MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ASALIMSI İDEALLER

NAGİHAN BALKANCI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

DANIŞMAN
Doç. Dr. Suat KOÇ

EŞ-DANIŞMAN
Prof. Dr. Ünsal TEKİR

İSTANBUL, 2025

MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ASALIMSI İDEALLER

NAGİHAN BALKANCI

521022603

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

DANIŞMAN
Doç. Dr. Suat KOÇ

EŞ-DANIŞMAN
Prof. Dr. Ünsal TEKİR

İSTANBUL, 2025

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmam süresince göstermiş oldukları sabır, değerli katkı ve yol gösterici desteklerinden dolayı sayın Prof. Dr. Ünsal Tekir ve Doç. Dr. Suat Koç hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunarım. Bu süreçte karşılaştığım her zorlukta yanımda oldular ve akademik gelişimim için her zaman teşvik edici oldular. Sadece bir danışman olarak değil, aynı zamanda birer mentör olarak bana kattıkları değerler, akademik kariyerimin en önemli yapı taşlarından biri olacaktır. Engin bilgilerine ve sonsuz anlayışlarına olan hayranlığımı bir kez daha ifade etmek isterim.

Canım çocuklarım Beren ve Kerem'e bu yoğun süreçte gösterdikleri anlayış ve sevgi dolu destekleri için çok teşekkür ederim. Varlığınızın bana verdiğiniz güç, bu yolculuğumdaki en büyük motivasyon kaynağım oldu.

Her zaman yanımda olan, beni cesaretlendiren ve bu zorlu süreçte manevi desteklerini esirgemeyen başta babam ve tüm canım ailem, dostlarım ve çok kıymetli Keriman Keser en içten teşekkürlerimi sunarım. Sizlerin varlığı bana güç verdi. En önemlisi nasip olan bu hayatım için bugün bu tez için Rabbime şükürler olsun.

Saygılarımla, Bu kıymetli katkılarınız için tekrar teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Eylül 2025 **Nagihan BALKANCI**

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR i
İÇİNDEKİLER ii
ÖZET iii
ABSTRACT iv
SEMBOLLER ve KISALTMALAR vi
1. GİRİŞ 1
1.1. Asalımsı İdeallerin Özel Türleri 1
1.2. Notherian Halkalarda Asalımsı İdeal 5
1.3. Kuvvetli Laskerian Halkalarda Asalımsı İdealler 8
2. POTENTLY ASALIMSI İDEALLER 18
2.1. Potently Asalımsı İdeallerin Temel Özellikleri 18
2.2. Bazı Özel Halkalarda Potently Asalımsı İdealler 22
2.3. Cebirsel yapılar altında potently asalımsı idealler 27
KAYNAKLAR 35

ÖZET

ASALIMSI İDEALLER

Asal idealler ve genelleştirmeleri, cebirsel yapıların karakterizasyonunda kullanılmasının yanı sıra Graf Teori, Genel Topoloji, Cebirsel Geometri, Şifreleme, Kodlama Teorisi gibi alanlara uygulamasının bulunması sebebiyle Değişmeli Cebirde çok önemli bir yere sahiptir. Örneğin, tamlık bölgeleri, cisimler, Noetherian halkalar, Prüfer Bölgeleri, TİB gibi birçok halka sınıfı asal idealler yardımıyla karakterize edilir. Sayılar teorisinde, aritmetiğin temel teoremi her tam sayının asal sayıların çarpımı şeklinde, ilgililik ve sıra düşünülmeksizin tek türlü biçimde yazılabileceğini söyler. Asal sayıların bu özelliği birçok cebirsel yapının temelini oluşturmakta, şifreleme gibi bilgi güvenliği alanlarında asal sayıların kullanılmasına olanak sağlamaktadır. Aritmetiğin temel teoremini Noetherian halkalara asalımsı idealler yardımıyla genişletebiliriz. Yalnızca bu açıdan bile bakıldığında asal ideallerin bir genişlemesi olan asalımsı ideallerin değişmeli halkalar teorisindeki önemi ortaya çıkar. R birimli ve değişmeli bir halka ve Q, R nin bir has ideali olsun. Her $p, q \in R$ için $pq \in Q$ iken $p \in Q$ veya bir $n \in \mathbb{N}$ için $q^n \in Q$ oluyorsa Q ya bir asalımsı ideal denir. Q bir asalımsı idealse $\sqrt{Q} = \{x \in R$: bir $n \geq 1$ tamsayısı için $x^n \in Q\} = P$ bir asal idealdir ve bu durumda Q ya bir P-asalımsı ideal denir. Noetherian halkalarda her ideal sonlu tane asalımsı idealin arakesiti olarak yazılabilir. Bu yazılışa asalımsı ayrışım denir. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasındaki asalımsı ayrışım kullanılarak aritmetiğin temel teoremi elde edilir. Bu tez çalışmasında asalımsı ideallerin özel bir alt sınıfının cebirsel özellikleri incelenecektir. R nin Q idealine her I, J ideali için $IJ \subseteq Q$ iken $I \subseteq Q$ veya bir $n \in \mathbb{N}$ için $J^n \subseteq Q$ oluyorsa potently asalımsı denir. Her potently asalımsı ideal bir asalımsı idealdir, fakat tersi doğru değildir. Bu çalışmada potently asalımsı ideallerle asalımsı, düzgün asalımsı, Noether kuvvetli asalımsı, Mori kuvvetli asalımsı idealler arasındaki ilişkiler incelenecektir.

