılmıştır (van Galen vd., 2008).

Elde edilen sonuçlara bakıldığında öğrencilerin hem basit hem bileşik kesirlerin büyüklüklerini artık daha iyi anlayabildiği, her iki kesrin farklı birim kesirlerden oluştuğunu fark ettikleri görülmüştür. Alan modeli gösteriminde öğrenciler eş parçalama yaparak sonuca ulaşırken sayı doğrusu modelinde birim birim ilerleyerek kapsamlı nicelleştirme yapmışlardır. Bu bulgulara ek olarak, öğrencilerin büyük çoğunluğunun alan modeli ile gösterimde daha az hata yaptıkları ve dolayısıyla doğru bir zihinsel imge ile soruyu çözdükleri gözlemlenmiştir. Ayrıca alan modeli öğrencilerin en sık kullandığı model çeşidi olmuştur. Bu durum, İlkokul öğrencilerinin probleme uygun temsil oluşturamama (Kılıç & Özdaş, 2010) ve temsiller arası geçiş yapamama sebebiyle sıklıkla aynı temsil türünü kullanmayı tercih etmelerinin bir çıktısı olarak yorumlanmıştır (Baştürk, 2010; Deniz, 2016; İpek & Okumuş, 2012; Kılıç & Özdaş, 2010; Özgün Koca, 1998). Örnek olarak İlknur'un yanıtları Şekil 4.3.6.1'de gösterilmiştir.



Şekil 4.3.6.1. İlknur'un Ters Kesir Modellemeleri

İlknur

İlknur $\frac{4}{8}$ kesrini sayı doğrusu üzerinde büyük ölçüde doğru temsil etmiştir. Bunu yaparken de bir bütün olarak 0-1 arasını birim birim ilerleyerek parçalara ayırmış ancak eş parçalara ayırmayı doğru şekilde yapılandıramamıştır. Birçok öğretim bölümünden sonra öğrencilerden sayı doğrusunu ikiye bölerek ilerleme mantığını kullanmaları beklenmişti ancak parçalara ayırırken çoğunlukla birim birim ilerleyerek yani kapsamlı nicelleştirme yaparak soruyu çözmüştür. Bu çözümde fark edilen diğer bir sonuç İlknur'un $\frac{4}{4}$'ün 1; $\frac{8}{4}$'ün de 2 bütüne eşit olduğunu fark edemeyip çarpımsal akıl yürütememesi ve kavramsal bilgiyi kullanamamasıdır. Bu durumda görüldüğü gibi, kesir denkliği için kavramsal bilgi, birden fazla kesrin bir sayı doğrusu üzerinde sırasıyla aynı büyüklüğe ve aynı sayıya karşılık gelebileceği fikrini içermektedir (Lenz, Reinhold & Wittmann, 2022). Dolayısıyla İlknur aritmetiksel işlem olarak ezbere yöntemlerle sayı doğrusu kullanmış ve kesir büyüklüğüne bakarak karar vermemiş olabilir. İlknur da sınıfın çoğunluğu gibi alan modelinde başarılı sonuçlar ortaya koyarken sayı doğrusu modelinde kesir büyüklüklerini referans almadan, işlemsel bir düşünme yolu kullanmıştır. Özellikle $\frac{1}{4}$ birim kesrini sayı doğrusunda 4. çizgide; $\frac{8}{4}$ kesrini de 2. bütünün solunda bir noktada göstermesi oldukça dikkat çekici yanıtlardır. İlknur'un $\frac{8}{4}$ kesrinin 2 bütüne eşit olmadığını düşünmesi kesir denkliğini ve dolayısıyla yüzeysel nicelleştirmedeki eksikliğini gösterebilir.

Araştırmacı: *Sayı doğrusunda $\frac{8}{4}$ kesrinin yerini nasıl buldun, açıklar mısın?*

İlknur: *Sıfırdan başladım teker teker saydım öğretmenim.*

Araştırmacı: *Kaçıncı saymada bu kesre ulaştın?*

İlknur: *Sekizincide.*

Araştırmacı: *Peki* $\frac{1}{4}$ *kesrini neden 3. saymayı gerçekleştirdiğin yerde belirttin?*

İlknur: *Aaaaa orası* $\frac{3}{4}$ *olmalı öğretmenim, yanlış yazdım.*

Araştırmacı: $\frac{1}{4}$ *kesrinin yeri neresi olur o halde?*

İlknur: *Sıfırdan hemen sonra gelir.*

Araştırmacı: $\frac{8}{4}$ *kesri ne kadar büyük bir kesir?*

İlknur: *Bileşik kesir öğretmenim. 1'den sonra gelir yani.*

Araştırmacı: $\frac{8}{4}$ *kesrinde kaç bütün var?*

İlknur: (Biraz düşündü) *İki tane öğretmenim… 2'ye eşit olmalı.*

Yönlendirici sorular yardımıyla İlknur doğru bir düşünme yolu geliştirebilmişti. Ayrıca $\frac{1}{4}$ kesrini bilinçli olarak 4. noktada belirtmediğini söylemesi oldukça olumlu bir gelişmedir.

İlknur'un düşünme yollarının süreç içerisindeki değişimi ve bu süreçteki müdahaleler Tablo 4.3.6'da özetlenmiştir.

Tablo 4.3.6.İlknur'un Bir Bütünden Büyük Kesirlere Dair Gelişen Düşünme Yolları ve Müdahaleler

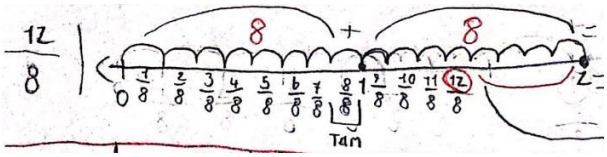
Öğretim Bölümleri	Öğretim Bölümü 1	Öğretim Bölümü 2	Öğretim Bölümü 3	Öğretim Bölümü 4	Öğretim Bölümü 5	Öğretim Bölümü 6
Müdahaleler	Alan modeli ile modelleme ve birim kesir-bütün ilişkisini vurgulama		Sayı doğrusu ile modelleme ve kesir büyüklükleri hakkında tartışma		Alan modeli ile modelleme ve birim kesir-bütün ilişkisini vurgulama	Alan ve sayı doğrusu ile modelleme
Düşünme Yolları	Toplamsal düşünme ve aritmetik işlem		Toplamsal düşünme	Yüzeysel ve kapsamlı nicelleştir-me	Yüzeysel ve kapsamlı nicelleştirme	Kapsamlı nicelleştirme ve kısmen yüzeysel nicelleştirme

Uygulanan birinci öğretim deneyinde İlknur, bileşik kesrin basit kesir ile aynı nicelikler olduğunu düşünerek modellemiştir. Bir sonraki öğretim bölümünde de hatalı bir şekilde tam sayılı kesirde yer alan bütünü, çizilmesi gereken alan modeli sayısı olarak yorumlamıştır. Bu hatalı düşünme yollarını değiştirmek ve öğrencilerin kesir büyüklüğü üzerinde düşünmelerini sağlamak için modelleme etkinlikleri yapılmış ve bütün ile birim kesir ilişkisi

vurgulanmıştır. Öğretim bölümü 3 ve 4'te, ölçme bağlamında bir bütünden büyük kesirlerin büyüklüğünde ise İlknur öncelikle bir bütüne kadar doğru nicelleştirme yapmıştır. Ancak en az iki bütün içeren kesir büyüklüğünde tekrar hata yapmış ve sayı doğrusunda birimleri ayırma konusunda bir nicelleştirme gösterememiştir. Bu noktada sayı doğrusunda kesir büyüklüklerini gösterme etkinliği uygulanmıştır. 5.öğretim deneyinde ise İlknur'un başlangıçta kullandığı düşünme yollarını değiştirmek için tekrar alan modeli kullanılmıştır. Böylece İlknur'un düşünme yollarının değiştiği ve geliştiği görülmüştür. Son olarak ters kesir etkinliği ile bir bütünden küçük ve büyük kesirleri önce alan, sonra sayı doğrusu modeliyle temsil etmesi istenmiştir. Sonuçta İlknur sayı doğrusunu birimlere ayırarak ve kesir büyüklüğüne göre konumuna karar vererek yüzeysel ve kapsamlı nicelleştirme yapabilmiştir. Bununla birlikte sayı doğrusunda gösterim etkinliğinde bir bütünden büyük kesri dayanak noktalarına göre doğru yerde gösterememiştir. Bu durum, bir bütünden büyük kesirleri sayı doğrusunda gösterme ve kesrin ölçme anlamı konusunda öğrencinin gösterdiği gelişime rağmen bazı alışık olunmayan durumlarda veya etkinliklerde yine hatalı düşünme yolu geliştirdiğini göstermektedir.

Beren ve Yavuz

Bileşik kesirlerin büyüklüğünü anlamak için yapılan $\frac{9}{6}$'u modelleme etkinliğinde Beren yalnızca bir bütün çizerken Yavuz, İlknur gibi bileşik kesri ters çevirip basit kesir gibi modellemiştir. Ters kesirleri alan modeliyle modelleme ($\frac{5}{8}$ ve $\frac{8}{5}$) etkinliğinde ise her iki öğrenci de iki kesri de aynı büyüklük olarak düşünüp sayı doğrusunda göstermişti. Sınıf içi alıştırmalar ve tartışmalar sonrasında bir bileşik kesirleri sayı doğrusu üzerinde göstermeyi gerektiren etkinlik yürütülmüştür.



Şekil 4.3.6.2. Beren'in Yanıtı



Şekil 4.3.6.3.Yavuz'un Yanıtı

Beren'in yanıtına bakıldığında sayı doğrusundaki aralıkları sayarak önce ilk bütüne, sonra ise yine eş parçalara dayanarak $\frac{12}{8}$ kesrine ulaştığı görülmektedir. Bunun sonucunda Beren'in basit kesir ve bileşik kesrin farklı büyüklükler olduğunu, farklı birimlerden oluştuğunu ve her bir birimin sayı doğrusu üzerinde bir aralığı temsil ettiğini fark edebildiği gözlemlenmiştir. Bu durum, Beren'in yüzeysel nicelleştirmeye dayanarak sayı büyüklüğü hakkında da doğru bir düşünme yolu geliştirdiğini göstermektedir. Yavuz'un yanıtına bakıldığında ise $\frac{12}{8}$kesrinin sayı doğrusunda 1'den sonra geleceğini düşünmesi olumlu bir gelişme olarak görülmekle birlikte bunun kavramsal bir zemine oturtarak nicelleştirmeye dayanan bir çözüm olmadığı söylenebilir. Öyle ki Yavuz 0 noktasından başlayarak paydadaki sayı kadar, yani 8 kere ilerlemiş ve o noktanın $\frac{12}{8}$ olduğunu düşünmüştür. Sayı doğrusunda 1'i neden o noktaya yerleştirdiği hakkında net bir çıkarım yapılamasa da bu haliyle bu sonucun doğru ve güçlü bir nicelleştirme içermediği söylenebilir.

Tam sayılı kesirlerin modellenmesi etkinliğinde Yavuz Tablo 4.3.2'de DY4'te belirtilen yanıtı vermiş; doğal sayıyı farklı, kesirli ifadeyi farklı bütünler olarak düşünerek farklı birim kullanımına dayanan modelleme yapmıştır. Daha açık bir ifade ile Yavuz, tam sayılı kesrin büyüklüğünü anlamanın ötesinde, birim kesir ile ilgili de farklı zihinsel imge geliştirmiştir. Beren ise aynı etkinlikte DY3 (a) yanıtı vermiş; yani bütünü görmezden gelerek yalnızca basit kesir kadarını modellemiştir. Buraya kadarki düşünme yollarına bakıldığında, tam sayılı kesirler konusunda her iki öğrenci de "bütün" üzerinde muhakeme etmemiş, kesirlerin büyüklüklerine göre ilişkilendirme yapamamış, birim kesir üzerinde düşünmemiş, ne yüzeysel ne de kapsamlı nicelleştirme yapamamışlardır. Bu durum tam sayılı kesrin bir bütün olarak hem bütün hem de kesirli ifade olarak bir nicelik temsil ettiğini anlayamaması şeklinde yorumlanabilir. Sonuç olarak öğrencilerin bileşik ve tam sayılı kesir büyüklüklerini anlamada farklı düşünme yollarına sahip olmasına ek olarak, alan modeli ve sayı doğrusu kullanımlarına göre de bu düşünme yollarının farklılaştığı görülmüştür.

Beren ve Yavuz başlangıçta hatalı yanıtlar vermiş olmasına rağmen sınıfça çeşitli alıştırmalar uygulandıktan sonra bu düşünme yollarını değiştirmişlerdir. Buna karşın, öğrencilerin her bir ders sonucunda düşünme yollarının gelişmesi doğrusal bir şekilde ilerlememiş ve varsayılan düzeyde gerçekleşmemiştir. Örneğin örnek öğrenci yanıtlarının tahtada modellenerek sınıf içerisinde tartışılması sonrası Beren'in düşünme yolunda farklılaşma olmuştur. Tam sayılı kesrin başındaki doğal sayının da kesirle birlikte bir niceliği temsil ettiğini anladıktan sonra bu sefer Beren tam sayının çizilecek model sayısı olduğuna

karar vermişti. Örneğin $2\frac{2}{5}$ kesrini modellemek gerektiğinde yalnızca 2 model çiziyor ve bu modelleri yineleme mantığıyla birim kesirlere ayırıp $\frac{2}{5}$ kesrini modelliyordu.

Yavuz da tam sayılı kesirlerdeki ilk düşünme yolundan sonra farklı bir düşünme yolu geliştirmiştir. Basit kesri tek başına ayrı bir kesir olarak düşünmüş olmasından kaynaklı olarak tam sayı kadar bütün çizmiş ancak bütünü oluşturma fikrinin de tamamen farklı olduğu görülmüş çünkü $\frac{3}{3}$ kesri burada bütünü belirtmemektedir. Ayrıca modellere bakıldığında farklı büyüklükte bütünlerin kullanıldığı görülmektedir. Dolayısıyla aritmetiksel bir bakışla çeşitli çözümlerde bulunmuş ancak nicelleştirme yaparken bazı kavramsal hatalar yapmıştır. Buraya kadarki yanıtlarına bakılırsa Yavuz hem kesrin büyüklüğünü anlama hem de bütün kavramına dair tam olarak doğru bir düşünme yoluna sahip değildir. Daha önceki düşünme yolunun bir bütünden büyük kesirlere geçildiğinde birim kesir, bütün, eş parça, eş bütün gibi kavramlara dair düşünme yolunu sürdüremediği görülmektedir. Bu durumu ortadan kaldırmak için sınıf içi tartışmalar ve grup çalışmaları desteklenerek benzer konularda etkinlik örnekleri yürütülmüştür.

4.4. Öğrencilerin Birim Kesirleri Karşılaştırma Sürecindeki Düşünme Yolları ve Değişimi

Öğrencilerin bu temadaki var olan düşünme yolları ve değişimi önce birim kesirleri; sonrasında ise diğer kesir türlerini karşılaştırma çerçevesinde yorumlanmıştır. Bu tema kapsamında hedef grup öğrencilerinden Yavuz'un ve Beren'in yanıtları detaylı incelenmiştir.

4.4.1.Öğretim Bölümü 1: Kesir Çubukları Etkinliği

Uygulama 1

Birim kesirleri karşılaştırma görevi ilk olarak kesir çubukları kullanarak ve kesirlerde parça-bütün anlamına dayanarak uygulanmıştır. Kesir çubukları kullanılan bu bölümde birim kesir ve bütün kavramları vurgulanmış ve "bütün" teması altında detaylı bir şekilde açıklanmıştı. Öğrenciler hem akıllı tahtaya yansıtarak dijital kesir çubuklarıyla hem de grup olarak somut kesir çubuklarıyla birim kesirlerin büyüklüğü konusunda tartışmış ve kesirleri karşılaştırmışlardır. Dijital araçlar kesir kavramını derinleştirmek ve geleneksel kesir öğretiminde sıklıkla kullanılan kesirlerin parça-bütün anlayışını artırmak için iyi bir araç

olarak kullanılabildiğinden (Simon vd., 2018; Yeo & Webel, 2022) dersin devamında dijital sayı doğrusundan faydalanarak öğrencilerden sayı doğrusunda birim kesirlerin yerlerini göstermeleri ve karşılaştırmaları istenmiştir. Bu görevde amaçlanan varsayımsal öğrenme, kesir çubuklarını ve sayı doğrusunu kullanarak birim kesirleri karşılaştırmaktır. Böylece öğrenciler kesirlerde ölçme kavramını ve kesir büyüklüklerini anlayabilirler. Aşağıdaki tabloda öğrencilerin tamamının birim kesirleri karşılaştırma sürecinde kullandığı düşünme yolları gösterilmiştir.

Tablo 4.4.1. Öğrencilerin Kesirleri Karşılaştırma Sürecindeki Düşünme Yolları

Düşünme Yolları	Kod	Açıklama	Örnekler
Doğal Sayı Temelli Düşünme Yolu	DY1	Pay ve paydanın doğal sayı büyüklüğüne bakarak kesrin büyüklüğüne karar verme. En büyük birim kesrin 1 olduğunu düşünme	"1/10 şeritler arasındaki en büyük kesirdir çünkü 10 diğerlerinden daha büyüktür." "1 şeritler arasındaki en büyük kesirdir çünkü en büyük parçadır."
Algısal Düşünme Yolu	DY2	Kesir çubuklarının büyüklüklerine bakarak kesirlerin büyüklüğü hakkında çıkarım yapma	"Bu kesir (½) uzunluğu daha büyük göründüğü için daha büyük olmalıdır"
Nicelik Temelli Düşünme Yolu	DY3	Kesirleri temsil ettikleri boyut ve büyüklük açısından karşılaştırma Kesirlerin bütüne yakınlığı dikkate alma	"1/2 kesri, iki 1/4 veya üç 1/6 gibi diğer kesirleri içerir. Bu yüzden 1/2 en büyüktür." "1/2 en büyük kesirdir çünkü bütüne en yakın olanıdır"

Bu etkinlik ile birlikte ilk defa öğrenciler birim kesirleri karşılaştırmışlardır. Öğrenciler kesir çubuklarını kullanarak birim kesir büyüklüklerini ilişkilendirmiş ve büyüklükleri hakkında tartışmışlardır. Elde edilen bulgularda dikkat çeken nokta, öğrencilerin somut kesir çubukları önlerindeyken kolaylıkla kesirleri sıraladıkları; kesir çubukları olmadan ise bunu yapmakta zorlandıklarıdır. Birim kesirleri sayı doğrusunda gösterirken ise bütüne yakınlık konusunda sınırlı yüzeysel nicelleştirme yaptıkları görülmüştür. Öğrencilerin hemen hemen hepsi doğal sayı bilgisine dayanarak paydadaki kesrin büyüklüğüne göre karar vererek birim kesirleri karşılaştırmışlardır. Örneğin $\frac{1}{4}$'i sayı doğrusunda gösterme görevinde öğrenciler çeyrek kavramına dayanarak sayı doğrusunu bölmelere ayırmamıştır yani genellikle dayanak noktalarını referans alarak çözüm yapmamışlardır. Bu bulguya paralel olarak Hansen vd. (2017) kesirleri karşılaştırırken öğrencilerin çoğunlukla doğal sayı bilgisini kullanma gibi daha önce öğrendikleri ezbere dayalı stratejiler kullandıklarını belirtmiştir. Bu sonuçtan

farklı olarak Lamon (2012) ile Markovits ve Sowder (1994), birçok öğrencinin dayanak noktalarına dayanarak kesirleri karşılaştırdıklarını belirlemişlerdir. Dikkat çeken bir diğer nokta ise öğrencilerin çoğunlukla alan modeli gibi görsel temsiller kullanması olmuştur. Örnek olarak Yavuz'un düşünme yolları aynı zamanda sınıfın durumunu da yansıtır niteliktedir.

Araştırmacı: $\frac{1}{2}$ *kesrinin en büyük birim kesir olduğuna nasıl karar verdin?*

Yavuz: *Kesir çubuklarını yan yana koydum. En büyük uzunluk* $\frac{1}{2}$ *idi.*

Bu yanıta göre Yavuz kesir çubuklarının görünüşlerine göre ilişkilendirme yapmıştır. Thompson vd. (2014) bunun gibi düşünme yollarını "büyüklük farkındalığı (awareness of size)" tanımlamasını yapmışlardır. Buna göre öğrenci bir niceliğin görsel temsiline bakarak büyüklük hakkında çıkarımda bulunabilir. Yavuz'un somut materyaller önünde olmadığında aynı yanıtı verip veremeyeceğine ve dolayısıyla her bir birim kesrin görünenin dışında ne kadar büyük olduğuna dair doğru bir anlayış geliştirmesi hakkında emin olamayız. Bu sebeple, kesirlerde ölçme anlamına dayanarak birim kesir büyüklüklerini görmeyi sağlamak amacıyla (Watanabe, 2006) 0-1 aralığında boş bir sayı doğrusu verilmiştir.

Araştırmacı: *Bana* $\frac{1}{5}$ *ve* $\frac{1}{2}$*'nin sayı doğrusundaki yerlerini gösterebilir misin?*

Yavuz: *Şurada bir yerde olmalı* ($\frac{1}{5}$'i 1'e; $\frac{1}{2}$'yi ise 0'a yakın noktalarda işaretledi.)

Araştırmacı: *Neden* $\frac{1}{2}$*'in 0'a yakın ve* $\frac{1}{5}$*'in 1'e yakın olduğunu düşünüyorsun?*

Hiçbir açıklama yapamadı, kafası karışmış görünüyordu.

Araştırmacı: *Hangisi daha büyük?* $\frac{1}{5}$ *mi* $\frac{1}{2}$ *mi? Neden?*

Yavuz:$\frac{1}{2}$ *daha büyük çünkü en büyük uzunluk oydu.*

Bu yanıta göre Yavuz'un kesir çubuklarına bakarak geliştirdiği düşünme yolunu sayı doğrusunda da uyguladığı görülmektedir. "Neden $\frac{1}{2}$ kesri 0'a; $\frac{1}{5}$ kesri ise 1'e yakın?" sorusuna yanıt veremedi ancak 5'in 2'den büyük olduğunu dolayısıyla daha büyük ve bir bütüne yakın olduğunu düşündüğü varsayılabilir çünkü birim kesir büyüklüğü ile ilgili temada bu düşünme şekline benzer yanıtlar vermişti. Yavuz, başlangıçta hedeflendiği şekliyle dayanak noktalarına göre düşünerek yüzeysel nicelleştirme yapmamış; birim kesirleri doğal sayı gibi düşünmüştür. Öğrencileri, ölçüm fikrine ilişkin bir anlayış geliştirmelerini destekleyen etkinliklere dahil ederek dayanak noktaları üzerinde düşünmelerini sağlamak kesir büyüklüğü bilgilerini geliştirmek oldukça önemlidir (Bailey vd., 2012; Johanning, 2011;

Teoh, Mohamed, Parmjit, & Kor, 2020). Bununla birlikte farklı birim kesirleri tek bir sayı doğrusu üzerinde göstermek, öğrenciler farklı paydalardaki kesirlerle çalışmayı bilmediği için oldukça zordur. Bu sebeple Yavuz'a, alışıldık ve kolay anlaşılır bir yöntem olarak kesirlerde parça-bütün anlamını vurgulayan bir görev verilmiştir (Hansen vd., 2015; Jordan, Carrique, Hansen & Resnick, 2016):

Araştırmacı:$\frac{1}{5}$ *ve* $\frac{1}{2}$ *kesirlerini alan modeliyle gösterip hangisinin bütüne yakın olduğunu söyleyebilir misin?*

Yavuz: $\frac{1}{2}$ *zaten yarımdır ve 1'e yakındır.* (İki daire modelini de doğru çizdi.)

Araştırmacı: *Peki,* $\frac{1}{5}$ *kesri* $\frac{1}{2}$*'ye mi yakın yoksa 1 bütüne mi daha yakın?*

Araştırmacı: $\frac{1}{2}$ *bütüne daha yakın öğretmenim.*

Araştırmacı: *Tamam. Şimdi sayı doğrusuna geri dönelim. Lütfen bak ve bana* $\frac{1}{2}$*'in ve sonra da* $\frac{1}{5}$*'in nerede olduğunu göster.*

Yavuz orta noktayı işaret etti ve $\frac{1}{2}$ yazdı. Sonra 0 ile $\frac{1}{1}$ arasında bir yere $\frac{1}{5}$ yazdı. Bu noktada kavramsal değişimi gerçekleşti ve Yavuz birim kesirlerin büyüklüğüne dair yüzeysel nicelleştirme yapabildi. Sonuç olarak, Yavuz birim kesirleri alan modeli ile temsil ettikten sonra büyüklüklerine dair doğru bir çıkarımda bulunmuş ve sonrasında bu bilgisini sayı doğrusuna transfer etmiştir. Bu örnek dışında da sınıfça ya da grup olarak çalışarak öğrencilerden birim kesirleri modellemeleri ve sonra sayı doğrusunda göstermeleri istenmiştir. Böylece, temsil kullanmanın en önemli amaçlarından biri olan genellemeye ulaşma ve temsil kullanmada esneklik ve transfer edebilme becerilerini geliştirmeleri amaçlanmıştır. Elde edilen bulgular da Yavuz'un kesirlerde parça-bütün anlayışına dayanan alan modeli kullanımına dair düşünme yolu geliştirdikten sonra bunu sayı doğrusu modeline aktarabildiğini göstermektedir. Çeşitli araştırmalar da bu durumda olduğu gibi birden fazla temsil kullanma ve temsiller arası dönüşüm fikrinin matematik öğrenenler için etkili bir yol olduğunu kanıtlamıştır (Fennell & Rowan, 2001; Rau vd., 2013). Bununla birlikte, bir niceliğin farklı temsilleri arasında ilişki kurabilme öğrencilerin nicel muhakemelerini geliştirmektedir (Nunes & Csapó, 2011; Thompson & Saldanha, 2000; Weber vd., 2014).

4.4.2.Öğretim Bölümü 2: Bütüne En Yakın Kesri Bulma Etkinliği

Uygulama 1

Birim kesir büyüklüğünün ele alındığı tema Öğretim Bölümü 5'te öğrencilerden $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$ ve $\frac{1}{20}$ birim kesirlerinden hangisinin bir bütüne en yakın olduğunu bulmaları istenmişti. Bu görev, kesirlerde bütün kavramını anlamanın yanı sıra kesir büyüklüklerini anlamayı ve kesirlerde karşılaştırmayı da gerektirmektedir. Bu görevde amaçlanan varsayımsal öğrenme birim kesirleri bir bütünü referans alarak karşılaştırmadır.

Araştırmanın birinci temasında da belirtilen öğrenci yanıtlarına bakıldığında, birçok öğrencinin paydada belirtilen doğal sayıların büyüklüğüne bakarak yani $\frac{1}{20}$'in bütüne en yakın olduğunu belirterek soruyu yanıtladığı görülmüştür. Bazı öğrenciler ise paydayı paydan çıkararak aradaki farkın büyüklüğüne göre kesirleri sıralamışlardır. Bu durum, öğrencilerin daha önceki bilgilerine dayanarak aritmetik işlem yaptığını göstermektedir. Payda ve pay arasındaki fark kavramına dayanan zihinsel imgeden anlıyoruz ki öğrenciler toplamsal düşünme yolu kullanmışlar ve hatalı ilişkilendirme yapmışlardır. Pearn ve Stephens (2004), bu stratejiye "pay-payda arasındaki farka dayalı düşünme-gap thinking" adını vermiştir. Buna göre olarak öğrenciler, fark eşitse her iki kesrin de eşit olduğunu düşünebilirler (örneğin $\frac{2}{3}$ ve $\frac{3}{4}$ eşittir) (Clarke & Roche, 2009). Bu tür bir düşünme yolu, çarpımsal düşünmeden ziyade toplamsal düşünmeye dayanan akıl yürütme eğilimini kanıtlamaktadır (Clarke & Roche, 2009). Benzer olarak, Mitchell & Horne (2008) bu akıl yürütmenin eş parçalama, birim oluşturma ve denklik içeren faaliyetlerden ziyade parça-bütün faaliyetlerinin etkisinden kaynaklandığını belirtmiştir (González-Forte vd., 2022). Örnek olarak Yavuz'un yanıtı aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 4.4.2.Yavuz'un Bütüne En Yakın Kesri Bulma Etkinliğine Yanıtı

Yavuz

Yavuz bu soruda diğer arkadaşlarından farklı olarak $\frac{1}{15}$'in bütüne yakın olduğunu düşünmüştür. Nasıl bir düşünme yoluna sahip olduğuna dair ise görüşme sırasında net bir bilgi vermemiştir. Görüşmede, nasıl yapacağını bilemediğini ve bu sebeple herhangi birini

yanıtladığını dile getirmiştir. Bu yanıta göre Yavuz kavramsal bir anlayışa ve net bir düşünme yoluna dayanmayan bir yanıt vermiştir (Crawford vd., 2018). Etkinlik üzerinde tartışırken alan modeli çizdikten sonra ise taralı alanların büyüklüklerini karşılaştırıp verdiği yanıtı değiştirerek $\frac{1}{10}$ kesrinin bir bütüne en yakın kesir olduğunu belirtmiştir. Bu sonuca kesirleri ancak alan modeliyle temsil edince ulaşabilmiştir.

