



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



II. ÇEŞİT FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

YASİN ÇETİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Programı

DANIŞMAN

Doç. Dr. Bülent YILMAZ

İSTANBUL, 2017

MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans/Doktora Öğrencisi Yasin ÇETİN'in "II. ÇEŞİT FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ" başlıklı tez çalışması, 09/02/2018 tarihinde savunulmuş ve jüri üyeleri tarafından başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri

Doç.Dr. Bülent YILMAZ (Danışman)

Marmara Üniversitesi (İMZA) 

Prof.Dr. A. Neşe DERNEK (Üye)

Marmara Üniversitesi (İMZA) 

Prof.Dr. Serdal PAMUK (Üye)

Kocaeli Üniversitesi (İMZA) 

ONAY

Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ^{19.02.2018} tarih ve ^{2018/06-02} sayılı kararı ile Yasin ÇETİN Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Programında Yüksek Lisans derecesi alması onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Bülent EKİCİ




ÖNSÖZ

Yapılan çalışma sonucunda “YILMAZ BÜLENT, CETİN YASİN, Numerical solution of fredholm integral equations of the second type, NTMSCI 5, No. 3, 284-292(2017)” New Trends in Mathematical Sciences dergisinin 26.08.2017 tarihinde makale yayımlanmıştır.

Bu çalışmanın her aşamasında, konu ile ilgili bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan, ilgi ve önerilerini hiç bir zaman esirgemeyen, tez danışmanlığımı özenle yürüten değerli hocam Doç.Dr. Bülent YILMAZ'a teşekkür ve saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

	SAYFA
Önsöz	i
İçindekiler	ii
Özet	iv
Abstract	v
Semboller	vi
Tablo Listesi	vii
1.TEMEL KAVRAMLAR	
Giriş	1
1.1. Tanım	2
1.2. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması	2
1.2.1. Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler	2
1.2.2. Tekil ve Tekil Olmayan İntegral Denklemler	3
1.2.3. Fredholm ve Volterra İntegral Denklemleri	4
1.2.4. Homojen ve Homojen Olmayan İntegral Denklemler	5
1.2.5. Çekirdek Türlerine Göre İntegral Denklemler	6
1.2.5.1. Sabit Çekirdek	6
1.2.5.2. Dejenere (Ayrılabilir) Çekirdek	7
1.2.5.3. Simetrik Çekirdek	7
1.2.6. Düzgünlük Koşulları	7
2.FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ	
2.1. Sabit Çekirdekli İntegral Denklemlerin Çözümü	8
2.2. Ayrılabilir (Dejenere) İntegral Denklemlerin Çözümü	10
2.3. Ayrılabilir Çekirdeğin Genel Hali (Pincherle-Goursat Çekirdeği)	13
2.4. Çözücü Çekirdek	19

2.5. Ardışık Yaklaştırma Metodu	21
3.FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİN NUMERİK ÇÖZÜM METODLARI	
3.1. En Küçük Kareler Metodu	30
3.2. Ortalama Değer Teoremi Kullanılarak İntegral Denklemin Çözümü	33
3.3. Bernstein Polinomu Kullanılarak İntegral Denkleminin Yaklaşık Çözümü	36
3.4. Taylor Serisi Kullanılarak İntegral Denkleminin Yaklaşık Çözümü	39
4.KESİN ÇÖZÜM VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI	41
5.TARTIŞMA VE SONUÇ	60
6.KAYNAKLAR	61
ÖZGEÇMİŞ	63

ÖZET

II. ÇEŞİT İNTEGRAL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

İntegral denklemler, doğa bilimleri ve mühendislik bilimleri gibi birçok bilim dalında kullanılmaktadır. Geniş bir alanda kullanılması, İntegral denklemleri içeren problemlerin çözümünü önemli hale getirmektedir. Eric Ivar Fredholm (1866-1927) titreşen yüzeyler ve raslamsal süreçleri konu alan çalışmalarında karşılaştığı integral denkleminin çözümü, J. Neumann, Liouville ve Volterra tarafından bazı özel durumlar için bulunmuştur, ancak genel çözümü elde edilememiştir. Bu durum; problemlerin çözümünde nümerik yöntemlerin kullanılmasının önemini artırmıştır. Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır:

Giriş bölümünde, İntegral denklemlerin tarihçesi ve uygulama alanlarından bahsedilmiştir. Birinci bölümde integral denklemlerinin tanımı, sınıflandırılması ve türleri verilmiştir. İkinci bölümde integral denklemlerinin çekirdek çeşitlerine göre analitik çözümleri ile ardışık yaklaşım yöntemi anlatılmıştır. Üçüncü bölümde, nümerik yöntemlerden; “En Küçük Kareler Yöntemi”, “Ortalama Değer Yöntemi”, “Bernstein Polinomu Yardımıyla Yaklaşık Yöntem”, “Taylor Serisi Kullanarak Yaklaşım Çözüm” yöntemleri anlatılmıştır. Dördüncü bölümde ise yaklaşık çözümler ve analitik çözümlerin karşılaştırılması yapılmıştır.

Çalışmanın amacı nümerik yöntemlerin geçerliliğini test etmektedir. Bu amaçla, farklı türde çekirdek fonksiyonları içeren, lineer değişken katsayılı II. çeşit Fredholm integral denklemlerinin, analitik yöntemle ve nümerik yöntemlerle çözümleri yapılmıştır. Bulunan nümerik çözümler, kesin çözümle ayrı ayrı karşılaştırılmış ve sonucunda yöntemlerin etkinliği değerlendirilmiştir.

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTION OF FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND KIND.

Integral equations are used in a lot of disciplines such as engineering sciences and natural sciences. This situation makes the solutions of the problems which include integral equations important. Eric Ivar Fredholm (1866-1927) came up with an integral equation in his physical works which include vibrating surfaces and random processes. And J. Neumann, Liouville and Volterra found some solution to this integral equation, however they could not reach a final solution. This increased the significance of using the numerical methods in problem solving. This work consists of four stages:

In introduction stage, the history and application fields of integral equations have been mentioned. The first part includes the description, classification and the kind of integral equations. In the second part, analytical solutions according to kernel types of integral equations and iterated approach method have been identified. In the third part, of the numeric methods “The Least Squares method”, “Mean Value Method”, “Bernstein Polynomials Method”, “Taylor Series Method” have been identified. In the fourth part, approximate solutions and analytical solutions have been compared.

The goal of the study, was to solve the second type Fredholm integral equations with linear variable coefficient which includes different kinds of kernel functions. This was performed by analytical and numerical methods. Obtained numeric solutions were compared with the exact solutions separately in predetermined intervals and their achievement were evaluated in the end of analysis.

SEMBOLLER

$K(x,t)$	: İntegral denkleminin çekirdek fonksiyonu.
L	: Düzgün integral operatörü.
λ	: Parametre
$\mathcal{L}_2$	: Karesi integralenebilir fonksiyonların sınıfı.
Σ	: Toplam sembolü.
$D(\lambda)$	: Katsayılar determinanı.
$R(x, t; \lambda)$	: Çözücü çekirdek.
K_n	: n. mertebeden itere çekirdek.
$p(x)$	: Polinom fonksiyon.
$B_{i,n}(x)$	: Bernstein polinomu.
$\frac{\partial^{(n)}K(x,t)}{\partial x^n}$	: $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonun n. mertebeden x değişkenine göre türevi.

TABLolar VE LİSTELER

Tablo 1. Soru 1 Kesin Çözüm ve Nümerik Çözümlerin Karşılaştırılması	47
Tablo 2. Soru 2 Kesin Çözüm ve Nümerik Çözümlerin Karşılaştırılması	53
Tablo 3. Soru 3 Kesin Çözüm ve Nümerik Çözümlerin Karşılaştırılması	59



GİRİŞ

İntegral denklemler ilk olarak, 1823 yılında bir mekanik problemini incelediği sırada ABEL tarafından sunulmuştur. İntegral denklemlerle ilgili ilk araştırmalar 19. yüzyılın başlarında başlamıştır. Araştırmalar, başlarda rastgele ve sistematik olmayan bir şekilde yapılmaktayken, bu yüzyılın sonuna doğru belirli bir düzen ve sistem kazanmıştır. İntegral Denklemleri terimini P. Du Bois REYMOND'un (Crelle, Vol.103, 1888, s.228) yaptığı bir çalışmada önerdiği bilinmektedir.

İntegral denklemler; bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlanmaktadır. İntegral denklemlerinin çok sayıda türü olduğu için, bu türlerin hepsini kapsayacak bir teori kurmak şu an olanaksız gözükmektedir. Bu nedenle ayrı nitelikteki integral denklemlerin incelenme yöntemleri de ayrı olacağından, konu geniş bir araştırma sahasına yayılmaktadır.

Fizik ve mühendislik dallarında problemlerin çoğu bir denklemle ifade edilemeyecek yapıya sahiptir. Uygulamalı bilim dallarında çokça karşılaşılan bu problem şekli, birden çok bilinmeyen fonksiyon içeren diferansiyel ve integral çeşitlerinden oluşan denklem sistemi şeklinde ifade edilir. Günümüze kadar henüz bu sistemlerin genel bir çözümü bulunamamıştır. Değişken katsayılı ve yüksek mertebedeki integral denklemlerin analitik çözümleri bulunamamakta ya da bulunması çok zor olmaktadır. Bu nedenle bu tür problemlerin çözümünde yaklaşık çözümlerin kullanılması ve karşılaştırılması faydalı olacaktır.

Bu tez çalışmasındaki amaç, lineer değişken katsayılı ikinci çeşit Fredholm integral denklemlerinin çeşitli yöntemlerle yaklaşık çözümlerini bularak analitik çözümleri ile karşılaştırmak ve sayısal yöntemlerin problemler üzerindeki verimliliğini araştırmaktır.

1. TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Tanım

İntegral denklem, bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında kullanıldığı denklemlerdir.

Bilinmeyen fonksiyon $g(x)$, çekirdek fonksiyon $K(x,t)$, $a \leq x \leq b$ ve $a \leq t \leq b$ olmak üzere,

$$g(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)g(t)dt \quad (1.1)$$

$f(x)$ ve $K(x,t)$ fonksiyonları bilinirken, $g(x)$ bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında oluşturduğu denkleme integral denklemi denir.

1.2 İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

1.2.1 Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler

En temelde integral denklemler, lineer integral denklem ve lineer olmayan integral denklemi olarak sınıflandırılır.

$$g(x) = \int_a^b K(x,t)g(t)dt \quad (1.2)$$

$$g(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)g(t)dt$$

$$g(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)[g(t)]^n dt \quad (1.3)$$

$g(x)$ fonksiyonu bilinmeyen fonksiyon olmak üzere, $g(x)$ fonksiyonu üzerinde sadece lineer işlemler yapılıyor olması halinde integral denklemi lineer integral denklemidir. (1.1) ve (1.2) denklemleri lineer integral denklemine örnektir.

Lineer operatör için genel koşul, L düzgün integral operatörü olmak üzere $L[g(x)] = f(x)$ şeklinde yazılabilir. Herhangi c_1 ve c_2 sabitleri için,

$$L[c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)] = c_1 L[g_1(x)] + c_2 L[g_2(x)] . \quad (1.4)$$

Lineer operatör koşulunu sağlaması durumunda, lineer integral denkleminin en genel şekli,

$$h(x)g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)g(t)dt \quad (1.5)$$

dir.

İntegralin üst sınırı değişen veya sabit olabilir. $f(x)$, $h(x)$ fonksiyonları bilinen, $K(x,t)$ fonksiyonu çekirdek fonksiyon, λ sıfırdan farklı parametre olmak üzere, $g(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere, lineer integral denklemlerin en genel şekli (1.5) denklemdir.

(1.3) denklemi lineer olmayan integral denklemdir. n . dereceden olduğu için lineer operatör şartını sağlamaz.

x ve t n boyutlu vektör olmak üzere ve Ω da n boyutlu uzayın bir bölgesi olmak üzere bir çok bilinmeyenden oluşan sistem ele alınabilir.

$$g(x) = f(x) + \int_{\Omega} K(x,t)g(t)dt \quad (1.6)$$

1.2.2 Tekil ve Tekil Olmayan İntegral Denklemler

Tekil olan ve tekil olmayan integral denklemlerin durumu çekirdek $K(x, t)$ fonksiyonun x ve t değişkenlerinin tanımlı olduğu aralıklardaki, $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonun sürekliliğine bağlıdır.

$K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu, $a \leq x \leq b$ ve $a \leq t \leq b$ aralıklarında sürekli ise, integral denklem bu aralıkta tekil olmayan integral denklemdir. (1.7) integral denklemi tekil olmayan integral denklemine bir örnektir.

$$g(x) = f(x) + \int_0^{\pi} \cos(xt)g(t)dt \quad (1.7)$$

$K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu verilen aralıkta sürekli olmaması durumunda ve sınırlardan birinin veya ikisinin sonsuz olduğu durumda integral denklemi tekil(singüler) integral denklemdir. Aşağıdaki integral denklemleri tekil (singüler) denklemlere örnektir.

$$g(x) = f(x) + \int_0^x \ln(x-t)g(t)dt \quad (1.8)$$

$$g(x) = f(x) + \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} g(t)dt \quad (1.9)$$

$$g(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{e^{|x-t|}} dt \quad (1.10)$$

1.2.3 Fredholm ve Volterra İntegral Denklemler

İntegral denkleminin lineer veya homojenliklerine bakılmaksızın, integralin sınırlarının durumu belirleyici olmaktadır.

İntegralin alt sınırının sabit, üst sınırının değişken olması durumunda integral denklem Volterra integral denklemi olarak adlandırılır. $h(x)$, $g(x)$ ve $f(x)$ bilinen fonksiyonlar, $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonları, integralin alt sınırı a sabiti ve üst sınır x değişkeni olmak üzere;

$$h(x) = \int_a^x K(x,t)g(t)dt \quad (1.11)$$

$$g(x) = \int_a^x K(x,t)g(t)dt \quad (1.12)$$

$$g(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)g(t)dt \quad (1.13)$$

$$h(x)g(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)g(t)dt \quad (1.14)$$

(1.11), (1.12), (1.13), (1.14) gibi integral denklemlerine Volterra İntegral Denklemi denir. (Aksoy,1983)

Fredholm İntegral Denklemi ise, $h(x)$, $g(x)$, $f(x)$ bilinen fonksiyonlar, $K(x,t)$ çekirdek fonksiyon ve a , b integralin alt ve üst sınırın oluşturan sabitler olmak üzere Fredholm İntegral Denkleminin en genel hali,

$$h(x)g(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)g(t)dt \quad (1.15)$$

şeklindedir.

Fredholm integral denklemleri $h(x)$ fonksiyonun durumuna göre türlere ayrılır.

i. Birinci Türden Fredholm integral denklemi,

$h(x)=0$ için,

$$f(x) + \int_a^b K(x,t)g(t)dt = 0 \quad (1.16)$$

ii. İkinci Türden Fredholm integral denklemi, $h(x)=1$ için (1.1) denklemi,

$$g(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)g(t)dt$$

şeklinde olur.