ABSTRACT

PRIMARY IDEALS

Prime ideals and their generalizations have an important place in Commutative Algebra since not only are they used in the characterization of Algebraic Structures but also they have applications to other areas such as Graph Theory, General Topology, Algebraic Geometry, Cryptology, Coding Theory. For instance, Many classes of rings such as integral domains, fields, Noetherian rings, Prüfer domains, principal ideal domains are characterized in terms of prime ideals. In Number Theory, Fundemantal theorem of arithmetic states that every integer can be represented uniquely as a product of prime numbers, up to the order and associated elements. This propert of prime numbers forms the basis of many algebraic structures and enables the use of prime numbers in information security fields such as encryption. We extend the fundemantal theorem of arithmetic to Noetherian rings by means of primary ideals. From this point of view alone, the importance of the primary ideals, which is a generalization of prime ideals, in the theory of commutative rings arises. Let R be a commutative ring with a unity and Q be a proper ideal of R. Q is said to be a primary ideal if whenever $ab \in Q$ for every $a, b \in R$ then $a \in Q$ or $b^n \in Q$ for some integer $n \geq 1$. If Q is a primary ideal, then $\sqrt{Q} = \{x \in R: \exists\ n \geq 1$ such that $x^n \in Q\} = P$ is a prime ideal of R, and in this case Q is said to be a P-primary ideal of R. In Noetherian rings, every ideal can be represented as a finite intersection of primary ideals. This representation is called primary decomposition. Fundemantal theorem of arithmetic can be obtain by using primary decomposition in the ring $\mathbb{Z}$ of integers. In this thesis, algebraic properties of a special sub-class of the primary ideals will be examined. A proper ideal Q of R is said to be a potently primary if whenever $IJ \subseteq Q$ for every ideals I, J of R then $I \subseteq Q$ or $J^n \subseteq Q$ for some integer $n \geq 1$. Every potently primary ideal is also a primary ideal but the converse is not true in general. In this work, the relations between potently primary ideals and other classical ideals such as primary, uniformly primary, Noether and Mori strongly primary ideals will be investigated.

SEMBOLLER ve KISALTMALAR

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar

$\mathbb{Z}$: Tam sayılar

$\mathbb{Q}$: Rasyonel sayılar

$\subseteq$: Alt küme

$\subset$: Has alt küme

$\in$: Elemanıdır

$\notin$: Elemanı değildir

$\supseteq$: Kapsar

$\not\supseteq$: Kapsamaz

$\cong$: İzomorfizma

$R/_I$: Bölüm Halkası

$S^{-1}R$: Kesir halkası

$\sqrt{Q}$: Q nun radikali

$Çek(f)$: f homomorfizmasının çekirdeği

$(a_0, a_1, \dots, a_n)$: $a_0, a_1, \dots, a_n$ ile üretilmiş ideal

$R \ltimes M$: Triviyal genişleme

g.y.k. : gerek ve yeter koşul

1. GİRİŞ

Tezin bu ve ileriki bölümlerinde tanımı verilen cebirsel yapılar ve operasyonlar, temel teoremler ve özellikler için [6], [7] ve [13] kaynaklarından yararlanılmıştır. Ayrıca verilmeyen notasyon ve tanımlar için ise [6] ve [24] kaynaklarına bakılabilir. Bu tez boyunca söz konusu tüm halkaları değişmeli ve birimli kabul edeceğiz ($1 \neq 0$). Özel olarak R birimli ve değişmeli bir halka olarak kabul edilecektir. Bu bölümde asal ideallerin genellemesi olan asalımsı ideal kavramını araştıracağız. Bir R halkasının I idealinin radikalinin şu şekilde verildiğini hatırlayalım: $\sqrt{I} = \{s \in R \mid \exists\, t \in \mathbb{N}\ için\ s^t \in I\}$ [20].