4.4.3. Öğretim Bölümü 3: Birim Kesirleri Karşılaştırma Etkinliği

Uygulama 1

Bu öğretim bölümünde öğrencilerin birim kesir büyüklüklerini anlama ve karşılaştırma stratejilerini daha net biçimde ortaya koyabilmek için bağlamsal bir problem kullanılmıştır: "Deniz bir pizzanın $\frac{1}{6}$'ini, Feride $\frac{1}{3}$'ini, Beyza ise $\frac{1}{8}$'ini yemiştir. Yedikleri pizza miktarlarını modelleyin. En çok pizza yiyen kimdir? En az pizza yiyen kimdir? Neden böyle düşündüğünüzü yazın." Bu görevde amaçlanan varsayımsal öğrenme birim kesirleri karşılaştırma ve alan modeli ile temsil etmedir. Ek olarak, problem çözümünü de gerekçelendirmeleri istenmiştir. Sonuçta problemi tam olarak doğru yanıtlayan iki öğrenci olup diğer öğrencilerin düşünme yolları şunlardır:

i)Problemdeki kesirleri modelleme ve paydadaki sayıların büyüklüklerine göre sıralama (örn. $\frac{1}{3}$ kesri $\frac{1}{6}$kesrinden küçüktür çünkü 3 daha küçük bir sayıdır.)

ii)Kesirleri farklı bütünler çizerek modelleme ancak sıralama yapmama,

iii)Kesirlerin paydalarını toplayarak tek bir model çizip modelde üç parçayı boyama,

iv)Her bir kesrin payının 1 olması sebebiyle soruda belirtilen üç kişinin de eşit miktarda yediğini belirtme ve kesirleri modellememe

Bu yanıtlara göre öğrencilerin bütünü ve birim kesrin büyüklüğünü tam olarak anlayamadıkları ve bu sebeple de bu kesirleri ilişkilendiremedikleri görülmektedir. Paydadaki sayıyı referans alarak sıralayan öğrenciler doğal sayı bilgisine ve toplamsal düşünmeye dayanan düşünme yolu ile soruyu çözmüşlerdir. Bu sonuç, Resnick ve arkadaşları (2016) ile Rodrigues ve arkadaşları (2019) tarafından yapılan araştırmaların sonuçlarıyla benzerlik göstermektedir. Buna göre öğrenciler kesirlerin paydalarına bakarak birim kesirleri sayı doğrusuna yerleştirmişlerdir. Dolayısıyla bu araştırmada da görüldüğü

gibi öğrenciler, karşılıklı ilişki konusunda doğru bir düşünme yolu kullanmamışlardır. Sonuçta bu öğrenciler kesrin paydası ve büyüklüğü arasındaki çarpımsal ilişki üzerinde akıl yürütmemiştir.

Paydaları toplayarak tek bir model çizip üç parçayı boyayan öğrencilerin aritmetiksel işlem yaptığı, çözüm konusunda işlemsel bir bakış açısı benimsediği görülmektedir. Problemdeki üç kişinin de eşit olarak birer dilim yediğini belirten öğrenci ise bu açıklamanın ötesinde, birim kesirlerin büyüklüğü konusunda anlam karmaşası yaşamakta; hepsinin bir bütün olduğunu ve dolayısıyla da eşit olmaları gerektiğini düşünmektedir. Örnek olarak Yavuz'un yanıtı Şekil 4.4.3.1'de gösterilmiştir.



Şekil 4.4.3.1. Yavuz'un Birim Kesir Karşılaştırma Problemine Yanıtı

Yavuz

Yavuz kesirlerin paydalarını toplayarak tek bir model çizmiş ve modelde üç parçayı boyamıştır. Bu durum, araştırmalarda sıklıkla karşılaşılan ve öğrencilerin en büyük kavram yanılgılarından biri olarak kabul edilmektedir (Newton, Willard & Teufel, 2014). Buna göre, Yavuz'un birim kesir büyüklüklerine dair zihinsel imgesine ek olarak "bütün" anlayışından da söz etmek gerekir çünkü ilk etkinliklerden itibaren Yavuz'un bütün kavramına dair doğal sayı temelli bir düşünme yoluna sahip olduğu belirtilmişti.

Araştırmacı: *Bu soruyu çözerken neden tek bir model ile modelledin?*

Yavuz: *Hepsinin payı 1 olduğu için.*

Araştırmacı: *Paydalardaki sayılar neyi temsil ediyor?*

Yavuz: *Payda, modelin kaç parçaya bölüneceğini söyler.*

Araştırmacı: *Sen kaç parçaya böldün bu modeli?*

Yavuz: *Kaç parçaya ayırdığımı hesaplıyorum öğretmenim.* (birim kesirlerin paydalarını sayıp topluyor) *Buldum, 17.*

Araştırmacı: *Az önce payda kadar eş parçaya böleriz dedin. Niye paydaları topladın?*

Yanıt vermedi, bir yerde yanlış bir şey yaptığını fark etmiş ama nasıl düzelteceğini bilmiyordu.

Araştırmacı: *Sence bu soruyu farklı şekilde çözebilir miyiz?*

Yavuz: *Üç tane kare çizerim sonra paydalardaki sayılara bölüp bir parçasını alırım.*

Araştırmacı: *Bu kesirlerden en büyüğü hangisi desem ne yanıt verirsin?*

Yavuz: $\frac{1}{8}$ *mi?*

Araştırmacı: *Ben senin düşünceni merak ediyorum. İstersen önce bu kesirleri modelle.*

Yavuz birim kesirleri modellerken birçok öğrenci gibi bütünleri farklı büyüklüklerde çizmişti. Örneğin $\frac{1}{8}$'i modellerken daha büyük bir alan çizerken $\frac{1}{3}$'i modellerken daha küçük bir alan modeli çizmişti. Bu durum yalnızca birim kesir değil bütünü kavramsallaştırma noktasında da hatalı bir düşünme yolunu işaret etmektedir. Bu konu hakkında sınıf içerisinde neredeyse tüm öğretim bölümlerinde de konuşulmuştur; eş parçalar ve bütün kavramlarını vurgulayarak birim kesir büyüklükleri hakkında çokça tartışma ve modelleme etkinlikleri yapılmıştı. Araştırmada birçok defa model çiziminden sonra öğrencilerin hatalı düşünme yollarını değiştirmiştir. Ancak bu etkinlikte olduğu gibi, farklı bütünlerin referans alındığı alan modellerini yorumlamak ne kadar doğru olabilirdi? Öğrenciler bu noktada hala müdahaleye ihtiyaç duymaktadır.

Araştırmacı: *Ben bir pastayı 8 eş parçaya bölüp bir tanesini alırsam mı yoksa 3 eş parçaya bölüp bir parçasını alırsam mı daha çok yemiş olurum?*

Yavuz: *İkisinde de eşit yerim.* (Birkaç saniye içinde yanıtını değiştirdi.) *Üçe bölersek dilim daha büyük olur daha çok yerim.*

Araştırmacı: *Herkesin eşit miktarda yediğini belirtmişsin. Neden böyle düşündün?*

Yavuz: *Çünkü hepsi bir dilim yemiş o yüzden eşit yemişler.*

Araştırmacı: *Model çizerek bu soruyu tekrar çözer misin?*

Yavuz üç pasta çizdi ancak paydası büyük olan kesri modellerken daha büyük model çizmişti.

Araştırmacı: *Eğer pizzaların büyüklüğü eşit olmazsa yedikleri pizza miktarını doğru bir şekilde karşılaştırabilir miyiz?*

Yavuz: *O zaman aynı daireyi çizmem gerekiyor.*

Yavuz kesirleri modellerken "bütün" ve "eş parça" vurgulamaları sebebiyle yaptığı yanlışı düzelterek bütünlerin büyüklüklerini birbirine yakın çizmeye gayret etti. Öğrencilerin birim kesirleri karşılaştırırken paydadaki sayılara bakarak doğal sayı temelli karar verdikleri bilindiğinden (Nunes & Bryant, 2023) Yavuz'dan modelleme konusunda dikkat etmesi istenmiştir. Çünkü bunu yaparak modeldeki parçalar üzerinden karşılıklı ilişkiye (reciprocal

relationship) dayanan genellemeye varabilirdi: "Bir bütünü ne kadar çok eş parçaya bölersek o kadar küçük birim kesirler elde ederiz." Daha sonrasında yürütülen benzer alıştırmalar sonucunda da paydadaki sayı ile kesrin büyüklüğü arasındaki bu ters ilişkiyi keşfetmeleri hedeflenmişti. Sınıfta bunu yapabilen öğrencilerin bulunması ve her öğretim bölümünde de sayısının artmasına ek olarak Yavuz bu düşünme yoluna henüz ulaşamamıştı. Araştırmanın bu bulgusuna benzer olarak Gould (2005) tarafından yapılan çalışmada öğrenciler kesirlerde karşılaştırma yaparken payları ve paydaları kendi aralarında karşılaştırma, işlem yapma veya paydası küçük olanın daha büyük kesir olduğunu ifade etme gibi stratejiler kullanmışlardır.

Yavuz'un düşünme yollarının süreç içerisindeki değişimi ve bu süreçteki müdahaleler Tablo 4.4.3'te özetlenmiştir.

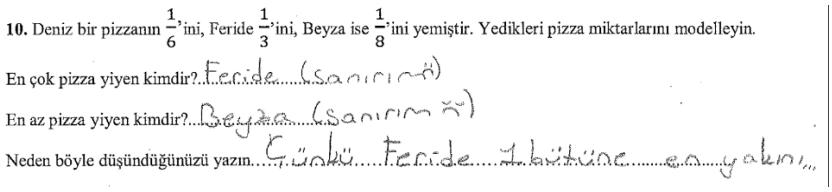
Tablo 4.4.3. Yavuz'un Birim Kesirleri Karşılaştırmaya Dair Gelişen Düşünme Yolları ve Müdahaleler

Öğretim Bölümleri	Öğretim Bölümü 1	Öğretim Bölümü 2	Öğretim Bölümü 3
Müdahale	Kesir büyüklükleri hakkında tartışma	Kesir büyüklüğü vurgusu ile bütüne yakınlığı yorumlama ve alan modeli çizme	Bağlamsal problem kullanma ve alan modeli çizme
Düşünme Yolları	Yüzeysel nicelleştirme	Başlangıçta nicelleştirme yok ancak alan modeli vurgusu ile yüzeysel nicelleştirme	Başlangıçta toplamsal ve işlemsel düşünme; sonrasında alan modeli vurgusu ile yüzeysel nicelleştirme

Birim kesirleri karşılaştırma etkinliklerinde Yavuz başlangıçta kesir çubukları ile çalışmış ve kesir çubuklarının büyüklüğüne bakarak kesirleri karşılaştırmıştır. Dolayısıyla tahmine dayalı bir şekilde yüzeysel nicelleştirme yaptığı söylenebilir. Bu etkinlikte kesir büyüklüğü üzerinde düşünmesini ve yüzeysel nicelleştirme yapabilmesi için dayanak noktalarından faydalanılmış ve buna dair sorular sorularak yönlendirilmiştir. İkinci öğretim bölümünde ise birim kesirleri karşılaştırma etkinliğinde herhangi bir nicelleştirme durumu gözlemlenmemiştir çünkü öğrenci soru üzerinde hiç düşünmeden rastgele bir yanıt verdiğini belirtmiştir. Üçüncü öğretim deneyinde ise bağlamsal bir problem içerisinde birim kesirleri karşılaştırılması istenmiştir. Bu noktada ise Yavuz paydaları toplayarak tek bir model üzerinde karşılaştırma yapmıştır. Bu etkinlikte de paydadaki sayıların büyüklüğüne göre karşılaştırmıştır. Sonuçta ise problemdeki birim kesirleri tek başına modelleyerek Yavuz bu düşünme yolundan uzaklaşmıştır.

Uygulama 2

Birim kesirleri karşılaştırma etkinliği 2. uygulamada da aynı şekilde yürütülmüş ve sonuçta da benzer bulgular elde edilmiştir. Öğretim 2'de belirtilen birim kesirleri karşılaştırma etkinliğinde doğru bir örnek olarak Azra'nın yanıtı Şekil 4.4.3.2'de gösterilmiştir.


10. Deniz bir pizzanın $\frac{1}{6}$'ini, Feride $\frac{1}{3}$'ini, Beyza ise $\frac{1}{8}$'ini yemiştir. Yedikleri pizza miktarlarını modelleyin.

En çok pizza yiyen kimdir? Feride (sanırım ?)

En az pizza yiyen kimdir? Beyza (sanırım ?)

Neden böyle düşündüğünüzü yazın. Çünkü Feride 1 bütüne en yakın,,

Şekil 4.4.3.2. Azra'nın Birim Kesir Karşılaştırma Problemine Yanıtı

Azra birim kesir büyüklüğüne karar verirken bir bütünü referans almış ve dolayısıyla yüzeysel nicelleştirme yapabilmiştir. Cramer, Post, ve del Mas (2002), kesirleri karşılaştırırken dayanak noktalarına göre işlem yapmayı "geçişken (transitive)" strateji olarak; Crawford vd., (2018) ise aynı stratejiyi "kavramsal (conceptual)" strateji olarak isimlendirmiştir. Cramer, Post ve del Mas (2002)'nin kavramsal strateji olarak kabul ettiği yanıt ise çok daha derin bir düşünme gerektirmekte olup araştırmacılar tarafından "artık (residual)" strateji olarak isimlendirilmiştir. Buna göre bu stratejiyi kullanan öğrenciler, örneğin $\frac{5}{6}$ ve $\frac{3}{4}$ kesirlerini karşılaştırırken her iki kesrin de bütün birimden bir "parça" uzakta olduğunu ve eksik miktarlar olarak $\frac{1}{6}$, eksik miktar $\frac{1}{4}$'den daha az olduğu için, $\frac{5}{6}$'nın bütüne daha yakın ve dolayısıyla daha büyük kesir olması gerektiğini yansıtabilir. Bu araştırmada ise böyle bir düşünme yolu kullanan bir öğrenciye rastlanmamıştır.

Beren ve İlknur

Kesir çubukları etkinliklerinde Beren ve İlknur'un benzer düşünme yollarına sahip olduğu görülmüştür. İkisi de en büyük birim kesrin 1 olduğunu belirtmişlerdir. Öğrencilerin, 1 doğal sayısının bir birim kesir olduğunu düşünmesi beklenmeyen bir yanıttı çünkü sınıf içerisinde birim kesrin ne olduğuna ilişkin sıklıkla konuşulmuş ve "bir bütünün eş parçalarından biri" ifadesi vurgulanmıştı. Bir bütünün birim kesir olduğunu düşünmeleri niceliklerin, birimlerin ne olduğu hakkında akıl yürütmediklerini veya kesir çubuklarındaki en büyük parçanın 1 olması sebebiyle yanıtladıklarını göstermektedir. Bu sebeple öğrencilerin bu konudaki düşünme yollarını geliştirmek için ders içerisinde birim ve ölçme kavramları vurgulanarak modelleme etkinlikleri yürütülmüştür. Özellikle kavram yanılgılarında ya da öğrenci hatalarında görsel temsiller destek olarak kullanılmıştır. Sonuçta

alan modeli kullanımı Beren ve İlknur'un birim kesir büyüklüğü hakkında daha doğru düşünme yolları geliştirmelerine imkan tanımıştır.

Öğrencilerin yüzeysel nicelleştirme yapmalarına olanak tanıyan birim kesirlerin bir bütüne göre yakınlığını sıralama etkinliğinde Beren ve İlknur değeri en küçük birim kesrin 1'e yakın olduğunu düşünmüşlerdir. Bu düşünme biçimlerine uygun olarak, soruda verilen üç birim kesri modelleme ve karşılaştırma sorusunda da aritmetiksel muhakeme yaparak paydası büyük olan birim kesrin miktarının da büyük olduğunu düşünerek yanıtlamışlardır. Modelleme aşamasında ise İlknur, üç birim kesrin paydalarını toplayarak tek bir alan modeli üzerinde temsil etmiştir. Buna göre, sorudaki üç birim kesrin birbirlerinden farklı ayrı birer nicelik olduğunu kavrayamamıştır. Bu yanıt, önceki derslerde işlenen birim kesir ve basit kesirlerin büyüklüğünü anlamadaki doğru akıl yürütme stratejisinden sonra beklenen bir çözüm yöntemi değildi. Alan modeli ile temsil etme etkinlikleri sonucunda ise birim kesirleri karşılaştırma sorularını daha doğru yanıtlayabilmişlerdir.

4.5. Öğrencilerin Basit, Bileşik ve Tam Sayılı Kesirleri Karşılaştırma Sürecindeki Düşünme Yolları ve Değişimi

Araştırmada paydaları eşit olmak üzere önce basit; sonra ise bileşik ve tam sayılı kesirleri karşılaştırma etkinlikleri uygulanmıştır. Bu tema kapsamında hedef grup öğrencilerinden Beren'in yanıtları detaylı olarak incelenmiştir.

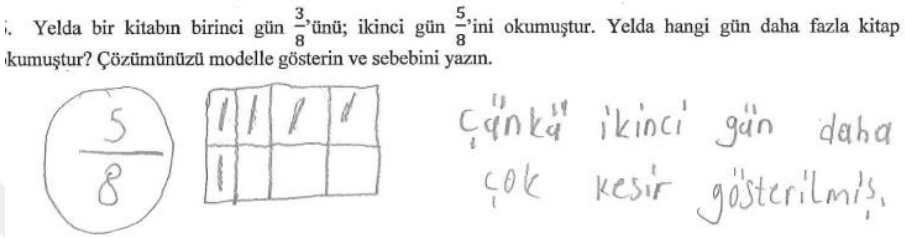
4.5.1.Öğretim Bölümü 1: Basit Kesirleri Karşılaştırma Etkinliği

Uygulama 1

Birim kesirleri karşılaştırdıktan sonra ilk olarak paydaları eşit olan kesirleri karşılaştırmak oldukça mantıklıdır çünkü böyle bir durumda öğrenci aynı birimler üzerinde karşılaştırma yapabilir (Hackenberg vd., 2016). Bu görevde amaçlanan varsayımsal öğrenme kesirlerde parça-bütün anlamına uygun olarak iki basit kesri karşılaştırmaktır.

Öğrenciler bu etkinlikte kesirleri paylarına bakarak karşılaştırmışlardır. Dolayısıyla kesrin tamamını bir bütün olarak ele alıp eş parçalar ve bütünlere göre karşılaştırma yapmamışlardır. Dersin devamında ise $\frac{10}{8}$ ile $\frac{12}{8}$ bileşik kesirlerini karşılaştırırken aynı düşünme yolu ile karşılaştırmışlardır. Buna göre, basit ve bileşik kesirleri karşılaştırmak öğrenciler için oldukça kolay görülmektedir. Bunun sebebi, doğal sayılarda kullanılan

düşünme yolunun basit ve bileşik kesir karşılaştırmalarında da kullanılabilmesidir. Böylece kesri bütün olarak yorumlamak yerine yalnızca payları karşılaştırarak doğru çözüme ulaşabilmektedirler. Bu durum, birçok öğrencinin aritmetiksel işlem yapması ve kesir büyüklüğü hakkında akıl yürütme ihtiyacı duymamasına sebep olmaktadır. Sayısı çok az olmakla birlikte öğrencilerin bir kısmı iki kesri modellerken bütünleri farklı büyüklüklerde çizmişlerdir. Dolayısıyla bu öğrenciler önceki öğretimlerde edindiği bilgileri kullanmamayı tercih etmiş ve sonuç olarak edindikleri bilgiyi bu etkinliğe transfer edememişlerdir. Örnek olarak Beren'in bu etkinlikteki yanıtı Şekil 4.5.1'de gösterilmiştir.



Şekil 4.5.1. Beren'in Basit Kesirleri Karşılaştırma Yanıtı

Beren

Beren tek bir model çizerek ve yalnızca büyük olan kesri modelleyerek soruyu yanıtlamıştır. Bu yanıtı, onu sınıftaki birçok arkadaşının yanıtından ayırmıştır. Beren de sınıftaki diğer arkadaşları gibi payın büyük olmasını sebep göstermiş ancak bunu model çizdikten sonra ifade etmiştir. Bu düşünme yolu bu gibi sorularda çalışsa da bir kesrin bir nicelik olarak büyüklüğünü anlayıp anlamama noktasında net bir düşünme yolu belirtmemektedir. Çünkü aynı paydaya sahip iki kesrin büyüklüklerini karşılaştırmak için, payların büyüklüklerini karşılaştırmak yeterlidir ve kesirlerin büyüklüklerini bir bütün olarak düşünmek gerekli değildir. Diğer bir deyişle öğrenci problemde verilen kesirlerin ne kadarlık bir büyüklüğü belirttiği üzerinde akıl yürütmemiş çünkü buna ihtiyaç duymamıştır. Bu da öğrencileri kesir büyüklükleri hakkında fazla derin düşünmemeye itebilir (Obersteiner & Tumpek, 2016). Bu düşünme yolu büyük bir problem gibi görünmese de öğrenciler farklı paydalardan oluşan kesirleri karşılaştırırken öğrencileri hata yapmaya itmektedir. Çünkü öyle bir durumda paylara ya da paydalara bakarak kesir büyüklüğüne karar vermek muhtemeldir ki işe yaramayacaktır. Bu araştırmada 4. sınıf programında yer almaması sebebiyle paydaları farklı kesirleri karşılaştırma etkinliğine yer verilmemiştir. Ancak kesir karşılaştırmalarında öğrencileri kesir büyüklüğü üzerinde düşünmelerini sağlayabilmek için

bir sonraki öğretim bölümünde farklı kesir türlerini içeren karşılaştırma etkinliği uygulanmıştır.

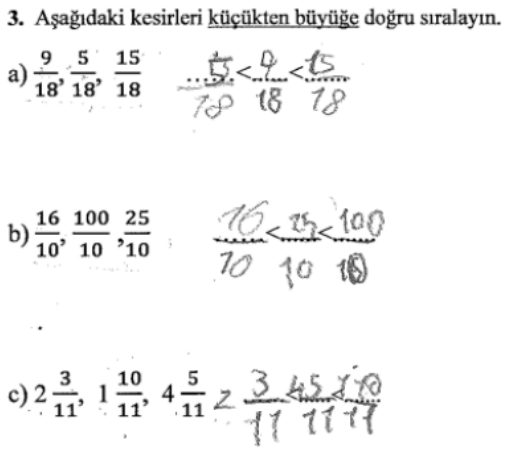
4.5.2.Öğretim Bölümü 2: Farklı Kesir Türlerini Karşılaştırma Etkinliği

Uygulama 1

Bu öğretim bölümü ile birlikte farklı kesir türlerini karşılaştırmayı gerektiren etkinliğe yer verilmiştir. Öğrencilere her bir kesir türüne ait üç farklı kesri karşılaştırmaları gereken alıştırma soruları sorulmuştur. Bu görevde amaçlanan varsayımsal öğrenme basit, bileşik ve tam sayılı kesirleri karşılaştırmaktır. Sınıftaki birçok öğrenci tüm kesir türlerini paylarına bakarak yani doğal sayı temelli bir düşünme yoluyla sıralamışlardır. Doğal sayı temelli düşünme biçimi öğrencilerin sıklıkla kullandığı bir şemadır ve birçok durumda işe yarar bir genelleştirmedir (Siegler & Pyke, 2013; Schneider & Siegler, 2010). Ancak tam sayılı kesirleri karşılaştırmada bu düşünme yolu doğru bir strateji olmamaktadır.

Öğrencilerin kesirler konusunda geliştirdikleri genellemeler ve gerekçelendirmeler de bazı durumlarda tam tersi şekilde işleyebilmektedir. Resnick ve arkadaşları (2019) kesir büyüklüklerini bu örnekte olduğu gibi hatalı bir genelleştirmeyle anlamlandıran öğrencilerin bu stratejisini "ters önyargı" olarak adlandırmıştır. Dolayısıyla, bu akıl yürütmeyi kullanan öğrenciler pay ve payda arasındaki ilişkiyi tam olarak anlamamaktadırlar (Rinne vd., 2017). Tam sayılı kesirleri karşılaştırırken doğru bir düşünme yolu kullanarak yani önce bütünlere bakarak kesirleri sıralayan öğrenciler de bulunmaktadır.

Bununla birlikte, öğrencilerin model çizmeden kesir büyüklükleri hakkında düşünmedikleri de gözlemlenen diğer bir sonuçtur. Bir önceki öğretimde bağlamsal bir problem kapsamında kesir karşılaştırmayı gerektiren etkinlikte ise öğrenciler alan modeli çizerek soruyu yanıtlamış ve nicelikleri ilişkilendirmeye dayanan bir düşünme yolu kullanmışlardı. Bu etkinlik sonucunda şunu söyleyebiliriz; öğrenciler alıştırma olarak verilen etkinliklerde kesirleri karşılaştırırken nicelik olarak kesir büyüklükleri yerine kesrin pay ve paydasını ayrı sayılar olarak düşünürler. Örnek olarak Beren'in bu etkinliğe verdiği yanıt Şekil 4.5.2'de gösterilmiştir.



Şekil 4.5.2.Beren'in Farklı Kesir Türlerini Karşılaştırma Yanıtı

Beren

Beren, sınıftaki diğer birçok arkadaşı gibi kesirleri paylara bakarak yani doğal sayı gibi düşünerek kolaylıkla karşılaştırabilmiştir. Ancak tam sayılı kesirlere gelindiğinde bu düşünme yolu artık çalışmamış ve dolayısıyla hata yapmıştır.

Araştırmacı: *Bu kesirleri nasıl sıraladığını açıklar mısın?* (Şekil 4.5.2'de a ve b şıklarını göstererek)

Beren: *Önce paydasına baktım, paydaları aynı olunca paya baktım.*

Araştırmacı: *Peki ben başka kesirler yazsam yine aynı yöntemle sıralar mısın?*

Beren: *Evet.*

Araştırmacı paydaları eşit ve aynı büyüklükte olan bir bileşik ve bir tam sayılı kesir yazar ($2\frac{2}{3}$ ve $\frac{8}{3}$) ve bu kesirleri karşılaştırmasını ister.

Beren: $\frac{8}{3}$ *daha büyük öğretmenim.*

Araştırmacı: *Bu kesri okur musun?* ($2\frac{3}{11}$ kesrini gösterdim)

Beren: *2 tam on birde üç.*

Araştırmacı: *Ne demek bu kesir?*

Beren: *2 bütün ve bir de* $\frac{3}{11}$ *var.*

Araştırmacı: *Çok güzel. Bu kesri okur musun?* ($1\frac{10}{11}$ kesrini göstererek)

Beren: *Bir tam on birde on.*

Araştırmacı: *Bu kesirde bir bütün var mı?*

Beren: *Evet, bir bütün var.*

Araştırmacı: *İki bütün olan kesir bir bütün olan kesirden daha küçük olabilir mi?*

Beren: *Öğretmenim şimdi fark ettim ben tamlarına bakmadım hiç. Aslında tamlara da bakmam gerekir.*

Beren kesir büyüklüğü ile ilgilenmeyip yalnızca paydaki sayılara bakarak kesirleri karşılaştırmıştır. Onun bu düşünme yolu tam sayılı kesirlerin bir bütün olarak bir sayıyı ifade ettiğini anlamamasından kaynaklanmaktadır. Bu anlayış, Beren'in diğer temalardaki yanıtlarında da geçerliydi. Bunu düzeltmek için ise sıklıkla modelleme çalışmaları yapılmıştı ancak bu görüşmede modellemeye ek olarak sayının okunuşuna dolayısıyla matematiksel dile vurgu yaparak ilerlenmiştir. Araştırmacılar matematik yaparken konuşmanın, öğrencilerin düşüncelerini sözel olarak ifade etmelerinin önemini vurgulamıştır (Douville & Pugalee, 2003; Lee, 2013). Bruce (2009) bu durumu "matematik konuşma (math-talk)" olarak ifade etmiş ve konuşarak öğrencilerin kendi fikirleri ile diğer arkadaşlarının fikirleri arasında bağ kurabileceğini belirtmiştir (Irvine, 2017). Bununla birlikte araştırmacı başka kesirler yazarak karşılaştırmasını istemiş ve böylece Beren'in bu düşünme yolunu benzer durumlara da transfer edebilmesini ve düşünme yolunu genelleştirebilmesini desteklemiştir. Araştırmacı, tam kısmı eşit olan kesirlerde Beren'in nasıl bir düşünme yolu geliştirdiğini keşfetmek için $2\frac{5}{10}$ ile $2\frac{7}{10}$ kesirlerini yazmıştır:

Araştırmacı: *Bu kesirlerden hangisi daha büyük? Neden?*

Beren: *$2\frac{7}{10}$ büyük. Önce bütünlere baktım, onlar aynı olunca paylara baktım.*

Araştırmacı: *Bu kesir ($1\frac{3}{5}$) kaç birim kesirden oluşur?*

Kısa bir süre sessiz kaldı ve model çizmeye başladı. Kesri modelledikten sonra:

Beren: *Sekiz öğretmenim*.

Araştırmacı: *$2\frac{7}{10}$ kesri kaç birim kesirden oluşur?*

Beren: *O da sekiz öğretmenim.*

Araştırmacı: *Birim kesirleri kullanarak kesirleri karşılaştırabilir miyiz? Nasıl?*

Beren: *Evet öğretmenim, birim kesirleri sayarak da bulabiliriz. Ama bence model çizmeden daha kolay oluyor.*

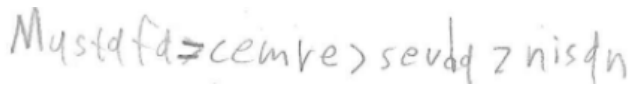
Beren'in "model çizmeden" ifadesinde kastettiği, yalnızca paylara bakarak karar vermenin daha kolay olduğudur. Burada olduğu gibi bazı durumlarda öğrenciler aritmetik işlem yapmanın veya bir kuralı ezberlemenin daha pratik olduğunu düşünmektedirler. Beren, kesirlere sıklıkla birer doğal sayı gibi davrandığından önce tamlara sonra paylara bakarak karşılaştırma yapması aritmetik işlemden kaynaklanıyor olabilirdi. Bu sebeple Beren'e bir ölçü birimi olarak birim kesirleri sayarak da karşılaştırma yapabileceği önerilmiştir.