1.2.4 Homojen ve Homojen Olmayan integral Denklemler

Homojen ikinci tür Fredholm İntegral Denkleminin (1.1) özel bir durumudur. $g(x)$ bilinmeyen fonksiyonun çözümünün sınıflandırılırken, $f(x)$ bilinen fonksiyonu için, $f(x)=0$ olduğu durumda,

$$g(x) = \int_a^b K(x, t)g(t)dt \quad (1.17)$$

(1.17) homojen integral denklemi olup $g(x) = 0$ bir çözümdür. Bu çözüme aşikâr çözüm denir.

$f(x) \neq 0$ olduğu durumda,

$$g(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)g(t)dt$$

homojen olmayan integral denklemdir.

1.2.5 Çekirdek Türlerine Göre integral Denklemleri

Bu bölüme kadar integral denklemlerinden bahsederken herhangi parametreden bahsetmemiştik. $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ parametreler olmak üzere,

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)g(t)dt \quad (1.18)$$

(1.18) genel integral denklemi yazılır. İntegral denklemlerin çözümleri aranırken çekirdeğin türü belirleyici bir rol üslenir. $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonunun lineer x , t değişkenlerinin $[a, b]$ aralığında sürekli ve tanımlı olduğunu kabul edelim.

1.2.5.1 Sabit Çekirdek

Fredholm integral (1.18) denkleminde $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonu sabit kabul edilirse ve c sabit olmak üzere, $K(x, t) = c$ için (1.18) denklemini,

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b c g(t)dt \quad (1.19)$$

$$g(x) = f(x) + \lambda c \int_a^b g(t)dt$$

şeklinde olur.

1.2.5.2 Dejenere (Ayrılabilir) Çekirdek

(1.18) Fredholm integral denkleminde $K(x, t)$ çekirdeği, her biri sadece x ve sadece t ye bağlı fonksiyonların çarpımından oluşan sonlu sayıda terimin toplamı olarak ifade edilebiliyorsa,

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^n m_i(x)n_i(t) \quad (1.20)$$

(1.18) denklemini için,

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b m_i(x)n_i(t)g(t)dt \quad (1.21)$$

$$g(x) = f(x) + \lambda m_i(x) \int_a^b n_i(t)g(t)dt$$

şeklindedir.

1.2.5.3 Simetrik Çekirdek

Fredholm integral, (1.18) denkleminde $K(x, t)$ çekirdeği,

$$K(x, t) = K(t, x)$$

şeklinde eşitliği sağlıyorsa simetrik çekirdek olarak tanımlanır.

1.2.6. Düzgünlük Koşulları

Sürekli ve integrallenebilir fonksiyonlar ele alınacaktır. $[a, b]$ aralığında fonksiyonlar için düzgünlük koşulunu verelim. İntegral işareti kullanıldığında Lebesgue integral kavramı anlaşılmaktadır. Fonksiyon Riemann anlamında integre edilebilirse, aynı zamanda Lebesgue anlamında da integre edilebilir ama tersi doğru değildir.

Karesi integrallenebilir bir fonksiyon aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\int_a^b |g(t)|^2 dt < \infty$$

Fonksiyon $\mathcal{L}_2$ fonksiyonudur. İki değişkenli $K(x,t)$ fonksiyonun düzgünlük koşulu benzerdir.

$a \leq x \leq b, a \leq t \leq b$ olmak üzere x ve t değerlerinin kümesi için;

$$\iint_a^b |K(x, t)|^2 < \infty$$

$a \leq x \leq b$ aralığında x in herbir değeri için;

$$\int_a^b |K(x, t)|^2 dt < \infty$$

$a \leq t \leq b$ aralığında t nin herbir değeri için;

$$\int_a^b |K(x, t)|^2 dt < \infty$$

düzgünlük koşuludur.

2.FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

2.1. Sabit Çekirdekli İntegral Denklemin Çözümü

(1.18) Fredholm integral denkleminde $K(x, t)$ sabit çekirdek fonksiyonu $a \leq x \leq b$ ve $a \leq t \leq b$ bölgesinde sürekli tanımlı ve c sabit olmak üzere, $K(x, t) = c$ için, (1.18) denkleminde,

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b c g(t) dt$$

c sabit olduğu için,

$$g(x) = f(x) + \lambda c \int_a^b g(t) dt \quad (2.1.1)$$

şeklinde yazılır.

(2.1.1) belirli integralin sınırları sabit olduğu için, integral değeri belirli bir sabite yakınsayacaktır.

$$\lambda c = \eta \text{ ve } U = \int_a^b g(t)dt$$

şeklinde ifade edilirse,

$$g(x) = f(x) + \eta \int_a^b g(t)dt \quad (2.1.2)$$

$$g(x) = f(x) + \eta U \quad (2.1.3)$$

Böylece integral denkleminin çözümü bulunmuş olur. Bulunan integral denkleminin sonucu olan (2.1.3), (2.1.2) integral denklemini sağlayacaktır. $g(x)$ fonksiyonu integral denkleminde yerine yazılır,

$$f(x) + \eta U = f(x) + \eta \int_a^b [f(t) + \eta U]dt$$

$$\eta U - \eta \int_a^b \eta U dt = \eta \int_a^b f(t)dt \quad \text{ve} \quad U[1 - \eta \int_a^b dt] = \int_a^b f(t)dt$$

$$U = \frac{1}{1 - \eta(b-a)} \int_a^b f(t)dt, \quad 1 - \eta(b-a) \neq 0$$

Bulunan U değeri (2.1.3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$g(x) = f(x) + \eta \left[\frac{1}{1 - \eta(b-a)} \int_a^b f(t)dt \right]$$

veya

$$g(x) = f(x) + \eta \left[\frac{1}{1 - \lambda c(b-a)} \int_a^b f(t)dt \right] \quad (2.1.4)$$

olur.

Burada $g(x)$ fonksiyonu bilindiği için, $K(x,t)$ sabit çekirdeğine sahip (2.1.4) Fredholm integral denkleminin genel bir çözümü oluşturur.

Örnek1:

$$g(x) = \sin x + \int_0^1 2g(t)dt$$

integral denkleminin çözümü bulunuz.

Çözüm :

İntegral denklem, $K(x, t) = 2$, yani sabit çekirdekli bir integral denklemdir.

$$g(x) = \sin x + 2 \int_0^1 g(t)dt$$

$$c = \int_0^1 g(t)dt \quad \text{olarak alınırsa,}$$

$$g(x) = \sin x + 2c$$

olur ve bu integral denklemde yerine yazılırsa,

$$\sin x + 2c = \sin x + \int_0^1 (\sin t + 2c)dt$$

$$c = \cos 1 - 1$$

elde edilir. Sonuç olarak integral denklem çözümü

$$g(x) = \sin x + 2(\cos 1 - 1)$$

şeklindedir.

2.2. Ayrılabilir (Dejenere) İntegral Denklemin Çözümü

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)g(t)dt$$

integral denklemindeki $K(x, t)$ çekirdeği, $K(x, t) = h(x).p(t)$ şeklindedir. Bu tür çekirdeklere ayrılabilir türdendir denir.

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b h(x)p(t)g(t)dt \quad (2.2.1)$$

Fredholm integral denkleminde $h(x)$, t den bağımsız olduğu için,

$$g(x) = f(x) + \lambda h(x) \int_a^b p(t)g(t)dt$$

şeklinde yazılır. C integralin sabit değerini göstermek üzere, yani

$$C = \int_a^b p(t)g(t)dt \quad (2.2.3)$$

ise

$$g(x) = f(x) + \lambda C h(x) \quad (2.2.4)$$

elde edilir ve $g(x)$ (2.2.1) denklemini sağlar. Buna göre,

$$f(x) + \lambda C h(x) = f(x) + \lambda h(x) \int_a^b p(t)[f(t) + \lambda C h(t)]dt, \quad (2.2.5)$$

$$C[1 - \lambda \int_a^b p(t)h(t)dt] = \int_a^b p(t)f(t)dt, \quad (2.2.6)$$

$$1 - \lambda \int_a^b p(t)h(t)dt \neq 0 \quad \text{olmak üzere}$$

$$C = \frac{\int_a^b p(t)f(t)dt}{1 - \lambda \int_a^b p(t)h(t)dt} \quad (2.2.7)$$

elde edilir. $f(x)$, $p(x)$ ve $h(x)$ bilinen fonksiyonlar olduğu için (2.2.7) ifadesi (2.2.4) de yerine yazılırsa

$$g(x) = f(x) + \lambda \frac{\int_a^b p(t) f(t) dt}{1 - \lambda \int_a^b p(t) h(t) dt} h(x)$$

bulunur. $g(x)$ ayrılabilir çekirdekli Fredholm integral denkleminin çözümüdür.

Örnek 1:

$$g(x) = e^x + \int_0^1 e^{x+t} g(t) dt$$

Ayrılabilir çekirdeğe sahip integral denklemin çözümünü bulalım.

Çözüm:

$K(x, t) = e^{x+t}$ çekirdeği ayrılabilir tiptedir.

$$h(x) = e^x \quad \text{ve} \quad p(t) = e^t$$

$$g(x) = e^x + e^x \int_0^1 e^t g(t) dt$$

Buradan,

$$C = \int_0^1 e^t g(t) dt$$

$$g(x) = e^x + e^x C$$

integral denkleminde yerine yazılırsa.

$$e^x + e^x C = e^x + e^x \int_0^1 e^t (e^t + e^t C) dt$$

$$C(1 - \int_0^1 e^{2t} dt) = \int_0^1 e^{2t} dt$$

$$C = \frac{e^2 - 1}{3 - e^2}$$

elde edilir. C yerine yazılırsa ayrılabilir çekirdekli Fredholm integral denkleminin çözümü,

$$g(x) = e^x + e^x \frac{e^2 - 1}{3 - e^2} \quad \text{şeklinde bulunur.}$$

2.3 Ayrılabilir Çekirdeğin Genel Hali (Pincherle-Goursat Çekirdeği)

Ayrılabilir çekirdek $K(x, t)$ için,

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^n h_i(x)p_i(t) \quad (2.3.1)$$

şeklinde olsun. Bu halde integral denklemi

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^n h_i(x)p_i(t) g(t) dt \quad (2.3.2)$$

formundadır. (2.3.2) denkleminde $h_i(x)$ fonksiyonu t den bağımsız olduğu için integral şekline ifade edilebilir.

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n h_i(x) \int_a^b p_i(t) g(t) dt \quad (2.3.3)$$

Açık şekilde yazılacak olursa,

$$g(x) = f(x) + \lambda [h_1(x) \int_a^b p_1(t) g(t) dt + h_2(x) \int_a^b p_2(t) g(t) dt + \dots + h_n(x) \int_a^b p_n(t) g(t) dt]$$

ve

$$C_1 = \int_a^b p_1(t) g(t) dt ; C_2 = \int_a^b p_2(t) g(t) dt ; \dots C_n = \int_a^b p_n(t) g(t) dt$$

Şeklinde gösterilirlerse (2.3.3) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$g(x) = f(x) + \lambda [C_1 h_1(x) + C_2 h_2(x) + \dots + C_n h_n(x)] \quad (2.3.4)$$

Böylece $g(x)$ fonksiyonu bulunmuş olur. (2.2.4) denkleminin (2.3.3) denklemini sağlaması gerekir,

$$\begin{aligned} f(x) + \lambda [h_1(x) C_1 + C_2 h_2(x) + \dots + C_n h_n(x)] = \\ f(x) + \lambda \int_a^b [(h_1(x) p_1(t) + h_2(x) p_2(t) + \dots + h_n(x) p_n(t))] (f(t) + \lambda [h_1(t) C_1 + \dots + C_n h_n(t)]) dt . \end{aligned}$$

Bu ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
& f(x) + \lambda C_1 h_1(x) + \lambda C_2 h_2(x) + \dots + \lambda C_n h_n(x) = \\
& f(x) + \lambda h_1(x) \int_a^b p_1(t) [f(t) + \lambda C_1 h_1(t) + \lambda C_2 h_2(t) + \dots + \lambda C_n h_n(t)] dt \\
& + \lambda h_2(x) \int_a^b p_2(t) [f(t) + \lambda C_1 h_1(t) + \lambda C_2 h_2(t) + \dots + \lambda C_n h_n(t)] dt + \dots \\
& + \lambda h_n(x) \int_a^b p_n(t) [f(t) + \lambda C_1 h_1(t) + \lambda C_2 h_2(t) + \dots + \lambda C_n h_n(t)] dt
\end{aligned}$$

$h_i(x)$ fonksiyonun katsayıları karşılıklı olarak eşitlenirse,

$$\begin{aligned}
C_1 &= \int_a^b p_1(t) [f(t) + \lambda C_1 h_1(t) + \lambda C_2 h_2(t) + \dots + \lambda C_n h_n(t)] dt \\
C_2 &= \int_a^b p_2(t) [f(t) + \lambda C_1 h_1(t) + \lambda C_2 h_2(t) + \dots + \lambda C_n h_n(t)] dt
\end{aligned}$$

.

.

.

$$C_n = \int_a^b p_n(t) [f(t) + \lambda C_1 h_1(t) + \lambda C_2 h_2(t) + \dots + \lambda C_n h_n(t)] dt \quad (2.3.5)$$

elde edilir. İntegraller için aşağıdaki tanımlamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned}
N_1 &= \int_a^b p_1(t) f(t) dt \quad ; \quad N_2 = \int_a^b p_2(t) f(t) dt; \quad \dots \quad ; \quad N_n = \int_a^b p_n(t) f(t) dt \\
M_{11} &= \int_a^b p_1(t) h_1(t) dt \quad ; \quad M_{12} = \int_a^b p_1(t) h_2(t) dt; \quad \dots \quad ; \quad M_{1n} = \int_a^b p_1(t) h_n(t) dt \\
M_{21} &= \int_a^b p_2(t) h_1(t) dt \quad ; \quad M_{22} = \int_a^b p_2(t) h_2(t) dt; \quad \dots \quad ; \quad M_{2n} = \int_a^b p_2(t) h_n(t) dt \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned}$$

$$M_{n1} = \int_a^b p_n(t)h_1(t)dt \quad ; \quad M_{n2} = \int_a^b p_n(t)h_2(t)dt; \quad \dots ; \quad M_{nn} = \int_a^b p_n(t)h_n(t)dt$$

ve (2.3.5) ifadeleri bu tanımlamalara göre düzenlenirse,

$$\begin{aligned} C_1 &= N_1 + \lambda C_1 M_{11} + \lambda C_2 M_{12} + \dots + \lambda C_n M_{1n} \\ C_2 &= N_2 + \lambda C_1 M_{21} + \lambda C_2 M_{22} + \dots + \lambda C_n M_{2n} \end{aligned} \quad ,$$

$$C_n = N_n + \lambda C_1 M_{n1} + \lambda C_2 M_{n2} + \dots + \lambda C_n M_{nn}$$

elde edilir. Sistem tekrar düzenlenirse,

$$N_1 = (1 - \lambda M_{11})C_1 - \lambda M_{12}C_2 - \lambda M_{13}C_3 - \dots - \lambda M_{1n}C_n \quad ,$$

$$N_2 = -\lambda M_{21}C_1 + (1 - \lambda M_{22})C_2 - \lambda M_{23}C_3 - \dots - \lambda M_{2n}C_n \quad ,$$

$$N_n = -M_{n1}C_1 - \lambda M_{n2}C_2 - \lambda M_{n3}C_3 - \dots + (1 - \lambda M_{nn})C_n$$

bulunur. Daha genel ifade ile gösterilirse,

$$C_i = \int_a^b p_i(t) g(t) dt \quad i = 1, 2, \dots, n$$

denklem aşağıdaki gibidir;

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n C_i h_i(x) \quad (2.3.6)$$

$g(x)$ değeri (2.3.2) de yerine yazılırsa,

$$\sum_{i=1}^n h_i(x) \{C_i - \int_a^b p_i(t) [f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k h_k(t)] dt\} = 0$$

elde edilir. $h_i(x)$ fonksiyonları lineer bağımsız olduğu için, $i = 1, 2, \dots, n$ için aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$C_i - \int_a^b p_i(t) [f(t) + \lambda \sum_{k=1}^n C_k h_k(t)] dt = 0 \quad . \quad (2.3.7)$$

İfadeyi daha basit hale getirirsek;

$$N_i = \int_a^b p_i(t) g(t) dt \quad , \quad M_{ik} = \int_a^b p_i(t) h_k(t) dt$$

N_i ve M_{ik} bilinen sabitler olmak üzere, bunlar (2.3.7) denkleminde yerine yazılırsa,

$$C_i - \lambda \sum_{k=1}^n M_{ik} C_k = N_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3.8)$$

eşitliği elde edilir.