1.1. Asalımsı İdeallerin Özel Türleri

Tanım 1.1.1 $Q \subset R$ olacak şekilde R halkasının bir ideali olsun.

(i) Her $p, q \in R$ için $pq \in Q$ olması $p \in Q$ veya $q \in Q$ olmasını gerektirirse Q ya bir asal ideal denir.

(ii) Her $p, q \in R$ için $pq \in Q$ ve $p \notin Q$ olması bir $n \in \mathbb{N}$ için $q^n \in Q$ olmasını gerektirirse Q ya bir asalımsı ideal denir. Burada P, Q nun radikali ise, Q ya P-asalımsı ideal adı verilir [27].

Tanımlardan her asal idealin bir asalımsı ideal olduğu açıkça anlaşılmaktadır. Aşağıda aksinin genelde doğru olmadığına ilişkin bir örnek verilmektedir.

Örnek 1.1.2 Bir p asal sayısı için $\mathbb{Z}_{p^2} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{p^2 - 1}\}$ halkasını düşünelim. $I = (\bar{0})$ ideali asal değildir, çünkü $\overline{p^2} \in I$ olmasına karşın $\bar{p} \notin I$ dır. Diğer taraftan, $\bar{a}\bar{b} \in I$ ve $\bar{a} \notin I$ olsun. Bu durumda p^2, ab yi böler fakat a yı bölemez. Böylece p, b yi bölmek zorundadır. O halde $\bar{b}^2 \in I$ dır, yani I asalımsı idealdir.

1.1.3 ve 1.1.4 numaralı önermeler asalımsı ideal ile onun radikali arasındaki ilişkiyi vurgular. Önerme 1.1.3, asalımsı bir idealin radikalinin her zaman bir asal ideal olduğunu belirlerken, Önerme 1.1.4, radikali maksimal ideal olan tüm idealleri asalımsı olarak nitelendirir.

Önerme 1.1.3 Q bir P-asalımsı idealse P asaldır [22].

İspat. $ab \in P$ ve $a \notin P$ olsun. Bir $n \in \mathbb{N}$ için $a^n b^n = (ab)^n \in Q$ olur. Ancak $a \notin P$ olduğundan $a^n \notin Q$ ve böylece Q asalımsı ideal olduğundan, bir $m \in \mathbb{N}$ için $b^{nm} = (b^n)^m \in Q$. Bu nedenle istenildiği gibi $b \in P$ olur.

Önerme 1.1.4 R nin bir Q ideali için $\sqrt{Q}$ maksimalse Q asalımsı ideal olur [6].

İspat $ab \in Q$ ve $b \notin \sqrt{Q}$ olsun. $\sqrt{Q}$ nun maksimalliğinden $Rb + \sqrt{Q} = R$ sonucu çıkar. Böylece bir $b' \in \sqrt{Q}$ ve $r \in R$ için $b' + rb = 1$ olur. Şimdi $b' \in \sqrt{Q}$ olduğundan $b'^n \in Q$ olacak şekilde n doğal sayısı vardır. $1 = 1^n = (b' + rb)^n = b'^n + sb$ olacak şekilde yazılabilir ve buradan $a = a(b' + rb)^n = ab'^n + sab \in Q$ elde edilir.

Tanım 1.1.5'te üç özel asalımsı ideal tanımı veriyoruz. [7]'den yararlanarak, bu üç türü "Noether kuvvetli asalımsı", "Mori kuvvetli asalımsı" ve "düzgün asalımsı" olarak adlandırıcağız.

Tanım 1.1.5 Q, R nin P-asalımsı ideali olsun.

a) $P^N \subseteq Q$ şartını sağlayan bir $N \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa Q ya "Noether kuvvetli asalımsı" denir. Eğer N bu tür doğal sayıların en küçüğü ise N'ye Q'nun derecesi denir ve $\mathfrak{e}(Q) = N$ ile gösterilir.

b) Bir $r \in P \setminus Q$ için $rP \subseteq Q$ oluyorsa Q'ya "Mori kuvvetli asalımsı" denir.

c) Sabit bir $N \in \mathbb{N}$ sayısı her $p, q \in R$ için $pq \in Q$ ve $p \notin Q$ olması $q^N \in Q$ olmasını gerektiriyorsa Q'ya düzgün asalımsı denir. Eğer N bu koşulu gerçekleyen en küçük tam sayı ise N'ye Q nun mertebesi denir ve $ord(Q) = N$ ile gösterilir [7].