4.5.3.Öğretim Bölümü 3: Problemdeki Farklı Kesir Türlerini Karşılaştırma Etkinliği

Uygulama 1

Bu öğretim bölümünde bir öncekinden farklı olarak, bağlamsal bir problem içinde farklı türdeki kesirleri karşılaştırmayı içeren bir görev verilmiştir. Etkinlikte kullanılan problem: "*Bir pastanede aynı büyüklükteki mini kekler raflara dizilmiştir. Dört arkadaş bu keklerden yemişlerdir. Dört arkadaşın yediği kek miktarı şu şekildedir: Mustafa:* $1\frac{2}{8}$*, Sevda:* $\frac{8}{8}$*, Cemre:* $\frac{10}{8}$ *ve Nisan* $\frac{4}{8}$*. Bu arkadaşların yediği kek miktarlarını büyükten küçüğe sıralayı*n." Bu etkinlikte amaçlanan varsayılan öğrenme problemdeki farklı kesir türlerini karşılaştırmadır. Bu etkinlikte öğrenciler grup olarak çalışmıştır.

Bu etkinliği yanıtlarken bazı öğrenciler $\frac{10}{8}$ ile $1\frac{2}{8}$ kesirlerinin eşit büyüklükler olduğunu anlarken bazı öğrenciler daha önceki öğretim bölümlerinde olduğu gibi tam sayılı kesrin daha büyük olduğunu belirtmişlerdir. Problemdeki kesirleri alan modeli ile modelleme aşamasında grupların tamamı doğru yanıt vermiştir. Kesirleri sıralarken öğrenciler genellikle ilk olarak daha önce de yaptıkları gibi paylara bakarak yani doğal sayı temelli bir düşünme yolu kullanmış; $\frac{10}{8}$ kesri ile $1\frac{2}{8}$ kesrinin aynı büyüklükler olduğunu fark etmemişlerdir. Ancak grup çalışmalarının da etkisiyle kısa süre içinde kendi aralarında tartışarak bu hatalı düşünme yolunu bırakıp doğru sıralama yapabilmişlerdir. Bu etkinlikte önceki öğretim bölümlerinden farklı olarak öğrenciler modelleme yapmadan bütünü ve yarımı referans alarak yüzeysel nicelleştirme ile problemi çözmüşlerdir. Örnek olarak hedef gruptaki öğrencilerin yanıtı Şekil 4.5.3.1'de belirtilmiştir.



Şekil 4.5.3.1. Beren'in Kesir Karşılaştırma Problemine Yanıtı

Bu etkinlikte öğrenciler grup tartışmasının ve akran öğreniminden faydalanarak çoğunlukla doğru yanıtlar vermiş veya hatalı düşünme yollarını değiştirmişlerdir. Örneğin sınıf içi gözlemlere dayanarak Beren'in olduğu grup içinde şu gibi konuşmaların geçtiği görülmüştür:

Beren: *Mustafa daha çok yemiş çünkü bir bütün yemiş. Diğerlerinde bütün yok.*

İlknur: *Evet ama 1 $\frac{2}{8}$ ve $\frac{10}{8}$ eşit kesirler bence Cemre de Mustafa kadar yemiş.*

Yavuz: *Nasıl yani? Bence Beren haklı. Tam sayılar hep en büyük kesir değil mi?*

İlknur: *Bilmiyorum…*

Beren: *Bence şuraya daire çizip bakalım.*

Bu araştırmada da görüldüğü gibi, Schoenfeld (2014) grup çalışmalarının küçük çocukların zengin öğrenme ortamlarında kendi bilgilerini inşa ettiğini ve çocukların matematiksel düşünmeleri için fırsatlar yarattığını belirtmiştir. Bu durum, literatürde yer alan başka araştırma sonuçlarıyla da paraleldir (Lee vd., 2003; Lee 2013; Robinson, 2017; Thompson, 1993). Bu araştırma için bu konudaki kavramsal değişim alan modelinin çizilmesiyle ve grup içi tartışma ile gerçekleşmiştir. Böylece öğrenciler söz konusu iki kesrin aynı sayıda birim kesirden oluştuğunu belirlemişlerdir.

Beren

Şekil 4.5.3.1'de görüldüğü üzere Beren'in dahil olduğu gruptaki öğrenciler ilk olarak Mustafa'nın en fazla yiyen kişi olduğunu yani 1 $\frac{2}{8}$ kesrinin en büyük olduğunu düşünmüşlerdir. Sonrasında ise bu yanıtı değiştirerek aslında 1 $\frac{2}{8}$ ile $\frac{10}{8}$ kesirlerinin aynı miktarlar olduğunu fark edip doğru sonuca ulaşmışlardır. Öğrencilerin buradaki düşünme yolu tam sayılı kesirlerin diğer kesir türlerinden her zaman daha büyük olduğudur. Bu düşünme yolu, önceki etkinliklerde de ilk ortaya çıkan yanıttı ve öğrenciler bu etkinlikte de ilk önce bu düşünme yolunu kullanmışlardır. Bu noktada şu iki seçenek üzerinde düşünülebilir: Öğrencilere göre, aynı çokluğu gösteren kesirlerden tam sayılı gösterim bileşik kesirden daha büyüktür veya öğrenciler bu iki kesrin aynı çokluğu temsil ettiğini anlamamış olabilirler. Bunu anlayabilmek için Beren ile kısa bir görüşme gerçekleştirildi:

Araştırmacı: *Neden başlangıçta bu kesrin daha büyük olduğunu düşündünüz?*

Beren: *Burada bir bütün var o yüzden öğretmenim ama sonra değiştirdik.*

Araştırmacı: *Neden değiştirdiniz?*

Beren: *Modelleyince aynı sayıda parça boyadık.*

Buna göre Beren'in 1 $\frac{2}{8}$ ile $\frac{10}{8}$ kesirlerinin aynı nicelikler olduğunu alan modeli ile modelledikten sonra fark ettiği görülmüştür. Buna göre bu görevde temsiller destekleyici olarak kullanılmış ve öğrencilerin düşünme yolunu pozitif anlamda değiştirdiği görülmüştür. Beren'in düşünme yollarının süreç içerisindeki değişimi ve bu süreçteki müdahaleler Tablo

4.5.3'te özetlenmiştir.

Tablo 4.5.3. Beren'in Birim Olmayan Kesirleri Karşılaştırmaya Dair Gelişen Düşünme Yolları ve Müdahaleler

Öğretim Bölümleri	**Öğretim Bölümü 1** *(Basit kesirler)*	**Öğretim Bölümü 2** *(Farklı kesir türleri)*	**Öğretim Bölümü 3** *(Farklı kesir türleri)*
Müdahale	Alan modeli kullanma	Bütün kavramını ve kesrin okunuşunu vurgulama	Kesir büyüklüğü üzerinde tartışma ve alan modeli kullanımı
Düşünme Yolları	Yüzeysel nicelleştirme	Toplamsal düşünme ve aritmetik işlem	Önce toplamsal sonra kapsamlı nicelleştirme

Basit ve bileşik kesirleri karşılaştırma etkinliklerinde Beren daima paydaki doğal sayılara bakarak karşılaştırma yapmış, kesrin tamamının büyüklüğünü dikkate alan bir düşünme yolu kullanmamıştır. Ancak farklı kesirleri birbiri içinde karşılaştırma etkinliklerinde onun bu düşünme yolu doğru bir sonuca götürmediği için bu hatalı düşünme yolunu değiştirmek adına çeşitli etkinlikler uygulanmıştır. Kesrin büyüklüklerini yorumlayabilmesi için birim kesir ve bütünü vurgulayan modelleme etkinlikleri yapılmıştır. Bu doğrultuda parça-bütün bağlamının daha anlaşılır olması sebebiyle alan modeli kullanımı daha sık tercih edilmiştir. Bir sonraki öğretim bölümünde Beren, kesrin bütün içerip içermemesi durumuna bakarak yani kesrin büyüklükleri üzerinde düşünmeden karşılaştırma yapmıştır. Etkinlikte geçen ve aynı büyüklüğü temsil eden bileşik ve tam sayılı kesir arasında tam sayılı kesrin daha büyük olduğunu belirtmiştir. Tam sayılı kesrin her zaman en büyük olmayacağı düşüncesini benimsemesi için modelleme etkinlikleri yürütülmeye devam edilmiştir.

Uygulama 2

Araştırmanın ikinci uygulamasında ilkinde uygulanan etkinlik tekrar kullanılmıştır. Ancak bu uygulamada, kesir büyüklükleri üzerinde düşünmeyi vurgulayabilmek adına sayı doğrusu üzerinde de gösterim yapılmıştır. Sonuçta problemdeki $\frac{4}{8}$, $1\frac{2}{8}$ ve $\frac{10}{8}$ kesirleri sayı doğrusu üzerinde de gösterilmiştir. Araştırmacı ve Buğra arasında geçen diyalog örneği:

Araştırmacı: *Bu kesirleri sayı doğrusunda nasıl gösterirsin?*
Buğra: *Burayı 10 parçaya böleriz.* (0 ve 1 arasını gösterdi)

Araştırmacı: *Neden 10 parçaya böleceksin?*

Buğra: *Çünkü derste öyle yapmıştık.*

Buğra sayı doğrusunda tek tek kesirleri yazmaya başladı; 1'e geldiğinde ise $\frac{10}{8}$'i yazdı ancak sonrasında kafasının karıştığını ifade etti.

Araştırmacı: *Ne yapmayı düşünüyorsun?*

Buğra: *Bence burayı 10 parçaya bölmemeliydik. Beş parçaya bölmeliydik.*

Araştırmacı: *Neden 5 parçaya bölmeliydin?*

Buğra: *Burayı da beşe ayırcaktım* (0-1 arası ile 1-2 arasından bahsediyor). *Ama şimdi vazgeçtim, 4 parçaya ayırmalıyım.*

Araştırmacı: *Neden?*

Buğra: *Böylece 0-2 arasını 8 parçaya ayırmış olcam. (*Söylediği gibi $\frac{1}{8}$'den başlayarak kesirleri yazdı. $\frac{5}{8}$'i ise 1'in olduğu noktada belirtti.)

Araştırmacı: $\frac{5}{8}$ *bir bütün mü?*

Buğra: *Hayır*.

Araştırmacı: *Bir bütün olması için hangi kesir yazılmalı buraya?*

Buğra cevap vermedi ve araştırmacı alan modellerine geri dönüp bir bütünü göstermesini istedi. Buğra bu konuda hiç zorlanmadı ve $\frac{8}{8}$'i gösterdi.

Araştırmacı: *Bu bütünü sayı doğrusunda nerede konumlandırırsın?*

Buğra: *1'in altına yazarım öğretmenim. Bire eşit olur.*

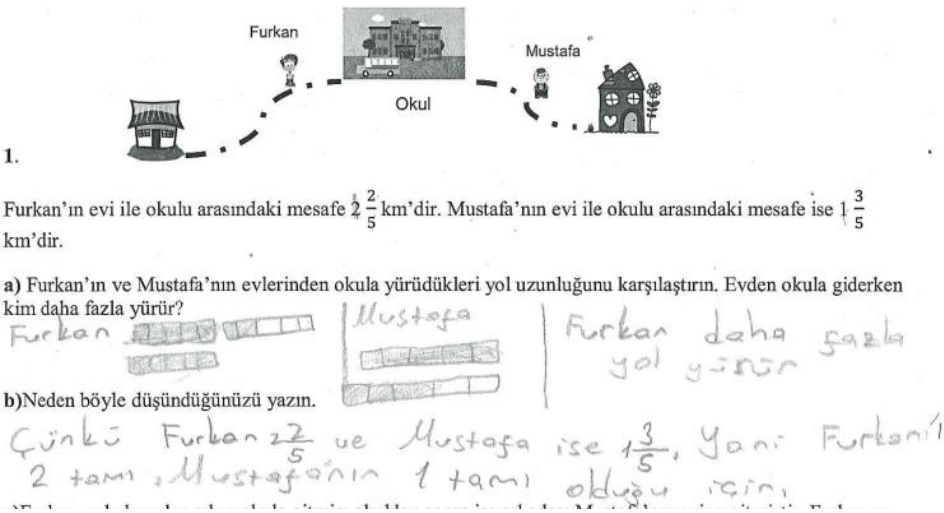
Buğra önce $\frac{8}{8}$'i sonra iki birim ilerleyerek $\frac{10}{8}$'i sayı doğrusunda gösterdi. Ancak 1-2 arasını tam olarak 8 parçaya ayırmadığı için araştırmacı tekrar sordu:

Araştırmacı: *1-2 arasını kaç eş parçaya ayırmalısın bu durumda?*

Buğra: *Orayı da sekiz parçaya bölerim*.

Buğra başlangıçta sayı doğrusunda "bütün" kavramıyla ilgili farklı bir düşünme yolu kullanmış; sayı doğrusunda 0-1 arasını değil, sayı doğrusunun verildiği şekliyle yani 0-2 arasının bir bütün olduğunu düşünmüştü. Alan modeli kullandıktan sonra ise kesir büyüklüklerini, kesrin farklı modellerle gösterimini ve bu modeller arasındaki ilişkiyi anlamıştı. Bu sonuç, modelleme etkinliklerinin öğrencilerin kesir büyüklüğünü anlamasında etkili bir araç olduğunu doğrulamaktadır (Gunderson, Hamdan, Hildebrand & Bartek, 2019).

Araştırmanın ikinci uygulamasında bağlamsal bir problem daha kullanarak iki tam sayılı kesrin karşılaştırılması etkinliği kullanılmıştır. Problem çözülmeden önce ise öğrencilerin tahmin etmesi istenmiştir. Örnek olarak Şekil 4.5.3.'de Azra'nın yanıtı gösterilmiştir.



Şekil 4.5.3.2. Azra'nın Tam Sayılı Kesirleri Karşılaştırma Etkinliğine Yanıtı

Azra'nın yanıtına bakıldığında problemi alan modeli çizerek çözdüğü görülmüştür. Ancak buna rağmen kesir büyüklükleri hakkında doğru bir çıkarım yapamadığı da belirlenmiştir.

Araştırmacı: *Nasıl çözdüğünü anlatır mısın?*

Azra: *Aralarında bir fark var o yüzden Furkan daha çok yürümüştür.*

Araştırmacı: *Neyin arasında bir fark var ?*

Azra: *Hem tamların hem de payların.*

Araştırmacı: *Furkan'ın Mustafa'dan ne kadar fazla yürüdüğünü bulabilir misin?*

Azra soruyu öncelikle işlemsel hale getirip yazdı ancak küçük kesirden büyük kesri çıkarmaya çalıştı.

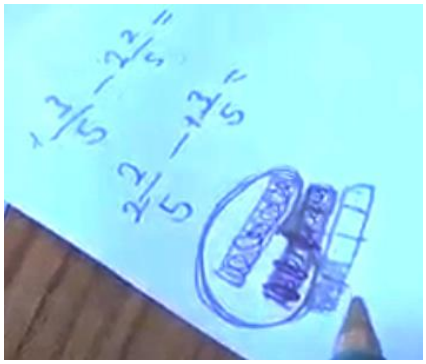
Araştırmacı: *Bu işlemi yapabilecek misin?*

Azra: *Hayır…Çünkü tamlarını da çıkarmam gerekir ama 1'den 2 çıkmaz.*

Araştırmacı: *O halde ne yapacaksın?*

Azra bu sefer doğru bir şekilde kesirleri yazarak çıkarma işlemini çözmeye çalışmıştır.

Azra: *Ama o zaman da bundan da bu çıkmıyor* (kesirlerin paylarını gösterdi)



Azra bir süre bekledikten sonra araştırmacı kesirleri modelle göstermesini istemiştir. Azra $2\frac{2}{5}$ kesrini doğru şekilde modelledi ancak bu model üzerinde $1\frac{3}{5}$'ü belirten çokluğu çıkarmakta oldukça zorlandı. Bu beklenen bir durumdu çünkü öğrencinin bunu yapabilmesi için öncelikle kesir büyüklüğü hakkında net ve doğru bir zihinsel imgeye sahip olması ve doğru bir çözüm metodu olarak birim kesirlerle işlem yapabilmesi gerekir. Bu sebeple araştırmacı birim kesri kullanarak ve böylece tam sayılı kesirler yerine bileşik kesirler arasındaki farkı bulmayı vurgulamıştır.

Araştırmacı: *Bu modeldeki eş parçalardan birini nasıl ifade ederiz?*

Azra: *Birim kesir yani* $\frac{1}{5}$.

Araştırmacı: *Öyleyse hadi boyadığımız parçaları sayalım*:

Azra da araştırmacı ile birlikte saymaya başladı. $\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{2}{5}$……..$\frac{12}{5}$. Böylece model üzerinde göstererek birim kesir sayısına ulaşılmış ve iki kesir arasındaki farkı belirleyebilmişti. Özetle, Azra birime dayalı bir düşünme yolu ile kesir büyüklüğü imgesini zihninde daha net bir şekilde oluşturabilmiş ve soruyu yanıtlayabilmişti.

İlknur ve Yavuz

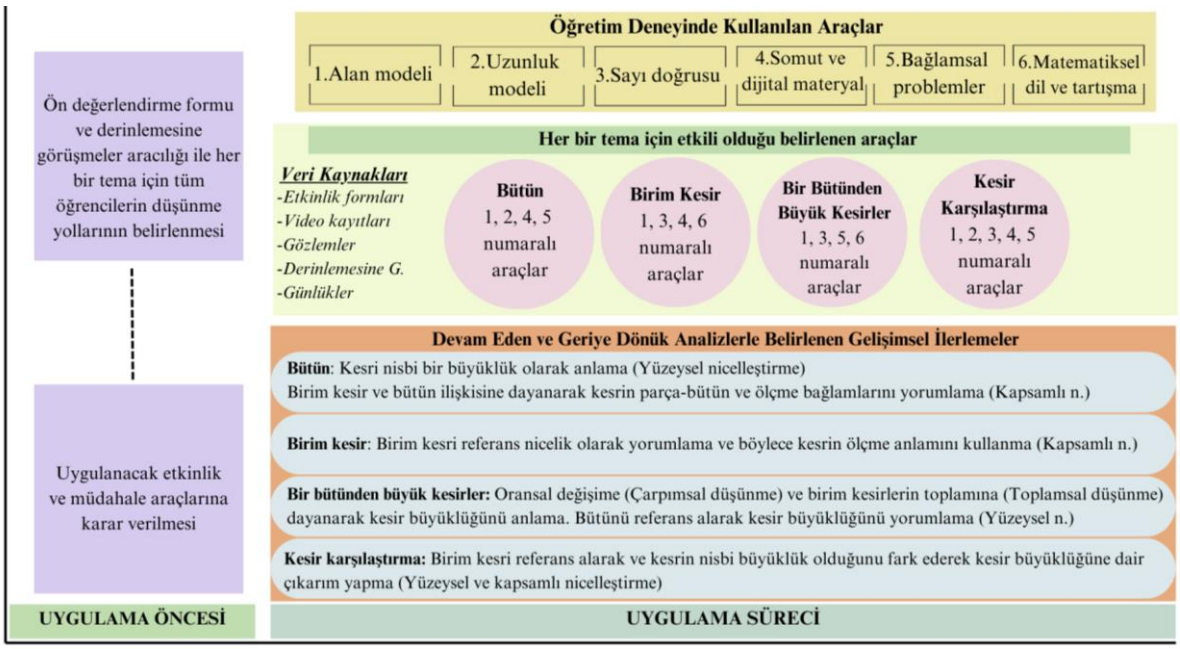
Basit kesirlerin karşılaştırılmasına dair etkinlikler sınıftaki birçok öğrenci gibi İlknur ve Yavuz'un da doğal sayılı temelli düşünme yoluna dayanarak yanıtladığı etkinliklerdir. Ancak öğrencilerin buradaki düşünme biçimi doğal sayı gibi düşünme yoluyla olmaktadır. İlknur ve Yavuz da Beren gibi basit kesirleri karşılaştırırken modele ihtiyaç duymadan yalnızca payları karşılaştırarak problemi çözmüştür. Öğrenciler paydaları eşit bileşik kesirleri karşılaştırmada da aynı düşünme yolunu tercih etmişlerdir çünkü bu yolla hata yapma ihtimalleri oldukça azdır. Ancak tam sayılı kesirleri karşılaştırırken durum farklılaşmaktadır. Beren örneğinde açıklandığı gibi İlknur ve Yavuz da tam sayılı kesirleri karşılaştırırken önce tam kısmını görmezden gelip basit kesirli ifadeleri karşılaştırma eğiliminde olmuşlardır. Yani bu kesirlerin bütünler ile birlikte kendi içinde bir nicelik olduğunu anlamamış olabilirler. Grup etkinlikleri ve sınıf içi tartışmalar sayesinde İlknur ve Yavuz aritmetiksel nicelleştirmeye dayanan düşüme yollarını değiştirebilmişlerdir. Bu konuda İlknur, Beren ve Yavuz'dan farklılaşarak daha önce tam sayılı kesir hakkında doğru bir büyüklük bilincine ulaşmıştır. Grup etkinliklerinde hatalı düşünme yollarını önce İlknur fark ederek arkadaşlarını yönlendirmiştir. Bu sebeple İlknur'un diğer öğrencilere göre daha erken ve daha doğru biçimde yüzeysel nicelleştirme yapabildiği gözlemlenmiştir. İlknur'un

bileşik ve tam sayılı kesir büyüklüklerine dair zihinsel imge değişimi daha önceki temalarda açıklanmış ve birim ile bütün kavramını vurgulayarak doğru bir düşünme yolu geliştirmesi için müdahalelerde bulunulmuştur.

BÖLÜM V: SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar ve Tartışma

Bu çalışma, öğretim deneyi araştırması olarak yürütülmüştür. Bir öğretim deneyinin birincil amacı, öğrencilerin akıl yürütmelerini, öğrenme ortamının analizini ve varsayımları test ederek model geliştirmektir (Cobb vd., 2003). Buna dayanarak bu araştırma sonucunda 4. sınıf öğrencilerinin kesirler konusuna ait kavramların gelişmesinde hangi müdahalelerin kullanıldığı ve öğrencilerin kesir kavramlarını öğrenmelerine destek olan nicel muhakeme bileşenleri ile düşünme yolları Şekil 5.1'de gösterilmiştir.



Şekil 5.1. Nicel Muhakeme Destekli Kesir Öğrenme Modeli

Araştırma bulguları, uygulama öncesi ve uygulama süreci olmak üzere iki aşamada değerlendirilmiş ve Şekil 5.1'de özetlenmiştir. Buna göre, her bir tema için müdahale öncesinde öğrencilerin var olan düşünme yolları incelenmiş ve varsayımsal öğrenmeler ışığında öğretim deneyi rotası planlanmıştır. Öğretim deneyi süresince ele alınan kesir kavramlarının farklı müdahale ve araçlarla geliştiği görülmüştür. Modelde de görüldüğü üzere öğretim deneyinde görsel temsiller gibi çeşitli araçlar kullanılmış ve bu araçlar aracılığı ile öğrencilerin kesir kavramlarını nasıl öğrendiği ve bu öğrenme sürecinde nicel muhakemenin hangi bileşenlerinin hangi temada etkili olduğu belirtilmiştir. Çeşitli veri kaynaklarına dayanarak, her bir temada hangi araçların daha etkili olduğu belirlenmiştir. Buna dayanarak ise devam eden ve geriye dönük analizler ile her bir tema kapsamında

öğrencilerin gelişimsel ilerlemeleri incelenmiştir. Buna göre, kesirlerde bütün kavramının anlaşılması için alan ve uzunluk modelleri, somut ve dijital araçlar ile bağlamsal problemler araç olarak kullanılmıştır. Bu araçlar aracılığı ile kesirlerin nisbi, göreceli bir büyüklük olduğu ve birim kesir ile bütün arasındaki ilişki vurgulanmıştır. Sonuçta ise böyle bir müdahalenin öğrencilerde kesir kavramlarını etkili ve doğru şekilde geliştirebildiği görülmüştür.

Araştırmada yüzeysel ve kapsamlı nicelleştirmeye yapılan vurgunun öğrencilerde kesir kavramlarını geliştirmede oldukça en etkili olduğu belirlenmiştir. Bu durum, temalara göre değişmekle birlikte her bir tema için niceliklere ve nicelleştirmeye yapılan vurgunun güçlü bir etkisi olduğu söylenebilir. Buna karşın, öğrencilerin aritmetik işlemler ve sayısal büyüklükleri kullanmaya olan yatkınlığı, kesri niceliksel bir büyüklük olarak anlamalarını engellemiştir. Araştırmada elde edilen tüm bulgular yorumlanarak önce genel sonuçlar, devamında ise her bir tema başlığı altında detaylı bir şekilde yorumlanmıştır. Bu bağlamda, kesir kavramlarına dair öğrencilerde hangi nicelleştirme durumlarının ortaya çıktığı literatürdeki diğer araştırma sonuçları ile birlikte yorumlanmıştır.

5.1.1. Genel Sonuçlar ve Tartışma

Nicel muhakeme, nicelikleri ve nicelikler arası ilişkileri temsil etme ve bunlar üzerinde akıl yürütme becerisidir. Hem aritmetik işlem hem nicel işlem bileşenlerini içeren nicel muhakemede aritmetik becerisi kazandırmadan önce öğrencileri niceliklerin büyüklüğü üzerinde düşündürmek gerekir (Nunes & Bryant, 2023). Bu araştırmada uygulanan etkinlikler ve müdahaleler ile öğrencileri nicelikler üzerinde düşündürmek amaçlanmıştır. Thompson (2011), nicelikler üzerinde düşünen bir öğrencinin, doğru zihinsel yapılandırmayla modelleme ve nicelleştirme yapabileceğini belirtmiştir. Dolayısıyla bu araştırmada da öğrencilerin oluşturdukları temsiller üzerinden nicelikler hakkındaki düşünme yolları değerlendirilmiştir. Genel olarak bulgular değerlendirildiğinde öğrencilerin kesri çokluktan ziyade, sayısal bir değer olarak düşündüğü görülmüştür. Örneğin kesir çubukları kullanılan etkinliklerde bazı öğrenciler birim kesirlerin büyüklüklerini karşılaştırırken kesir çubukları uzunluklarına bakmadan yalnızca paydadaki sayılara bakarak karşılaştırma yapmışlardır. Bu durumda öğrencilerin kesrin değerini bir çokluk olarak düşünmekten ziyade sayısal değerlere göre akıl yürüttükleri söylenebilir. Diğer bir örnek olarak Tema 1-Öğretim Bölümü 4'te pasta paylaşım etkinliğinde bazı öğrenciler kişi sayısı ve pasta miktarı ilişkisi üzerinde düşünmeden yalnızca sayılara bakarak paylaşım

yapmışlardır. Bu durumda ise sınıf içi tartışmalar, farklı temsil türlerinin kullanımı ve araştırmacının yönlendirici sorularının desteğiyle öğrencilerin zamanla nicelikler üzerinde düşünmeye başladıkları görülmüştür. Bu durum her öğrencide aynı şekilde veya aynı zamanda gerçekleşmemiş olsa bile etkinlikler uygulandıkça doğru düşünme yolu kullanan öğrencilerin arttığı gözlemlenmiştir.

Öğrencilerin nicelikleri anlama ve nicelikleri ilişkilendirme konusundaki düşünme yollarını yorumlayabilmek için kesir büyüklükleri hakkında nasıl düşündükleri üzerinde yoğunlaşılmıştır. Kesir büyüklüğü kavramı değeri bir bütünden küçük, bir bütünden büyük ve bir bütüne eşit kesirler ve kesirleri karşılaştırma kavramlarından oluşmaktadır. Niceliklerde büyüklüğü anlamak niceliği anlamakla eşdeğer kabul edilir (Thompson vd. 2014) ve matematik başarısı ile niceliği anlamak arasında güçlü bir ilişki vardır (Torbeyns, Schneider, Xin & Siegler, 2015). Bu araştırmada elde edilen bulgulara göre öğrencilerin birçoğu kesir büyüklüklerini anlamakta oldukça zorlanmıştır. Bu sonuçlara paralel olarak araştırmacılar, öğrencilerin genelde tam sayıların büyüklüğünü anlayabildiğini ancak konu kesirlere geldiğinde oldukça zorlandığını tespit etmişlerdir (Nunes & Bryant, 2023; Siegler & Pyke, 2013; Stafylidou & Vosniadou 2004; Vamvakoussi & Vosniadou 2004). Bununla birlikte Jordan, Carrique, Hansen ve Resnick (2017) ortaokul öğrencilerinin % 42'sinin çok kısıtlı kesir büyüklüğüne sahip olarak sınıflarını geçtiklerini tespit etmiştir. Öğrencilerin büyüklük hakkındaki hatalı düşünme yolu, değeri bir bütünden büyük kesirlere geçildiğinde daha da artmıştır. Öğrenciler, birim kesir ve basit kesir büyüklüklerine dair düşünme yollarını alan ve sayı doğrusu temsilleriyle geliştirebilmiş olsa da bileşik ve tam sayılı kesirlere geçildiğinde birçok öğrenci için bütüne dair düşünme yolu bozulmuştur. Bu sebeple, kesir büyüklüğünün daha net bir biçimde anlaşılması için sayı doğrusunun etkili bir yol olduğu da düşünülerek (Viegut & Matthews, 2023) öğrencilere kesirlerin sayı doğrusu üzerinde gösterimi veya sayı doğrusunda kesrin yerini tahmin etme gibi görevler verilmiştir.

Nicelleştirme, nicelikler arası ilişkilendirmeyi ve nicelik ile sayısal değer arasında ilişki kurmayı ifade eder. Dolayısıyla araştırmada öğrencilerin hangi nicelleştirmeleri hangi durumda yaptığı ve yapamadığı, nicelleştirmelerinin nasıl ve neden değiştiği raporlanmıştır. Bu kapsamda öğrenci yanıtları toplamsal ve çarpımsal düşünme, yüzeysel ve kapsamlı nicelleştirme ile yineleme ve parçalara ayırma gibi kesir şemaları çerçevesinde değerlendirilmiştir. Genel olarak bulgulara bakıldığında ise öğrencilerin çoğunlukla toplamsal düşünme yolu kullandığı görülmüştür. Toplamsal düşünme, problemleri parça-

bütün ilişkilerine dayanan bilgilerine bağlayarak nicelikler hakkında çıkarımlarda bulunma yeteneği ile ilişkilendirilir. İlkokul düzeyindeki öğrenciler niceliklerin toplamsal olarak birleştirilmesi ve karşılaştırılması eylemlerinin sıklıkla kullanmaktadır çünkü çarpımsal akıl yürütme daha üst düzey bir nicelleştirme türü olarak kabul edilmektedir (Nunes & Bryant, 2015). Araştırmada öğrencilerin çarpımsal muhakemede zorlandıkları, sayı doğrusu etkinliklerindeki hatalı düşünme yolları ele alınarak açıklanabilir. Öyle ki, Resnick vd. (2016) ile Rodrigues, Jordan ve Hansen (2019), sayı doğrusunda kesir gösteriminde başarısız olan öğrencilerin çarpımsal muhakemelerinin de zayıf olduğunu belirtmiştir.