C_i bilinmeyenleri için n bilinmeyenli bir cebirsel denklem sistemi oluşturulur. $D(\lambda)$ bu sistemde katsayılar determinantıdır.

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda M_{11} & -\lambda M_{12} & L & -\lambda M_{1n} \\ -\lambda M_{21} & 1 - \lambda M_{22} & L & -\lambda M_{2n} \\ M & M & M & M \\ -\lambda M_{n1} & -\lambda M_{n2} & L & 1 - \lambda M_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.3.9)$$

Bu durumda $C_1, C_2, \dots, C_n$ birbirinden bağımsız olarak hesaplanabilir. (2.3.9) determinantı alındığında λ ya bağlı n inci derecen bir polinom elde edilir.

$\lambda = 0$ olduğunda $D(\lambda) = 1$ olur.

$D(\lambda) \neq 0$ olduğunda λ nın tüm değerleri için (2.3.2) integral denkleminin bir tek çözümü vardır.

$D(\lambda) = 0$ olduğunda λ nın tüm değerleri için (2.3.2) integral denkleminin sonsuz sayıda çözümü vardır ya da integral denkleminin çözümü yoktur.

Lineer yöntemler uygulanarak,

$$C_i = \frac{D_i(\lambda)}{D(\lambda)} \quad (2.3.10)$$

bulunur. $D(\lambda)$ determinantında i . sütunu elemanları yerine N_i lerden oluşan sütunun yazılmasıyla $D_i(\lambda)$ determinanı elde edilir. Bu şekilde C_i sabitleri bulunur ve (2.3.4) denkleminde yerine yazılırsa $g(x)$ çözümü bulunur.

Örnek 1:

Aşağıdaki integral denkleminin çözümünü araştıralım,

$$g(x) = \sin x + \lambda \int_0^\pi \cos(x-t) g(t) dt$$

Çözüm:

$f(x) = \sin x, K(x, t) = \cos(x-t)$ şeklindedir. Burada

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^n h_i(x) p_i(t) g(t) dt$$

Fredholm integral denkleminin çekirdeği genel haldeki ayrılabilir çekirdektir.

$$h_1(x) = \cos x, \quad h_2(x) = -\sin x, \quad p_1(t) = \cos t, \quad p_2(t) = \sin t ,$$

$$N_1 = \int_a^b p_1(t) f(t) dt ; \quad N_1 = \int_0^\pi \cos t \sin t dt = 0 ,$$

$$N_2 = \int_a^b p_2(t) f(t) dt ; \quad N_2 = \int_0^\pi \sin t \sin t dt = \frac{\pi}{2} ,$$

$$M_{11} = \int_0^\pi \cos t \cos t dt = \frac{\pi}{2} ; \quad M_{12} = \int_0^\pi -\cos t \sin t dt = 0 ,$$

$$M_{21} = \int_0^\pi \sin t \cos t dt = 0 ; \quad M_{22} = \int_0^\pi -\sin t \sin t dt = -\frac{\pi}{2} ,$$

$D(\lambda) \neq 0$ olduğundan çözüm vardır.

$$C_i - \lambda \sum_{k=1}^n M_{ik} C_k = N_i, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

denklemini yerine yazılırsa aşağıda cebrik denklem sistemi elde edilir.

$$C_1 - \lambda \frac{\pi}{2} C_1 = 0, \quad C_2 + \lambda \frac{\pi}{2} C_2 = \frac{\pi}{2}$$

Sistemin çözümünden

$$C_1 = \frac{2}{\lambda\pi}, \quad C_2 = \frac{\pi}{2 + \lambda\pi}$$

elde edilir. C_1 ve C_2 sabitleri (2.3.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$g(x) = \sin x + \frac{2}{\lambda\pi} \cos x - \frac{\pi}{2 + \lambda\pi} \sin x$$

$$g(x) = \frac{2}{\lambda\pi} \cos x + \left(1 - \frac{\pi}{2 + \lambda\pi}\right) \sin x$$

bulunur.

Örnek 2:

Aşağıdaki integral denkleminin çözümünü araştıralım,

$$g(x) = \lambda \int_0^1 (\sqrt{x}t^2 - \sqrt{t}x^2)g(t)dt.$$

Çözüm:

$$f(x) = 0, \quad K(x, t) = \sqrt{x}t^2 - \sqrt{t}x^2$$

dir

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^n h_i(x)p_i(t)g(t)dt$$

Fredholm integral denkleminin çekirdeği genel haldeki ayrılabilir çekirdektir.

$$h_1(x) = \sqrt{x}, \quad h_2(x) = t^2, \quad p_1(t) = x^2, \quad p_2(t) = -\sqrt{t},$$

$$N_1 = \int_a^b p_1(t)f(t)dt ; \quad N_1 = 0 ,$$

$$N_2 = \int_a^b p_2(t)f(t)dt ; \quad N_2 = 0 ,$$

$$M_{11} = \int_0^1 \sqrt{t} t^2 dt = \frac{2}{7} ; \quad M_{12} = \int_0^1 t^2 t^2 dt = \frac{1}{5} ,$$

$$M_{21} = - \int_0^1 \sqrt{t} \sqrt{t} dt = -\frac{1}{2} ; \quad M_{22} = - \int_0^1 \sqrt{t} t^2 dt = -\frac{2}{7} ,$$

$$C_i - \lambda \sum_{k=1}^n M_{ik} C_k = N_i .$$

$n = 2$ olduğundan aşağıda cebrik denklem sistemi elde edilir.

$$\left(1 - \lambda \frac{2}{7}\right) C_1 - \frac{1}{2} C_2 = 0 , \quad -\lambda \frac{1}{5} C_1 + \left(1 - \lambda \frac{2}{7}\right) C_2 = 0$$

$D(\lambda)$ determinant sisteminde λ nın reel değeri yoktur. $C_1 = 0$ ve $C_2 = 0$ olduğundan λ nın tüm reel sayı değerleri için, bir tek çözümü vardır. $g(x) = 0$ şeklindeki çözümdür.

2.4 Çözücü Çekirdek

(2.3.9) determinanı, i . sütun elemanları yerine N_i lerden oluşan sütun yazılmasıyla $D_i(\lambda)$ determinantını elde etmiştik.

$$C_i = \frac{D_{1i}N_1 + D_{2i}N_2 + \dots + D_{ni}N_n}{D(\lambda)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4.1)$$

i .sütun elemanlarına göre Laplace açılımı yapılırsa ve eş çarpanlar Δ ile gösterilirse,

$$D_i(\lambda) = \sum_{j=1}^n N_i \Delta_{ij}, \quad N_i = \int_a^b p_i(t)f(t)dt$$

şeklinde yazılır. Bunlar (2.4.1) denkleminde yerine yazılırsa.

$$C_i = \frac{\sum_{j=1}^n \Delta_{ij} \int_a^b p_i(t)f(t)dt}{D(\lambda)} \quad (2.4.2)$$

bulunan bu ifadede (2.3.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n C_i h_i(x)$$

$$g(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n h_i(x) \left[\frac{1}{D(\lambda)} \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} \int_a^b p_j(t) f(t) dt \right] \quad (2.4.3)$$

$$g(x) = f(x) + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n h_i(x) \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} \right] p_j(t) f(t) dt$$

elde edilir. $n + 1$ dereceden determinant aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$D(x, t; \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & h_1(x) & h_2(x) & \dots & h_n(x) \\ b_1(t) & 1 - \lambda M_{11} & -\lambda M_{12} & \dots & -\lambda M_{1n} \\ b_2(t) & -\lambda M_{21} & 1 - \lambda M_{22} & \dots & -\lambda M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n(t) & -\lambda M_{n1} & -\lambda M_{n2} & \dots & 1 - \lambda M_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.4.4)$$

$$\left[\sum_{i=1}^n h_i(x) \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} \right] p_j(t) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)}$$

Bu değere çözücü çekirdek denir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$R(x, t; \lambda) = \frac{D(x, t; \lambda)}{D(\lambda)} \quad (2.4.5)$$

Bu ifade (2.4.3) denkleminde yerine yazılarak ,aşağıdaki basit form elde edilir.

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t) dt \quad . \quad (2.4.6)$$

Teorem:

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t) dt$$

integral denkleminde $R(x, t; \lambda)$ çözücü çekirdek tekdir.

İspat:

$f(x) \neq 0$, $R_1(x, t; \lambda)$ ve $R_2(x, t; \lambda)$ integral denklemin iki farklı çözücü çekirdeği olsun.

$$f(x) + \lambda \int_a^b R_1(x, t; \lambda) f(t) dt = f(x) + \lambda \int_a^b R_2(x, t; \lambda) f(t) dt \quad (2.4.7)$$

ifadesi sağlanır.

$$\lambda \int_a^b [R_1(x, t; \lambda) - R_2(x, t; \lambda)] f(t) dt = 0$$

$f(t) \neq 0$ olduğu için ; $R_1(x, t; \lambda) - R_2(x, t; \lambda) = 0$ ve buradan

$$R_1(x, t; \lambda) = R_2(x, t; \lambda)$$

olduğundan çözücü çekirdek tektir.

2.5 Ardışık Yaklaştırma Metodu

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) g(t) dt$$

(1.1) denkleminde verilen $K(x, t)$ çekirdek fonksiyonundan yararlanarak itere çekirdek tanımını yapalım.

$$K(x, t) = K_1(x, t) \quad (2.5.1)$$

ile gösterelim. z bir değişken olmak üzere,

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_1(z, t) dz \quad (2.5.2)$$

şeklinde yazılan ifadeye 2. mertebeden itere çekirdek,

$$K_3(x, t) = \int_a^b K(x, z)K_2(z, t)dz \quad (2.5.3)$$

3.mertebeden itere çekirdek denir. (2.5.3) denkleminde (2.5.1) ve (2.5.2) denklemleri yerine yazılırsa,

$$K_3(x, t) = \int_a^b K(x, z_1) \left[\int_a^b K(z_1, z_2)K(z_2, t)dz_2 \right] dz_1 \quad (2.5.4)$$

$$K_3(x, t) = \iint_a^b K(x, z_1)K(z_1, z_2)K(z_2, t)dz_2dz_1 \quad (2.5.5)$$

şeklinde açık olarak ifade edilebilir.

$$K_n(x, t) = \int_a^b \dots (n-1) \dots \int_a^b K(x, z_1)K(z_1, z_2) \dots K(z_{n-1}, t)dz_1dz_2 \dots dz_{n-1} \quad (2.5.6)$$

Buradan n ve k tamsayı olmak üzere, n. mertebeden itere çekirdek

$$K_n = \int_a^b K_{n-k}(x, z)K_k(z, t)dz \quad (2.5.7)$$

genel ifade ile gösterilebilir.

Ardışık yaklaşım metodu ise, $\lambda = 0$ için $g(x)$ fonksiyonun sıfırıncı mertebeden yaklaşık çözümü,

$$g_0(x) = f(x) \quad (2.5.8)$$

Birinci mertebeden yaklaşık çözüm ise,

$$g_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) g_0(t)dt$$

ve (2.5.8) yerine yazılırsa,

$$g_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t)dt \quad (2.5.10)$$

elde edilir .

İkinci mertebeden ardışık yaklaşım için,

$$g_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) g_1(t) dt$$

(2.5.10) burada yerine yazılırsa,

$$g_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \left[f(t) + \lambda \int_a^b K(t, z) f(z) dz \right] dt$$

$$g_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K(x, t) [K(t, z) f(z) dz] dt \quad (2.5.11)$$

olur. Burada (2.5.2) denklemini kullanılırsa,

$$g_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, t) f(t) dt .$$

Benzer olarak (2.5.3) itere çekirdek kullanılarak 3. mertebeden ardışık yaklaşım

$$g_3(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, t) f(t) dt + \lambda^3 \int_a^b K_3(x, t) f(t) dt$$

bulunur. $(n + 1)$. mertebeden yaklaşık çözümü ise,

$$g_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, t) f(t) dt + \dots \\ + \lambda^n \int_a^b K_n(x, t) f(t) dt$$

şeklindedir. Genel olarak tanımlanırsa

$$g_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^n \lambda^m \int_a^b K_m(x, t) f(t) dt \quad (2.5.12)$$

dir. $K_m(x, t)$ ifadesine m inci dereceden iteratif çekirdek denir. $n \rightarrow \infty$ için ifadenin limit değeri Neumann serisinin yakınsak olduğu durumda $g_n(x) = g(x)$ olur. Bunun için Neumann serisinin yakınsak olduğu durumu gösterelim.

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^n \lambda^m \int_a^b K_m(x, t) f(t) dt \quad (2.5.13)$$

Neumann serisinin yakınsaklık şartı için;

$K(x, t)$ çekirdek fonksiyonu $a \leq x \leq b$ ve $a \leq t \leq b$ aralığında sınırlı ve sürekli. D üst sınır olmak üzere.

$$|K(x, t)| < D$$

yazılabilir. Aynı şekilde $f(x)$ fonksiyonu $a \leq x \leq b$ aralığında sınırlı ve sürekli olduğu için,

$$|f(x)| < E$$

olacak şekilde bir E sayısı bulunabilir.