Önerme 1.1.6 Her Noether kuvvetli asalımsı ideal Mori kuvvetli asalımsıdır [7].

İspat. Q, Noether kuvvetli P-asalımsı ideali ve $\mathfrak{e}(Q) = N$ olsun. O halde, $r \in P^{N-1} \setminus Q \subseteq P \setminus Q$ için $rP \subseteq P^{N-1}P = P^N \subseteq Q$ elde edilmiş olur.

Eğer A, bir R halkasının alt halkası ise, o zaman A tarafından üretilen ideal $AR = \{s_1 b_1 + \cdots + s_n b_n \mid n \in \mathbb{N},\ s_i \in R, b_i \in A\}$ olarak tanımlanır [27]. Şimdi Örnek 1.1.7 da Noether kuvvetli asalımsı olmayan bir Mori kuvvetli asalımsı idealinin var olduğunu gösterelim.

Örnek 1.1.7 F bir cisim ve $X = \{X_1, X_2, X_3 \ldots\}$ sonsuz değişkenlerin kümesi olsun. $F[X]$

sonsuz değişkenli polinom halkasında $Q = (\{X_i^2\}_{i=1}^{\infty}, \{X_1X_i\}_{i=2}^{\infty})$ ve $P = (X)$ ideallerini alalım. Önce, Q nun P-asalımsı olduğunu gösterelim. $\sqrt{Q} = (X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots) = (X) = P$ olduğu kolayca görülür. $\phi: F[X] \to F, f(x) \mapsto f(0)$ örten homomorfizmasını alalım. $Çek\phi = \{f(x) | \phi(f(x)) = 0\} = (X)$ olduğundan 1. izomorfizma teoremine göre $F[X]/(X) \cong F$ dir ve böylece $(X) = \sqrt{Q}$ maksimal olduğundan Q asalımsıdır. Ayrıca $X_1 \in (X) \backslash Q$ ve $X_1P \subseteq Q$ olduğundan Q, Mori kuvvetli asalımsı olur. Bununla birlikte her $n \in \mathbb{N}$ için $X_2X_3 \dots X_{n+1} \in P^n \backslash Q$ olduğundan P nin hiçbir kuvveti Q idealinin içine düşmemiş olur, yani Q, Noether kuvvetli asalımsı değildir.

Şimdi her Noether kuvvetli asalımsının düzgün asalımsı ideal olduğunu gösterelim.

Önerme 1.1.8 Her Noether kuvvetli asalımsı düzgün asalımsıdır. Ayrıca $e(Q) = N$ ise $ord(Q) \leq N$ olur [7].

İspat. Q Noether kuvvetli P-asalımsı ve $e(Q) = N$ olsun. $st \in Q$ ve $s \notin Q$ olsun. Q asalımsı olduğundan $t \in P$ böylece $t^N \subseteq P^N \subseteq Q$ olur. O halde Q düzgün asalımsı ve $ord(Q) \leq N$ olur.

Şimdi de düzgün asalımsı idealin Noether kuvvetli asalımsı ideal olamayabileceğini Örnek1.1.9 ile gösterelim.

Örnek 1.1.9 F bir cisim, karakteristiği 2 ve $X = \{X_1, X_2, X_3 \dots\}$ sonsuz değişkenlerin bir kümesi olsun. $F[X]$ polinom halkasının $Q = (\{X_i^2\}_{i=1}^{\infty})$ ve $P = (X)$ ideallerini alalım. Şimdi Q nun P-asalımsı ideal olduğunu gösterelim. Açıkca $\sqrt{Q} = (X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots) = (X) = P$ olduğu görülür. Ayrıca $\phi: F[X] \to F, f(x) \mapsto f(0)$ örten homomorfizmasının çekirdeği $Çek\phi = \{f(x) | \phi(f(x)) = 0\} = (X)$ olduğundan 1. izomorfizma teoremine göre $F[X]/(X) \cong F$ dir ve böylece $(X) = \sqrt{Q}$ maksimal olduğundan Q asalımsıdır. $i_1, i_2, \dots i_n \in \mathbb{N}$ ve $g_1, \dots, g_n \in F[X]$ olmak üzere $f = X_{i_1}g_1 + X_{i_2}g_2 + \cdots X_{i_n}g_n \in P$ alalım. F cisminin karakteristiği 2 olduğundan $f^2 = (X_{i_1}g_1 + X_{i_2}g_2 + \cdots X_{i_n}g_n)^2 = X_{i_1}^2g_1^2 + X_{i_2}^2g_2^2 \dots + X_{i_n}^2g_n^2 \in Q$ ve buradan $ord(Q) = 2$ olmak üzere Q'nun düzgün asalımsı olduğu anlaşılır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $X_1X_2 \dots X_n \in P^n \backslash Q$ olduğundan Q Noether kuvvetli asalımsı değildir.