Araştırmada öğrencilerin birimi referans alarak çözüm üretmesini ifade eden kapsamlı nicelleştirme ile sayı büyüklüklerini kabaca değerlendirmeyi gereken yüzeysel nicelleştirme becerileri incelenmiştir. Bu noktada öğrencilerin temalara göre farklı nicelleştirme türü kullanmaları desteklenmiştir. Örneğin öğrencilerin bütünün büyüklüğünde ve kesirleri karşılaştırmada çoğunlukla yüzeysel nicelleştirme; kesirleri sayı doğrusunda gösterme ile ilgili görevlerde ise kapsamlı nicelleştirme yaptıkları görülmüştür. Öğrencilerin başlangıçta her iki nicelleştirmede de beklenen düzeyde olmadığı ve önceden edindikleri bilgileri aynı şekilde kullanarak kesir kavramlarını öğrenmeye meyilli oldukları görülmüştür. Bu noktada öğrenciler çoğunlukla matematiksel işlemler yapmaya ve ezbere bilgileri kullanmaya oldukça yatkınlardı. Öğrenciler araştırma boyunca nicelleştirme yapabilmeleri için desteklenmiş olmakla birlikte zorlandıkları gözlemlenmiştir. Özellikle çarpımsal ilişkilerin söz konusu olduğu durumlarda öğrenciler daha fazla zorlanmıştır. Nunes ve arkadaşları (2013) ile Nunes ve Bryant'ın (2023) yürüttükleri araştırmalarda benzer bir sonuç olarak orantısal durumları anlama kapasitelerinin ilkokul çağındaki çocuklarda çok daha düşük düzeyde olduğunu belirtmişlerdir. Buna karşın bu araştırmada, öğrencilerin yüzeysel nicelleştirme konusunda daha hızlı ve daha büyük gelişme gösterdiği görülmüştür. Öğrenciler özellikle alan modeli kullanımının pozitif etkisiyle bir bütün, bütüne yakınlık, yarıma yakınlık gibi kavramları daha iyi anlayabilmiş ve yorumlamışlardır.

Bu süreçte araştırmacı müdahalelerinin etkisinden bahsetmek gerekmektedir çünkü araştırmacı etkinlikler sırasında ve sonrasında açık uçlu ve yönlendirici sorular aracılığıyla öğrencilerin düşünme yolları hakkında bilgi edinmiş ve bunları değiştirme veya geliştirmeyi hedeflemiştir. Öğrencilerin problem bağlamındaki nicelikleri oluşturması ve ilişkilendirmesi öğretmenin nicel muhakemeyi geliştirmek amacıyla yaptığı iyi yapılandırılmış yönlendirmeler ile mümkün olabilir (Akın, 2016; Ellis, 2011). Lee ve Hackenberg'e (2013)

göre araştırmacılar öğrencilerin oluşturdukları kesir şemalarını kullanmalarına ve yeni şemalar oluşturmalarına yardımcı olacak zengin niceliksel problemler ortaya koyarak bu öğrencilere yardımcı olabilir. Böylece uygun etkinlikler, sınıf içindeki iletişim, yapılan yönlendirmeler ve içeriği zengin bir programla birlikte öğrencilerin nicel muhakeme becerisi gelişir (Smith & Thompson, 2007). Bununla birlikte araştırma sürecinde öğrencilerin kendi yanıtları hatalı bile olsa kolaylıkla değiştirmeme niyetinde oldukları gözlemlenmiştir. Bu durum başka çalışmalarda da ortaya konulmuştur (González-Forte vd., 2022; Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2014). Öğrenciler çoğunlukla geçmiş deneyimlerine ve daha önce edindikleri bilgilere güvenerek etkinlikleri yanıtlamışlardır. Örneğin doğal sayı temelli düşünme biçimi öğrencilerin sıklıkla kullandığı bir şema olup kesirlerde hata yapmaya sebep olan düşünme yollarından da biridir (Schneider & Siegler, 2010; Siegler & Pyke, 2013). Bu araştırmada ise öğrencilerin kesir kavramlarına dair bilgisini ve bu konudaki nicel muhakemelerinin geliştirilmesi hedeflenmiştir ancak araştırma sürecinin kısa bir periyodu kapsaması öğrencilerdeki gelişimi sağlamak için yeterli olmadığının düşünülmesine sebep olmuştur. Bu süre zarfında öğrencilerin çeşitli durumlarda gelişme gösterdiği bulgular bölümünde de raporlanmıştır. Dolayısıyla bu araştırma, uzun vadede bir gelişimi ortaya koymaktan ziyade nispeten kısa sürede yapılan müdahalenin etkisini ortaya koymuştur.

Araştırmada kesirlerin parça-bütün, uzunluk, bölme ve ölçme bağlamları kapsamında çalışılmıştır. Bulgular, her bir tema içinde incelendiğinde öğrencilerin büyük bir kısmının kesrin parça-bütün şemasını kullandığı ve buna uygun olarak alan modeli temsilini sıklıkla kullandıkları görülmüştür. Dolayısıyla araştırmanın tüm temalarında eş parçalara ayırma ve parça-bütün kavramları öne çıkmaktadır. Kesrin parça-bütün bağlamı, toplamsal düşünmenin ve dolayısıyla birleştirme, ayırma ve birebir eşleme eylem şemalarından oluşmaktadır (Nunes & Bryant, 2023). Literatürde yer alan benzer araştırma sonuçları da ilkokul öğrencilerinin genellikle parça-bütün şemasını sıklıkla kullandıklarını ortaya koymuştur (Hackenberg, 2013; Olive & Vomvoridi, 2006). Araştırmacılara göre bu oldukça olağan bir durumdur çünkü öğrenciler için parça-bütün anlayışı diğer anlamlara göre daha anlaşılır olmakla birlikte hem değerlendirmesi hem öğretimi daha kolaydır (Jordan vd, 2016; Tunç-Pekkan, 2015). Bu araştırma sonucundan farklı olarak Özçakır Sümen, (2022) 4. sınıf öğrencilerinin kesirlere ait kavram imajlarını incelediği araştırmada öğencilerin parça-bütün, bölüm ve oran şemalarına sahip olduklarını; işlemci ve ölçme şemalarını hiç kullanmadıklarını belirtmiştir.

Çeşitli araştırmalarda, parça-bütün anlayışına dayanan kesir problemlerinde akademik başarısı çok yüksek olmayan öğrencilerin bile kolaylıkla yanıt verebildikleri belirlenmiştir (Hansen vd., 2015; Jordan vd., 2016). Bu durum, bazı araştırmacılar tarafından tartışmalı bir durum olarak görülmektedir çünkü kesirlerde nicel muhakemeden bahsedebilmek için kesrin parça bütün anlamının ötesine geçerek bir nicelik olarak kesirleri yorumlayabilmek gerekmektedir (Hackenberg vd, 2016; Nunes, Campos & Bryant, 2011; Watanabe, 2006). Kesrin parça-bütün anlayışı her bir parçanın eş olarak tanımlanmasını ve bunu birim kesri referans alarak yapmayı gerektirir. Buna karşın sadece parça-bütün bağlamını kullanmak kesrin diğer bağlamlarını anlamaya engel olmaktadır (Hackenberg vd, 2016; Thompson & Saldanha, 2003). Watanabe (2006), kesrin bir nicelik olarak anlaşılması için ölçme anlamının ilk önce öğretilmesinin doğru bir yaklaşım olduğunu ve Japonya ilkokul matematik ders kitaplarında kesirlerin böyle bir anlayışla öğretildiğinin altını çizmiştir. Mamede (2015), kesirlerin yalnızca parça-bütün bağlamını öğrenen çocukların kesirler hakkında akıl yürütmede önemli ilerleme kaydettiklerini ancak bu öğrenmeyi diğer durumlara aktaramadıklarını belirtmektedir. Nunes ve arkadaşları (2011), kesirlerde parça-bütün anlamını kullanmayı öğrenen öğrencilerin kesirleri bölme anlamını temsil etmek için kullanamadıklarını tespit etmişlerdir. Dolayısıyla, kesirlerin çocuklara sunulduğu bağlam, çocukların kesirler hakkındaki anlayışları üzerinde etkili olmaktadır. Kesrin farklı bağlamlarına ilişkin öğrenci düşünme yollarının belirlenmesine ek olarak her bir bağlamın öğrenciye verilmesinde ve farklı bağlamları transfer edebilen etkinlikler yürütülmesinin fayda sağlayabileceği düşünülmektedir.

Kesrin parça-bütün bağlamı "eş parçalara ayırma" kavramıyla paralel olarak gelişmektedir. Araştırmada öğrenciler alan modelini eş parçalara ayırırken baştan itibaren dikkatli bir şekilde davranmaya çalışmışlardır. Öğretim bölümleri süresince öğrencilere sık sık "Bu parçalar eşit mi, eş parçalara mı ayırdın, buna nasıl karar verdin, parçaların eş olduğuna nasıl emin oldun, neden eş parçalara ayırmak istedin?" gibi sorular yöneltilmiştir. Böylece öğrencilerin kesri eş parçalara ayırırken kavramsal bir anlayışla her bir parçanın aynı birim kesri temsil ettiğini düşünmesi hedeflenmiştir (Hackenberg vd., 2016). Ancak öğrencilerin birçoğunun bu anlayışa uymakla birlikte eş parçalara ayırmayı sanki bir kuralmış gibi benimsediği ve eş parçalamada kavramsal bir strateji kullanmadıkları gözlemlenmiştir. Pothier ve Sawada (1983), ilkokul öğrencilerinin bir modeli çift sayıda eş parçalara bölmekte başarılı olduğunu ancak tek sayıda parçaya ayırırken çok hata yaptıklarını gözlemlemiştir. Araştırmacılar, hiçbir öğrencinin ikiye, üçe bölme gibi

stratejiler (8 eş parçaya ayırırken üç defa ikiye bölme, 9 eş parçaya ayırırken önce üç sonra her bir parçayı tekrar üç parçaya bölme gibi) kullanmadıklarını belirtmiştir. Bununla birlikte, kullanılan alan modeli de eş parçalamayı etkilemektedir; daire modelini eş parçalara ayırmak dörtgensel alan modellerini ayırmaya göre daha zordur (Hackenberg, 2013; Tunç-Pekkan, 2015) çünkü daire modelinde simetrik çizgilerin olmaması sebebiyle öğrenciler daireyi eş parçalara ayırmakta zorlanırlar (Charles & Nason, 2000; Nunes & Bryant, 2022). Cramer, Wyberg ve Leavitt (2008) ise dairenin kesirlerde temsil için en iyi model olduğunu çünkü daire modeli öğrencilerin farklı parçalarının büyüklükleri hakkında zihinsel imgeler geliştirmesine yardımcı olduğunu belirtmiştir. Bu araştırmada ise öğrenciler dörtgensel alan modellerinde daha başarılı sonuçlar ortaya koymuştur.

Kesirlerde ölçme bağlamı sayı doğrusu aracılığıyla geliştirilir çünkü sayı doğrusu kesir büyüklüğünü anlamak için kullanılabilecek en uygun araçlardan biridir (Fennell & Karp, 2017). Bu araştırmada öğrencilerin sayı doğrusu kullanırken zorlanmaları iki şekilde yorumlanmıştır. Bazı öğrenciler kesir büyüklüklerini anlamadığı için hata yaparken bazı öğrenciler sayı doğrusu kullanmayı bilmediği için hata yapmıştır. Genel olarak veriler incelendiğinde öğrencilerin sayı doğrusu kullanmayı başlangıçta bilmese de süreçte öğrendiği ancak yine de kesir büyüklüğünü anlama konusunda hata yaptığı görülmüştür. Bu durum öğrencilerin kesrin ölçme bağlamını anlamakta son derece zorlandığını ve daha önce belirtildiği gibi öğrencilerin genellikle parça-bütün şemasında olduğunu desteklemektedir. Bununla birlikte, tüm araştırma süreci boyunca öğrencilerin sayı doğrusu kullanım bilgisinin arttığı; zamanla öğrencilerin nicelikleri sayı doğrusu kullanarak doğru temsil ettiği ve bu becerinin olumlu etkisiyle kesir büyüklüklerine dair daha doğru çıkarımlar yapabildikleri görülmüştür. Fuchs ve arkadaşları (2013), 4. sınıf öğrencilerinin kesirleri anlama bilgisini ölçtüğü araştırmada kesirlerin ölçme bağlamına dolayısıyla sayı doğrusuna daha fazla vurgu yapan müdahalenin parça-bütün bağlamını vurgulayan yaklaşımından daha etkili olduğunu ortaya koymuştur. Bu araştırmada ise hem sayı doğrusu hem alan modeli kullanımının öğrencilerde kesir büyüklüklerini ve dolayısıyla nicelikleri anlamaları konusunda olumlu etkisi gözlemlenmiştir ancak alan modeli kullanımının öğrenciler açısından daha kolay benimsendiği de bulgular arasındadır.

Araştırmada, öğrencilerin nicelikleri sayı doğrusunda temsil ederken en sık kullandıkları düşünme yolları; sayı doğrusunu olması gerekenden fazla ya da eksik sayıda parçalara ayırma, eş uzunluklara ayırmama, kesirleri sayı doğrusunda konumlandırırken iki

birim arasındaki mesafeyi değil, sayı doğrusundaki noktayı dikkate almadır. Sonuç olarak ise kapsamlı nicelleştirme konusunda öğrencilerin daha sınırlı bir başarıya sahip olduğu ve daha fazla desteğe ihtiyaç duyduğu görülmüştür. Bu sonuçlara benzer olarak Saxe ve arkadaşları (2007) ilkokul öğrencilerinin sayı doğrusu üzerinde kesirleri konumlandırmakta zorlandıklarını, sayı doğrusundaki uzunluklukları saymak yerine noktaları saydıklarını ortaya koymuştur. Öğrencilerin bu düşünme yolu, eski bilgilerine yani doğal sayı bilgisine dayanarak sayı doğrusundaki noktalarla sayıları eşleştirme anlayışından kaynaklanmış olabilir. Sayı doğrusu kullanımı ilkokul ikinci sınıftan itibaren ders kitaplarında yer almaktadır (MEB, 2018; 2024) ve öğrenciler bu araştırmadan önce doğal sayıları öğrenirken sayı doğrusu kullanmışlardır. Dolayısıyla bu araştırmada elde edilen bazı durumların öğrencilerin geçmiş bilgilerinden kaynaklandığı da düşünülebilir. Böyle bir durumda sınıf öğretmeninin öğrencilerin öğrenmesi üzerindeki etkisinden bahsedilebilir. Izsák, Tilleman ve Tunç-Pekkan (2008) yürüttükleri araştırmada öğrencilerin sayı doğrusunu aralıklara bölme yöntemlerindeki farklılıkların öğretmen için önemli görünmediğini raporlamışlardır. Dolayısıyla öğrencilerin varolan ve geçmişten getirdikleri bazı bilgilerinin ve düşünme yollarının devam ettiği ihtimali üzerinde de düşünülmektedir.

Öğrencilerin sayı doğrusu kullanma ve yorumlamada yaşadığı zorluk farklı sebeplerden ortaya çıkabilir. İlk olarak hem bu araştırmada hem literatürden elde edilen sonuçlara dayanarak ilkokul öğrencilerinin sayı doğrusunu daha soyut bir temsil aracı olarak görmesi (Thompson & Schneider, 2010) ve bilişsel düzeylerinin sayı doğrusunu gerçekten anlayıp yorumlama konusunda sınırlandırdığından bahsedilebilir. Piaget (1952) “olgunlaşma” (maturation) kavramına dayanarak bazı kavramların veya davranışların inşasının belirli bir aşamada henüz olgunlaşmaması olarak yorumlamıştır. Bu durumda eğitimcilerin sayı doğrusunu daha etkili bir şekilde kullanmanın yollarını araması veya tam tersi bir düşünce olarak sayı doğrusu kullanımına ilkokul kademesinden itibaren yoğun bir şekilde kullanmanın gerekçelerini daha net bir şekilde açıklamaları gerekebilir. Örneğin Kazanidis, Palaigeorgiou ve Bazinas (2018) sayı doğrusunun daha dinamik bir araç olarak kullanılmasını ve somut sayı doğrularının bağlamsal problemler aracılığıyla ve otantik durumlarda kullanılması gerektiğini vurgulamıştır. Bu açıklamalar bu araştırmada öğrencilerin kesir büyüklükleri ve dolayısıyla nicelikleri sayı doğrusunda neden doğru bir şekilde temsil edemedikleri konusunda bazı açık kapılar bırakmaktadır. İlk olarak, araştırmada uygulanan etkinliklerin genellikle parça-bütün anlamını vurgulayan etkinlikler olması veya öğrencilerin genellikle bu şemada olması sayı doğrusu kullanımında beklenen

başarının ortaya çıkmasında engel oluşturabilir. Ek olarak, Kazanidis ve arkadaşlarının (2018) önerdiği üzere, sayı doğrusu etkinliklerinin bağlamsal bir durumla birlikte verilmemiş olması ve dolayısıyla da öğrencilerin soyut düşünememesi bu sonuçların ortaya çıkmasının yolunu açmış olabilir.

Kesirlerin sayı doğrusu aracılığıyla öğretilmesinde tahmin becerisinin de önemli bir yeri vardır ve kesirlerde tahmin, kesir büyüklüğünün anlaşılması ile ilişkilendirilir (Fennell & Karp, 2017). Sınıf etkinliklerinde tahminin önemi göz önünde bulundurularak matematik kavramlarının öğrenilmesini teşvik etmek için hem sayı tahmini hem de nicel muhakeme görevlerinin kullanılması önerilmektedir (Nogues & Dorneles, 2019). Bu araştırmada öğrenciler tüm kesir türleri için sayı doğrusu üzerinde kesrin yerini bulma etkinliklerine katılmışlardır. Bunun sonucunda öğrencilerin başlangıçta tüm kesirlerin 0-1 arasında olduğunu belirttiği görülmüştür. Dolayısıyla öğrenciler değeri bir bütünden büyük olan kesirlerin büyüklükleri hakkında veya bu kesirleri sayı doğrusunda gösterme konusunda hatalı bir düşünme yoluna sahiptir (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Bu sonuca benzer olarak Resnick ve arkadaşları (2016) çoğu 4. sınıf öğrencisinin hem basit ve hem de bileşik kesirleri bir bütünden küçük olarak tahmin ettiğini ortaya koymuştur. Jordan ve arkadaşları (2016), öğrencilerin bileşik kesirlerle tahmin becerilerinin, basit ve tam sayılarla olan becerilerine göre daha hatalı ve daha geç geliştiğini belirtmiştir. Gunderson, Hamdan, Hildebrand ve Bartek (2019), sayı doğrusu üzerinde kesir anlayışının kesir büyüklüğü anlayışını destekleyebileceği hipotezini ortaya koymuştur. Buna karşın Tian ve arkadaşları (2021), alan modeliyle kesir öğretiminin, basit ve bileşik kesirlerin büyüklük tahmininde iyileştirme sağlarken sayı doğrusu ile öğretimin kesir büyüklüğü tahminini geliştirmediğini belirtmiştir. Bu araştırmada ise sayı doğrusu üzerinde kesir tahmini etkinlikleri öğrencilerin nicelikler üzerinde düşünme ve nicelleştirme becerilerinde gelişmeyi desteklemiştir.

Öğrencilerin matematiksel işlemler yapmadan önce söz konusu durumu görselleştirme ve nicel ilişkilendirme için öncelikle zihinsel imgeler oluşturmaları ve bu imgeleri dış temsillerle modellemeleri gerekir (Czocher, Hardison & Kularajan, 2022; Goldin, 2014; Moore & Carlson, 2012). Temsiller arasında görsel olarak resim, tablo veya somut model gibi araçların matematik ve dil arasındaki ilişkiyi kurmayı sağladığı için daha fazla önem vermek gerekmektedir (Duval, 1993). Henüz somut işlemler döneminde olan ilkokul öğrencilerinin kesirleri öğrenirken temsilleri kullanması, kesirleri somut hale getirdiği için daha kolay öğrenmeyi sağlamaktadır (Kocaoğlu, 2010). Bu süreçte ise uygun desteği

sağlamak için öğrencilerin temsiller hakkındaki bilgi ve anlayışlarının zaman içindeki gelişimini izlemek gerekir (Diezmann & English, 2001) çünkü çocuklar çizim yoluyla matematiksel düşüncelerini aktarırlar (MacDonald & Lowrie, 2011). Bu sebeple bu araştırmada öğrencilerin kesir kavramlarına dair düşünme yollarının ne olduğu ve nasıl geliştiği kolaylaştırıcı bir yol olarak temsiller aracılığıyla araştırılmıştır.

Kesir öğretimini temsiller ile birlikte ele alan birçok araştırma bulunmaktadır. Siegler, Thompson ve Schneider (2011) tam sayılarda olduğu gibi kesir büyüklüklerini temsil etmenin hem kesirler hem de genel matematik başarıları ile yakından ilişkili olduğunu tespit etmiştir. Benzer olarak Douville ve Pugalee (2003) problem çözerken zihinde bir imge oluşturmanın ve bunu temsil etmenin matematik başarısıyla pozitif yönde ilişkisi olduğunu bulmuş ve öğrencilerin zihinsel imgelerini açığa çıkarmaya yarayan "Bu problemi kendi cümlelerinle açıklar mısın, zihninde nasıl bir çözüm canlandı, problemin resmini çizer misin?" gibi sorular sormayı önermiştir. Bu sebeple bu araştırmada öğrenciler kesri bir nicelik olarak algılamakta zorlandığında veya kesir büyüklüğünü anlamaya çalışırlarken araştırmacı sıklıkla temsil kullanmalarını istemiştir. Örneğin birim kesirleri karşılaştırma etkinliklerinde öğrencilerin başlangıçta yanlış cevap verdikleri ve kesri bir nicelik olarak yorumlayamadıkları elde edilen bulgular arasındadır. Bunun gibi durumlarda araştırmacı öğrencilerden bir model ile kesirleri karşılaştırmasını istemiştir. Bunun sonucunda da genellikle öğrencilerin doğru sonuca gidebildikleri görülmüştür. Dolayısıyla, öğrencilerin fikirlerini geliştirmelerine yardımcı olmak için çoklu temsiller kullanmak doğru bir seçenek olabilir (Cramer, Post, & del Mas, 2002). Çalışmalar, öğrenciler modelleme konusunda daha fazla deneyim kazandıkça temsili ve kavramsal yetkinliğin zaman içinde arttığını göstermiştir (Stohlmann & Albarracín, 2016). Buna uygun olarak bu araştırmada da öğrencilerin temsil kullanma becerisinin zaman içinde arttığı gözlemlenmiştir.

Araştırmada elde edilen diğer bir bulgu, öğrencilerin çoğunlukla alan modelini kullanmayı tercih etmeleri; sayı doğrusu modelini ise yalnızca araştırmacı yönlendirdiğinde kullanmaları olmuştur. Öyle ki, kesrin ölçme bağlamını işlerken bile sayı doğrusunda gösterimden vazgeçip önce alan modeliyle temsil eden öğrencilerin olduğu görülmüştür. Buna dayanarak öğrencilerin alan modeli kullanımını daha sık tercih ettiği ve sayı doğrusu kullanımında ise kendilerine güvenmediği sonucunu çıkarabiliriz. Bu duruma benzer olarak Özçakır Sümen (2022) öğrencilerin problemlerin tamamını modellemede alan modelini kullandıkları ancak sayı doğrusu ve küme modelini hiç kullanmadıkları görülmüştür. Kılıç

ve Özdaş (2010), ilkokul öğrencilerinin kesirler konusunda konuşma, sembolik ve şekil temsillerini kullandıkları; somut nesne, sayı doğrusu gibi başka temsil türleri hiç kullanmadıklarını gözlemlemişlerdir. Diğer benzer araştırmalarda da ilkokul öğrencilerinin temsiller arası geçiş yapamama sorunlarıyla karşılaştığı, genellikle alan modelini kullandığı ve sıklıkla aynı temsil türünü kullanmayı tercih ettikleri görülmüştür (Baştürk, 2010; Gould, 2005; İpek & Okumuş, 2012; Kamacı, 2021; Kılıç & Özdaş, 2010).

Öğrencilerin sıklıkla tek bir modeli kullanmaları, diğer model kullanımlarını kısıtlayabildiği için olumsuz bir durum olarak yorumlanabilir. Ainsworth (2006) çoklu temsil taksonomisinde temsillerin bazı durumlarda kısıtlayıcı rolleri olduğunu belirtmiştir. Bunu "aşinalık ile içsel özellik kısıtı" olarak adlandırmıştır. Örneğin kesirler konusunda sıklıkla kullanılan alan modeli parça-bütün anlamını vurgulayan bir görsel temsildir. Ancak kesirler, uzunluk, ölçme gibi farklı fikirleri de içerir ve yalnızca alan modeli görseli kullanmak içsel özellik kısıtına sebep olur ve öğrenciler aşina oldukları için hep aynı modeli kullanmaya devam ederler. Bu sebeple farklı temsiller kullanmak bu sınırlılığı ortadan kaldırma görevini üstlenebilir. Dolayısıyla böyle bir durumda ortaya çıkabilecek engelleri aşmak için aynı niceliği farklı modellerle temsil etmek doğru bir yaklaşım olabilir. Lesh ve arkadaşlarına göre (1987) temsiller arası geçiş yapma, matematiksel kavramları akılda tutmanın yanı sıra öğrencilerin derin matematiksel anlayışa ulaşmalarına yardımcı olur. Bununla birlikte bir matematiksel nesnenin birden fazla temsili olduğundan bu temsilleri birlikte kullanmak kavram gelişimini destekler (Fennell & Rowan, 2001; Garofalo & Trinter, 2009; Rau vd., 2012) ve niceliklerin farklı temsilleri arasında ilişki kurabilme öğrencilerin nicel muhakemelerini geliştirir (Nunes & Csapó, 2011; Thompson & Saldanha, 2000; Weber vd., 2014)

Weber ve arkadaşları (2014) tarafından modellemenin nicel muhakemeye entegre edilmesine dair önerilen yöntemlere ek olarak farklı temsil türlerini birbirinin yerine kullanmak da etkili olabilir. Böylece öğrenciler bilgilerini transfer edebilme şansı elde ederler (Ainsworth, 2006; Goldin, & Shteingold, 2001; Weber vd., 2014). Bu araştırmada da birtakım etkinliklerde öğrencilerden uzunluk, alan ve sayı doğrusu modellerini birlikte kullanarak bir niceliği temsil etmeleri istenmiştir. Böyle durumlarda ise öğrencilerin sayı doğrusunda belirtilen çokluğu alan veya uzunluk modeline daha kolay aktarabildikleri; ancak alan veya uzunluk modeliyle temsil edilen niceliği sayı doğrusunda göstermede zorlandıkları görülmüştür. Bu konuda çalışan araştırmacılar öğrencilerin kesirleri içeren

problemlerde temsil kullanımlarını ve temsiller arası geçişlerini incelemiş ve sonuçta öğrencilerin temsilleri ayrı ayrı bildikleri ancak temsiller arası geçişte zorlandıkları görülmüştür (Baştürk, 2010; Gagatsis & Shiakalli, 2004; Galbraith & Haines, 2000; İpek ve Okumuş, 2012; Şahin, 2019). Sonuçta, bu araştırmadan elde edilen bulguların literatürle paralel olduğu görülmektedir.

Araştırmada bazı durumlarda öğrencilerin kesir kavramlarını doğru kullanmadığı, bildiği bilgileri kesir diline aktaramadığı veya doğru biçimde gerekçelendiremediği görülmüştür. Örneğin kimi öğrenciler alan veya sayı doğrusu modelini eş parçalara ayırmaya çalışmış ancak bunun gerekçesini doğru bir şekilde ifade edememiştir. Bu durumda öğrencilerin hatalı gerekçelendirme yaptıkları veya bildiklerini kesir diline aktarmada zorlandıkları üzerinde düşünülmüştür. Buna uygun olarak Olive ve Vomvoridi (2006), eş parçalama konusunda öğrencilerin genellikle kesir dilini kullanmaktan yoksun olduğunu belirtmiştir. Kesrin farklı bağlamları farklı kesir dili bilgisi gerektirmektedir. Kesirlerde parça bütün anlamından ölçme anlamına geçerken kesir dilinin kullanımı öne çıkmaktadır. Örneğin ⅗ kesrini ele alırsak, parça-bütün anlamına uygun olarak bu kesri beş eş parçadan üç tanesi olarak yorumlarız. Ancak kesrin ölçme anlamına göre bu kesri bir bütünün ⅗'ü olarak telaffuz etmek gerekir (Hackenberg vd., 2016). Bu araştırmada öğrenciler kesir kavramlarını öğrenirken dil ve konuşmayı da kaldıraç olarak kullanmışlardır. Örneğin, bir alan modelinde bütünü veya birim kesri göstermesi ve doğru kelimelerle tanımlaması, sayı doğrusunda her bir aralığın bir birim olduğunu bilmesi ve doğru bir kesir dili kullanmaları için destek olunmuştur. Sonuçta ise öğrencilerin sınıf içi tartışma, sonucu gerekçelendirme ve grup çalışmaları aracılığıyla kesir dilini daha doğru kullanabildikleri görülmüştür.