(2.5.13) denklemin kısmi toplamına bakılır ve bu serinin genel toplamına ortalama değer teoremi uygulanırsa,

$$\left| \lambda \int_a^b K(x, t) f(t) dt \right| \leq |\lambda| D E |b - a| \quad (2.5.14)$$

ikinci mertebeden itere çekirdek için,

$$K_2(x, t) = \int K(x, z) K_1(z, t) dz$$

buradan,

$$|K_2(x, t)| \leq D^2 |b - a|$$

yazılabilir.

$$\left| \lambda^2 \int_a^b K_2(x, t) f(t) dt \right| \leq |\lambda^2| D^2 E |b - a|^2$$

n kez işlem devam ettirilirse,

$$|K_n(x, t)| \leq D^n |b - a|$$

ifadesinden yararlanılarak.

$$\left| \lambda^n \int_a^b K_n(x, t) f(t) dt \right| \leq |\lambda^n| D^n E |b - a|^n$$

elde edilir. Bu şekilde (2.5.13) serisi için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^b K_n(x, t) f(t) dt \leq E \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda D (b - a)|^n \quad (2.5.15)$$

yazılabilir ve bu (2.5.13) serisinin üst sınırıdır. Sonsuz seri ortak oranlı geometrik seriden daha hızlı yakınsar.(2.5.15) sağ tarafındaki geometrik serinin ortak çarpanı,

$$r = \lambda D(b - a)$$

olmak üzere,

$$r = |\lambda D(b - a)| < 1$$

dir ve geometrik seri

$$|\lambda| < \frac{1}{D|b - a|} \quad (2.5.16)$$

şartı sağlanırsa yakınsaktır. Neumann serisi geometrik seriden daha hızlı yakınsayacağı için (2.5.16) şartı altında seri düzgün yakınsaktır.

Örnek 2:

$K(x, t) = xt$, $a = 0$ ve $b = 1$ olmak üzere n. mertebeden itere çekirdeği araştırılalım.

Çözüm:

$$K_1(x, t) = K(x, t) = xt ,$$

$$K_2(x, t) = \int_0^1 K_1(x, z)K(z, t)dz = \int_0^1 xzztdz = \frac{xt}{3} ,$$

$$K_3(x, t) = \int_0^1 K_2(x, z)K(z, t)dz = \frac{1}{3} \int_0^1 xzztdz = \frac{xt}{3^2} ,$$

.

.

.

$$K_n(x, t) = \int_0^1 xzztdz = \frac{xt}{3^{n-1}}$$

dır.

Örnek 3:

$K(x, t) = e^x \cos t$, $a = 0$ ve $b = \pi$ olmak üzere n. mertebeden itere çekirdeği araştırılalım.

Çözüm:

$$K_1(x, t) = K(x, t) = e^x \cos t ,$$

$$K_2(x, t) = \int_0^\pi e^x \cos z e^z \cos t dz = -\left(\frac{1+e^\pi}{2}\right) e^x \cos t ,$$

$$K_3(x, t) = \frac{1}{2}(1+e^\pi) \int_0^\pi e^x \cos z e^z \cos t dz = \left(\frac{1+e^\pi}{2}\right)^2 e^x \cos t ,$$

.

.

.

$$K_n(x, t) = (-1)^{n-1} \left(\frac{1+e^\pi}{2}\right)^{n-1} e^x \cos t$$

dır.

Örnek 4:

$K(x, t) = e^{x-t}$, $a = -1$ ve $b = 1$ olmak üzere çözücü çekirdeği araştıralım.

Çözüm:

$$K_1(x, t) = K(x, t) = e^{x-t} ,$$

$$K_2(x, t) = \int_{-1}^1 e^{x-z} e^{z-t} dz = 2e^{x-t} ,$$

$$K_3(x, t) = 2 \int_{-1}^1 e^{x-z} e^{z-t} dz = 2^2 e^{x-t} ,$$

.

.

.

$$K_n(x, t) = 2^{n-2} \int_{-1}^1 e^{x-z} e^{z-t} dz = 2^{n-1} e^{x-t} ,$$

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t) \lambda^{n-1} ,$$

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (2\lambda)^{n-1} e^{x-t} = -\frac{e^{x-t}}{2\lambda - 1} , \quad |\lambda| < \frac{1}{2}$$

olur.

Örnek 5:

$K(x, t) = \sqrt{xt}$, $a = 0$ ve $b = 1$ olmak üzere çözücü çekirdeği araştırılalım.

Çözüm:

$$K_1(x, t) = K(x, t) = \sqrt{xt} ,$$

$$K_2(x, t) = \int_0^1 \sqrt{xz} \sqrt{zt} dz = \frac{1}{2} \sqrt{xt} ,$$

$$K_3(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{xz} \sqrt{zt} dz = \frac{1}{2^2} \sqrt{xt} ,$$

.

.

.

$$K_n(x, t) = \frac{1}{2^{n-2}} \int_0^1 \sqrt{xz} \sqrt{zt} dz = \frac{1}{2^{n-1}} \sqrt{xt} ,$$

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t) \lambda^{n-1} ,$$

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n-1} \sqrt{xt} = \frac{2}{2-\lambda} \sqrt{xt} , \quad |\lambda| < 2$$

Örnek 6:

$K(x, t) = \cos x \sin t$, $a = -\frac{\pi}{2}$ ve $b = 0$ olmak üzere çözücü çekirdeği araştırılalım.

Çözüm:

$$K_1(x, t) = K(x, t) = \cos x \sin t ,$$

$$K_2(x, t) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x \sin z \cos z \sin t dz = -\frac{1}{2} \cos x \sin t ,$$

$$K_3(x, t) = -\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x \sin z \cos z \sin t dz = \frac{1}{2^2} \cos x \sin t ,$$

$$K_4(x, t) = -\frac{1}{2^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x \sin z \cos z \sin t dz = -\frac{1}{2^3} \cos x \sin t ,$$

$$K_5(x, t) = -\frac{1}{2^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos x \sin z \cos z \sin t dz = \frac{1}{2^4} \cos x \sin t ,$$

.

.

$$K_n(x, t) = (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} \cos x \sin t ,$$

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t) \lambda^{n-1} ,$$

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos x \sin t (-1)^{n-1} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{2 + \lambda} \cos x \sin t , \quad |\lambda| < 2$$

Örnek 7:

$$g(x) = \sin x + \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos t g(t) dt$$

ardışık yaklaşım metoduna göre çözümü araştıralım.

Çözüm:

$$g_0(x) = \sin x ,$$

$$g_1(x) = \sin x + \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos t \sin t dt = \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \sin x ,$$

$$g_2(x) = \sin x + \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos t \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \sin t dt = \left(1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{4}\right) \sin x ,$$

$$g_3(x) = \sin x + \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos t \left(1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{4}\right) \sin t dt = \left(1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^3}{8}\right) \sin x ,$$

.

.

.

$$g_n(x) = \left(1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^3}{8} + \cdots + \frac{\lambda^n}{2^n}\right) \sin x ,$$

$$g(x) = \frac{2}{2-\lambda} \sin x , \quad |\lambda| < 2$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 8:

$$g(x) = x + \lambda \int_0^1 x^3 t^2 g(t) dt$$

ardışık yaklaşım metoduna göre çözümü araştıralım.

Çözüm:

$$g_0(x) = x ,$$

$$g_1(x) = x + \lambda \int_0^1 x^3 t^2 t dt = x + \frac{\lambda}{4} x^3 ,$$

$$g_2(x) = x + \lambda \int_0^1 x^3 t^2 \left(t + \frac{\lambda}{4} t^3\right) dt = x + \frac{\lambda}{4} x^3 + \frac{\lambda^2}{24} x^3 ,$$

$$g_3(x) = x + \lambda \int_0^1 x^3 t^2 \left(t + \frac{\lambda}{4} t^3 + \frac{\lambda^2}{24} t^3\right) dt = x + \frac{\lambda}{4} x^3 + \frac{\lambda^2}{24} x^3 + \frac{\lambda^3}{144} x^3 ,$$

.

.

.

$$g_n(x) = x + \frac{\lambda}{4} x^3 \left[1 + \frac{\lambda}{6} + \left(\frac{\lambda}{6}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{6}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{\lambda}{6}\right)^n \right] ,$$

$$g(x) = x + \frac{6x^3 \lambda}{24 - 4\lambda}$$

sonucuna ulaşılır.

3.FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİN NUMERİK ÇÖZÜM METODLARI

3.1 En Küçük Kareler Metodu

İntegral denklemlerinde belirli bir vektör uzayında noktasal dönüşüm yapılarak, lineer bir denklem sistemine dönüştürülür. Bazı operatörler kullanılarak çekirdek fonksiyonu integre edilir.

Bernstein polinomu kullanarak Mandal ve Bhattacharya çözüm için özel bir yöntem geliştirmişlerdir. Bu yöntem ikinci çeşit Fredholm integral denklemleri, en küçük kareler yöntemi kullanarak yaklaşık çözüm bulmamızı sağlamaktadır.

En küçük kareler yöntemi gerçek değer ve regresyon değeri arasındaki farkın en küçük olmasıdır. Gerçek değer $y(x)$ sürekli bir fonksiyondur ve $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ noktalarından geçen polinom şu şekilde ifade edilebilir;

$$p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k . \quad (3.1.1)$$

h hatayı göstermek üzere,

$$h = \int_a^b [y(x) - p(x)]^2 dx \quad (3.1.2)$$

integralini en küçük yapmaya çalışacağız.

$$h = \int_a^b [y(x)]^2 dx - 2 \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^k y(x) dx + \int_a^b \sum_{k=0}^n (a_k x^k)^2 dx$$

h'nin minimum olma şartı için gerekli koşul her $j = 0, 1, 2, \dots, n$ için,

$$\frac{dh}{da_j} = -2 \int_a^b x^j y(x) dx + \sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^{j+k} dx = 0 ,$$

$$\frac{dh}{da_0} = 0, \frac{dh}{da_1} = 0, \frac{dh}{da_2} = 0, \dots, \frac{dh}{da_n} = 0$$

$n+1$ bilinmeyen $n+1$ denklemden oluşan lineer denklem sisteminin,

$$\sum_{k=0}^n a_k \int_a^b x^{j+k} dx = \int_a^b x^j dx , \quad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

çözülmesiyle $a_0, a_1, \dots, a_n$ katsayıları bulunmuş olur. En küçük kareler yönteminden yararlanarak yaklaşık çözüm ise;

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n+1} C_{i-1} B_{i-1,n}(x) \quad (3.1.3)$$

dir. Burada C_{i-1} , $i = 1, 2, \dots, n+1$ bilinmeyen sabitleri, $B_{i-1,n}(x)$, $(i = 1, 2, \dots, n+1)$

n . dereceden (a, b) aralığında tanımlı Bernstein polinomu olur ve

$$B_{i-1,n}(x) = \binom{n}{i-1} \frac{(x-a)^{i-1} (b-x)^{n-i+1}}{(b-a)^n}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1.4)$$

şeklinde tanımlanır.

$$Lg = f \quad (3.1.5)$$

Burada integral denkleminin çözümünü (3.1.5) şeklinde düşünelim. (3.1.3) ve (3.1.5) denklemlerin (a, b) aralığında ;

$$\sum_{i=1}^{n+1} C_{i-1} \varphi_{i-1}(x) = f(x) \quad (3.1.6)$$

$$\varphi_{i-1}(x) = B_{i-1,n}(x) + \int_a^b K(x, t) B_{i-1,n}(t) dt \quad (3.1.7)$$

bulunur. (3.1.5) denkleminin çözümün tamamlanması için lineer sistemde $n+1$ noktadan, $n+1$ denklemden C_{i-1} , $(i = 1, 2, \dots, n+1)$ bilinmeyen sabitler bulunabilir. En iyi çözümü veren lineer sistem küçük kareler yöntemiyle elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{n+1} C_{i-1} D_{i,j}(x) = B_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$D_{i,j} = \int_a^b \varphi_{i-1}(x) \varphi_{j-1}(x) dx, \quad (3.1.8)$$

$$B_j = \int_a^b f(x) \varphi_{j-1}(x) dx, \quad (3.1.9)$$

Yukarıdaki katsayıları hesaplamak için çok sayıda integral hesaplamak gerekir. Bunun için, Bernstein polinomundan yararlanacağız. (3.1.3) denklemini aşağıdaki gibi düşünersek,

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_1x^2 + \dots + a_nx^n \quad , a = 0 \text{ ve } b = 1$$

$$a_0 = c_0$$

$$a_1 = -nc_0 + nc_1$$

$$a_1 = \frac{n(n-1)}{2}(c_0 + c_2) - n(n-1)c_1$$

.

.

.

$$a_n = (-1)^nc_0 + (-1)^{n-1}nc_1 + (-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}c_2 + \dots + (-1)nc_{n-1} + c_n$$

ve yaklaşık çözümü polinom olarak ifade edersek,

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1}x^{i-1}$$

şeklinde yazılır.

Örnek:

$$g(x) = x + \int_0^1 (x^2 - t^2)g(t)dt$$

integral denklemini en küçük kareler yöntemine göre çözelim.

Çözüm:

$$\varphi_{i-1} = x^{i-1} + \int_{\alpha}^{\beta} K(x, t)t^{i-1}dt$$

ifadesinin,

$$\varphi_0 = x^0 + \int_0^1 (x^2 - t^2)t^0 dt = x^2 + \frac{2}{3} \quad , \varphi_1 = x + \int_0^1 (x^2 - t^2)t dt = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{4},$$

$$\varphi_2 = x^2 + \int_0^1 (x^2 - t^2)t^2 dt = \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{5}$$

$$D_{i,j} = \int_a^b \varphi_{i-1}(x) \varphi_{j-1}(x) dx$$

$$D_{1,1} = \int_a^b \varphi_0(x) \varphi_0(x) dx = \frac{49}{45}, D_{1,2} = \int_a^b \varphi_0(x) \varphi_1(x) dx = \frac{49}{90},$$

$$D_{1,3} = \int_a^b \varphi_0(x) \varphi_2(x) dx = \frac{49}{135},$$

$$D_{2,1} = \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_0(x) dx = \frac{49}{90}, D_{2,2} = \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_1(x) dx = \frac{29}{80},$$

$$D_{2,3} = \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = \frac{49}{80}$$

$$D_{3,1} = \int_a^b \varphi_2(x) \varphi_0(x) dx = \frac{49}{135}, D_{3,2} = \int_a^b \varphi_2(x) \varphi_1(x) dx = \frac{49}{80},$$

$$D_{3,3} = \int_a^b \varphi_2(x) \varphi_2(x) dx = \frac{49}{225},$$

$$B_j = \int_a^b f(x) \varphi_{j-1}(x) dx$$

bağıntısından:

$$B_1 = \int_0^1 x \varphi_0(x) dx = \frac{7}{12}, \quad B_2 = \int_0^1 x \varphi_1(x) dx = \frac{29}{80}, \quad B_3 = \int_0^1 x \varphi_2(x) dx = \frac{49}{80}$$

dır.

$$\sum_{i=1}^{n+1} C_{i-1} D_{i,j}(x) = B_j$$

linier denklemi çözülürse a_{i-1} bilinmeyen katsayılarla ulaşılır ve $g(x)$

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1} x^{i-1}$$

$$g(x) = 0.47256 + 0.07189x + 0.08161x^2$$

çözümü elde edilir.