Thompson (1993) öğretim deneyi kullanarak gerçekleştirdiği araştırması sonucunda dil ve konuşmanın pozitif rolüne vurgu yapmış ve öğrencilerin düzenli olarak tartışmalara dahil edilmesi gerektiğini belirtmiştir. Özellikle kesirler konusunda öğrenciler kesir dilini doğru kullanmada yardıma ihtiyaç duyabilirler. Nitekim Mokhtar ve arkadaşları (2019) 4. sınıf öğrencilerinin kesir konusunda problemleri çözerken karşılaştıkları zorlukları inceledikleri araştırmada öğrencilerin kesir problemlerini doğru matematiksel cümleye çeviremediklerini belirtmiştir. Bu sebeple matematik yaparken öğrencilerin akıl yürütmelerini sözlü olarak ifade etmeleri için fırsat sağlanmalıdır (Gersten vd. 2009). Öğrencilerin akıl yürütmelerini değerlendirmek ve zihinlerinde oluşan imgeyi açığa çıkarmak için "Neden böyle düşünüyorsun? Nasıl anladın?" gibi açık uçlu sorular sormak kritik derecede önemlidir

(Douville & Pugalee, 2003; Kruse & Drews, 2013; Nunes & Bryant, 2023; Mayes, vd., 2014). Buradaki amaç öğrencilerin verilen durumu nasıl gördüklerini ve nicelikler arası ilişkileri nasıl kurduklarına yönelik betimlemelerini sağlamaktır (Smith & Thompson, 2008). Böylece öğrenciler problemde sunulan bağlama ilişkin yorumlarda bulunur ve gerekçe sunarak niceliklere ve nicelikler arası değişime dair çıkarımlar yapabilirler (Belue, 2015; Shavelson, 2008).

Bu araştırmada öğrenciler bazı etkinliklerde bir araya gelerek akranlarıyla birlikte çalışmışlardır. Bu süreçte, grup çalışması ve tartışmanın pozitif etkisi görülmüş; sınıfta özellikle sessiz kalan öğrencilerin daha fazla fikir beyan etmeye başladığı ve öğrencilerin birbirlerinin fikri üzerinde akıl yürüterek doğru yanıta ulaştıkları gözlemlenmiştir. Matematiksel dili, bu araştırma için kesir dilini, doğru kullanmak grup çalışması ve tartışma yönteminin de kullanılmasını işaret etmektedir çünkü grup çalışması ve tartışma yöntemi matematiksel söylemi kolaylaştırmaktadır (NCTM, 2014). Böylece hem öğrenci grubu besler hem de grup tartışmalarından ve akran söylemlerinden beslenir. Buna ek olarak bir problemde ne anlatıldığına ve ne istendiğine dair konuşma, çocukları aritmetikle ilgili aceleci yargılardan uzaklaştırma eğilimindedir (Thompson, 1993). Benzer olarak Robinson (2017) araştırmasında öğrencilerin problemdeki niceliklerin anlamları üzerine tartışarak karar vermelerinin nicel muhakeme süreçlerini etkileyen önemli bir süreç olduğunu ortaya koymuştur. Piaget ise tartışma, grup çalışmaları, akran öğretimi gibi kavramların tamamı için “sosyal etkileşim” (social interaction) kavramını kullanmış ve bunu bilişsel gelişimin önemli müdahalelerinden biri olarak yorumlamıştır (Piaget, 1961). Piaget, yeni bir bilgiyle karşılaşıldığında zihnin önce dengesizlik hali veya bilişsel çatışma (cognitive conflict) oluşturduğunu belirtir. Birey, daha önce görmediği bir duruma dair şemaya sahip olmadığı için yeni bir şema oluşturmak durumunda kalır ve bu yeni şemanın oluşması için gerekli ölçütlerden biri olarak da sosyal etkileşim kullanılabilir. Sosyal etkileşim aracılığıyla çocuğun zihninde bir bilişsel çatışma durumu yaratılır ve oluşan dengesizlik durumu sonucunda düşünme yolu gelişir ya da değişir. Bu sebeple Piaget’nin geleneğine göre etkileşimin olmadığı bir matematik öğretimi mümkün değildir (Wadsworth, 1996). Sınıf ortamında sosyal etkileşimin anlık olarak müdahaleyi kolaylaştırması sebebiyle de bu araştırmada sıklıkla kullanılmıştır.

Son olarak bu araştırmanın bir öğretim deneyi modeli olarak yürütülmesinin sonuçlarından da bahsetmek gerekmektedir. Araştırmada öğrencilerin bir konu ve kavrama

dair düşünme yolları ve zihinsel imgeleri incelendiğinden, öğretim deneyi modelinin bu araştırmayı mümkün kılan ve kolaylaştıran bir yöntem olduğunu söylemek yerinde olacaktır. Araştırmanın döngüsel bir süreç olarak yürütülmesi, varsayımsal öğrenmelere dayanarak öğrencilerde hedeflenen düşünme yollarının geliştirilmesi için müdahalelerde bulunulması, öğrencilerin olası düşünme yollarının belirlenmesi ve bu sayede olası hataların ve müdahalelerin belirlenmesi, teori ve pratik arasındaki farkı azaltmaya yarayan etkili tasarımların oluşturulması ve uygulanması, verilerin toplanması ve analizi sürecinin birlikte ilerlemesi ve sürekli analizlere dayanarak devamlı bir iyileştirme amacı güdülmesi gibi durumlar öğretim deneyi araştırmalarının güçlü yönleri olarak sayılabilir. Bu araştırmada da bu durumlara dayanarak öğretim deneyi yönteminin pozitif etkileri açık bir şekilde görülmüştür. Özellikle kesirler konusunun öğretiminde bir tasarım araştırma modelinin kullanılması öğrencilerin konuyu daha derinlemesine öğrenme fırsatı elde etmesini sağlamıştır. Her ne kadar araştırmada öğrencilerin bazı kavramları anlamakta zorlandığı görülse de iyileştirilmiş tasarımlar aracılığı ile kesir kavramlarının öğrenilmesinde ciddi bir yol kat edildiği söylenebilir.

5.1.2.Bütün Kavramına Dair Sonuç ve Tartışma

Kesirlerde öne çıkan zorluklardan biri bütünlerin yanlış tanımlanmasından veya yorumlanmasından kaynaklanmaktadır (Lamon, 2005; Simon, 1993). Bu araştırmada da elde edilen veriler bu durumu doğrulamıştır. Öğrenciler, birçok durumda bütünün göreceliğini ve kesrin büyüklüğünün bütüne bağlı olduğunu düşünmemişlerdir. Bu fikir, kesrin göreceli büyüklüğünü yorumlayabilmek ve kesrin doğasını anlayabilmek için oldukça önemlidir (Bednarz & Proulx, 2014; Nunes & Bryant, 2022). Bu durum başka araştırmalarda da ortaya çıkmıştır. Öyle ki, aynı büyüklükteki iki çikolata farklı şekillerde ikiden fazla parçaya bölündüğünde, oldukça farklı görünen ancak eşdeğer kesirlerle temsil edilecek parçalar ortaya çıkarsa, birçok çocuk farklı miktarlarda çikolata yiyeceğine inanır (Kamii & Clark, 1995; Lima, 1982; Nunes & Bryant, 2022). Bununla birlikte araştırmada öğrencilerin bütüne dair düşünme yolu, değeri bir bütünden büyük kesirlere geçildiğinde değişmiş; bütüne dair zihinsel imgeleri doğrusal şekilde ilerlememiştir. Diğer bir deyişle, öğrencilerin birim kesir ve basit kesirlerin büyüklüğüne dair düşünme yolları ile bileşik ve tam sayılı kesre dair düşünme yolları aynı değildir. Bu bulguyla paralel olarak Tobias (2013) öğretmen adayları ile yürüttüğü araştırmada bir bütünden büyük kesirlere geçildiğinde katılımcıların bütün algısının değiştiğini belirlemiştir.

Öğrenciler, bileşik kesir ve tam sayılı kesrin en az bir bütünden oluştuğunu birkaç etkinlik sonrasında anlayabilmişlerdir. Bu durum, ikinci uygulamada daha az görülmüştür çünkü ikinci uygulama ile birlikte önce bileşik kesri modelledikten hemen sonra tam sayılı kesir olarak ifade etme çalışmaları yapılmıştır. Böylece öğrenciler modelleme yaparken veya modelleri yorumlarken kaç tane bütün ve birim kesir olduğuna dair bir düşünme yolu kullanmışlardır. Birim kesirleri karşılaştırma etkinliklerinde öğrenciler sıklıkla alan modeli kullanarak kesirleri temsil etmişlerdir ancak aynı bütünleri çizmek yerine paydası büyük olan kesri daha büyük, paydası küçük kesri ise daha küçük bir alan modeli ile temsil etmişlerdir. Dolayısıyla böyle bir durumda kesrin büyüklüğünü temsil eden modellere bakarak karar vermek doğru bir yaklaşım değildir. Oysa öğrencilerin temsil kullanmasındaki amaç, kesrin belirttiği niceliği temsil ettikten sonra kesir büyüklüğünü fark etmeleridir. Ancak bu düşünme yolunu kullanan öğrenciler, kesrin aynı bütüne göre alınan nispi bir büyüklük olduğunu düşünememiş veya yorumlayamamıştır.

Öğrencilerin bütünün büyüklüğünü yorumlayamamasındaki bir sebep, birim kesri anlamamış olmaları olabilir çünkü bütünü anlamak birimi anlamakla eşdeğerdir (Hackenberg vd. 2016). Bununla birlikte öğrencilerin bir kısmında "soruda verilen ne ise bütün de odur" anlayışı hakimdir. Bunu en çok sayı doğrusu kullanımında görebiliriz; sayı doğrusu 0-2 doğal sayıları ile sınırlandırıldığında öğrenciler bütünü 0-2 olarak kabul etmişlerdir. Bu durum Lamon (2005) tarafından yürütülen araştırmada da ortaya çıkmıştır. Bunun sebebi öğrencilerin birimleri bir araya getirerek bütüne ulaşma fikrini benimsememeleri olabilir. Buna karşın, bazı öğrencilerde bütünün her zaman 1 olduğu anlayışı hakimdir. Örneğin iki daha daha fazla bütünden oluşan bir kesirde de bütünün ne olduğu sorulduğunda bu öğrenciler 1 yanıtını vermişlerdir. Bu bulguyla benzer olarak Saxe ve arkadaşları (2007) yürüttüğü araştırma sonucunda öğrencilerin sayı doğrusunu her zaman 0-1 aralığında oluşturduğunu çünkü bütünün her zaman 1 olması gerektiğini düşündüklerini ortaya koymuştur. Bu araştırmada ortaya çıkan bu gibi durumlarda gerçekçi örnekler üzerinden, bağlamsal ifadeler kullanılarak öğrencilerin bütünün büyüklüğüne dair zihinsel imgelerinin geliştirilmesi amaçlanmıştır. Çeşitli etkinlikler sonunda ise bir bileşik kesirde kaç bütün olduğuna dair doğru çıkarımlar yapmaya başlamışlardır.

5.1.3.Bir Bütünden Küçük Kesir Büyüklüğüne Dair Sonuç ve Tartışma

Araştırmanın bu temasında birim kesir ve basit kesir büyüklüklerine dair öğrencilerin düşünme yolları değerlendirilmiştir. Elde edilen veriler incelendiğinde öğrencilerin

tamamının basit kesir büyüklüğü konusunda zorluk yaşamadığı görülmüştür. Ancak aynı durum birim kesirler için geçerli değildir. Bu sebeple bu tema altındaki bulgular ile sonuç tartışma bölümleri birim kesir ağırlıklı olarak değerlendirilmiştir. Kimi öğrenci birim kesri bütünü eş parçalara yani birimlere ayırma olarak düşünürken kimi öğrenci birim kesri yinelemeli olarak bütünü oluşturma imgesiyle düşünebilir (Tzur, 1999). En nihayetinde birim kesir, kesirlerde ölçme ve eş parçalara ayırma gibi şemaları anlayabilmek için gereklidir (Steffe, 2002). Bu araştırmada öğrencilerin birim kesir ile ilgili ilk zihinsel imgeleri, "payı bir olan kesir" şeklindedir ki bu bilgi önceki deneyimlerine dayanmaktadır. Bu anlayış, birim kesri parça-bütün ve ölçme bağlamları içinde değerlendiren etkinlikler ile aşılmıştır. Böylece öğrenciler, daha önce de aşina oldukları paylaşım anlayışına dayanarak birim kesri yorumlamışlardır. Devamında ise sayı doğrusu aracılığı ile öğrenciler birim kesri bir nicelik ve ölçü birimi olarak düşünmeye başlamışlardır. Sonuçta en basit tabirle, birim kesri anlama ile sayı doğrusu kullanımı arasındaki güçlü ilişkiden bahsedebiliriz. Bununla birlikte sayı doğrusunda birim kesir kullanımına dair de öğrencilerin bazı düşünme yolu mevcuttur. Birimi belirlerken paydaya bakarak değil paya bakarak seçme, sayı doğrusundaki aralıkları eşit yapamama ve birim kesri sıfıra değil bütüne yakın bir noktada belirtme gibi yanıtlar öğrencilerin birimi ve birim kesri anlamadığını ve yorumlayamadığını kanıtlar niteliktedir. Literatürde yer alan bazı araştırma sonuçları da bu durumu doğrulamıştır (Pesen, 2008; Wong, 2013).

Araştırmada birim kesir etkinliklerinde teknolojiden de yararlanılmış ve öğrencilerin birim kesir anlayışının gelişmesinde teknolojinin olumlu etkisi gözlemlenmiştir. Bu noktada, benzer araştırmalardan elde edilen sonuçlarla paralel olarak öğrencilerin kesirlerde parça-bütün, uzunluk ve ölçme bağlamlarını pekiştirdiği, duyuşsal bilgilerinin ve motivasyonlarının geliştiği, matematiksel bilgiyi ve kavramı anlamlandırmada olumlu yönde etkilediği, öğrencileri matematiksel ilişkileri görmeye teşvik edip görsel ve sembolik temsil biçimlerini ilişkilendirmelerini desteklediği, etkileşimli ve dinamik yollarla nicelikler üzerinde işlem yapma fırsatı sağladığı görülmüştür (Debrenti, 2015; Hackenberg vd., 2016; Hwang & Hu, 2013; Özdemir & Reis, 2013; Riconscente, 2013; Simon vd., 2018; Steffe & Olive, 2002; Suh, Moyer & Heo, 2005; Yeo & Webel 2022).

5.1.4.Bir Bütünden Büyük Kesir Büyüklüğüne Dair Sonuç ve Tartışma

Araştırmada değeri bir bütünden büyük kesirler önce alan modeli sonra ise sayı doğrusu aracılığıyla işlenmiştir. Bu doğrultuda önce bir bütüne ulaşılmış, sonrasında ise bütünün bir

birim fazlası ile başlayarak bileşik kesirler tam sayılı kesirler ile birlikte açıklanmıştır. Öğrencilerin bir bütünden kesirlere dair zihinlerinde oluşan ilk imge, daha önceki bilgilerine dayanarak bu kesirlerin de 0-1 arasında olduğudur. Dolayısıyla çocukların kesirlerle karşılaşması basit kesirler ile başladığından kesirlerin her zaman birden küçük olduğu inancına yol açmıştır (Stafylidou & Vosniadou, 2004; Vosniadou, Vamvakoussi, & Skopeliti, 2008). Bu duruma paralel olarak Jordan ve arkadaşları (2016) tarafından yapılan araştırmada da öğrencilerin hem basit hem de bileşik kesirleri birden küçük olarak belirttiklerini, bu da pay ve payda arasındaki ilişkiye dikkat etmediklerini göstermiştir.

Araştırmada, öğrencilerin bileşik ve tam sayılı kesir büyüklüklerini kavrayamama ve yorumlayamama sebebi birim kesir temelli bir kesir büyüklüğü inşasının eksikliği olarak yorumlanmıştır çünkü öğrenciler, bileşik kesirleri kendi başlarına sayı olarak inşa etmeden, örneğin yedide birler ($\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, ..., $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{7}$, ...) gibi kesir sayı dizileri oluşturamazlar. Genellikle öğrenciler $\frac{7}{7}$ kesrine ulaştıktan sonra tüm birimleri kullandıklarını düşünürler. Oysa $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{7}$ gibi bir bütünü aşmayı ifade eden kesirlere de ulaşması gerekir. Bunu yapmamanın, öğrencilerin sayı doğrusu kullanmaları üzerinde de olumsuz etkisi vardır çünkü sayıların birbirleriyle ilişkili olduğunu sayı doğrusu kullanımı ile anlarlar (Hackenberg, 2007). Bu sebepledir ki bu araştırmada birçok öğrenci için bileşik kesir "payı paydasından büyük kesir" olmanın ötesine geçememiştir.

Öğrenciler, basit kesir büyüklüğü üzerinde doğru düşünme yolları geliştirirken bileşik ve tam sayılı kesirlerde uygun olmayan ve hatalı düşünme yolları kullanmışlardır. Önceki etkinliklerde bir bütünden küçük kesirlerle çalışıldığı için zihinlerinde tüm kesirlerin en fazla bir bütün kadar olacağı fikri oluşmuştur. Bu durum, kesir kavramlarının anlaşılması için araştırmada alan modeli yani parça-bütün anlamını vurgulayan etkinlikler sıklıkla tercih edildiğinden kaynaklanmış olabilir. Kesirlerde parça-bütün anlamına dayanan etkinlikler konunun kavranması için çok iyi bir seçenek olsa da bir bütünden büyük kesirlere geçildiğinde zorluk çıkmaktadır. Bu sebeple öğrencilerin bir bütünden küçük ve büyük kesirlerdeki bütün şemaları değişmiş olabilir. Bununla paralel olarak öğrencilerin bileşik ve tam sayılı kesirlerde sembolik temsil kullanmaya daha yatkın oldukları görülmüştür. Bu sonuca benzer olarak Kamacı (2021) 4. sınıf öğrencilerinin kesirlerde kullandığı temsileri incelemiş ve basit kesirlerde alan modelinin, bir bütünden büyük kesirlerde ise sembolik ve sözel temsillerin daha sık kullanıldığını ortaya koymuştur. Bunun üstesinden gelebilmek için uygulamaların tamamında görsel temsiller kullanarak hem parça-bütün hem de ölçme

anlamını vurgulayarak kesir büyüklüklerini anlamalarını sağlamaya çalışılmıştır. Devamında, öğrenciler kesri alan modeli ile temsil ettiğinde büyüklük hakkında doğru çıkarımlar yapabilmiş ancak bu bilgiyi sayı doğrusu gösterimine transfer edememişti. Öğrenciler, öğretim bölümleri ilerledikçe model çizmeyi alışkanlı haline getirmişlerdir.

Öğrenciler, bileşik kesir ve tam sayılı kesrin aynı miktarı temsil eden farklı gösterimler olduğunu birkaç etkinlik sonrasında anlayabilmişlerdir. Bu durumu şöyle yorumlayabiliriz; öğretim programına göre basit kesirlerden sonra bileşik kesirlere ve sonra tam sayılı kesirlere geçilmektedir. Ders kitaplarında da durumun böyle olduğu görülmektedir. Öğrenciler bu iki kesir türünün aslında tamamen farklı nicelikleri temsil ettiğini ve temelde farklı kesir türleri olduğuna inanmış olabilirler. Nitekim bu araştırma sonucunda da öğrencilerin yanıtlarından ve tepkilerinden böyle bir zihinsel imgeye sahip oldukları söylenebilir. Dolayısıyla bu iki kesir arasındaki farkı kapatabilecek farklı yöntem ve etkinliklerin kullanılması bu sorunun üstesinden gelebilir. Bu sebeple bu araştırmanın birinci uygulamasında bileşik kesirlere geçildikten sonra bir süre yalnızca bileşik kesre dair etkinlikler yürütülürken ikinci uygulamada bu yöntem terk edilmiştir. İkinci uygulamada bir bütünden büyük kesirlere geçildiğinde bileşik kesir ve tam sayılı kesir öğretimi bir arada verilmiştir. Örneğin öğrenci bir kesri modelleyip önce bileşik kesir olarak yazıp hemen sonrasında "kaç bütün var?" sorusuyla başlayan ikinci aşamaya geçilmiştir. Böylece öğrenci örneğin $\frac{9}{5}$ kesrinin 1 bütün ve 4 birim kesirden oluşan bir miktar olduğunu düşünebilmiştir.

5.1.5.Kesirlerde Karşılaştırmaya Dair Sonuç ve Tartışma

Araştırmanın bu temasında birim kesirler ve diğer kesirler olmak üzere karşılaştırma etkinlikleri yürütülmüştür. Araştırmada kesirleri karşılaştırma ve sıralama etkinliklerinde öğrencilerin birim kesirleri karşılaştırmakta zorlandığı görülmüştür. Öğrenciler ilk birim kesir karşılaştırma etkinliklerinde paydadaki doğal sayılara bakarak kesirleri karşılaştırmış; kesir büyüklüğüne göre karşılaştırma yapmamıştır. Bu durum, daha önceki bilgilerine dayanarak doğal sayı temelli düşünme yolu olarak yorumlanmıştır (Ni & Zhou, 2005; Nunes & Bryant, 2009). Pearn ve Stephens (2007), Resnick ve arkadaşları (2016) ile Rodrigues ve arkadaşları (2019) tarafından yapılan araştırma sonuçlarında da öğrencilerin paydalara bakarak birim kesirleri sayı doğrusuna yerleştirdikleri görülmüştür. Araştırmacılar ise bu durumu karşılıklı ilişki bakımından eksik bir muhakeme ve dolayısıyla da kesrin paydası ve büyüklüğü arasındaki çarpımsal ilişki üzerinde akıl yürütme eksikliği olarak yorumlamıştır. Araştırmanın ilerleyen öğretim bölümlerinde bağlamsal problemler aracılığıyla ve

öğrencilerden temsil kullanmalarını isteyerek yanıt vermeleri desteklenmiştir. Sonuçta ise kesir büyüklüklerini daha doğru temsil edip doğru muhakeme edebildikleri görülmüştür. Öğrencilerin karşılaştırma yaparken kullandığı düşünme yolları incelendiğinde dayanak noktaları (benchmarks) konusundaki zihinsel imgelerinden de bahsetmek gerekir çünkü kesirleri bütünü veya yarımı referans alarak karşılaştırma stratejisi yaygın olarak kullanılmaktadır (Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012; Fennell & Karp, 2017). Teoh, Mohamed, Parmjit ve Kor (2020), bu stratejilerin kesirlerin kavramsal olarak anlaşılmasını desteklediğini ve dolayısıyla kesir duyusunda yetkinlik kazanılmasına katkı sağladığını vurgulamıştır. Bu araştırmada da öğrencilerin yüzeysel nicelleştirme becerilerinin geliştirilmesi için dayanak noktalarına sıklıkla vurgu yapılmış ve sonuçta bunun olumlu etkisi görülmüştür.

Öğrenciler, birim kesir dışında diğer türleri kesir karşılaştırmalarında daha çok doğru yanıt vermişlerdir. Birim kesir karşılaştırmasında da kullandıkları pay ve paydalara bakarak yanıt verme stratejisi öğrencileri yanlış yanıt vermeye iterken, diğer kesirleri karşılaştırmada doğru yanıt vermelerini sağlamıştır. Doğal sayı temelli düşünme yolu olarak kabul edilen bu strateji, biraz da tesadüfi olarak öğrencilerin doğru yanıt vermelerini sağlamış olabilir çünkü 4. sınıf seviyesinde aynı paydaya sahip kesirler arasında karşılaştırma ve sıralama yapıldığı için öğrencilerin bu düşünme yolu her zaman doğru bir yanıt olarak sonuçlanacaktır. Sonuç olarak, aynı paydaya sahip iki kesrin büyüklüklerini karşılaştırmak için, payların büyüklüklerini karşılaştırmak yeterlidir ve kesirlerin büyüklüklerini bir bütün olarak düşünmek gerekli değildir. Bu da öğrencileri kesir büyüklükleri hakkında fazla derin düşünmemeye itmektedir (Obersteiner & Tumpek, 2016). Böyle durumlarda öğrencilerin düşünme yolunu değiştirmek oldukça güçtür çünkü hatalı bir yol kullansa da sonuçta doğru bir yanıt vermiş olmaktadır. Dolayısıyla bu tür durumlarda öğrencilerin kafasını karıştırmamak için bu konu üzerinde fazla durulmamıştır. Ancak bağlamsal problemler ve modellemeler ile öğrencilerin kesir büyüklüğü üzerinde düşünmeleri için destek olunmuştur.

5.1.6.Sonuçlara bütüncül bakış

Özetle, bu araştırmaya ‘‘İlkokul 4. sınıf öğrencileri, nicel muhakeme becerisini vurgulayan etkili tasarımlar aracılığıyla kesirler konusuna ait kavramları daha iyi öğrenirler.’’ varsayımı ile yola çıkılmıştır. Bu noktada araştırmada olumlu sonuçlar ile birlikte varsayılan öğrenmelerin tersi veya beklenen düzeyde ilerlemenin gerçekleşmediği durumlar da bulunmaktadır.

Araştırma süresince öğrencilere kesir kavramlarını öğretirken bazı temel prensiplere bağlı olarak olumlu sonuçlar elde edilmiştir. Bu temel prensipler şunlardır: Öğrencilerin kesirleri birer sayısal değer olarak değil nicelik olarak zihinlerinde imgeleştirmelerini desteklemek, nicelikleri ilişkilendirirken aritmetik işlem ve işlemsel anlamadan önce kavramsal anlamayı vurgulamak, bağlamsal problemler kullanarak öğrencilerin kesirleri niteliğe bağlı bir nicelik olarak düşünmelerini desteklemek, öğrencilerin iç temsillerini çeşitli dış temsiller aracılığıyla dışa vurmalarını sağlamak ve bu noktada temsilleri en önemli araç olarak kullanmak, hem görsel hem sözel temsilleri öğrencilerin hatalarını keşfetmek ve daha etkili tasarımlar planlayabilmek için bunları kullanmak, her öğrencinin aynı şekilde ve aynı zamanda öğrenmediği varsayılarak her bir öğretimde farklı temsil türleri kullanmak veya temsiller arası geçiş görevleri vermek, öğrencilerin kendi fikirlerini dile getirmeleri için desteklemek ve bunu sınıf içi veya grup içi tartışma yöntemiyle gerçekleştirmek, öğrencilerin motivasyonunu artırmak ve dinamik öğretim bölümleri tasarlayabilmek için somut ve dijital materyaller kullanmak, derinlemesine görüşmeler sırasında yönlendirici sorular aracılığıyla öğrencilerin düşünme yollarını açığa çıkarmak ve derinleştirmek ile kesir büyüklüklerini anlayabilmeleri adına tahmine dayalı etkinlikler yürütmektir.

Uygulanan öğretim bölümlerinin birçok olumlu sonucuna karşın tüm araştırma süreci boyunca çeşitli varsayımsal öğrenmelerin gerçekleşmediği veya beklentinin altında gerçekleştiği durumlar bulunmaktadır. Öncelikle kesrin farklı bağlamlarının gelişimi konusunda varsayılan öğrenmelerin her zaman gerçekleşmediği görülmüştür. Öğrenciler çoğunlukla kesrin parça-bütün anlamını kullanmışlardır. Öğretim bölümleri aracılığı ile kesrin ölçme ve bölme anlamlarına vurgu yapan etkinlikler de kullanılmıştır ancak yine de öğrencilerin parça-bütün şemasını kullanma eğiliminde olduğu görülmüştür. Dolayısıyla öğrencilerin ölçme bağlamını daha az kullandığı ya da kullanmadığı da ortaya çıkan sonuçlardan biridir. Araştırmada kesir büyüklüğünü anlamak için sayı doğrusu etkili bir araç olarak kullanılmıştır ancak sayı doğrusu kullanımında öğrenciler sıklıkla hata yapmış ve bu konudaki gelişimleri doğrusal bir yol izlememiştir. Sonuç olarak sınıfta bazı öğrencilerde ölçme bağlamı tamamen gelişemeden araştırma süreci sona ermiştir. Bununla birlikte, her ne kadar öğretim bölümleri ilerledikçe bağlamsal problemlere daha fazla yer verilse de özellikle kesrin ölçme anlamına dayanan problemler daha fazla kullanılabilirdi. Kısıtlı zaman dilimi sebebiyle de problem çözme etkinliklerine daha az yer verilmiştir. Bu noktada daha uzun süreli araştırmaların bu durumu tersine çevirme potansiyelinin olacağına inanılmaktadır. En nihayetinde araştırmanın amacına ve hipotezine uygun olarak planlanan

ve uygulanan öğretim bölümlerinin genel olarak başarılı bir kesir öğretim sürecini desteklediği sonucuna varılmıştır.

5.2. Öneriler

Bu araştırma, kesirler konusunda çeşitli müdahalelerin uygulandığı ve bu süreç boyunca öğrencilerin düşünme yollarının değişiminin ve gelişiminin raporlandığı bir öğretim deneyi çalışması olarak yürütülmüştür. Dolayısıyla tasarım temelli bir araştırma örneği olarak bu araştırmanın bu alanda çalışmalar yapan araştırmacılar ile eğitimciler için bir örnek teşkil edebileceği düşünülmüştür. Öğretim deneyi çalışmaları, nitel araştırma deseni geleneğine uygun olarak tasarlanıp raporlandığı için bu araştırmada elde edilen sonuçlar için genelleştirme gayesi bulunmamaktadır. Bununla birlikte süreç boyunca uygulanan her bir etkinlik ve müdahalenin hem eğitimciler hem araştırmacılar için örnek olabileceğine inanılmaktadır. Bu doğrultuda hem araştırmacılar hem eğitimciler için çeşitli önerilerde bulunulmuştur.

5.2.1.Araştırmacılara Öneriler

Araştırma süreci boyunca edinilen verilere dayanarak literatürün de belirttiği üzere öğrencilerin kesir kavramlarını ve kesir büyüklüklerini anlamakta zorlandığı görülmüştür. Dolayısıyla yapılacak yeni araştırmaların kesir öğretimine yönelik müdahaleler, kesirlerle ilgili kavramsal bilgiye ve kesir büyüklüklerini anlamaya yönelik olması önerilebilir. Bu araştırmada bir nicelik olarak kesir büyüklükleri ele alınmış ve temsiller, matematiksel dil, derinlemesine görüşme gibi müdahalelerle öğrencilerin kesir kavramlarını anlaması amaçlanmıştır. İleride yapılacak araştırmalarda bu müdahalelerden farklı yöntemler ile öğrencilerin kesirleri öğrenme sürecindeki gelişimleri incelenebilir.

Araştırmada, kesir kavramlarının gelişimi ve değişimi öğrencilerin kullandıkları temsiller aracılığıyla incelenmiştir. Gelecekteki çalışmalar da öğrencilerin temsil kullanma becerilerini anlamak ve desteklemek için nicelikleri anlamaya dayanan ve nicelikler arası ilişkilere vurgu yapan bir anlayışı benimseyebilirler. Bu noktada, bu araştırmadan farklı olarak yalnızca kesirlerde değil matematikte ölçme, problem çözme, cebir ve daha birçok konu ve kavram için öğrencilerin nicel muhakemeleri incelenebilir ve geliştirmek için çeşitli müdahale programları tasarlanabilir. Yine bu araştırmadan farklı olarak, bir öğretim deneyi araştırma deseni dışında, söz konusu öneri araştırmaları deneysel araştırma yöntemi olarak

da planlanabilir. Böylece daha fazla katılımcı ile ve daha kapsamlı bir konu ile çalışılması mümkün hale gelebilir. Böyle bir durumda ise uzun vadede veri toplamaya dayanan boylamsal ve detaylı bir araştırma sürecinin planlanması önerilir. Böylece öğrencilerin gelişimleri uzun vadede incelenebilir ve daha kapsamlı ve genelleştirilebilir sonuçlara ulaşılabilir.

Öğrencilerinin herhangi bir konuda nicel muhakemelerinin incelenmesi ve geliştirilmesi uzun bir süreç gerektirmektedir. Literatürde büyük yaş gruplarının nicel muhakemelerini ölçen az sayıda ölçek ve test bulunmaktadır (Glassmeyer, 2010; Grawe, Lutsky & Tassava, 2010; Kruse & Drews, 2013; Nunes vd. 2015) ancak ilkokul öğrencilerinin düzeyine uygun bir ölçek veya test henüz geliştirilmemiştir. Böylesi bir ölçme aracı, yalnızca kesirler değil diğer farklı konular kapsamında öğrencilerin nicel muhakemelerini ölçmek için kullanılabilir ve bu sayede daha iyi bir öğretim planı ve öğrenme yörüngeleri geliştirebilmek çeşitli müdahaleler planlanabilir.

Öğrencilerin katılımı dışında öğretmen ve öğretmen adayları ile yapılabilecek araştırmalar önerilebilir. Örneğin öğretmen eğitiminin, öğretmenlerin nicel muhakeme hakkındaki düşünme biçimlerini nasıl belirleyebileceği ve geliştirebileceği konusunda araştırmalara ihtiyaç vardır. Nicel muhakemeyi mesleki gelişime dahil ederek öğretmenlerin ve adayların niceliklere ve nicel ilişkilerin diline odaklanmalarına yardımcı olunabilir. Böylece sınıf tartışmalarını ve öğrencilerin güçlü nicel muhakemelerinin gelişimini destekleyecek şekilde yeni problemler ve bilgiler ortaya koyma olasılıkları arttırılabilir.

Öğrencilerin muhakeme becerilerinin gelişimi öğretmenlerin bunu destekleyecek nitelikte hazırladığı ders planlarına da bağlı olmaktadır. Öğretmenlerin kendilerinin muhakeme becerisine gerekli önemi vermesi ise iyi bir öğretmen eğitimi ile ilişkilidir. Dolayısıyla ileriki araştırmalarda hem öğretmenlerin hem öğretmen adaylarının çeşitli konular kapsamında muhakeme becerilerinin geliştirilmesi ve öğrencilerde bunun gelişebilmesi için gerekli desteğin sağlanması önerilebilir. Öğrencilerin çeşitli bağlamlarda becerilerini ve kavramsal öğrenmelerini desteklemenin bir yolu, öğretmenleri de aynı şeyi yapacak şekilde eğitmektir. Bu noktada öğretmenleri müdahale içeren eylem araştırması veya bu araştırmaya benzer olarak tasarım araştırması gibi yöntemlerle yönlendirmek etkili olabilir. Bunun öncesinde ise öğretmenlere ve öğretmen adaylarına etkili müdahale örnekleri sunmak için özel olarak tasarlanmış, öğrencilerin muhakeme becerilerini destekleme içeriğinde atölye çalışmaları veya hizmet içi eğitimler sunulabilir.

İlkokul dönemindeki çocuklarının matematik kavramlarını anlama, yorumlama ve uygulamada iyi bir yönlendirmeye ihtiyaçları vardır. Eğitimcilerin sorumluluğu çocukların neyi bilip bilmediğinin sınırlarını belirlemek ve bu sınırların ötesine geçebilmeleri için rehberlik etmek olmalıdır. Bunun da ötesinde eğitimciler öğrenci hataları üzerinde düşünmelidirler. Bu araştırmada öğrencilerin kesirler konusundaki düşünme yolları incelenirken aynı zamanda yaptıkları hatalar üzerinden çeşitli etkinlikler yürütülmüştür. Öğrencilerin var olan hataları, bunların nasıl ortaya çıktığı ve nasıl giderildiğine dair daha fazla araştırmaya ihtiyaç vardır. Bununla birlikte mevcut hatalar ve hataların giderilmesinin ileriki yıllarda öğrencide nasıl bir farklılık oluşturduğunun da araştırılması önerilebilir. Bu doğrultuda hem kesirler konusu hem de matematikteki diğer konu veya kavramlar için öğrencilerin uzun vadedeki gelişimlerini ölçen boylamsal araştırmaların literatüre büyük katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

5.2.2.Eğitimcilere Öneriler

Matematik öğretiminin amaçlarından biri olan muhakeme etme becerisi okul öncesi dönemden başlayarak her sınıf düzeyinde öğrencilerde geliştirilmesi gereken becerilerin başında gelmektedir. Dolayısıyla okul öncesi veya okula yeni başlayan çocuklar için matematiksel akıl yürütmenin varlığı matematikteki birçok konunun da doğru bir şekilde anlaşılmasının önüne açabilir. Bu süreçte öğrencilerin gerçekleştirdikleri zihinsel eylemler, kavramlar arasında ilişkilendirme yapma ve durumları nicel yapılar içerisinde değerlendirmeye imkan vererek kavramsal öğrenmelerini destekleyebilir. Bu doğrultuda, nicel muhakeme, öğretimin bir amacı olarak ele alınmalı ve nicel muhakemenin gerçekleşmesini sağlayan zihinsel işlemler ve kavramsal yapılar incelenebilir.

Her bir öğrencinin kavramsal ve işlemsel bilgiye olarak matematikte anlama, yorumlama, değerlendirme, sorgulama ve sonuç çıkarabilme konularına hakim olması gerekmektedir. Öyle ki, formal bir eğitim hayatı sonrası kişilerin mesleki ve kişisel yaşamında fikirler oluşturma, değerlendirme ve bireylerle iletişimde bulunmaları için nicel bilgileri işleme ve ilişkilendirmede donanımlı olmaları gerekir. Bu nedenle nicelikler üzerinde düşünme, nicel ilişkiler kurabilme ve matematikte çeşitli kavramları anlayabilme için hem kavramsal hem işlemsel bilgiye dayalı bir öğretim programı çerçevesinde eğitim-öğretim yapılandırılmalıdır. Bu noktada, henüz hayata geçirilen Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli Matematik Dersi Öğretim Programının (2024) niceliklere yaptığı vurgular olumlu kabul edilebilir.

Ders kitaplarının da nicel muhakemeyi desteklemesi önemlidir çünkü nicel muhakeme yönünden zengin içerikler öğrencilerin çevresindeki nesneler, durumlar ve ölçümler ile matematik arasında ilişki kurmadaki yeteneklerini ve kavramsal gelişimini destekleyebilir. PISA'da oldukça yüksek performans sergileyen ülkelerin başında gelen Çin, Singapur ve Japonya gibi uzak doğu ülkelerinin matematik dersi öğretim programında nicel muhakemenin önemli bir yeri olduğu görülmektedir. Örneğin Güney Kore matematik öğretim programında ise nicelik bakımından argüman oluşturmanın önemli olduğu belirtilmiştir (Watanabe, 2011). Benzer olarak Japonya'da matematik ders kitaplarında nicelikler ile nicel muhakeme kapsamında daha fazla sayfa ayırdığı ve "Nicelikler ve Ölçme" ile "Niceliksel İlişkiler" adında iki farklı matematik öğrenme alanının bulunduğu bilinmektedir (Thompson & Carlson, 2017; Karagöz Akar, Watanabe & Turan, 2022). Türkiye'de ise ilkokul matematik ders kitaplarının nicel muhakemeyi desteklemesi yönünden araştıran bir çalışmaya rastlanmamıştır.

Öğrencilerin sınıf içerisinde nicel muhakeme edebilmelerinin nasıl sağlanacağı yönünde de öğretmenlerin bir rehbere ihtiyacı olabilir. Temel olarak, öğrencilerin muhakeme becerilerini geliştirmek için öğretmenlerin nicel akıl yürütmenin rolünü anlamaları gerekmektedir. Bu araştırmada elde edilen verilere dayanarak genel olarak eğitimcilere şu önerilerde bulunulabilir:

- Yapılandırmacı öğrenme temelinde, öğretmenin kendi bilgisini aktarması yerine çocukların bilgiyi kendi zihinsel düzeneklerinde oluşturmaları için onlara fırsat verilmelidir. Ezberci bir yaklaşımdan uzak durarak özellikle kesir diline dikkat edilmelidir.

- Öğrencilerin çeşitli düşünme yolları geliştirebilmeleri için yaratıcı öğrenme içerikleri oluşturulmalı ve bu noktada hedefe yönelik planlar yapılmalıdır.

- Söz konusu bir kavrama dair öğrencinin nasıl bir zihinsel imgeye sahip olduğunu anlamak için etkili ve düşündürücü görevler verilmeli ve bu süreçte görselleştirme ve temsil kullanmaları desteklenmelidir. Matematik öğretiminde kavramlar tek bir temsil ile sınırlandırılmamalı, zengin bilgi içeren farklı temsil türlerine yer verilmelidir.

- Tüm öğrencilere problemleri çözerken düşünme yollarını sözlü olarak ifade etmeleri için fırsat sağlanmalıdır. Bu noktada tartışma veya grup çalışması gibi yaklaşımlar matematiksel söylemi zenginleştirebilir.

- Sınıf tartışmaları sayılar üzerine değil nicelikler üzerine olmalıdır. Öğrencilere bu tartışmalarda "Bu çokluk neyi ifade ediyor? Burada neler oluyor?" gibi sorular yöneltilebilir. Buradaki amaç öğrencilerin verilen durumu nasıl gördüklerini ve nicelikler arası ilişkileri nasıl kurduklarına yönelik bilgilerini elde etmektir.

- Öğrencinin kavramsal bilgisini geliştirmeyi hedefleyen birçok araştırmanın odak noktasında olduğu gibi tüm süreç boyunca onların yanıtları, sözel ifadeleri, temsilleri ve jest-mimikleri gözlemlenmelidir. Sonuç olarak hem gözleme hem de diğer çeşitli veri toplama araçlarına dayanarak daha etkili planlar hazırlanıp uygulanabilir.

Kaynakça

Akalın, Ş. H. & Toparlı, R. (2011). *Türkçe sözlük*. TDK Yayınları, Ankara.

Akın, A. (2016). *Ortaokul öğrencilerinin matematik okuryazarlıklarının niceliksel muhakemelerinin güçlendirilerek desteklenmesinin incelenmesi* (Yayımlanmamış Doktora tezi). Anadolu Üniversitesi.

Akın, A., & Kabael, T. (2016). Bir matematik eğitimi araştırmasına dayalı öğretim deneyi deneyimi. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi*, *4*(3), 7-27. https://doi.org/10.14689/issn.2148-2624.1.4c3s1m

Altıparmak, K., & Özüdoğru, M. (2015). Hata ve kavram yanılgısı: Kesir ve parça bütün ilişkisi. *Journal of Human Sciences, 12*(2), 1465-1483.

Altun, M. (2013). *Matematik öğretimi (ortaokullarda 5, 6, 7 ve 8. sınıflarda)* (9. baskı). Alfa Akademi.

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*(3), 183-198.

Aşık, G. & Yılmaz, Z. (2017). Matematik eğitimi çalışmalarında tasarım tabanlı arastırma ve öğretim deneyi yöntemleri: Farklar ve benzerlikler. *Eğitimde Kuram ve Uygulama, 13*(2), 343-367.

Aydogan Yenmez, A. (2022). An investigation of students' quantitative reasoning through modeling process. *International Online Journal of Education and Teaching*, *9*(1), 123-141.

Ayyıldız, H., & Aktaş, M. C. (2022). 8. Sınıf matematik ders kitaplarının ve LGS matematik sorularının PISA temsil yeterliği açısından incelenmesi. *Trakya Eğitim Dergisi*, *12*(1), 475-489. https://doi.org/10.24315/tred.910569

Barab, S. (2005). Design-based research. In R. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences*. Cambridge University Press.

Bailey, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, D. C. (2012). Competence with

fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, *113*(3), 447-455. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2012.06.004

Basturk, S. (2010). First-year secondary school mathematics students' conceptions of mathematical proofs and proving. *Educational Studies*, *36*(3), 283–298. https://doi.org/10.1080/03055690903424964

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27-44).

Barros Baertl, R. (2020). *Factors contributing to children's understanding of fractions: Quantitative reasoning and arithmetic* (Unpublished doctoral dissertation). University of Oxford.

Bartolini, M. G., & Martignone, F. (2020). Manipulatives in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 487-494). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_300003

Baki, A. (2018). *Matematiği öğretme bilgisi* (1. baskı). Pegem Akademi.

Bal İncebacak, B. (2019). *Sorgulama temelli öğretimin 4. sınıf öğrencilerinin kesir dilini kullanma becerilerine ve akademik başarılarına etkisi*. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Ondokuz Mayıs Üniversitesi.

Barbieri, C. A., Rodrigues, J., Dyson, N., & Jordan, N. C. (2020). Improving fraction understanding in sixth graders with mathematics difficulties: Effects of a number line approach combined with cognitive learning strategies. *Journal of Educational Psychology*, *112*(3), 628.

Bayak Acar, N. (2023). *4. sınıf öğrencilerinin kesirlere ilişkin sayı duyularının gelişimi: Bir eylem araştırması* (Yayımlanmamış doktora tezi). Pamukkale Üniversitesi.

Bednarz, N., & Proulx, J. (2014). The (relativity of the) whole as a fundamental dimension in the conceptualization of the fraction. *Fields Mathematics Education Journal, 2,* 27-54.

Belin, M. (2016). *Prospective mathematics teachers' quantitative reasoning on the*

development of decimal representation of real numbers and its effect on their comprehension of a related proof. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Boğaziçi Üniversitesi.

Belue, P. T. (2015). *The impact of a quantitative reasoning instructional approach to linear equations in two variables on student achievement and student thinking about linearity*. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Boise State University.

Belue, P. T., Overman Cavey, L., & Kinzel, M. T. (2017). An exploration of a quantitative reasoning instructional approach to linear equations in two variables with community college students. *School Science and Mathematics, 117*(5), 183-193.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. A. (1983). Rational-number concept. In R. A. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 92-126). Academic Press.

Biber, A. Ç., Tuna, A., & Aktaş, O. (2013). Öğrencilerin kesirler konusundaki kavram yanılgıları ve bu yanılgıların kesir problemleri çözümlerine etkisi. *Trakya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 3*(2), 152-162.

Bobis, J., Mulligan, J., & Lowrie, T. (2013). *Mathematics for children: Challenging children to think mathematically*. Pearson.

Bobos, G., & Sierpinska, A. (2017). Measurement approach to teaching fractions: A design experiment in a pre-service course for elementary teachers. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 18*(2). https://doi.org/10.4256/ijmtl.v18i2.65

Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child Development, 79*(4), 1016-1031. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2008.01173.x

Bossé, M.J., & Bahr, D.L. (2008). The state of balance between procedural knowledge and conceptual understanding in mathematics teacher education. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning,* 1-28.

Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77–101.

Bruce, C. (2009). Student interaction in the math classroom: Stealing ideas or building understanding. What Works? Research into Practice,

Bryant, P., & Nunes, T. (2002). Children's understanding of mathematics. *Blackwell Handbook of Childhood Cognitive Development*, 412-439.

Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology, 105*(2), 380.

Cesur, S. (2012). Bir somut işlemler testi ile zekanın ilişkisi. *Psikoloji Çalışmaları*, 23, 69-82.

Clements, D. H., Wilson, D. C., & Sarama, J. (2004). Young children's composition of geometric figures: A learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6* (2), 163–184. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_5

Clarke, D. M., & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics, 72*, 127-138.

Chan, C. S. (1997). Mental image and internal representation. *Journal of Architectural and Planning Research*, 52-77.

Charalambous, M., Cowley, M., Geoghegan, F., Smith, F. M., Radford, E. J., Marlow, B. P., ... & Ward, A. (2010). Maternally-inherited Grb10 reduces placental size and efficiency. *Developmental Biology, 337*(1), 1-8. https://doi.org/10.1016/j.ydbio.2009.10.011

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*, 293-316.

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*(1), 16-30.

Cobb, P. (2000). The importance of a situated view of learning to the design of research and instruction. *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning*, 45-

82.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2015). Design research: An analysis and critique. In *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 481-503). Routledge.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences, 13*(1), 15-42.

Crawford, L., Quebec Fuentes, S., Huscroft-D'Angelo, J., & Higgins, K. N. (2019). Evaluating quantitative reasoning strategies for comparing fractions: A tool for teachers. *Intervention in School and Clinic*, *54*(4), 225-234. https://doi.org/10.1177/105345121878244

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2008). The role of representations in fraction addition and subtraction. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 490-496. https://doi.org/10.5951/MTMS.13.8.0490

Cramer, K. A., & Post, T. R. (2002). Initial fraction learning by fourth-and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(2), 111-144. https://doi.org/10.5951/MTMS.13.8.0490

Czocher, J. A., Hardison, H. L., & Kularajan, S. S. (2022). A bridging study analyzing mathematical model construction through a quantities-oriented lens. *Educational Studies in Mathematics, 111*(2), 299-321. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10163-3

Çetin, H., & Çite, H. (2022). 4. sınıf öğrencilerinin kesir sayı duyularının bazı değişkenler açısından incelenmesi. *Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi, 4*(2), 210-223.

Danacı, D., & Şahin, Ö. (2021). Matematik tarihi etkinliklerinin yedinci sinif öğrencilerinin niceliksel muhakeme beceri gelişimine etkisi. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 21*(1), 87-105. https://doi.org/10.17240/aibuefd.2021.21.60703-647219

Davis, R. B., & Maher, C. A. (1990). What Do We Do When We" Do Mathematics"? *Journal for Research in Mathematics Education ,4,* 65-210.

Debrenti, E. (2015). Visual representations in mathematics teaching: An experiment with students. *Acta Didactica Napocensia, 8*(1), 19-25.

Diezmann, C. M., & English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In G. Goldin & N. Shteingold (Eds.), *Systems of representations and the development of mathematical concepts: The roles of representation in school mathematics* (pp. 77-89).

Douville, P., & Pugalee, D. K. (2003). Investigating the relationship between mental imaging and mathematical problem solving. In *Proceedings of the International Conference of Mathematics Education into the 21st Century Project,* (pp. 62-67).

Dur, M. (2014). *Ortaokul 6. sınıf öğrencilerinin problem çözme sürecinde niceliksel muhakeme becerilerinin ve gelişimlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Anadolu Üniversitesi.

Dündar, S., & Yaman, H. (2014). Sınıf öğretmeni adaylarının matematiksel muhakeme becerilerine göre tablo ve grafikleri yorumlama başarılarının incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, *23*(4), 1695-1710.

Dündar, S., & Yılmaz, Y. (2015). Matematik öğretmen adayları hangi gösterim biçiminde daha başarılıdır? İntegral örneği. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT), 6*(3), 418-445. https://doi.org/10.16949/turcomat.55314

Düşünsel, C. M. (2019). *Sınıf öğretmenlerinin matematik dersinde çoklu temsilleri kullanma ile ilgili görüşlerinin incelenmesi* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Kırıkkale Üniversitesi

Dwyer, C. A., Gallagher, A., Levin, J., & Morley, M. E. (2003). What is quantitative

reasoning? Defining the construct for assessment purposes. *ETS Research Report Series, 2003*(2), 1-48.

DiSessa, A. (1983). Phenomenology and the evolution of intuition. In D. Gentner & A. Stevens (Eds.), *Mental models* (pp. 15-33). Erlbaum.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique. In *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Springer Berlin Heidelberg.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning.In Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Empson, S. B., & Levi, L. (2011). Extending children's mathematics: Fractions and decimals. *Mathematics Education, 27*(4), 403-434.

English, L. (2003). Mathematical modelling with young learners. In *Mathematical modelling* (pp. 3-17). Woodhead Publishing.

Ellis, A. B. (2007). The influence of reasoning with emergent quantities on students' generalizations. *Cognition and Instruction, 25*(4), 439–478. https://doi.org/10.1080/07370000701632397

Ellis, A. B. (2011). Generalizing-promoting actions: How classroom collaborations can support students' mathematical generalizations. *Journal For Research in Mathematics Education, 42*(4), 308-345.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Williams, C., & Amidon, J. (2012). Quantifying exponential growth: The case of the jactus. *Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context, 2*, 93-112.

Engelhardt, P. V., Ozimek, D. J., & Rebello, N. S. (2004). The teaching experiment

— What it is and what it isn't. In J. Marx, S. Franklin, & K. Cummings (Eds.), *AIP Conference Proceedings: 2003 Physics Education Research Conference* (Vol. 720, pp. 157-160). American Institute of Physics. https://doi.org/10.1063/1.1807278

Ergan, S. N. (2018). *İlkokul Öğrencilerinin problem çözme sürecinde oluşturduğu görsel temsillerin incelenmes*i. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Ordu Üniversitesi.

Feldman, D. H. (2004). Piaget's stages: The unfinished symphony of cognitive development. *New Ideas in Psychology*, *22*(3), 175-231.

Fennell, F., & Karp, K. (2017). Fraction sense: Foundational understandings. *Journal of Learning Disabilities, 50*(6), 648-650. https://doi.org/10.1177/0022219416662030

Florence Gabriel, F., Van Hoof, J., Gómez, D. M., & Van Dooren, W. (2023). Obstacles in the development of the understanding of fractions. In *Mathematical cognition and understanding: Perspectives on mathematical minds in the elementary and middle school years* (pp. 209-225). Springer International Publishing.

Forrester, P. A., & Chinnappan, M. (2010). The predominance of procedural knowledge in fractions. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education MERGA33* (pp. 185-192). MERGA Inc.

Fuchs, L. S., Schumacher, R. F., Long, J., Namkung, J., Hamlett, C. L., Cirino, P. T., Jordan, N. C., Siegler, R. S., Gersten, R., & Changas, P. (2013). Improving at-risk learners' understanding of fractions. *Journal of Educational Psychology, 105*, 683-700. https://doi.org/10.1037/a0032446

Fuchs, L. S., Compton, D. L., Fuchs, D., Paulsen, K., Bryant, J., & Hamlett, C. L. (2005). Responsiveness to intervention: Preventing and identifying mathematics disability. *Teaching Exceptional Children, 37*(4), 60-63.

Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B., & Content, A. (2012). Developing children's understanding of fractions: an intervention study. *Mind, brain, and Education, 6*(3), 137-146.

GagatsiS, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation

of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, 24*(5), 645-657. https://doi.org/10.1080/0144341042000262953

Galbraith, P., & Haines, C. (2000). Conceptual mis(understandings) of beginning undergraduates. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(5), 651-678. https://doi.org/10.1080/002073900434350

Van Garderen, D., & Montague, M. (2003). Visual–spatial representation, mathematical problem solving, and students of varying abilities. *Learning Disabilities Research & Practice, 18*(4), 246-254. https://doi.org/10.1111/1540-5826.00079

Garofalo, J., & Trinter, C. (2009). Technology Focus: Multi-representational approaches to equation solving. *NCSSSMST Journal, 14*(2), 26-27.

Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P., & Flojo, J. (2009). Mathematics instruction for students with learning disabilities: A meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research, 79*(3), 1202-1242. https://doi.org/10.3102/0034654309334431

Gilbert, P. (2010). An introduction to compassion focused therapy in cognitive behavior therapy. *International Journal of Cognitive Therapy, 3*(2), 97-112. https://doi.org/10.1521/ijct.2010.3.2.97

Ginsburg, H. & Opper, S. (1969). *Piaget's theory of intellectual development*. New Jersey:Prentice Hall Inc

Ginsburg, H. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For the Learning of Mathematics, 1*(3), 4-11.

Ginsburg, H. P. (1997). *Entering the child's mind: The clinical interview in psychological research and practice.* Cambridge University Press.

Ginsburg, H. P., Klein, A., & Starkey, P. (1998). The Development of Children's Mathematical Thinking: Connecting Research with Practice.

Glasersfeld, E. (2002). Problems of constructivism. In *Radical constructivism in*

action (pp. 19-25). Routledge.

Glasersfeld, E. (1990). An exposition of constructivism: Why some like it radical. In R. B. Davis, C. A. Maher, & N. Noddings (Eds.), *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics* (pp. 19–29). National Council of Teachers of Mathematics.

Glassmeyer, S. (2010). Ranganathan 2.0. *AALL Spectrum*, *14*(3), 22-24.

Glassmeyer, D. (2019). Developing mathematics teachers' attention to quantitative reasoning in task design: A Modeling approach. *Numeracy 12* (1), 1-25. https://doi.org/10.5038/1936-4660.12.1.10

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 137-165.

Goldin, G.& Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco and F. R. Curcio (Eds.), *In the roles of representation in school mathematics* (pp.1-23). NCTM.

Goldin, G. A. (2004). Representations in school mathematics: A unifying research perspectives. In J. Kilpatrick, W. G. Martin ve D. Schifter (Ed.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp.275-285).NCTM.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397–430). Hillsdale: Erlbaum.

Goldin G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving from: Handbook of International Research in Mathematics Education Routledge.

Goldin, G. (2014). Mathematical representations. In: Lerman, S. (eds). E*ncyclopedia of mathematics education.*(pp. 409-413). Springer, Dordrecht.

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J., & Van Dooren, W. (2023). Incorrect ways of thinking about the size of fractions. *International Journal of Science and*

Mathematics Education, *21*(7), 2005-2025.

Goos, M., Galbraith, P., & Renshaw, P. (2002). Socially mediated metacognition: Creating collaborative zones of proximal development in small group problem solving. *Educational studies in Mathematics*, *49*, 193-223.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In *Educational design research* (pp. 29-63). Routledge.

Gould, P. (2012). Developing an understanding of the size of fractions. J., Way, & J., Bobis (Eds.), *Fractions: Teaching for understanding* (pp. 63-70). AAMT.

Gravemeijer, K., & van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. *The Elementary School Journal, 109* (5), 510–524.

Grawe, N. D.; Lutsky, N. S.; and Tassava, C. J. (2010). A rubric for assessing quantitative reasoning in written arguments. Numeracy (3), 3, 156-162. https://doi.org/10.5038/1936-4660.3.1.3

Grawe, N. D., & Rutz, C. A. (2009). Integration with writing programs: A strategy for quantitative reasoning program development. *Numeracy*, *2*(2), 1-18.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 111-129.

Gregg, J., & Gregg, D. U. (2007). Measurement and fair-sharing models for dividing fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *12*(9), 490-496.

Gunderson, E. A., Hamdan, N., Hildebrand, L., & Bartek, V. (2019). Number line unidimensionality is a critical feature for promoting fraction magnitude concepts. *Journal of Experimental Child Psychology*, *187*, 104657. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2019.06.010

Haciomeroglu, E. S. & Aspinwall, L. & Norma C. Presmeg (2010) Contrasting cases of calculus students' understanding of derivative graphs. M*athematical Thinking and Learning*, *12*(2), 152-176. https://doi.org/10.1080/10986060903480300

Hackenberg, A. J. (2007). Units coordination and the construction of improper fractions: A revision of the splitting hypothesis. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(1), 27-47.

Hackenberg, A. (2006). Sixth graders'construction of quantitative reasoning as a foundation for algebraic reasoning. Proceedings of the Twenty-eighth Annual Meeting of PME-NA.

Hackenberg, A. J. (2010). Students' reasoning with reversible multiplicative relationships. *Cognition and Instruction*, *28*(4), 383-432.

Hackenberg, A. J. (2013). The fractional knowledge and algebraic reasoning of students with the first multiplicative concept. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 538-563.

Hackenberg, A. J., Wright, R. J., & Norton, A. (2016). *Developing fractions knowledge*. SAGE Publications.

Hamdan, N., & Gunderson, E. A. (2017). The number line is a critical spatial-numerical representation: Evidence from a fraction intervention. *Developmental Psychology, 53*(3), 587. https://doi.org/10.1037/dev0000252

Hansen, N., Jordan, N. C., Fernandez, E., Siegler, R. S., Fuchs, L., Gersten, R., & Micklos, D. (2015). General and math-specific predictors of sixth-graders' knowledge of fractions. *Cognitive Development*, *35*, 34-49. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2015.02.001

Hansen, N., Jordan, N. C., & Rodrigues, J. (2017). Identifying learning difficulties with fractions: A longitudinal study of student growth from third through sixth grade. *Contemporary Educational Psychology*, *50*, 45-59. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2015.11.002

Harel, G. (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 40, 487-500. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0104-1

Harel, G. (2013). The Kaputian program and its relation to DNR-based instruction: A common commitment to the development of mathematics with meaning, In M. Fried and

T. Dreyfus (Eds.), *The SimCalc vision and contribution* (pp. 438-448). Springer.

Hecht, S. A., Vagi, K. J., & Torgesen, J. K. (2007). Fraction skills and proportional reasoning. In D. B. Berch & M. M. Mazzocco (Eds.), *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities* (pp. 121–132). Baltimore, MD: Paul H. Brookes Publishing Co.