3.2 Ortalama Değer Teoremi Kullanılarak İntegral Denklemin Çözümü

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyon olmak üzere, h fonksiyonun minimum değeri s maksimum değeri S olsun,

$$h(l) = s \text{ ve } h(u) = S$$

$$s = h(l) \leq h(x) \leq h(u) = S, \quad x \in [a, b]$$

$a \leq p \leq b$ için, $x_0 = a$ ve $x_1 = b$ olsun,

$$s(b-a) = L(h, p) \leq \int_a^b h(x) dx \leq U(h, p) = S(b-a)$$

gerçekleşir. Bu yüzden;

$$s = h(l) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b h(x) dx \leq h(u) = S, \quad ,$$

$$h(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b h(x) dx, \quad c \in [a, b]$$

$$\int_a^b h(x) dx = (b-a)h(c) \quad (3.2.1)$$

sonucuna ulaşırız. Buradan (3.2.1) denklemi integral denklemine uygulanırsa;

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) F(g(t)) dt \quad (3.2.2)$$

genel integral denklemi için (3.2.1) denklemi uygulanırsa,

$$g(x) = f(x) + \lambda(b-a)K(x, c)F(g(c)) \quad (3.2.3)$$

Şimdi c ve g(c) bilinmeyenlerini bulmamız gerekir.

$$g(c) = f(c) + \lambda(b - a)K(c, c)F(g(c)) \quad (3.2.4)$$

(3.2.2) ve (3.2.4) denklemlerinden,

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)F(f(t) + \lambda(b - a)K(t, c)F(g(c)))dt \quad (3.2.5)$$

(3.2.5) de x yerini c yazılırsa,

$$g(c) = f(c) + \lambda \int_a^b K(c, t)F(f(t) + \lambda(b - a)K(t, c)F(g(c)))dt \quad (3.2.6)$$

elde edilir. (3.2.4) ve (3.2.6) denklemlerden oluşan lineer denklem sistemleri çözerek (3.2.2) integral denkleminin yaklaşık çözümü bulunmuş olur.

Örnek:

$$g(x) = x + \int_0^1 (x^2 - t^2)g(t)dt$$

integral denkleminin Ortalama değer teoremi yardımıyla yaklaşık çözümünü yapalım.

Çözüm:

$$g(x) = f(x) + \lambda(b - a)K(x, c)F(g(c))$$

integral denklemi,

$$g(x) = x + (x^2 - c^2)g(c)$$

x yerine c yazılırsa,

$$g(c) = c \quad ,$$

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)F(f(t) + \lambda(b - a)K(t, c)F(g(c)))dt \quad ,$$

$$g(x) = \int_0^1 [(x^2 - t^2)(t + 2(t^2 - c^2)g(c))] dt \quad ,$$

$$g(c) = \int_0^1 [(c^2 - t^2)(t + 2(t^2 - c^2)g(c))] dt \quad ,$$

$$g(c) = -c^4 g(c) + \frac{1}{6}c^2(4g(c) + 3) - \frac{g(c)}{5} - \frac{1}{4} \quad ,$$

$$c = -c^5 + \frac{2}{3}c^3 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{6}{5}c - \frac{1}{4} ,$$

$$c = -\frac{94}{479}$$

$$g(x) = -0.19624x^2 + x + 0.00755$$

çözümünü elde ederiz.

3.3 Bernstein Polinomu Kullanılarak İntegral Denkleminin Yaklaşık Çözümü (Galerkin Yöntemi)

3.1 de Bernstein polinomu yardımıyla yaklaşık çözümü göstermiştik. Bu başlık altında ise, Bernstein polinomunu kullanılarak matris form oluşturarak, yaklaşık çözüm bulmaya çalışacağız.

Bernstein polinomunun $[a,b]$ aralığında aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{(x-\alpha)^i (\beta-x)^{n-i}}{(\beta-\alpha)^n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Galerkin yöntemiyle ile yaklaşık çözüm yapılması için;

$$g(x) = \sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(x) \quad (3.3.1)$$

a_i bilinmeyen parametrelerle oluşturacağımız matris form, integral denklemin yaklaşık çözümünü verecektir. Bunun için (1.6) eşitliği ve (3.3.1) eşitliği kullanılarak,

$$\sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(x) + \lambda \int_a^b \left[K(x,t) \sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(t) \right] dt = f(x)$$

yazılır bu eşitlik düzenlenirse,

$$\sum_{i=0}^n a_i \left[B_{i,n}(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) B_{i,n}(t) dt \right] = f(x) \quad (3.3.2)$$

elde edilir. Galerkin denklemine göre, eşitliğin her iki tarafını $B_{j,n}$ ile çarpılır ve a dan b ye x değişkenine göre integral alınırsa ($j=0,1,\dots,n$)

$$\sum_{i=0}^n a_i \left[\int_a^b \left[a(x) B_{i,n}(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) B_{i,n}(t) dt \right] B_{j,n}(x) dx \right] = \int_a^b B_{j,n}(x) f(x) dx .$$

Denklemde a_i bilinmeyenler için $n + 1$ nokta $n + 1$ lineer denklem bulunur. Böylece,

$$\sum_{i=0}^n a_i C_{i,j} = F_j, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (3.3.3)$$

ve

$$C_{i,j} = \int_a^b \left[a(x) B_{i,n}(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) B_{i,n}(t) dt \right] B_{j,n}(x) dx, \quad (3.3.4)$$

$$F_j = \int_a^b B_{j,n}(x) f(x) dx. \quad (3.3.5)$$

a_i bilinmeyen. Oluşan denklem sistemini çözerek, integral denkleminin yaklaşık çözümü bulunur.

Örnek:

$$g(x) = x + \int_0^1 (x^2 - t^2) g(t) dt$$

integral denkleminin Bernstein polinomu yardımıyla yaklaşık çözümünü bulalım.

Çözüm:

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{(x - \alpha)^i (\beta - x)^{n-i}}{(\beta - \alpha)^n} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$n = 2$ çözüm için,

$$B_{0,2} = (1 - x)^2, \quad B_{1,2} = 2(x - x^2), \quad B_{2,2} = x^2$$

$$F_j = \int_a^b B_{j,n}(x) f(x) dx,$$

$$F_0 = \int_0^1 (1 - x)^2 x dx = \frac{1}{12}, \quad F_1 = \int_0^1 2(x - x^2) x dx = \frac{1}{6}, \quad F_2 = \int_0^1 x^2 x dx = \frac{1}{4},$$

$$C_{i,j} = \int_a^b \left[a(x) B_{i,n}(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) B_{i,n}(t) dt \right] B_{j,n}(x) dx,$$

$$C_{0,0} = \int_0^1 \left[(1-x)^2 + \int_0^1 (x^2 - t^2)(1-t)^2 dt \right] (1-x)^2 dx = \frac{1}{5},$$

$$C_{1,0} = \int_0^1 \left[2(x - x^2) + \int_0^1 (x^2 - t^2)2(t - t^2) dt \right] (1-x)^2 dx = \frac{7}{90},$$

$$C_{2,0} = \int_0^1 \left[x^2 + \int_0^1 (x^2 - t^2)t^2 dt \right] (1-x)^2 dx = -\frac{1}{45},$$

$$C_{0,1} = \int_0^1 \left[(1-x)^2 + \int_0^1 (x^2 - t^2)(1-t)^2 dt \right] 2(x - x^2) dx = \frac{11}{90},$$

$$C_{1,1} = \int_0^1 \left[2(x - x^2) + \int_0^1 (x^2 - t^2)2(t - t^2) dt \right] 2(x - x^2) dx = \frac{2}{15},$$

$$C_{2,1} = \int_0^1 \left[x^2 + \int_0^1 (x^2 - t^2)t^2 dt \right] 2(x - x^2) dx = \frac{1}{15},$$

$$C_{0,2} = \int_0^1 \left[(1-x)^2 + \int_0^1 (x^2 - t^2)(1-t)^2 dt \right] x^2 dx = \frac{4}{45},$$

$$C_{1,2} = \int_0^1 \left[2(x - x^2) + \int_0^1 (x^2 - t^2)2(t - t^2) dt \right] x^2 dx = \frac{2}{15},$$

$$C_{2,2} = \int_0^1 \left[x^2 + \int_0^1 (x^2 - t^2)t^2 dt \right] x^2 dx = \frac{1}{5},$$

$$\sum_{i=0}^n a_i C_{i,j} = F_j, \quad j = 0,1,2$$

$$\frac{37}{180}a_0 + \frac{7}{90}a_1 - \frac{1}{45}a_2 = \frac{1}{12},$$

$$\frac{7}{45}a_0 + \frac{2}{15}a_1 + \frac{1}{15}a_2 = \frac{1}{6},$$

$$\frac{17}{90}a_0 + \frac{2}{15}a_1 + \frac{1}{5}a_2 = \frac{1}{4},$$

denklem sistemi çözülürse

$$a_0 = \frac{3}{14}, a_1 = \frac{5}{7}, a_2 = \frac{19}{28}$$

elde edilir ve $g(x)$;

$$g(x) = 0.21428 + 0.71428x + 0.67857x^2 \quad .$$

3.4 Taylor Serisi Kullanılarak İntegral Denkleminin Yaklaşık Çözümü

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)g(t)dt$$

integral denklemi ele alınsın ve , $a \leq c \leq b$ olacak şekilde,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} g^{(n)}(c)(x - c)^n \quad (3.4.1)$$

(3.4.1) ifadesinin çözümünü arayalım.(1.18) denkleminin x'e göre n defa türevini alalım,

$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + \lambda \int_a^b \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n} g(t)dt \quad (3.4.2)$$

x yerine c yazıldığında,

$$g^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + \lambda \int_a^b \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n} g(t)dt \quad (3.4.3)$$

elde edilir. (3.4.1) denklemi (3.4.3) denkleminde yerine yazıldığında,

$$g^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + \lambda \int_a^b \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} g^{(m)}(c)(x - c)^m dt$$

ifadesine ulaşılır. Bu eşitlikte

$$D_{nm} = \frac{1}{m!} \int_a^b \frac{\partial^{(n)} K(x,t)}{\partial x^n} (t - c)^m dt \quad (3.4.5)$$

tanımlaması yapılırsa,

$$g^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) + \lambda \sum_{m=0}^{\infty} D_{nm} g^{(m)}(c) \quad (3.4.6)$$

ifadesine ulaşılır.

$$\lambda \sum_{m=0}^{\infty} D_{nm} g^{(m)}(c) - g^{(n)}(c) = -f^{(n)}(c)$$

Bu eşitlik matris formunda yazılırsa

$$DG = F$$

olur ve denklem sistemi çözülerek;

$$g(x) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} g^{(n)}(c)(x-c)^n$$

elde edilir.

Örnek:

$$g(x) = x + \int_0^1 (x^2 - t^2)g(t)dt$$

integral denkleminin Taylor serisi yardımıyla yaklaşık çözümünü bulalım.

Çözüm:

$$f(x) = x, \quad f^{(1)}(x) = 1, \quad f^{(2)}(x) = 0$$

$$D_{nm} = \frac{1}{m!} \int_a^b \frac{\partial^{(n)} K(x, t)}{\partial x^n} (t-c)^m dt$$

$$D_{00} = \frac{1}{0!} \int_0^1 \frac{\partial^{(0)}(x^2 - t^2)}{\partial x^0} dt = -\frac{1}{3}, \quad D_{10} = \frac{1}{0!} \int_0^1 \frac{\partial(x^2 - t^2)}{\partial x} dt = 0,$$

$$D_{01} = \frac{1}{1!} \int_0^1 \frac{\partial^{(0)}(x^2 - t^2)}{\partial x^0} t dt = -\frac{1}{4}, \quad D_{11} = \frac{1}{1!} \int_0^1 \frac{\partial(x^2 - t^2)}{\partial x} t dt = 0,$$

$$D_{02} = \frac{1}{2!} \int_0^1 \frac{\partial^{(0)}(x^2 - t^2)}{\partial x^0} t^2 dt = -\frac{1}{10}, \quad D_{12} = \frac{1}{2!} \int_0^1 \frac{\partial(x^2 - t^2)}{\partial x} t^2 dt = 0,$$

$$D_{20} = \frac{1}{0!} \int_0^1 \frac{\partial^{(2)}(x^2 - t^2)}{\partial x^2} dt = 2, \quad D_{21} = \frac{1}{1!} \int_0^1 \frac{\partial^{(2)}(x^2 - t^2)}{\partial x^2} t dt = 1,$$

$$D_{22} = \frac{1}{2!} \int_0^1 \frac{\partial^{(2)}(x^2 - t^2)}{\partial x^2} t^2 dt = \frac{1}{3}$$

denklem sistemi oluşturulursa,

$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g^{(0)}(0) \\ g^{(1)}(0) \\ g^{(2)}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g^{(0)}(0) = \frac{12}{49}, \quad g^{(1)}(0) = 1, \quad g^{(2)}(0) = \frac{75}{98}$$

$$g(x) = -0.24489 + x + 0.382653x^2$$

elde edilir.

4.KESİN ÇÖZÜM VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Örnek 1:

$$g(x) = x + \int_0^1 (xt - x^2)g(t)dt$$

İntegral denkleminin kesin ve nümerik çözümlerini bularak karşılaştıralım.

Çözüm:

$$K(x, t) = xt - x^2, \quad f(x) = x, \quad \alpha = 0 \text{ ve } \beta = 1$$

için

i.En küçük kareler yöntemi ile çözüm;

$$\varphi_{i-1} = x^{i-1} + \int_{\alpha}^{\beta} K(x, t)t^{i-1}dt$$

dir.Buradan

$$\varphi_0 = x^0 + \int_0^1 (xt - x^2)t^0 dt = 1 + \frac{x}{2} - x^2, \varphi_1 = x + \int_0^1 (xt - x^2)t dt = \frac{4x}{3} - \frac{x^2}{2}$$

$$\varphi_2 = x^2 + \int_0^1 (xt - x^2)t^2 dt = \frac{x}{4} + \frac{2x^2}{3}$$

$$D_{i,j} = \int_a^b \varphi_{i-1}(x) \varphi_{j-1}(x) dx$$

$$D_{1,1} = \int_a^b \varphi_0(x) \varphi_0(x) dx = \frac{13}{15}, D_{1,2} = \int_a^b \varphi_0(x) \varphi_1(x) dx = \frac{307}{720},$$

$$D_{1,3} = \int_a^b \varphi_0(x) \varphi_2(x) dx = \frac{199}{720},$$

$$D_{2,1} = \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_0(x) dx = \frac{307}{720}, D_{2,2} = \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_1(x) dx = \frac{167}{540},$$

$$D_{2,3} = \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = \frac{113}{480},$$

$$D_{3,1} = \int_a^b \varphi_2(x) \varphi_0(x) dx = \frac{199}{720}, D_{3,2} = \int_a^b \varphi_2(x) \varphi_1(x) dx = \frac{113}{480},$$

$$D_{3,3} = \int_a^b \varphi_2(x) \varphi_2(x) dx = \frac{139}{720}$$

$$B_j = \int_a^b f(x) \varphi_{j-1}(x) dx$$

$$B_1 = \int_0^1 x \varphi_0(x) dx = \frac{5}{12}, \quad B_2 = \int_0^1 x \varphi_1(x) dx = \frac{23}{72}, \quad B_3 = \int_0^1 x \varphi_2(x) dx = \frac{1}{4},$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} C_{i-1} D_{i,j}(x) = B_j$$

$$a_0 = 0, a_1 = \frac{48}{73}, a_2 = \frac{36}{73}$$

denklemsistemi hesaplanır ve a_{i-1} bilinmeyen katsayılar bulunur.

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1} x^{i-1},$$

$$g(x) = 0.6575342465753424x + 0.4931506849315068x^2$$

dır.

2. Bernstein polinomu yardımı ile çözüm;

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{(x-\alpha)^i (\beta-x)^{n-i}}{(\beta-\alpha)^n} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$n = 3$ için,

$$B_{0,3} = (1-x)^3, \quad B_{1,3} = 3(1-x)^2x, \quad B_{2,3} = 3(1-x)x^2, \quad B_{3,3} = x^3$$

$$F_j = \int_a^b B_{j,n}(x) f(x) dx,$$

$$F_0 = \int_0^1 (1-x)^3 x dx = \frac{1}{20}, \quad F_1 = \int_0^1 3(1-x)^2 x x dx = \frac{1}{10},$$

$$F_2 = \int_0^1 3(1-x)x^2 x dx = \frac{3}{20}, \quad F_3 = \int_0^1 x^3 x dx = \frac{1}{5},$$

$$C_{i,j} = \int_a^b \left[a(x) B_{i,n}(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) B_{i,n}(t) dt \right] B_{j,n}(x) dx,$$

$$C_{0,0} = \int_0^1 \left[(1-x)^3 + \int_0^1 (xt - x^2)(1-t)^3 dt \right] (1-x)^3 dx = \frac{607}{4200},$$

$$C_{1,0} = \int_0^1 \left[3(1-x)^2x + \int_0^1 (xt - x^2)3(1-t)^2t dt \right] (1-x)^3 dx = \frac{593}{8400},$$

$$C_{2,0} = \int_0^1 \left[3(1-x)x^2 + \int_0^1 (xt - x^2)3(1-t)t^2 dt \right] (1-x)^3 dx = \frac{53}{2100},$$

$$C_{3,0} = \int_0^1 \left[x^3 + \int_0^1 (xt - x^2)t^3 dt \right] (1-x)^3 dx = \frac{11}{8400},$$

$$C_{0,1} = \int_0^1 \left[(1-x)^3 + \int_0^1 (xt - x^2)(1-t)^3 dt \right] 3(1-x)^2x dx = \frac{221}{2800},$$

$$C_{1,1} = \int_0^1 \left[3(1-x)^2x + \int_0^1 (xt - x^2)3(1-t)^2t dt \right] 3(1-x)^2x dx = \frac{247}{2800},$$

$$C_{2,1} = \int_0^1 \left[3(1-x)x^2 + \int_0^1 (xt - x^2)3(1-t)t^2 dt \right] 3(1-x)^2x dx = \frac{173}{2800},$$

$$C_{3,1} = \int_0^1 \left[x^3 + \int_0^1 (xt - x^2) t^3 dt \right] 3(1-x)^2 x dx = \frac{59}{2800},$$

$$C_{0,2} = \int_0^1 \left[(1-x)^3 + \int_0^1 (xt - x^2) (1-t)^3 dt \right] 3(1-x) x^2 dx = \frac{129}{2800},$$

$$C_{1,2} = \int_0^1 \left[3(1-x)^2 x + \int_0^1 (xt - x^2) 3(1-t)^2 t dt \right] 3(1-x) x^2 dx = \frac{13}{175},$$

$$C_{2,2} = \int_0^1 \left[3(1-x) x^2 + \int_0^1 (xt - x^2) 3(1-t) t^2 dt \right] 3(1-x) x^2 dx = \frac{247}{2800},$$

$$C_{3,2} = \int_0^1 \left[x^3 + \int_0^1 (xt - x^2) t^3 dt \right] 3(1-x) x^2 dx = \frac{93}{1400},$$

$$C_{0,3} = \int_0^1 \left[(1-x)^3 + \int_0^1 (xt - x^2) (1-t)^3 dt \right] x^3 dx = \frac{163}{4200},$$

$$C_{1,3} = \int_0^1 \left[3(1-x)^2 x + \int_0^1 (xt - x^2) 3(1-t)^2 t dt \right] x^3 dx = \frac{211}{4200},$$

$$C_{2,3} = \int_0^1 \left[3(1-x) x^2 + \int_0^1 (xt - x^2) 3(1-t) t^2 dt \right] x^3 dx = \frac{349}{4200},$$

$$C_{3,3} = \int_0^1 \left[x^3 + \int_0^1 (xt - x^2) t^3 dt \right] x^3 dx = \frac{607}{4200},$$

$$\sum_{i=0}^n a_i C_{i,j} = F_j, \quad j = 0, 1, 2, 3$$

$$\frac{607}{4200} a_0 + \frac{593}{8400} a_1 + \frac{53}{2100} a_2 + \frac{11}{8400} a_3 = \frac{1}{20},$$

$$\frac{221}{2800} a_0 + \frac{247}{2800} a_1 + \frac{173}{2800} a_2 + \frac{59}{2800} a_3 = \frac{1}{10}$$

$$\frac{129}{2800} a_0 + \frac{13}{175} a_1 + \frac{247}{2800} a_2 + \frac{93}{1400} a_3 = \frac{3}{20}$$

$$\frac{163}{4200} a_0 + \frac{211}{4200} a_1 + \frac{349}{4200} a_2 + \frac{607}{4200} a_3 = \frac{1}{5}$$

denklem sistemi çözümü ile,

$$a_0 = 0, a_1 = \frac{32}{73}, a_2 = \frac{52}{73}, a_3 = \frac{60}{73}$$

$$g(x) = 1.3150684931506849x - 0.4931506849315068x^2$$

olarak bulunur.

3.Taylor serisi yardımı ile çözüm;

$$f(x) = x, \quad f^{(1)}(x) = 1, \quad f^{(2)}(x) = 0, \quad f^{(3)}(x) = 0$$

$$D_{nm} = \frac{1}{m!} \int_a^b \frac{\partial^{(n)} K(x, t)}{\partial x^n} (t - c)^m dt$$

$$D_{00} = \frac{1}{0!} \int_0^1 \frac{\partial^{(0)}(xt - x^2)}{\partial x^0} dt = 0, \quad D_{01} = \frac{1}{1!} \int_0^1 \frac{\partial^{(0)}(xt - x^2)}{\partial x^0} t dt = 0,$$

$$D_{02} = \frac{1}{2!} \int_0^1 \frac{\partial^{(0)}(xt - x^2)}{\partial x^0} t^2 dt = 0,$$

$$D_{10} = \frac{1}{0!} \int_0^1 \frac{\partial(xt - x^2)}{\partial x} dt = \frac{1}{2}, \quad D_{11} = \frac{1}{1!} \int_0^1 \frac{\partial(xt - x^2)}{\partial x} t dt = -\frac{2}{3},$$

$$D_{12} = \frac{1}{2!} \int_0^1 \frac{\partial(xt - x^2)}{\partial x} t^2 dt = \frac{1}{8},$$

$$D_{20} = \frac{1}{0!} \int_0^1 \frac{\partial^{(2)}(xt - x^2)}{\partial x^2} dt = -2, \quad D_{21} = \frac{1}{1!} \int_0^1 \frac{\partial^{(2)}(xt - x^2)}{\partial x^2} t dt = -1,$$

$$D_{22} = \frac{1}{2!} \int_0^1 \frac{\partial^{(2)}(xt - x^2)}{\partial x^2} t^2 dt = -\frac{1}{3},$$

denklem sistemi oluşturulursa, $DG = F$ denklem sistemi çözülerek,

$$g(x) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} g^{(n)}(c) (x - c)^n$$

$$g^{(0)}(0) = 0, \quad g^{(1)}(0) = \frac{96}{73}, \quad g^{(2)}(0) = -\frac{72}{73},$$

$$g(x) = 1.3150684931506849x - 0.4931506849315068x^2$$

olarak bulunur.

4. Ortalama değer teoremi yardımı ile çözüm;

$$g(x) = f(x) + \lambda(b - a)K(x, c)F(g(c))$$

integral denklemi,

$$g(x) = x + (xc - x^2)g$$

x yerine c yazılırsa,

$$g(c) = c$$

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)F(f(t) + \lambda(b - a)K(t, c)F(g(c)))dt$$

$$g(x) = x + \int_0^1 [(xt - x^2)(t + (tc - t^2)g(c))] dt$$

$$g(c) = c + \int_0^1 [(ct - c^2)(t + (tc - t^2)g(c))] dt$$

$$g(c) = c - \frac{1}{12}c(6c^2g(c) + c(6 - 8g(c) + 3g - 4))$$

$$c = 0.630811$$

$$g(x) = 1.397922517721x - 0.630811x^2$$

Kesin çözüm;

$$g(x) = \frac{96}{73}x - \frac{36}{73}x^2,$$

Ortalama değer teoremi yardımıyla çözüm;

$$g(x) = 0.39792x - 0.63081x^2$$

Bernstein polinomu yardımı ile çözüm;

$$g(x) = 1.3150684931506849x - 0.4931506849315068x^2$$

En küçük kareler yardımı ile çözüm;

$$g(x) = 0.6575342465753424x + 0.4931506849315068x^2$$

Taylor serisi yardımı ile çözümü;

$$g(x) = 1.3150684931506849x - 0.4931506849315068x^2$$

Çözümlerinin aynı değer aralığında karşılaştırılması aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
kesinçözüm	0.	0.126575	0.243288	0.350137	0.447123	0.534247	0.611507	0.678904	0.736438	0.78411	0.821918
meanvalue	0.	0.133484	0.254352	0.362604	0.458239	0.541258	0.611661	0.669448	0.714619	0.747173	0.767111
bernstein	0.	0.126575	0.243288	0.350137	0.447123	0.534247	0.611507	0.678904	0.736438	0.78411	0.821918
küçük-kareler	0.	0.0706849	0.151233	0.241644	0.341918	0.452055	0.572055	0.701918	0.841644	0.991233	1.15068
taylor	0.	0.126575	0.243288	0.350137	0.447123	0.534247	0.611507	0.678904	0.736438	0.78411	0.821918

Tablo 1

Örnek 2:

$$g(x) = \cos x + \int_0^\pi \sin(x-t)g(t)dt$$

İntegral denkleminin kesin ve nümerik çözümlerini bularak karşılaştıralım.

Çözüm 2:

$$K(x, t) = \sin(x - t), \quad f(x) = \cos(x), \quad \alpha = 0 \text{ ve } \beta = \pi$$

1.En küçük kareler yöntemi ile çözüm;

$$\varphi_{i-1} = x^{i-1} + \int_\alpha^\beta K(x, t)t^{i-1}dt$$

$$\varphi_0 = x^0 + \int_0^\pi (\sin(x-t))t^0 dt = 1 - 2\cos(x),$$

$$\varphi_1 = x + \int_0^\pi (\sin(x-t))t dt = x - \pi\cos(x) - 2\sin(x),$$

$$\varphi_2 = x^2 + \int_0^\pi (\sin(x-t))t^2 dt = x^2 - (-4 + \pi^2)\cos(x) - 2\pi\sin(x).$$

$$D_{i,j} = \int_a^b \varphi_{i-1}(x) \varphi_{j-1}(x) dx$$

$$D_{1,1} = \int_0^\pi \varphi_0(x) \varphi_0(x) dx = 3\pi, D_{1,2} = \int_0^\pi \varphi_0(x) \varphi_1(x) dx = \frac{3\pi^2}{2},$$

$$D_{1,3} = \int_0^\pi \varphi_0(x) \varphi_2(x) dx = \frac{4}{3}\pi(-3 + \pi^2),$$

$$D_{2,1} = \int_0^\pi \varphi_1(x) \varphi_0(x) dx = \frac{3\pi^2}{2}, D_{2,2} = \int_0^\pi \varphi_1(x) \varphi_1(x) dx = 2\pi + \frac{5\pi^3}{6},$$

$$D_{2,3} = \int_0^\pi \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = \frac{3\pi^4}{4},$$

$$D_{3,1} = \int_0^\pi \varphi_2(x) \varphi_0(x) dx = \frac{4}{3}\pi(-3 + \pi^2), \quad D_{3,2} = \int_0^\pi \varphi_2(x) \varphi_1(x) dx = \frac{3\pi^4}{4},$$

$$D_{3,3} = \int_0^\pi \varphi_2(x) \varphi_2(x) dx = 8\pi - 2\pi^3 + \frac{7\pi^5}{10}$$

$$B_j = \int_a^b f(x) \varphi_{j-1}(x) dx$$

$$B_1 = \int_0^\pi \cos(x) \varphi_0(x) dx = -\pi, \quad B_2 = \int_0^\pi \cos(x) \varphi_1(x) dx = -2 - \frac{\pi^2}{2},$$

$$B_3 = \int_0^\pi \cos(x) \varphi_2(x) dx = -\frac{\pi^3}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} C_{i-1} D_{i,j}(x) = B_j$$

$$a_0 = -\frac{6(-12 + \pi^2)(240 + \pi^4)}{(24 + \pi^2)(1440 - 240\pi^2 + 13\pi^4)},$$

$$a_1 = \frac{6(-5760 - 480\pi^2 + 8\pi^4 + 5\pi^6)}{\pi(24 + \pi^2)(1440 - 240\pi^2 + 13\pi^4)},$$

$$a_2 = -\frac{30(-12 + \pi^2)}{1440 - 240\pi^2 + 13\pi^4}$$

lineer denklemi hesaplanırsa, a_{i-1} bilinmeyen katsayılarla ulaşırız.

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1} x^{i-1}$$

$$g(x) = 0.377171 - 0.820274x + 0.189305x^2$$

dır.