Hecht, S. A., & Vagi, K. J. (2010). Sources of group and individual differences in emerging fraction skills. *Journal of Educational Psychology, 102*(4), 843–859. https://doi.org/10.1037/a0019824

Hoon, T. S., Narayanan, G., & Singh, P. (2021). Applying fractional strategies on number line among primary school students. *Pertanika Journal of Social Sciences and Humanities, 29*(1), 127-139.

Hoon, T. S., Mohamed, S. S. E., Singh, P., & Kee, K. L. (2020). In search of strategies used by primary school pupils for developing fraction sense. *Malaysian Journal of Learning and Instruction, 17*(2), 25-61[MEC1] .

Hwang, W. Y., & Hu, S. S. (2013). Analysis of peer learning behaviors using multiple representations in virtual reality and their impacts on geometry problem solving. *Computers & Education, 62*, 308-319.

Irvine, J. (2017). A whole-school implementation of math-talk learning communities. *Journal of Math Studies, 4*, 25-39.

Işık, C. ve Kar, T. (2014). 7. sınıf öğrencilerinin kesirlerde toplama işlemine kurdukları problemlerin analizi. *Elementary Education Online, 11*(4), 1021-1035.

Izsák, A., Tillema, E., & Tunç-Pekkan, Z. (2008). Teaching and learning fraction addition on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(1), 33-62.

İpek, A. S., & Okumuş, S. (2012). The representations of pre-service elementary mathematics teachers used in solving mathematical problems. *Gaziantep University Journal of Social Sciences, 11*(3), 681-700.

İzgiol, D. (2014). *Teknoloji destekli çoklu temsil temelli öğretimin öğrencilerin*

lineer cebir öğrenimine ve matematiğe yönelik tutumlarına etkisi (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Dokuz Eylul Universitesi.

Jordan, N. C., Rodrigues, J., Hansen, N., & Resnick, I. (2017). Fraction development in children: Importance of building numerical magnitude understanding. In *Acquisition of complex arithmetic skills and higher-order mathematics concepts* (pp. 125-140). Academic Press.

Kabael, T. & Akın, A. (2016). Yedinci sınıf öğrencilerinin cebirsel sözel problemlerini çözerken kullandıkları stratejiler ve niceliksel muhakeme becerileri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 24*(2), 875-894.

Kamacı, Y. (2021). *İlkokul 4. sınıf öğrencilerinin kesir çeşitleri ve birim kesre yönelik kullandığı temsillerin ve modelleme performanslarının incelenmesi*. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Yıldız Teknik Üniversitesi.

Kamacı, Y., & Yıldız, Z. (2023). Öğrenciler kesir kavramları için hangi temsilleri kullanıyor? *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*(*57*), 1503-1529. https://doi.org/10.53444/deubefd.1271201

Kamii, C., & Clark, F. B. (1995). Equivalent fractions: Their difficulty and educational implications. *The Journal of Mathematical Behavior, 14*(4), 365-378.

Kan, A. (2019). *İlkokul 4. sınıf kesirler alt öğrenme alanı için gerçekçi matematik eğitimi yönteminin öğrenci başarısına etkisi.* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Ege Üniversitesi.

Kaput, J. (1987). Toward a theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (pp. 159–195). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J., & Schorr, R. (2008). The case of SimCalc, algebra, and calculus. *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Cases and Perspectives, 2*, 211.

Karagoz Akar, G. (2016). Nicel muhakeme ve nicel muhakeme ile kesirler üzerinden gerçek sayıların inşası, E. Bingölbali, Arslan, S., & I.O. Zembat (Ed.), *Matematik*

*Eğitiminde Teoriler,*117-133, Pegem Akademi Yayıncılık: Ankara

Karagöz Akar, G., Watanabe, T., & Turan, N. (2023). Quantitative reasoning as a framework to analyze mathematics textbooks. In *Quantitative reasoning in mathematics and science education* (pp. 107-132). Cham: Springer International Publishing.

Kavas, O. (2022) *4. sınıf kesirler ünitesinin öğretiminde 3B yazıcıların kullanımının öğrencilerin akademik başarılarına etkisi*. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Afyon Kocatepe Üniversitesi.

Kaya, D.(2015). *Çoklu temsil temelli öğretimin öğrencilerin cebirsel muhakeme becerilerine, cebirsel düşünme düzeylerine ve matematiğe yönelik tutumlarına etkisi üzerine bir inceleme*. (Yayımlanmamış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi.

Kayhan, H. C. (2010). *İlköğretim öğrencilerinin kesir çeşitlerini birbirine dönüştürme süreçlerindeki zihinsel modellerinin belirlenmesi*. (Yayımlanmamış doktora tezi). Gazi Üniversitesi.

Kazanidis, I., Palaigeorgiou, G., & Bazinas, C. (2018, September). Dynamic interactive number lines for fraction learning in a mixed reality environment. In *2018 South-Eastern European Design Automation, Computer Engineering, Computer Networks and Society Media Conference (SEEDA_CECNSM)* (pp. 1-5). IEEE.

Kelly, A, & Lesh, R (2000). *Handbook of research design in mathematics & science education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlballm.

Kelly, A. E., Lesh, R. A., & Baek, J. Y. (2008). *Handbook of design research methods in education* (pp. 511-534). New York: Routledge.

Kertil, M. (2014). Pre-service elementary mathematics teachers' understanding of derivative through a model development unit. (Unpublished PhD Thesis). Middle East Technical University.

Kieren, T.E.: 1980, 'The rational number construct: Its elements and mechanisms', in T.E. Kieren (ed.), *Recent research on number learning,* ERIC/SMEAC, Columbus, OH, pp. 32–55.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*(pp. 41–52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieren, T. E., & Pirie, S. E. (1991). Recursion and the mathematical experience. In *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 78-101). New York, NY: Springer New York.

Kılıç, Ç. & Özdaş, A. (2010).İlköğretim 5. Sınıf öğrencilerinin kesirlerde karşılaştırma ve sıralama yapmayi gerektiren problemlerin çözümlerinde kullandıkları temsiller. *Kastamonu Eğitim Dergisi* (18), 513-530.

Kocaoğlu, Y. (2010). Beşinci sınıf öğrencilerinin kesirler konusunda yaptıkları hatalar ve kavram yanılgıları. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi, 14,* 71-85.

Koedinger, K. R., & Nathan, M. J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning. *The Journal of The Learning Sciences*, *13*(2), 129-164.

Korb, K. A. (2007). *Verbal versus pictorial representations in the quantitative reasoning abilities of early elementary students*. (Yayımlanmamış doktora tezi).The University of Iowa.

Komorek, M., & Duit, R. (2004). The teaching experiment as a powerful method to develop and evaluate teaching and learning sequences in the domain of non-linear systems. *International Journal of Science Education*, *26*, 619–633.

Ching, B. H. H., Kong, K. H. C., Wu, H. X., & Chen, T. T. (2020). Examining the reciprocal relations of mathematics anxiety to quantitative reasoning and number knowledge in Chinese children. *Contemporary Educational Psychology*, *63*, 101919.

Krawec, J. L. (2014). Problem representation and mathematical problem solving of students of varying math ability. *Journal of Learning Disabilities*, *47*(2), 103-115.

Kruse, G. & Drews, D. (2013). Using performance tasks to improve quantitative reasoning in an introductory. *International Journal for the Scholarship of Teaching and*

*Learning, 7 (*2), 19.https://doi.org/10.20429/ijsotl.2013.070219

Kullberg, A., & Runesson, U. (2013). Learning about the numerator and denominator in teacher-designed lessons. *Mathematics Education Research Journal*, *25*, 547-567.

Kükey, E., Tutak, A. M. & Tutak, T. (2019). Kesirler konusunun görsel materyal ile öğretiminin ilkokul 4. sınıf öğrencilerinin matematik başarı ve tutumlarına etkisinin incelenmesi. *Ulusal Eğitim Akademisi Dergisi*, *3*(1), 115-125.

Lamon, S. J. (2005). *More: In-depth discussion of the reasoning activities in Teaching fractions and ratios for understanding*. Routledge.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Towards a theoretical framework for research. In F. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Limon, M. (2001). On the cognitive conflict as an instructional strategy for conceptual changes: A critical appraisal. *Learning and Instruction, 36*(4-5), 357–380.

Lee, M. Y., & Hackenberg, A. J. (2013). Relationships between fractional knowledge and algebraic reasoning: The case of Willa. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *12*, 975-1000.

Lesh, R. A. & Kelly, A. E. (2000). Multitiered teaching experiments. In A. E. Kelly & R.A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 197-230). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum associates.

Lesh, R., Post, T., ve Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. C. Janvier, (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R.A., & Doerr, H. (2003). Foundations of model and modeling perspectives on mathematic teaching and learning. In R.A. Lesh and H. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: A models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning,*

and problem solving. Mahwah, NJ: Lawrance Erlbaum.

Lesh, R., & Lehrer, R. (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(2-3), 109-129.

Lenz, K., Reinhold, F., & Wittmann, G. (2022). Topic specificity of students' conceptual and procedural fraction knowledge and its impact on errors. *Research in Mathematics Education, 26*(1), 45–69. https://doi.org/10.1080/14794802.2022.2135132

Lenz, K., Dreher, A., Holzäpfel, L., & Wittmann, G. (2020). Are conceptual knowledge and procedural knowledge empirically separable? The case of fractions. *British Journal of Educational Psychology, 90*(3), 809-829.

Lortie-Forgues, H. J. Tian, R.S. Siegler (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review, 38*, 201-221.

MacDonald, A., & Lowrie, T. (2011). Developing measurement concepts within context: Children's representations of length. *Mathematics Education Research Journal*, *23*, 27-42.

Macit, E. & Altay, B. (2020). 6. sınıf öğrencilerinin kesir kavram imajlarının incelenmesi (Kesrin farklı anlamları temelinde). *İnönü Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 7* (14), 104 - 118. https://doi.org/10.29129/inujgse.763345

Mamede, E. (2015). *Exploring young children's reasoning and naming of fractions.* Adams, G. (Ed.) Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics 35(3)

Mainali, B. (2021). Representation in teaching and learning mathematics. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology, 9*(1), 1-21. https://doi.org/10.46328/ijemst.1111

Markovits, Z., & Sowder, J. (1994). Developing number sense: An intervention study in Grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), 4–29. https://doi.org/10.2307/749290

Marmur, O., Yan, X., & Zazkis, R. (2020). Fraction images: The case of six and a half. *Research in Mathematics Education, 22*(1), 22-47.

Mason, J. (1987). Representing representing: Notes following the conference. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 207–214). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. Cilt: 7, Sayı: 14, 104-118.

Mayes, R., Forrester, J., Christus, J., Peterson, F., Bonilla, R., & Yestness, N. (2014). Quantitative reasoning in environmental science: A learning progression. *International Journal of Science Education, 36*(4), 635–658. https://doi.org/10.1080/09500693.2013.819534

McCloskey, A. V., & Norton, A. H. (2009). Using Steffe's Advanced Fraction Schemes. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(1), 44-50.

McMullen, J., Hannula-Sormunen, M. M., & Lehtinen, E. (2014). Spontaneous focusing on quantitative relations in the development of children's fraction knowledge. *Cognition and Instruction*, *32*(2), 198-218.

Merriam, S. B. (2015). Qualitative research: Designing, implementing, and publishing a study. In *Handbook of research on scholarly publishing and research methods* (pp. 125-140). IGI Global.

McCoy, A. Barnett, J. & Stine, T. (2016). Paper Plate Fractions: The Counting Connection. *Teaching Children Mathematics, 23*(4), 244-251.

Miles, M. B., & Huberman, A. M. (2015). *Genişletilmiş bir kaynak kitap: Nitel veri analizi* (S. Akbaba Altun & A. Ersoy, Eds.). Pegem Akademi.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2018). *Matematik dersi öğretim programı (ilkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar).*

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2024). *Matematik dersi öğretim programı (ilkokul 1, 2, 3 ve 4. sınıflar)*

Mitchell, A., & Horne, M. (2008). Fraction number line tasks and the additivity concept of length measurement. In *Proceedings of the 31st annual conference of the*

mathematics education research group of Australasia (pp. 353-360). Mathematics Education Research Group of Australasia.

Mokhtar, M. A. M., Ayub, A. F. M., Said, R. R., & Mustakim, S. S. (2019). Analysis of year four pupils' difficulties in solving mathematical problems involving fraction. *International Journal of Academic Research in Business and Social Sciences, 9*(11), 1560-1569.

Molina, M., Castro, E., & Castro, E. (2007). Teaching experiments within design research. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences, 2*(4), 435-440.

Moore, K. C., & Carlson, M. P. (2012). Students' images of problem contexts when solving applied problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 48-59.

Moore, K. C., Carlson, M. P., & Oehrtman, M. (2009). The role of quantitative reasoning in solving applied precalculus problems. *Proceedings of the Twelfth Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education.* Raleigh, NC: North Carolina State University.

Moore, K. C., Silverman, J., Paoletti, T., & LaForest, K. (2014). Breaking conventions to support quantitative reasoning. *Mathematics Teacher Educator, 2*(2), 141-157.

Nahdi, D. S., & Jatisunda, M. G. (2020). Conceptual understanding and procedural knowledge: A case study on learning mathematics of fractional material in elementary school. Journal of Physics: 1477 (4), 042037.

Nalbant, S. (2015). 9*. Sınıf öğrencilerinin matematiksel kavram ve sembolleri anlamlandırma yeterlikleri ile matematik problemlerini çözme başarıları arasındaki ilişkinin incelenmesi*. (Yayınlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi.

Nama Aydin, G. (2014). *Gerçekçi matematik eğitiminin ilkokul 3. sınıf öğrencilerine kesirlerin öğretiminde başarıya kalıcılığa ve tutuma etkisi*.(Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Abant İzzet Baysal Üniversitesi.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston,

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). Principles and standards for school mathematics. Reston,

Newton, K. J., Willard, C., & Teufel, C. (2014). An examination of the ways that students with learning disabilities solve fraction computation problems. *The Elementary School Journal*, *115*(1), 1-21.

Ni, Y., & Zhou, Y. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole num ber bias. *Educational Psychologist, 40,* 27–52.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept Part II—problem-structure at successive stages; problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in mathematics*, *11*(3), 331-363.

Nogues, C. P., & Dorneles, B. V. (2019). Number line estimation and quantitative reasoning: two important skills for mathematical achievement. In *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (No. 17). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.

Norton, A. H., & McCloskey, A. V. (2008). Modeling students' mathematics using Steffe's fraction schemes. *Teaching Children Mathematics*, *15*(1), 48-54. https://doi.org/10.5951/TCM.15.1.0048

Nunes, T., & Bryant, P. (2009). *Children's reading and spelling: Beyond the first steps* (Vol. 15). John Wiley & Sons.

Nunes, T., & Bryant, P. (2021). *Using mathematics to understand the world: How culture promotes children's mathematics*. Routledge.

Nunes, T., & Bryant, P. (2023). Number systems as models of quantitative relations. In *Quantitative reasoning in mathematics and science education* (pp. 71-105). Cham: Springer International Publishing.

Nunes, T., & Csapó, B. (2011). Developing and assessing mathematical reasoning. In B. Csapó & M. Szendrei (Eds.), F*ramework for diagnostic assessment of mathematics* (pp. 17-56). Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Nunes, T., Bryant, P., Barros, R., & Sylva, K. (2012). The relative importance of two different mathematical abilities to mathematical achievement. *British Journal of Educational Psychology*, *82*(1), 136-156.

Nunes, T. Bryant, P. Evans, D. & Barros, R. (2015). Assessing quantitative reasoning in young children. *Mathematical Thinking and Learning*, *17* (2-3), 178-196. https://doi.org/10.1080/10986065.2015.1016815

Nunes, T., Bryant, P., Hallett, D., Bell, D., & Evans, D. (2009). Teaching children about the inverse relation between addition and subtraction. *Mathematical Thinking and Learning*, *11*(1-2), 61-78. https://doi.org/10.1080/10986060802583980

Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., Bell, D., Gardner, S., Gardner, A., & Carraher, J. (2007). The contribution of logical reasoning to the learning of mathematics in primary school. *British Journal of Developmental Psychology*, *25*(1), 147–166. https://doi.org/10.1348/026151006X153127

Nunes, T., Bryant, P., Hurry, J., & Pretzlik, U. (2006). Fractions: Difficult but crucial in mathematics learning. *Teaching and Learning Research Programme (TLRP) Research Briefing*.

Obersteiner, A., Tumpek, C. (2016). Measuring fraction comparison strategies with eye-tracking. *ZDM Mathematics Education 48*, 255–266. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0742-z

Ohlsson S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantic of fractions and related concepts. In: Hiebert J., Behr M. (eds.) (1988). *Research agenda for mathematics education: number concepts and operations in the middle grades*. Reston (Va): NCTM-Lawrence Erlbaum Ass. 55-92

Olive, J., & Vomvoridi, E. (2006). Making sense of instruction on fractions when a student lacks necessary fractional schemes: The case of Tim. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 18-45. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.11.003

Olkun, S., ve Toluk-Uçar, Z. (2012). İlköğretimde Etkinlik Temelli Matematik Öğretimi (5. Baskı). Ankara: Eğiten Kitap

Önal, H.& Yorulmaz, A. (2017). İlkokul dördüncü sınıf öğrencilerinin kesirler konusunda yaptıkları hatalar. *Eğitim ve Toplum Araştırmaları Dergisi*, *4*(1), 98-113.

Özaltun Çelik, A. & Bukova Güzel, E. (2018). Doğrusal fonksiyonun öğrenilmesine yönelik tasarlanan matematiksel modelleme etkinliği üzerine çalışan öğrencilerin nicel muhakemeleri. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, Özel Sayı, 53-85. https://doi.org/10.17984/adyuebd.456722

Özaltun Çelik, A. & Bukova Güzel, E. (2019). İkinci dereceden fonksiyonların öğrenilmesi sürecinde öğrencilerin nicel muhakemelerini tetikleyen bir öğretim dizisi. *Turkish Journal of Computer & Mathematics Education, 10*(1), 157-194. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.446403

Özçakır Sümen, Ö. (2022). Dördüncü sınıf öğrencilerinin kesirler konusuna ilişkin zihinsel yapılarının incelenmesi. *E-Kafkas Journal of Educational Research, 9*(1), 1-19. https://doi.org/10.30900/kafkasegt.948020

Özdemir, S., & Reis, Z. A. (2013). The effect of Dynamic and Interactive Mathematics Learning Environments (DIMLE), supporting multiple representations, on perceptions of elementary mathematics pre-service teachers in problem solving process. *Online Submission*, *3*(3), 85-94.

Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation(s) in developing mathematical understanding. *Theory Into Practice*, *40*(2), 118-127.

Patterson, N. D., & Norwood, K. S. (2004). A case study of teacher beliefs on students' beliefs about multiple representations. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *2*, 5-23. https://doi.org/10.1023/B:IJMA.0000026490.21148.16

Patton, M. Q. (2002). Two decades of developments in qualitative inquiry: A personal, experiential perspective. *Qualitative Social Work, 1*(3), 261-283.

Paoletti, T., & Moore, K. C. (2017). The parametric nature of two students' covariational reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 48*, 137-151.

Patahuddin, S. M., Usman, H. B., & Ramful, A. (2018). Affordances from number lines in fractions instruction: Students' interpretation of teacher's intentions. *International*

Journal of Science and Mathematics Education, 16, 909-928.

Pearn, C., & Stephens, M. (2007). Whole number knowledge and number lines help develop fraction concepts. *Mathematics: Essential Research, Essential Practice, 2*, 601-610.

Perkins D.N. The Many Faces of Constructivısm. Educational Leadership. 1999: 57(2), 354–371.

Pesen, C. (2008). Kesirlerin sayı doğrusu üzerindeki gösteriminde öğrencilerin öğrenme güçlükleri ve kavram yanılgıları. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 9*(15), 157–168.

Petit, M.M., Laird, R. E. & Marsden, E. L. (2010). *A focus on fractions: Bringing research to the classroom*. New York & London, Routledge.

Piaget, J. (1929). The Child's Conception of the World. London: Routledge & Kegan Paul

Piaget, J. (1952). The child's conception of number. London: Routledge & Kegan

Piaget, J. (1961). The genetic approach to the psychology of thought.[J. educ. Psychol.]. *Journal of educational psychology*, *52*(6), 275.

Piaget , J. (1965). *The child's conception of number*. W. W. Norton, New York.

Piaget, J. (1968). Quantification, Conservation, and Nativism: Quantitative evaluations of children aged two to three years are examined. *Science*, *162*(3857), 976-979.

Piaget. J.(1971). *Genetic Epistemology.* W. W. Norton, New York.

Piaget, J.&Inhelder,B.(1969).*The Psychology of the child*. New York:Basic Books

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. London. Routledge and Kegan Paul.

Ponte, J. P. D., & Serrazina, M. D. L. (2000). Didáctica da Matemática do. *Lisboa: Universidade Aberta,* 11-20.

Pothier, Y., & Sawada, D. (1983). Partitioning: The emergence of rational number ideas in young children. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(5), 307-317.

Rau, M. A., Aleven V. & Rummel N., (2009). I*ntelligent tutoring systems with multiple representations and self-explanation prompts support learning of fractions*. AIED.

Rau, M.A., Aleven, V. & Rummel, N. (2013). How to Use Multiple Graphical Representations to Support Conceptual Learning? Research-Based Principles in the Fractions Tutor. In: Lane, H.C., Yacef, K., Mostow, J., Pavlik, P. (eds) *Artificial Intelligence in Education*. AIED 2013. Lecture Notes in Computer Science, vol 7926. Springer, Berlin, Heidelberg.

Resnick, I., Jordan, N. C., Hansen, N., Rajan, V., Rodrigues, J., Siegler, R. S., & Fuchs, L. S. (2016). Developmental growth trajectories in understanding of fraction magnitude from fourth through sixth grade. *Developmental Psychology*, *52*(5), 746.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, *93*(2), 346.

Rodrigues, J., Jordan, N. C., & Hansen, N. (2019). Identifying fraction measures as screeners of mathematics risk status. *Journal of Learning Disabilities*, *52*(6), 480-497.

Rosemary, G. N., & Ibibo, C. O. G. (2019). Students' mathematics achievement and quantitative reasoning ability in junior secondary schools in Rivers State Nigeria. *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, *7*(1), 32-36.

Ross, J. A., & Bruce, C. D. (2009). Student achievement effects of technology-supported remediation of understanding of fractions. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 40*, 713–727. https://doi.org/10.1080/00207390902971999

Reigeluth, C.M. (1999). What is instructional-design theory and how is it changing? In C.M. Reigeluth (Ed.), *Instructional-design theories and models: A new paradigm of instructional theory* (pp. 5-29). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Riconscente, M. M. (2013). Results from a controlled study of the iPad fractions

game Motion Math. *Games and Culture*, *8*(4), 186-214.

Robinson, K. (2017). *A case study of ıntegrative agricultural education: Integrating mathematics to develop students quantitative reasoning* (Unpublished doctoral dissertation). Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia.

Saenz-Ludlow, A. (1994). Michael's fraction schemes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(1), 50-85.

Sarnecka, B. W., & Gelman, S. A. (2004). Six does not just mean a lot: Preschoolers see number words as specific. *Cognition*, *92*(3), 329-352. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2003.10.001

Saxe, G. B., Shaughnessy, M. M., Shannon, A., Langer-Osuna, J. M., Chinn, R., & Gearhart, M. (2007). Learning about fractions as points on a number line. *The Learning of Mathematics: Sixty-Ninth Yearbook*, *53*, 221-237.

Schalk, L., Saalbach, H., Grabner, R. H., & Stern, E. (2016). Relational quantitative reasoning in kindergarten predicts mathematical achievement in third grade. *Journal of Numerical Cognition*, *2*(2), 77-90. https://doi.org/10.5964/jnc.v2i2.29

Schneider, M., & Siegler, R. S. (2010). Representations of the magnitudes of fractions. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception & Performance*, *36*(5), 1227. https://doi.org/10.1037/a0018170

Schifter, D. (1998). Learning mathematics for teaching: From a teachers' seminar to the classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1,* 55-87.

Schoenfeld, A. H. (2014). What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? A story of research and practice, productively intertwined. *Educational researcher*, *43*(8), 404-412.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*(Vol. 2, pp. 41–52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Serrazina, M. D. L., & Rodrigues, M. (2018). Formação de professores e

desenvolvimento do sentido do número. *A Matemática Nos Anos Iniciais Do Ensino Fundamental*, 138-162.

Shavelson, R. J. (2008). Reflections on quantitative reasoning: An assessment perspective. In Madison, B. L. & Steen, L. A. (Eds.), *Calculation vs context: Quantitative literacy and its implications for teacher education*, Mathematical Association of America, Washington, DC.

Sherman, H.J., Richardson, L.I. & Yard, G. (2005). *Teaching children who struggle with Mathematics: A systematic approach to diagnosis and instruction*, Pearson Education.

Shavelson, R. J., Phillips, D. C., Towne, L., & Feuer, M. J. (2003). On the science of education design studies. *Educational Researcher, 32*(1), 25-28.

Sidney, P. G., Thompson, C. A., & Rivera, F. D. (2019). Number lines, but not area models, support children's accuracy and conceptual models of fraction division. *Contemporary Educational Psychology*, *58*, 288-298. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2019.03.011

Siegler, R. S., & Ramani, G. B. (2009). Playing linear number board games—but not circular ones—improves low-income preschoolers' numerical understanding. *Journal of Educational Psychology*, *101*(3), 545.

Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., Thompson, L., & Wray, J. (2010). *Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade: A practice guide* (NCEE 2010-4039). Washington, DC: U.S. Department of Education, National Center for Education Evaluation and Regional Assistance.

Siebert, D., & Gaskin, N. (2006). Creating, naming and justifying fractions. *Teaching Children Mathematics, 12,* 394-400.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., ... and Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, *23*(7), 691-697. https://doi.org/10.1177/0956797612440101

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2014). An integrative theory of numerical development. *Child Development Perspectives*, *8*(3), 144-150. https://doi.org/10.1111/cdep.12077

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive psychology*, *62*(4), 273-296.

Siegler, R. S., & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology*, *49*, 1994–2004.

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Science, 17*(1), 13-19. https://doi.org/10.1016/j.tics.2012.11.004

Silverman, J., & Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 499-511.

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *National Council of Teachers of Mathematics, 26*(3), 9-15.

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics education*, *24*(3), 233-253.

Simon, M. A., Kara, M., & Placa, N. (2018). Promoting reinvention of a multiplication-of-fractions algorithm: A study of the Learning Through Activity research program. *The Journal of Mathematical Behavior, 52*, 174-187.

Smith, J. P. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions*: 2002 yearbook (pp. 3–17). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Smith, J., & Thompson, P. W. (2007). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 95-132). Erlbaum.

Sommers-Flanagan, J. (2016). Clinical interview. In J. C. Norcross, G. R.

VandenBos, & D. K. Freedheim (Eds.), *APA handbook of clinical psychology* (Vol. 3, pp. 1–16). Washington, DC: American Psychological Association.

Spinillo, A. G., & Bryant, P. (1991). Children's proportional judgments: The importance of "half." *Child Development, 62*, 427-440.

Steffe, L. P. (2001). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(3), 267-307.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. A. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267–307). Erlbaum.

Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior*, *102,* 1–41.

Steffe, L. P., & Olive, J. (2009). *Children's fractional knowledge*. Springer Science & Business Media.

Steffe, L. P. & Ulrich, C. (2014). The constructivist teaching experiment. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education.* Springer.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education*. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers

Stohlmann, M. S., & Albarracín, L. (2016). What is known about elementary grades mathematical modelling. Education Research International, 2016(1), 5240683.

Suh, J., Moyer, P. S., & Heo, H. J. (2005). Examining technology uses in the classroom: developing fraction sense using virtual manipulative concept tutorials. *Journal of Interactive Online Learning, 3*, 1-20.

Şahin, E. (2019). *Ortaokul öğrencilerinin kesirler konusunda temsiller arası geçişleri*. (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi.

Syarifuddin, S., Nugroho, B. P., Mutmainah, M., Hadi, A. M., & Sriaryaningsyih, S. (2020). The connecting quantities process to solve fraction mathematical problems of

middle school students. *Humanities & Social Sciences Reviews, 8*(5), 121-131. https://doi.org/10.18510/hssr.2020.8512

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and instruction, 14*(5), 503-518.

Swanson, D., Schwartz, R., Ginsburg, H., & Kossan, N. (1981). The clinical interview: Validity, reliability and diagnosis. *For the Learning of Mathematics*, *2*(2), 31-38.

Tadeu, P. J. A. (2024). A synopsis of the importance of teaching fractions to children until K-10. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education,* 20(8), 1-13. https://doi.org/10.29333/ejmste/14878

Tanişli, D., & Dur, M. (2018). Quantitative reasoning: Reflections on solving real-world problems. *Cukurova University Faculty of Education Journal, 47*(1). https://doi.org/10.14812/cuefd.398406

Teoh, S. H., Mohamed, S. S. E., Parmjit, S., & Kor, L. K. (2020). In search of strategies used by primary school pupils for developing fraction sense. *Malaysian Journal of Learning and Instruction, 17*(2), 25-61.

Thompson, P. W. (1988, March). *A cognitive model of quantity-based algebraic reasoning.* Paper presented at the Annual Meeting of AERA, San Francisco.

Thompson, P. W. (1990). *A theoretical model of quantity-based reasoning in arithmetic and algebra.* Paper presented at the Annual Meeting of AERA, San Francisco.