2. Bernstein polinomu yardımı ile çözüm;

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{(x - \alpha)^i (\beta - x)^{n-i}}{(\beta - \alpha)^n} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$n = 3$ için,

$$B_{0,3} = (1-x)^3, \quad B_{1,3} = 3(1-x)^2x, \quad B_{2,3} = 3(1-x)x^2, B_{3,3} = x^3$$

$$F_j = \int_a^b B_{j,n}(x)f(x)dx \quad ,$$

$$F_0 = \int_0^\pi (1-x)^3 \cos(x) dx = \frac{3(-4 + \pi^2)}{\pi^3},$$

$$F_1 = \int_0^\pi 3(1-x)^2 \cos(x)x dx = \frac{36 - 3\pi^2}{\pi^3} \quad ,$$

$$F_2 = \int_0^\pi 3(1-x)x^2 \cos(x) dx = \frac{3(-12 + \pi^2)}{\pi^3},$$

$$F_3 = \int_0^\pi 3(1-x)x^2 \cos(x) dx = -\frac{3(-4 + \pi^2)}{\pi^3}$$

$$C_{i,j} = \int_0^\pi \left[a(x)B_{i,n}(x) + \lambda \int_0^\pi K(x,t) B_{i,n}(t) dt \right] B_{j,n}(x) dx,$$

$$C_{0,0} = \int_0^\pi \left[(1-x)^3 + \int_0^\pi (\sin(x-t))(1-t)^3 dt \right] (1-x)^3 dx = \frac{\pi}{7},$$

$$\begin{aligned} C_{1,0} &= \int_0^\pi \left[3(1-x)^2x + \int_0^\pi (\sin(x-t))3(1-t)^2t dt \right] (1-x)^3 dx \\ &= \frac{\pi}{14} + \frac{3(48 - 12\pi^2 + \pi^4)}{\pi^5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2,0} &= \int_0^\pi \left[3(1-x)x^2 + \int_0^\pi (\sin(x-t))3(1-t)t^2 dt \right] (1-x)^3 dx \\ &= \frac{\pi}{35} - \frac{3(96 - 24\pi^2 + \pi^4)}{\pi^5}, \end{aligned}$$

$$C_{3,0} = \int_0^\pi \left[x^3 + \int_0^\pi (\sin(x-t))t^3 dt \right] (1-x)^3 dx = \frac{\pi}{140} + \frac{6(24 - 10\pi^2 + \pi^4)}{\pi^5},$$

$$\begin{aligned} C_{0,1} &= \int_0^\pi \left[(1-x)^3 + \int_0^1 (\sin(x-t))(1-t)^3 dt \right] 3(1-x)^2x dx \\ &= \frac{\pi}{14} - \frac{3(48 - 12\pi^2 + \pi^4)}{\pi^5}, \end{aligned}$$

$$C_{1,1} = \int_0^\pi \left[3(1-x)^2x + \int_0^\pi (\sin(x-t))3(1-t)^2t dt \right] 3(1-x)^2x dx = \frac{3\pi}{35},$$

$$C_{2,1} = \int_0^\pi \left[3(1-x)x^2 + \int_0^\pi (\sin(x-t))3(1-t)t^2 dt \right] 3(1-x)^2 x dx$$

$$= \frac{9\pi}{140} - \frac{36(-12 + \pi^2)}{\pi^5},$$

$$C_{3,1} = \int_0^\pi \left[x^3 + \int_0^\pi (\sin(x-t))t^3 dt \right] 3(1-x)^2 x dx = \frac{\pi}{35} - \frac{3(96 - 24\pi^2 + \pi^4)}{\pi^5}$$

$$C_{0,2} = \int_0^\pi \left[(1-x)^3 + \int_0^\pi (\sin(x-t))(1-t)^3 dt \right] 3(1-x)x^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{35} + \frac{3(96 - 24\pi^2 + \pi^4)}{\pi^5},$$

$$C_{1,2} = \int_0^\pi \left[3(1-x)^2 x + \int_0^\pi (\sin(x-t))3(1-t)^2 t dt \right] 3(1-x)x^2 dx$$

$$= \frac{9\pi}{140} + \frac{36(-12 + \pi^2)}{\pi^5},$$

$$C_{2,2} = \int_0^\pi \left[3(1-x)x^2 + \int_0^\pi (\sin(x-t))3(1-t)t^2 dt \right] 3(1-x)x^2 dx = \frac{3\pi}{35},$$

$$C_{3,2} = \int_0^\pi \left[x^3 + \int_0^\pi (\sin(x-t))t^3 dt \right] 3(1-x)x^2 dx = \frac{\pi}{14} + \frac{3(48 - 12\pi^2 + \pi^4)}{\pi^5},$$

$$C_{0,3} = \int_0^\pi \left[(1-x)^3 + \int_0^\pi (\sin(x-t))(1-t)^3 dt \right] x^3 dx$$

$$= \frac{\pi}{140} - \frac{6(24 - 10\pi^2 + \pi^4)}{\pi^5},$$

$$C_{1,3} = \int_0^\pi \left[3(1-x)^2 x + \int_0^\pi (\sin(x-t))3(1-t)^2 t dt \right] x^3 dx$$

$$= \frac{\pi}{35} + \frac{3(96 - 24\pi^2 + \pi^4)}{\pi^5},$$

$$C_{2,3} = \int_0^\pi \left[3(1-x)x^2 + \int_0^\pi (\sin(x-t))3(1-t)t^2 dt \right] x^3 dx$$

$$= \frac{\pi}{14} - \frac{3(48 - 12\pi^2 + \pi^4)}{\pi^5},$$

$$C_{3,3} = \int_0^\pi \left[x^3 + \int_0^\pi (\sin(x-t))t^3 dt \right] x^3 dx = \frac{\pi}{7},$$

$$\sum_{i=0}^n a_i C_{i,j} = F_j, \quad j = 0,1,2,3$$

denklem sistemi çözümü ile;

$$a_0 = \frac{60\pi^2(-806400 + 241920\pi^2 - 24288\pi^4 + 788\pi^6 + 3\pi^8)}{1161216000 - 425779200\pi^2 + 60134400\pi^4 - 3893760\pi^6 + 97920\pi^8 + \pi^{12}},$$

$$a_1 = -\frac{20\pi^2(-2419200 + 645120\pi^2 - 56736\pi^4 + 1380\pi^6 + 25\pi^8)}{1161216000 - 425779200\pi^2 + 60134400\pi^4 - 3893760\pi^6 + 97920\pi^8 + \pi^{12}}$$

$$a_2 = \frac{20\pi^2(2419200 - 645120\pi^2 + 56736\pi^4 - 1884\pi^6 + 25\pi^8)}{1161216000 - 425779200\pi^2 + 60134400\pi^4 - 3893760\pi^6 + 97920\pi^8 + \pi^{12}},$$

$$a_3 = -\frac{60\pi^2(806400 - 241920\pi^2 + 24288\pi^4 - 844\pi^6 + 3\pi^8)}{1161216000 - 425779200\pi^2 + 60134400\pi^4 - 3893760\pi^6 + 97920\pi^8 + \pi^{12}}$$

$$g(x) = 0.2630471333127673 + 0.6192370186522567x - 0.3865370100550649x^2 + 0.04185410139411072x^3$$

dır.

3.Taylor serisi yardımı ile çözümü;

$$f(x) = \cos(x), \quad f^{(1)}(x) = -\sin(x), \quad f^{(2)}(x) = -\cos(x)$$

$$D_{nm} = \frac{1}{m!} \int_a^b \frac{\partial^{(n)} K(x, t)}{\partial x^n} (t - c)^m dt$$

$$D_{00} = \frac{1}{0!} \int_0^1 \frac{\partial^{(0)}(\sin(x - t))}{\partial x^0} dt = -2, \quad D_{01} = \frac{1}{1!} \int_0^1 \frac{\partial^{(0)}(\sin(x - t))}{\partial x^0} t dt = -\pi$$

$$D_{02} = \frac{1}{2!} \int_0^1 \frac{\partial^{(0)}(\sin(x - t))}{\partial x^0} t^2 dt = \frac{1}{2} (4 - \pi^2)$$

$$D_{10} = \frac{1}{0!} \int_0^1 \frac{\partial(\sin(x - t))}{\partial x} dt = \quad D_{11} = \frac{1}{1!} \int_0^1 \frac{\partial(\sin(x - t))}{\partial x} t dt = -2$$

$$D_{11} = \frac{1}{1!} \int_0^1 \frac{\partial(\sin(x - t))}{\partial x} t dt = -\pi,$$

$$D_{20} = \frac{1}{0!} \int_0^1 \frac{\partial^{(2)}(\sin(x - t))}{\partial x^2} dt = 2, \quad D_{21} = \frac{1}{1!} \int_0^1 \frac{\partial^{(2)}(\sin(x - t))}{\partial x^2} t dt = \pi,$$

$$D_{22} = \frac{1}{2!} \int_0^1 \frac{\partial^{(2)}(\sin(x-t))}{\partial x^2} t^2 dt = \frac{1}{2}(-4 + \pi^2),$$

denklem sistemi oluşturulursa, $DG = F$ denklem sistemi çözülerek,

$$g(x) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} g^{(n)}(c)(x-c)^n$$

$$g^{(0)}(0) = -\frac{6}{-30 + \pi^2}, \quad g^{(1)}(0) = -\frac{2\pi}{-30 + \pi^2}, \quad g^{(2)}(0) = \frac{6}{-30 + \pi^2},$$

$$g(x) = 0.298057 + 0.312124x - 0.1490285x^2$$

dır.

4. Ortalama değer teoremi yardımı ile çözümü;

$$g(x) = f(x) + \lambda(b-a)K(x,c)F(g(c)),$$

integral denklemi,

$$g(x) = \cos(x) + \pi \sin(x-c)g(c)$$

x yerine c yazılırsa,

$$g(c) = \cos(c),$$

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)F(f(t) + \lambda(b-a)K(t,c)F(g(c)))dt,$$

$$g(x) = \cos[x] + \int_0^\pi [(\sin(x-t))(t + (\cos(t) + \pi \sin(t-c))g(c))] dt,$$

$$g(c) = \cos[c] + \int_0^\pi [(\sin(c-t))(t + (\cos(t) + \pi \sin(t-c))g(c))] dt,$$

$$g(c) = \cos[c] + \frac{1}{2}\pi(-g(c)\pi + \sin(c)),$$

$$c = 1.8789649035693923,$$

$$g(x) = \cos(x) - 0.9528905138210743\sin(1.87896539 + x)$$

Kesin çözüm;

$$g(x) = \frac{2(2\cos(x) + \pi\sin[x])}{4 + \pi^2}$$

Ortalama değer teoremi yardımı ile çözüm;

$$g(x) = \cos(x) - 0.9528905138210743\sin(1.87896539 + x)$$

Bernstin polinomu yardımı ile çözüm;

$$g(x) = 0.2630471333126811 + 0.6192370186520357x - 0.3865370100549862x^2 + 0.04185410139410817x^3$$

En küçük kareler yardımı ile çözüm;

$$g(x) = 0.37717147291814945 - 0.820273705756559x + 0.18930504421154654x^2$$

Taylor serisi yardımı ile çözüm;

$$g(x) = 0.2980567356721341 + 0.3121242837135104x - 0.14902836783606704x^2$$

Çözümlerinin aynı değer aralığında karşılaştırılması aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
kesinçözüm	0.2884	0.332186	0.372652	0.409396	0.442048	0.470284	0.493821	0.512423	0.525906	0.534134	0.537025
meanvalu	0.0919997	0.120394	0.147586	0.173304	0.197289	0.219303	0.239127	0.256561	0.271431	0.283589	0.292914
bernstein	0.263047	0.321147	0.371768	0.41516	0.451575	0.481263	0.504477	0.521466	0.532482	0.537777	0.537601
küçükkareler	0.377171	0.297037	0.220689	0.148127	0.0793508	0.0143609	-0.0468429	-0.104261	-0.157892	-0.207738	-0.253797
taylor	0.298057	0.327779	0.35452	0.378281	0.399062	0.416862	0.431681	0.44352	0.452378	0.458256	0.461153

Tablo 2.

Örnek 3:

$$g(x) = e^{-x} + \int_0^1 (e^{x+t})g(t)dt$$

İntegral denkleminin kesin ve nümerik çözümlerini bularak karşılaştıralım.

Çözüm:

$$K(x, t) = e^{x+t}, f(x) = e^{-x}, \quad \alpha = 0 \quad \beta = 1$$

1.En küçük kareler yöntemi ile çözüm;

$$\varphi_{i-1} = x^{i-1} + \int_{\alpha}^{\beta} K(x, t) t^{i-1} dt$$

$$\varphi_0 = x^0 + \int_0^1 (e^{x+t}) t^0 dt = 1 + (-1 + e)e^x, \quad \varphi_1 = x + \int_0^1 (e^{x+t}) t dt = e^x + x,$$

$$\varphi_2 = x^2 + \int_0^1 (e^{x+t}) t^2 dt = (-2 + e)e^x + x^2$$

$$D_{i,j} = \int_a^b \varphi_{i-1}(x) \varphi_{j-1}(x) dx$$

$$D_{1,1} = \int_a^b \varphi_0(x) \varphi_0(x) dx = \frac{1}{2} (5 + e(-6 + e(4 + (-2 + e)e))),$$

$$D_{1,2} = \int_a^b \varphi_0(x) \varphi_1(x) dx = \frac{1}{2} (-2 + 3e - e^2 + e^3),$$

$$D_{1,3} = \int_a^b \varphi_0(x) \varphi_2(x) dx = \frac{1}{6} (20 + 3e(-9 + e(5 + (-3 + e)e))),$$

$$D_{2,1} = \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_0(x) dx = \frac{1}{2} (-2 + 3e - e^2 + e^3),$$

$$D_{2,2} = \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_1(x) dx = \frac{1}{6} (11 + 3e^2),$$

$$D_{2,3} = \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = \frac{1}{4} (-11 + 2e(3 + (-2 + e)e)),$$

$$D_{3,1} = \int_a^b \varphi_2(x) \varphi_0(x) dx = \frac{1}{6} (20 + 3e(-9 + e(5 + (-3 + e)e))),$$

$$D_{3,2} = \int_a^b \varphi_2(x) \varphi_1(x) dx = \frac{1}{4} (-11 + 2e(3 + (-2 + e)e)),$$

$$D_{3,3} = \int_a^b \varphi_2(x) \varphi_2(x) dx = \frac{31}{5} - 6e + \frac{7e^2}{2} - 2e^3 + \frac{e^4}{2}$$

$$B_j = \int_a^b f(x)\varphi_{j-1}(x)dx$$

$$B_1 = \int_0^1 e^{-x}\varphi_0(x)dx = e^{-x}(1 + (-1 + e)e^x),$$

$$B_2 = \int_0^1 e^{-x}\varphi_1(x)dx = e^{-x}(e^x + x),$$

$$B_3 = \int_0^1 e^{-x}\varphi_2(x)dx = e^{-x}((-2 + e)e^x + x^2)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} C_{i-1}D_{i,j}(x) = B_j$$

$$a_0 = -\frac{6(-13633 + 14730e - 9841e^2 + 5532e^3 - 1758e^4 + 210e^5)}{e(5501 - 4050e + 2580e^2 - 1350e^3 + 249e^4)},$$

$$a_1 = \frac{12(-8467 + 9505e - 6354e^2 + 3570e^3 - 1155e^4 + 141e^5)}{e(5501 - 4050e + 2580e^2 - 1350e^3 + 249e^4)},$$

$$a_2 = \frac{60(-1558 + 1581e - 1055e^2 + 594e^3 - 183e^4 + 21e^5)}{e(5501 - 4050e + 2580e^2 - 1350e^3 + 249e^4)}$$

lineer denklemi hesaplanırsa a_{i-1} bilinmeyen katsayılarla ulaşırız.

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{i-1}x^{i-1}$$

$$g(x) = 0.75298 - 1.13347x + 0.10864x^2$$

2.Bernstein polinomu yardımı ile çözüm;

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{(x - \alpha)^i (\beta - x)^{n-i}}{(\beta - \alpha)^n} \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$n = 3$ çözüm için,

$$B_{0,3} = (1 - x)^3, \quad B_{1,3} = 3(1 - x)^2x, \quad B_{2,3} = 3(1 - x)x^2, \quad B_{3,3} = x^3$$

$$F_j = \int_a^b B_{j,n}(x)f(x)dx \quad ,$$

$$F_0 = \int_0^1 (1 - x)^3 e^{-x} dx = -2 + \frac{6}{e}, \quad F_1 = \int_0^1 3(1 - x)^2 x e^{-x} dx = 9 - \frac{24}{e} \quad ,$$

$$F_2 = \int_0^1 3(1-x)x^2 e^{-x} dx = -12 + \frac{33}{e}, \quad F_3 = \int_0^1 x^3 e^{-x} dx = 6 - \frac{16}{e},$$

$$C_{i,j} = \int_a^b \left[a(x)B_{i,n}(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) B_{i,n}(t) dt \right] B_{j,n}(x) dx,$$

$$C_{0,0} = \int_0^1 \left[(1-x)^3 + \int_0^1 (e^{t+x})(1-t)^3 dt \right] (1-x)^3 dx = \frac{1}{7},$$

$$C_{1,0} = \int_0^1 \left[3(1-x)^2 x + \int_0^1 (e^{t+x}) 3(1-t)^2 t dt \right] (1-x)^3 dx = \frac{1}{14},$$

$$C_{2,0} = \int_0^1 \left[3(1-x)x^2 + \int_0^1 (e^{t+x}) 3(1-t)t^2 dt \right] (1-x)^3 dx = \frac{1}{35},$$

$$C_{3,0} = \int_0^1 \left[x^3 + \int_0^1 (e^{t+x}) t^3 dt \right] (1-x)^3 dx = \frac{1}{140},$$

$$C_{0,1} = \int_0^1 \left[(1-x)^3 + \int_0^1 (e^{t+x})(1-t)^3 dt \right] 3(1-x)^2 x dx = \frac{1}{14},$$

$$C_{1,1} = \int_0^1 \left[3(1-x)^2 x + \int_0^1 (e^{t+x}) 3(1-t)^2 t dt \right] 3(1-x)^2 x dx = \frac{3}{35},$$

$$C_{2,1} = \int_0^1 \left[3(1-x)x^2 + \int_0^1 (e^{t+x}) 3(1-t)t^2 dt \right] 3(1-x)^2 x dx = \frac{9}{140},$$

$$C_{3,1} = \int_0^1 \left[x^3 + \int_0^1 (e^{t+x}) t^3 dt \right] 3(1-x)^2 x dx = \frac{1}{35},$$

$$C_{0,2} = \int_0^1 \left[(1-x)^3 + \int_0^1 (e^{t+x})(1-t)^3 dt \right] 3(1-x)x^2 dx = \frac{1}{35},$$

$$C_{1,2} = \int_0^1 \left[3(1-x)^2 x + \int_0^1 (e^{t+x}) 3(1-t)^2 t dt \right] 3(1-x)x^2 dx = \frac{9}{140},$$

$$C_{2,2} = \int_0^1 \left[3(1-x)x^2 + \int_0^1 (e^{t+x}) 3(1-t)t^2 dt \right] 3(1-x)x^2 dx = \frac{3}{35},$$

$$C_{3,2} = \int_0^1 \left[x^3 + \int_0^1 (e^{t+x}) t^3 dt \right] 3(1-x)x^2 dx = \frac{1}{14},$$

$$C_{0,3} = \int_0^1 \left[(1-x)^3 + \int_0^1 (e^{t+x})(1-t)^3 dt \right] x^3 dx = \frac{1}{140},$$

$$C_{1,3} = \int_0^1 \left[3(1-x)^2 x + \int_0^1 (e^{t+x})3(1-t)^2 t dt \right] x^3 dx = \frac{1}{35},$$

$$C_{2,3} = \int_0^1 \left[3(1-x)x^2 + \int_0^1 (e^{t+x})3(1-t)t^2 dt \right] x^3 dx = \frac{1}{14},$$

$$C_{3,3} = \int_0^1 \left[x^3 + \int_0^1 (e^{t+x})t^3 dt \right] x^3 dx = \frac{1}{7},$$

$$\sum_{i=0}^n a_i C_{i,j} = F_j, \quad j = 0,1,2,3$$

$$\frac{1}{7}a_0 + \frac{1}{14}a_1 + \frac{1}{35}a_2 + \frac{1}{140}a_3 = -2 + \frac{6}{e},$$

$$\frac{1}{14}a_0 + \frac{3}{35}a_1 + \frac{9}{140}a_2 + \frac{1}{35}a_3 = 9 - \frac{24}{e},$$

$$\frac{1}{35}a_0 + \frac{9}{140}a_1 + \frac{3}{35}a_2 + \frac{1}{14}a_3 = -12 + \frac{33}{e},$$

$$\frac{1}{140}a_0 + \frac{1}{35}a_1 + \frac{1}{14}a_2 + \frac{1}{7}a_3 = 6 - \frac{16}{e}$$

denklem sistemi çözümünü ile,

$$a_0 = \frac{16(-2822299 + 3136499e - 1161780e^2 + 143430e^3)}{e(262575 - 193192e + 35536e^2)},$$

$$a_1 = -\frac{4(-8600029 + 9408104e - 3429760e^2 + 416660e^3)}{e(262575 - 193192e + 35536e^2)},$$

$$a_2 = -\frac{4(-15912304 + 17492899e - 6410740e^2 + 783200e^3)}{e(262575 - 193192e + 35536e^2)},$$

$$a_3 = \frac{8(-6872338 + 7630133e - 2823840e^2 + 348360e^3)}{e(262575 - 193192e + 35536e^2)}$$

$$g(x) = 0.5443631075322628 - 1.4560665935277939x \\ + 0.27051618695259094x^2 - 0.22946402430534363x^3$$

3. Taylor serisi yardımı ile çözümü;

$$f(x) = e^{-x}, \quad f^{(1)}(x) = -e^{-x}, \quad f^{(2)}(x) = e^{-x}, \quad f^{(3)}(x) = -e^{-x}$$

$$D_{nm} = \frac{1}{m!} \int_a^b \frac{\partial^{(n)} K(x, t)}{\partial x^n} (t - c)^m dt$$

$$D_{00} = \frac{1}{0!} \int_0^1 \frac{\partial^{(0)}(e^{t+x})}{\partial x^0} dt = -1 + e, \quad D_{01} = \frac{1}{1!} \int_0^1 \frac{\partial^{(0)}(e^{t+x})}{\partial x^0} t dt = 1$$

$$D_{02} = \frac{1}{2!} \int_0^1 \frac{\partial^{(0)}(e^{t+x})}{\partial x^0} t^2 dt = \frac{1}{2}(-2 + e),$$

$$D_{10} = \frac{1}{0!} \int_0^1 \frac{\partial(e^{t+x})}{\partial x} dt = -1 + e, \quad D_{11} = \frac{1}{1!} \int_0^1 \frac{\partial(e^{t+x})}{\partial x} t dt = 1$$

$$D_{12} = \frac{1}{2!} \int_0^1 \frac{\partial(e^{t+x})}{\partial x} t^2 dt = \frac{1}{2}(-2 + e),$$

$$D_{20} = \frac{1}{0!} \int_0^1 \frac{\partial^{(2)}(e^{t+x})}{\partial x^2} dt = -1 + e, \quad D_{21} = \frac{1}{1!} \int_0^1 \frac{\partial^{(2)}(e^{t+x})}{\partial x^2} t dt = 0,$$

$$D_{22} = \frac{1}{2!} \int_0^1 \frac{\partial^{(2)}(e^{t+x})}{\partial x^2} t^2 dt = \frac{1}{2}(-2 + e),$$

denklem sistemi oluşturulursa, $DG = F$ denklem sistemi çözülerek;

$$g(x) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} g^{(n)}(c) (x - c)^n$$

$$g^{(0)}(0) = \frac{2}{-4 + 3e}, \quad g^{(1)}(0) = -\frac{2(-5 + 3e)}{-4 + 3e}, \quad g^{(2)}(0) = \frac{2}{-4 + 3e},$$

$$g(x) = e^{-x} + \frac{2e^x}{3 - e^2}.$$

4. Ortalama değer teoremi yardımı ile çözüm;

$$g(x) = f(x) + \lambda(b - a)K(x, c)F(g(c)),$$

integral denklemi,

$$g(x) = e^{-x} + e^{x+c}g(c)$$

x yerine c yazılırsa, $g(c) = e^{-c} + e^{2c}g(c)$,

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) F(f(t) + \lambda(b-a)K(t, c)F(g(c))) dt ,$$

$$g(x) = e^{-x} + \int_0^1 [(e^{x+t})(e^{-t} + e^{t+c}g(c)g(c))] dt ,$$

$$g(c) = e^{-c} + \int_0^1 [(e^{c+t})(e^{-t} + e^{t+c}g(c)g(c))] dt ,$$

$$g(x) = e^{-c} + e^c + \frac{1}{2}(e^2 - 1)e^{2c}g(c) ,$$

$$c = 0.58072 ,$$

$$g(x) = e^{-x} - 0.455678e^x$$

dır.

Kesin çözüm;

$$g(x) = e^{-x} + \frac{2e^x}{3 - e^2}$$

Ortalama değeri teoremi yardımı ile çözüm;

$$g(x) = e^{-x} - 0.455678e^x$$

Bernstein polinomu yardımı ile çözüm;

$$g(x) = 0.5443631075322628 - 1.4560665935277939x \\ + 0.27051618695259094x^2 - 0.22946402430534363x^3$$

En küçük kareler yardımı ile çözüm;

$$g(x) = 0.75298 - 1.13347x + 0.10864x^2$$

Taylor serisi yardımı ile çözüm;

$$g(x) = 0.4813656746174906 - 1.5186343253825094x \\ + 0.2406828373087453x^2$$

Çözümlerinin aynı değeri aralığında karşılaştırılması aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
kesinçözüm	0.544321	0.401234	0.262163	0.125716	-0.0094729	-0.144757	-0.281489	-0.421039	-0.564803	-0.714219	-0.870784
meanvalue	0.544322	0.401235	0.262164	0.125717	-0.00947165	-0.144755	-0.281488	-0.421038	-0.564801	-0.714217	-0.870782
bernsein	0.544363	0.401232	0.262135	0.125694	-0.00946664	-0.144724	-0.281455	-0.421037	-0.564845	-0.714258	-0.870651
küçük Kareler	0.75298	0.640719	0.530632	0.422717	0.316974	0.213405	0.112008	0.0127846	-0.0842664	-0.179145	-0.27185
taylor	0.481366	0.331909	0.187266	0.0474368	-0.0875788	-0.217781	-0.343169	-0.463744	-0.579505	-0.690452	-0.796586

Tablo 3.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada lineer değişken katsayılı II. çeşit Fredholm integral denkleminin; En küçük kareler yöntemi, Bernstein polinomu yöntemi, Taylor yöntemi ve Mean Value yöntemi kullanılarak yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Bulunan çözümler, kesin çözüm ile karşılaştırılmış ve karşılaştırılma sonucunda;

En küçük kareler yöntemi, tanımlı aralıkta bir noktada kesin çözüme yaklaşmaktadır ve nokta haricinde yöntemde hata farkı yüksek olmaktadır. Bernstein çözümü, elementer fonksiyonlu çekirdeklerde, kesin çözümle hata farkı ihmal edilecek kadar küçüktür. Diğer çekirdek türlerinde ise, nümerik yöntemler arasında en az hata ile yaklaşım sergilemektedir. Taylor çözümü elementer ve trigonometrik fonksiyonlarda, kesin çözüme çok yaklaşmaktadır. Ancak üstel ve logaritmik fonksiyonlu çekirdeklerde kesin çözümle arasındaki hata kabul edilemeyecek kadar büyüktür. Mean value yöntemi ise sadece üstel fonksiyonlarda kesin çözüme çok yaklaşmaktadır. Diğer fonksiyon türlerinde ise bu gözlenmemektedir.

Fredholm integral denkleminin çözümünde kullandığımız nümerik yöntemlerin başarısı, çekirdeği oluşturan fonksiyon türlerine göre değişmektedir. Bu yöntemlerde tüm fonksiyon türleri için en iyi yaklaşık çözüm ve en küçük hata Bernstein yöntemi ile gerçekleşirken, Taylor çözümü buna aksi bir karakter göstererek tanımlı aralıkta sadece belli bir noktada analitik değere yaklaşmakta ve noktadan uzaklaştıkça hata giderek büyümektedir.

KAYNAKLAR

Aksoy, Y.,(1983) İntegral Denkleler, 2st Edition, YTÜ Basım-Yayım Merkezi,İstanbul, TÜRKİYE.

Atkinson,,K., Han, W., (2001) Theoretical Numerical Analysis, Springer-Verlag, New York, USA.

Avazzadeh, Z., Heydari, M., Loghmani, G.B.,(2011) Numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind by using integral mean value theorem. Applied Mathematical Modelling. Volume 35, 52374-2383.

Burden,R.L., Faires, J.D., (2001) Numerical Analysis , 9stEdition , Richard Stratton, Editors; Michelle Julet, Boston, USA.

Chakrabarti, A.,Martha S., Approximate solutions of Fredholm integral equations of the second kind. Applied Mathematics and Computation. Volume 211 ,459–466

Courant, R., Hilbert, D., (1989) Methods of Mathematical Phsics, 1st English Edition, John Willeyand and Sons, Inc.

Karadeniz, A.A., (1995) Yüksek Matematik, Çağlayan Kitabevi, İstanbul, Türkiye.

Kress, R., (2014) Linear Integral Equation, 3st Edition, Springer, London, England.

Kolman, B., Hill D.R., (2002) Uygulamalı Lineer Cebir, 7st Edition ,Çeviri; Akın, Ö., Palme, Ankara, Türkiyei.

Krasnov, M.,Kiselev, A., Makarenko, G. (1971) Problem and Exercises in Integra Equation,Mir, Moscow, Russia.

Mikaeilvad, N, Noeiaghdam, S. (2014) Mean value theorem for integrals and its application on numerically solving of fredholm integral equation of second kind with Toeplitz plus Hankel Kernel. Int. J. Industrial Mathematics, Vol. 6, No. 4, 10

Myint-U, T.,(1973) Partial Differential Equations of Mathematical Physics, 2st Edition, Elsevier North Holland, Inc., New York, USA.

Saha Ray, S., Sahu P.K. (2013) Numerical Methods for Solving Fredholm Integral Equations of Second Kind. Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis, Volume 2013, 17.

Sezer, M., 1994. Taylor Polynomial Solution of Volterra Integral Equations, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.,25, 625-633.

Shirin, A.L., Islam, M.S. (2010)) Numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind by using Bernstein Polynomials. 2010 IEEE International Conference on Progress in Informatics and Computing.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Yasin ÇETİN

Doğum Yeri : Niğde

Doğum Yılı : 1982

1996-2000 Niğde Atatürk Lisesi Yabancı Dil Ağırlıklı Programdan, 2001-2006 Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Matematik Öğretmenliğini mezun oldum. 2007-2009 İç İşleri Bakanlığı Personeli olarak çalıştım. 2009 Matematik Öğretmeni olarak atandım. Halen matematik öğretmenliği yapmaktayım.