Thompson, P. W. (1993). Qualitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational studies in Mathematics, 25*, 165–208.

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 181–234). NY: SUNY Press. https://doi.org/10.1016/b978-0-08-057109-6.50014-8

Thompson, P. W. (1999). Representations and evolution: A discussion of Duval's and Kaput's papers. In F. Hitt (Ed.). *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the*

Psychology of Mathematics Education, North America. Cuernavaca, Mexico: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.

Thompson, P. W., Carlson, M. P., Byerley, C., & Hatfield, N. (2014). Schemes for thinking with magnitudes: An hypothesis about foundational reasoning abilities in algebra. In K. C. Moore, L. P. Steffe & L. L. Hatfield (Eds.), *Epistemic algebra students: Emerging models of students' algebraic knowing., WISDOMe Monographs* (Vol. 4, pp. 1-24). Laramie, WY: University of Wyoming. http://bit.ly/1aNquwz.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain, & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education* (Vol. 1, pp. 33–57). WISDOMe Mongraphs.

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *Research companion to the principles and standards for school mathematics* (pp. 95-113). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W., Hatfield, N. J., Yoon, H., Joshua, S., & Byerley, C. (2017). Covariational reasoning among U.S. and South Korean secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematical Behavior, 48,* 95–111. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.001

Thompson, P. W. (2022). Quantitative reasoning as an educational lens. In Karagöz Akar, G., Özgür Zembat, I., Selahattin, A., & Thompson, P. W. (Eds.) *Quantitative*

reasoning in mathematics and science education, (pp. 5-20). Zürich: Springer Cham.

Tian, Z., & Huang, X. (2009). A study of children's spatial reasoning and quantitative reasoning abilities. *Journals of Mathematic Education, 2*(2), 80-93.

Tian, J., Bartek, V., Rahman, M. Z., & Gunderson, E. A. (2021). Learning improper fractions with the number line and the area model. *Journal of Cognition and Development, 22*(2), 305-327. https://doi.org/10.1080/15248372.2021.1890603

Tian, J., & Siegler, R. S. (2017). Fractions Learning in Children With Mathematics Difficulties. Journal of Learning Disabilities, 50(6), 614-620. https://doi.org/10.1177/0022219416662032

Tobias, J. M. (2013). Prospective elementary teachers' development of fraction language for defining the whole. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*, 85-103.

Toluk, Z., & Middleton, J. A. (2004). The development of children's understanding of quotient: A Teaching experiment. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning, 5*(10). https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=4ba1745f8ca953397bf2e877fc04ed1ff960eb84

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z., & Siegler, R. S. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction, 37,* 5-13.

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics, 89,* 419-441.

Turan Kurudilek, P. (2023). Ortaokul öğrencilerinin stem etkinliklerindeki nicel muhakeme becerilerinin incelenmesi: Bir öğretim deneyi. (Yayımlanmamış doktora tezi). Trabzon Üniversitesi.

Tutak, T., & Güder, Y. (2014). Matematiksel modellemenin tanımı, kapsamı ve önemi. *Turkish Journal of Educational Studies, 1*(1), 173-190.

Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for research in mathematics education*, 390-416.

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *24*(24), 234-243.

Umay, A., & Kaf, Y. (2005). Matematikte kusurlu akıl yürütme üzerine bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *28*(28), 188-195.

Ukdem, Ş. (2021). *3. sınıf kesirler konusunda somut ve sanal manipülatif destekli öğretim uygulamalarının kavrama ve motivasyona etkisi.* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Necmettin Erbakan Üniversitesi.

Uygan, C. (2019). Öğrenci matematiğini araştırmada öğretim deneyi yöntemi: Kuramsal temeller ve örnek bir uygulamadan yansımalar. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi, 7*(2), 792-825. https://doi.org/10.14689/issn.2148-2624.1.7c.2s.14m

Uyguç, A. (2023). *Middle school students' quantitative reasoning in pictorial, symbolic and iconographic problems* (Unpublished master's thesis). Middle East Technical University.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14*(5), 453-467.

Verschaffel, L., Corte, E. D., Jong, T. d., & Elen, J. (2010). Use of representations in reasoning and problem solving: An overview. L. Verschaffel, E. D. Corte, T. d. Jong, & J. Elen (Eds.), *Use of representations in reasoning and problem solving* (s. 1-8). Routledge

Verschaffel, L., & De Corte, E. (1993). A decade of research on word problem solving in Leuven: Theoretical, methodological, and practical outcomes. *Educational Psychology Review, 5*(3), 239-256. doi:10.1007/BF01323046

Viegut A.A. & Matthews P.G. (2023). Building fraction magnitude knowledge with number lines: Partitioning versus analogy. *Developmental Psychology, 59* (10), 1757-1770. https://doi.org/10.1037/dev0001616

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, I. (2008). The framework theory approach to the problem of conceptual change. *International Handbook of Research on Conceptual* Change, 1, 3-34.

Wadsworth, B. J. (1996). *Piaget's theory of cognitive and affective development: Foundations of constructivism.* London: Longman Publishing.

Watanabe, A. (2006). Functional projections of nominals in Japanese: Syntax of classifiers. *Natural Language & Linguistic Theory*, *24*(1), 241-306.

Weber, E., Ellis, A., Kulow, T., & Ozgur, Z. (2014). Six principles for quantitative reasoning and modeling. *Mathematics Teacher, 108*(1), 24-30.

Wertsch, J. V. (1980). The significance of dialogue in Vygotsky's account of social, egocentric, and inner speech. *Contemporary Educational Psychology*, *5*(2), 150–162. https://doi.org/10.1016/0361-476X(80)90036-3

Wilkins, J. L., Norton, A., & Boyce, S. J. (2013). Validating a written instrument for assessing students' fractions schemes and operations. *The Mathematics Educator*, *22*(2).

Woleck, K. R. (2001). Listen to Their Pictures: An Investigation of Children's Mathematical Drawings. In (Eds.Goldin, G., & Shteingold, N.) *Systems of representations and the development of mathematical concepts. The roles of representation in school mathematics*, 215-227.

Wong, M. (2013). Identifying fractions on a number line. *Australian Primary Mathematics Classroom, 18*(3), 13–18

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., ve Bay Williams, J. M. (2014). *İlkokul ve ortaokul matematiği gelişimsel yaklaşımla öğretim* (7. baskıdan çeviri) (S. Durmuş Çev. Ed.). Ankara: Nobel Yayıncılık.

Yeo, S. & Webel, C. (2022). Elementary students' fraction reasoning: a measurement approach to fractions in a dynamic environment. *Mathematical Thinking and Learning.* https://doi.org/10.1080/10986065.2022.2025639

Yıldırım, A. & Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.*

Seçkin Yayıncılık.

Yin, R. K. (2009). *Case study research: Design and methods* (4th Ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Yücel Yumuşak E. 2014 Oyun destekli matematik öğretiminin 4. sınıf kesirler konusundaki erişi ve kalıcılığa etkisi. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Gaziosmanpaşa Üniversitesi.

Zhang, X., Clements, M.A. & Ellerton, N.F. (2015). Conceptual mis(understandings) of fractions: From area models to multiple embodiments. *Mathematics Education Research Journal, 27* (2), 233–261. https://doi.org/10.1007/s13394-014-0133-8

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (Eds.) (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington: Math. Assoc. of America.

EKLER

EK 1: Araştırma İzni

EK 2: Uygulama İzni

EK 3: Veli Onam Formu

EK 4: Ön Değerlendirme Formu

EK 5: Öğretim Bölümlerinde Uygulanan Etkinlikler

EK 6: Araştırmacı Günlüğü

EK 7: Öğrenci ve Öğretmen Günlükleri

EK 8: Gözlem Formu

EK 9: Alan Notları Formu

EK 1: Araştırma İzni

T.C.
KOCAELİ VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : E-99332089-605.01-59597669 03/10/2022
Konu : Araştırma İzni
(Dilara YILMAZ)

MARMARA ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜNE
(Öğrenci İşleri Daire Başkanlığı)

İlgi : 11/08/2022 tarih ve 337923 sayılı yazınız.

Üniversiteniz Eğitim Bilimleri Enstitüsü Temel Eğitim Anabilim Dalı Sınıf Öğretmenliği Doktora Programı öğrencisi Dilara YILMAZ'ın *"İlkokul 4.Sınıf Öğrencilerinin Kesirler Konusunda Düşünme Biçimlerinin İncelenmesi ve Nicel Muhakeme ile Geliştirilmesi"* konulu çalışmasını İlimiz İlkokullarında uygulama talebi komisyonumuzca uygun görülmüş olup, Türkiye Cumhuriyeti Anayasası, Millî Eğitim Temel Kanunu ile Türk Millî Eğitiminin genel amaçlarına uygun olarak, 6698 sayılı Kişisel Verilerin Korunması Kanununa ve yürürlükteki diğer tüm düzenlemelerde belirtilen hüküm, esas ve amaçlara aykırılık teşkil etmeyecek şekilde, denetimleri ilgili okul, ilçe millî eğitim müdürlükleri tarafından gerçekleştirilmek üzere, gönüllülük esasına göre, anket çalışmasının İlçe Milli Eğitim Müdürlükleri ve Okul Müdürlüklerinin denetimi, gözetimi ve sorumluluğunda yapmasının uygun görüldüğüne ilişkin, 27/09/2022 tarih ve 59107593 sayılı Valilik Onayı ekte gönderilmiştir.

Gereğini rica ederim.

Salih BIÇAK
Vali a.
Vali Yardımcısı

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.

Adres : Kozluk Mahallesi İnönü Caddesi No:32
41040 İzmit/KOCAELİ
Telefon No : 0 (262) 322 12 69
E-Posta: stratejigelistirme41@meb.gov.tr
Kep Adresi : meb@hs01.kep.tr

Belge Doğrulama Adresi : https://www.turkiye.gov.tr/meb-ebys
Bilgi için: İbrahim TURAN
Unvan : Veri Hazırlama ve Kontrol İşletmeni
İnternet Adresi: www.kocaelimem.meb.gov.tr Faks:_____

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. https://evraksorgu.meb.gov.tr adresinden 950a-b44e-36f2-bd38-245d kodu ile teyit edilebilir.

EK 2: Uygulama İzni

Marmara Üni Evrak Tarih ve Sayısı: 06.12.2022-425033

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
ARAŞTIRMA VE YAYIN ETİK KURULU KARARI

Sayı: ..... **Tarih:**
Çalışmanın Yürütücüsü*: *Doç. Dr. Yusuf KOÇ
Diğer Araştırmacılar*: *Arş. Gör. Dilara YILMAZ CAN
Onay Tarihi ve Onay Sayısı*: *24.11.2022/09-11

Sayın: Doç. Dr. Yusuf KOÇ

''İlkokul 4.Sınıf Öğrencilerinin Kesirler Konusunda Düşünme Biçimlerinin İncelenmesi Ve Nicel Muhakeme İle Geliştirilmesi' 'isimli çalışmanız Üniversitemiz Eğitim Bilimler Enstitüsü Araştırma ve Yayın Etik Kurulu tarafından incelenmiş ve etik yönden uygunluğuna karar verilmiştir.

EK 3: Veli Onam Formu

Sayın Veli;

Çocuğunuzun katılacağı bu çalışma, "4. Sınıf Öğrencilerinin Kesirler Konusunda Düşünme Biçimlerinin İncelenmesi ve Nicel Muhakeme ile Geliştirilmesi" adıyla, 01.10.2022-01.03.2022 tarihleri arasında yapılacak bir araştırma uygulamasıdır.

Araştırmanın Hedefi: 4. sınıf öğrencilerinin kesirler konusunu kavrayışlarını nicel muhakeme yaparak geliştirmektir.

Araştırma Uygulaması: Sınıf içi uygulamalar / Görüşme / Gözlem şeklindedir.

Araştırma T.C. Milli Eğitim Bakanlığı'nın ve okul yönetiminin de izni ile gerçekleşmektedir. Araştırma uygulamasına katılım tamamıyla gönüllülük esasına dayalı olmaktadır. Çocuğunuz çalışmaya katılıp katılmamakta özgürdür. Araştırma çocuğunuz için herhangi bir istenmeyen etki ya da risk taşımamaktadır. Çocuğunuzun katılımı tamamen sizin isteğinize bağlıdır, reddedebilir ya da herhangi bir aşamasında ayrılabilirsiniz. Araştırmaya katılmamama veya araştırmadan ayrılma durumunda öğrencilerin akademik başarıları, okul ve öğretmenleriyle olan ilişkileri etkilemeyecektir. Çalışmada öğrencilerden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmemektedir. Cevaplar tamamıyla gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir.

Uygulamalar, genel olarak kişisel rahatsızlık verecek sorular ve durumlar içermemektedir. Ancak, katılım sırasında sorulardan ya da herhangi başka bir nedenden çocuğunuz kendisini rahatsız hissederse cevaplama işini yarıda bırakıp çıkmakta özgürdür. Bu durumda rahatsızlığın giderilmesi için gereken yardım sağlanacaktır. Çocuğunuz çalışmaya katıldıktan sonra istediği an vazgeçebilir. Böyle bir durumda veri toplama aracını uygulayan kişiye, çalışmayı tamamlamayacağını söylemesi yeterli olacaktır. Anket çalışmasına katılmamak ya da katıldıktan sonra vazgeçmek çocuğunuza hiçbir sorumluluk getirmeyecektir.

Onay vermeden önce sormak istediğiniz herhangi bir konu varsa sormaktan çekinmeyiniz. Çalışma bittikten sonra bizlere telefon veya e-posta ile ulaşarak soru sorabilir, sonuçlar hakkında bilgi isteyebilirsiniz. Saygılarımla,

Araştırmacı: Dilara YILMAZ CAN İletişim Bilgileri: [redacted]@kocaeli.edu.tr

Velisi bulunduğum ..... sınıfı ..... numaralı öğrencisi .....
.....'in yukarıda açıklanan araştırmaya katılmasına izin veriyorum.
(Lütfen formu imzaladıktan sonra çocuğunuzla okula geri gönderiniz*).

..../...../.....

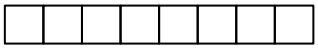
İsim-Soyisim İmza:

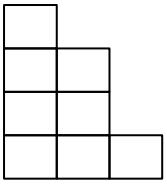
Veli Adı-Soyadı :

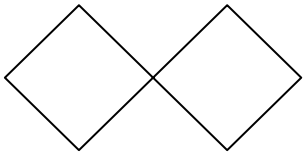
Telefon Numarası :

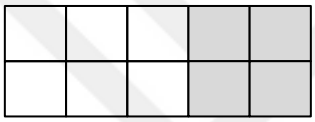
EK 4: Ön Değerlendirme Bilgi Testi

1. Aşağıdaki şekillerin her birinin $\frac{1}{4}$'ini boyayın.







2.  Yandaki dikdörtgen eş parçalara ayrılmıştır.

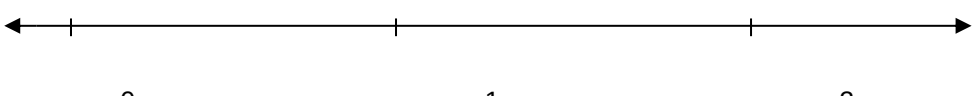
a) Yukarıdaki dikdörtgenin kaçta kaçı boyalıdır?.....

b) Bu modele göre birim kesir nedir?.....

3. 

Yukarıdaki şekil $\frac{1}{8}$ kesrini göstermektedir. Buna göre bütünü çizin.

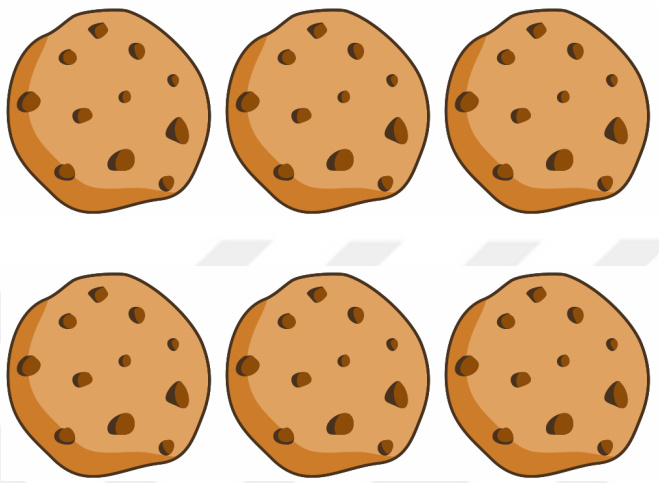
4. Aşağıdaki sayı doğrusunda $\frac{1}{10}$ kesrinin nerede olduğunu gösterin.



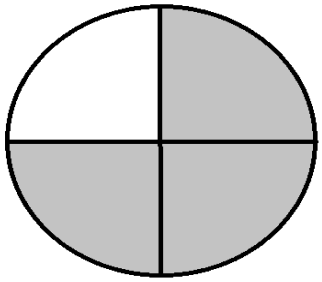
EK 5: Öğretim Bölümlerinde Uygulanan Etkinlikler

Kurabiye Paylaşım Etkinliği

Öğretmen 12 öğrencisi için marketten bir paket kurabiye almıştır. Paketi açtığında içinde 6 adet kurabiye olduğunu görmüştür. Öğretmen, 6 kurabiyeyi öğrencilerine eşit olarak paylaştırmak isterse her bir öğrenci ne kadar kurabiye alır? Önce tahmininizi yazın.



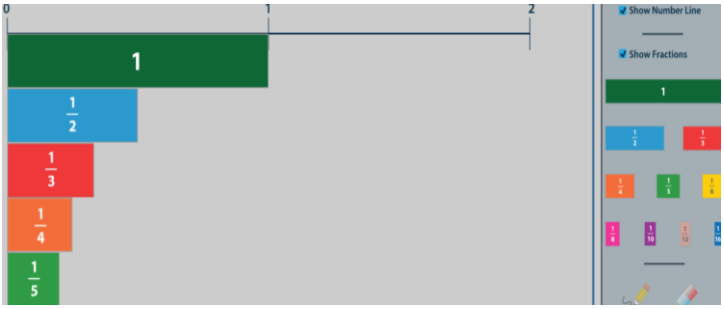
Değişen Bütünler Etkinliği



a)Yukarıdaki daire modelinde taralı alanın $\frac{1}{6}$'ini boyayarak gösterin.

b)Boyadığınız alan, tüm alanın kaçta kaçıdır?.....

Dijital ve Somut Kesir Çubukları Etkinliği





Dijital kesir çubukları etkinliği didax.com adresinden alınmıştır.

Pasta Paylaşım Etkinliği

1. <u>Grup</u>



2. <u>Grup</u>



Ahmet'in doğum gününe gelen arkadaşları iki gruptan oluşmaktadır. Birinci gruptaki 4 kişi bir pastayı eşit olarak paylaştılar. İkinci gruptaki 8 kişi ise aynı büyüklükteki iki pastayı eşit olarak paylaştılar.

a)Birinci gruptaki bir kişi bir pastanın kaçta kaçını yer?

b)İkinci gruptaki bir kişi bir pastanın kaçta kaçını yer?

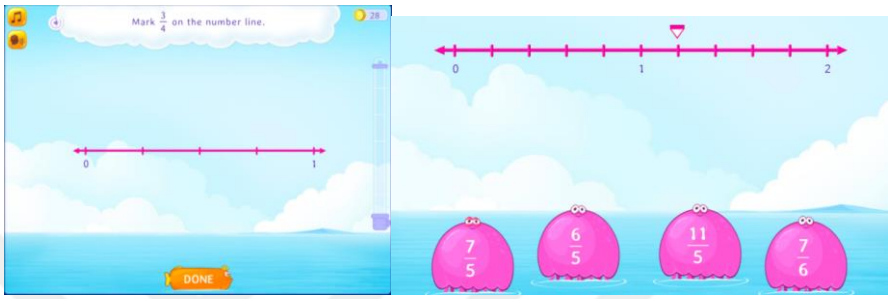
c)Hangi gruptaki kişiler daha çok pasta yemiştir?

Bütüne En Yakın Kesri Bulma Etkinliği

Aşağıdaki kesirlerden hangisi bir bütüne en yakındır? Daire içine alın.

$\frac{1}{10}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{20}$

Kesirleri Sayı Doğrusunda Gösterme Etkinliği



Etkinlikler splashlearn.com websitesinde uygulanmıştır.

Ters Kesirler Etkinliği

a) Aşağıdaki kesirleri, sayı doğrusu modeli kullanarak modelleyin.

$\frac{4}{8}$ =

$\frac{8}{4}$=

b) Aşağıdaki kesirleri, alan modeli kullanarak modelleyin.

$\frac{5}{8}$ =

$\frac{8}{5}$=

Yürünen Yol Etkinliği

Atakan, Berna ve Oğuzhan'ın yürüdükleri yol miktarları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. Buna göre bu üç arkadaşın yürüdükleri yol miktarlarını uzunluk modeli kullanarak modelleyin.

Kişiler	**Yürüdükleri yol**	**Model**
Atakan	$2\frac{3}{5}$ km	
Berna	$\frac{3}{5}$ km	
Oğuzhan	$\frac{8}{5}$ km	

Yukarıdaki kesirleri büyükten küçüğe doğru sıralayın.

Eş Olmayan Parçalar Etkinliği



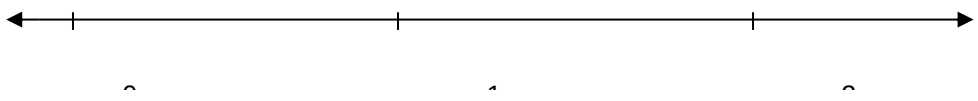
Yandaki karenin kaçta kaçı boyanmıştır? ……

Neden böyle düşündüğünüzü yazın.

…….

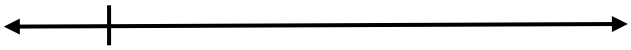
Birim Kesri Sayı Doğrusunda Gösterme Etkinliği

Aşağıdaki sayı doğrusunda $\frac{1}{5}$ kesrinin nerede olduğunu gösterin.



Doğal Sayıları Sayı Doğrusunda Gösterme Etkinliği

Aşağıdaki sayı doğrusu üzerinde 0 ve 2 doğal sayılarının nerede olduğunu gösterin.



$\frac{1}{4}$

Pasta Dilimleri Etkinliği



Haftasonu arkadaşım Leyla'nın doğum günü partisine katıldım. Leyla'nın annesi eşit miktarlarda bir tepsi dolusu mini pastalar yapmış ve her bir pastayı 4 eş parçaya bölmüştür. Önce 3 dilim pasta yedim.

Pastanın kaçta kaçını yedim?.....

Sonra doymadım bir dilim daha yedim. Ne kadar pasta yedim?.....

Son olarak iki dilim daha pasta yedim. Ne kadar pasta yedim?.....

Birim Kesirleri Karşılaştırma Etkinliği

Deniz bir pizzanın $\frac{1}{6}$'ini, Feride $\frac{1}{3}$'ini, Beyza ise $\frac{1}{8}$'ini yemiştir. Yedikleri pizza miktarlarını modelleyin.

En çok pizza yiyen kimdir?.....

En az pizza yiyen kimdir?.....

Neden böyle düşündüğünüzü yazın.……..

Basit Kesirleri Karşılaştırma Etkinliği

Yelda bir kitabın birinci gün $\frac{3}{8}$'ünü; ikinci gün $\frac{5}{8}$'ini okumuştur. Yelda hangi gün daha fazla kitap okumuştur?

Farklı Kesir Türlerini Karşılaştırma Etkinliği

Aşağıdaki kesirleri <u>küçükten büyüğe</u> doğru sıralayın.

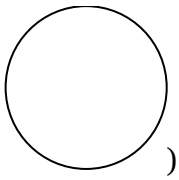
a) $\frac{9}{18}$,$\frac{5}{18}$, $\frac{15}{18}$ ……<.....<.....

b) $\frac{16}{10}$,$\frac{100}{10}$,$\frac{25}{10}$ ……<.....<.....

c) $2\frac{3}{11}$, $1\frac{10}{11}$, $4\frac{5}{11}$ ……<.....<.....

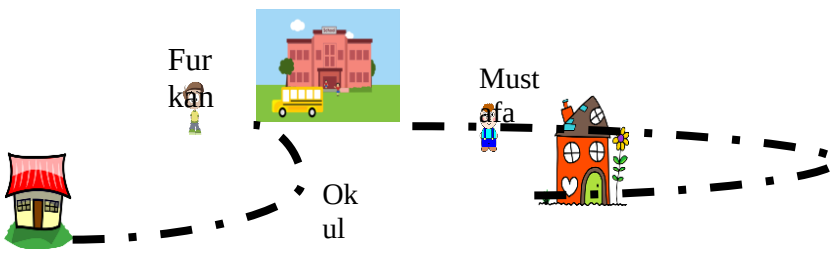
Problemdeki Farklı Kesir Türlerini Karşılaştırma Etkinliği

Bir pastanede aynı büyüklükteki mini kekler raflara dizilmiştir. Dört arkadaşın yedikleri kek miktarları tabloda gösterilmiştir. Her bir arkadaşın yediği kek miktarını aşağıdaki tabloda modelleyin.

Çocukların isimleri	**Yedikleri kek miktarı**	**Alan Modeli** *(Bir bütün=*  *)*
Nisan	$\frac{4}{8}$	
Cemre	$\frac{10}{8}$	
Sevda	$\frac{8}{8}$	
Mustafa	$1\frac{2}{8}$	

Yukarıdaki tabloya göre çocukların yedikleri kek miktarını <u>büyükten küçüğe doğru</u> sıralayın.

Tam Sayılı Kesirleri Karşılaştırma Etkinliği



Furkan’ın evi ile okulu arasındaki mesafe $2\frac{2}{5}$ km’dir. Mustafa’nın evi ile okulu arasındaki mesafe ise $1\frac{3}{5}$ km’dir.

a) Furkan’ın ve Mustafa’nın evlerinden okula yürüdükleri yol uzunluğunu karşılaştırın. Evden okula giderken kim daha fazla yürür?

b)Neden böyle düşündüğünüzü yazın.

EK 6: Araştırmacı Günlüğü

1.Öğrencilerle birebir görüşmeler sonucu değerlendirmeler:

a) Görüşmeler nerede gerçekleşti? Ortam nasıldı?

b) Her bir çocuk için görüşülen süreler ve görüşme saatleri nelerdir?

c) Çocukların görüşme sırasındaki tutum ve tepkileri nasıldı?

d) Görüşmelerde ortaya çıkan zorluklar nelerdir?

e) Başka gözlemlerim oldu mu?

2.Danışmanım ile yapılan görüşmelerde alınan kararlar, konuşulan konular nelerdi?

3.Alınan kararlar sonucunda hangi noktalarda değişiklikler yaptım? Neden?

4.Bu süreçte kendi bakış açım nasıl değişti? Öğrencilerin olası yanıtları ve performansları hakkındaki varsayımlarım ne ölçüde gerçekleşti?

EK 7: Öğrenci ve Öğretmen Günlükleri

Öğrenci Günlüğü

1. Bu derste neler öğrendin?

2. Bugünkü derste hangi etkinlikten daha çok keyif aldın?

3. Bugünkü derste çözmekte ya da anlamakta en çok zorlandığın şey neydi? Neden?

Öğretmen Günlüğü

1. Bugünkü derslerde hangi konular öğretildi?

2. Derslerin işlenişi hakkındaki görüşleriniz nelerdir? (Olumlu ve olumsuz yorumlarınızı yazınız.)

3. Bu derste ilginizi çeken şeyler oldu mu? Nelerdir?

4. Size göre öğrenciler bugün neyi iyi anladılar ve neyi anlamakta zorluk çektiler?

5. Eğer bu konuyu siz anlatacak olsaydınız, neyi farklı anlatırdınız?

EK 8: Gözlem Formu *(Her bir öğretim bölümüne özel olarak hazırlandığından, örnektir.)*

Okul / Sınıf: *Tarih:*

Öğretmen: *Gözlemci:*

Süre: *Katılım türü:*

Öğretim materyalleri: *Öğretim metodu:*

Varsayımsal öğrenmeler:

- Birim kesir kavramını pekiştirir.
- Birim kesirlerin 0-1 doğal sayıları arasında olduğunu fark eder.

Nitelik olarak uzunluk kavramını kullandığımızı anladılar mı?	
Birim kesirlerin 0-1 doğal sayıları arasında olduğunu anladılar mı?	
Bütüne en yakın ve en uzak birim kesri buldular mı? Nasıl nicelleştirme yaptılar?	
Birim kesirlerin bir bütün ile ve birbiri ile ilişkisini vurgulayarak büyüklükleri hakkında yorum yaptı mı?	
Birim kesirleri karşılaştırırken doğru bir genellemeye ulaştılar mı?	
Belirledikleri birim kesirleri uzunluk modeli ile temsil ettiler mi?	
Hangi noktalarda hata yaptılar ve hataları nasıl giderdiler?	
Sınıf iklimi ve öğrenciler arası etkileşim nasıldı?	
Matematiksel dili nasıl kullandılar?	

EK 9: Alan Notları Formu

1.Sınıf gözlem ve öğrenci ürünlerini (çalışma kağıdı, defter vb.) inceleme süreçlerinde dikkatimi çeken durumlar nelerdir?

2.Sınıf içi uygulamada neyi yapsaydım daha iyi olurdu? Neden yapmadım?

3.Uygulamalar sırasında ters giden durumlar oldu mu? Ortaya çıkan sorunlara çözüm bulabildim mi? Yetemediğim noktalar var mıdır? Bulduğum çözümler işe yaradı mı? Öğretmen yardım aldığım durumlar oldu mu? (*Sınıf yönetimi, Ders Anlatım ve Nicel Muhakeme açısından değerlendirilmeli*)

4.Etkinlikleri oluştururken belirlediğim öğrencilerin olası yanıtları ve performansları hakkındaki varsayımlarım ne ölçüde gerçekleşti? Örneğin, çocukların zorlanacağını düşündüğüm noktalarda ne gözlemledim?