Tanım 1.1.10 K, L, R halkasının iki ideali olmak üzere $(L: K) = \{s \in R: sK \subseteq L\}$ ile tanımlanır [27].

Bu bölümde Tanım1.1.10 dan yararlanarak aşağıdaki iki önermeyi vereceğiz. Bu önermeler tez boyunca sık sık kullanılacaktır.

Önerme 1.1.11 K, L, M, R halkasının üç ideali ve $\{K_i\}_{i\in\Delta}$, R halkasının ideal ailesi olsun.

1. $K \subseteq (K: L)$
2. $((\bigcap_{i\in\Delta} K_i): L) \subseteq \bigcap_{i\in\Delta}(K_i: L)$
3. $((K: L): M) = (K: LM)$ [7].

İspat. 1. $k \in K$ olsun. $kL \subseteq kR \subseteq K$ olduğundan $k \in (K: L)$ elde edilir.

2. $x \in ((\bigcap_{i\in\Delta} K_i): L)$ ve $l \in L$ olsun. $xl \in \bigcap_{i\in\Delta} K_i$ olacağından her i için $xl \in K_i$ dir. O halde $l \in L$ ve her i için $xl \in K_i$ olduğundan $x \in (K_i: L)$ bulunur.

3. $x \in ((K: L): M)$, $1 \leq i \leq n$ için $l_i \in L$ ve $s_i \in M$ alalım. Buradan $xs_i \in (K: L)$ ve $xl_i s_i \in K$ olur. Buradan $x(l_1 s_1 + l_2 s_2 + \cdots + l_n s_n) = xl_1 s_1 + xl_2 s_2 + \cdots + xl_n s_n \in K$ elde edilir. O halde LM nin herhangi bir elemanı $l_1 s_1 + l_2 s_2 + \cdots + l_n s_n$ nin x ile çarpımı K'de olduğu için $x \in (K: LM)$ bulunur. Öte yandan $y \in (K: LM)$, $l \in B$ ve $s \in M$ alalım. Buradan $yls \in K$ olur. Böylece l herhangi bir eleman olduğundan $ys \in (K: L)$ ve M den herhangi bir s elemanı aldığımız için $y \in ((K: L): M)$ elde edilir.

Önerme 1.1.12 Q, R nin bir P-asalımsı (sırasıyla, Noether kuvvetli P-asalımsı) ideali ve $A \nsubseteq Q$ olacak şekilde R nin bir ideali ise $(Q: A)$, P-asalımsı (Noether kuvvetli P-asalımsı) idealdir [13].

İspat: Q, R nin bir P-asalımsı ideali ve $A \nsubseteq Q$ olacak şekilde R halkasının ideali olsun. $xy \in (Q: A)$ ve $x \notin (Q: A)$ olsun. O zaman bir $a \in A$ için $xa \notin Q$ olur. Bununla birlikte $(xa)y = xya \in Q$ ve $xa \notin Q$ olduğundan asalımsı ideal tanımına göre bir n doğal sayısı için $y^n \in Q \subseteq (Q: A)$ olur. Buradan $(Q: A)$ asalımsı olur. Şimdi $a \in A \setminus Q$ ve $x \in (Q: A)$ olsun. O halde $a \notin Q$ olmak üzere $xa \in Q$ elde edilir. Buradan bir $m \in \mathbb{N}$ için $x^m \in Q$ yani $x \in P$ olur. Böylece $Q \subseteq (Q: A) \subseteq P$ ve buradan $P = \sqrt{(Q: A)}$ elde edilir. Ayrıca, Q Noether kuvvetli P-asalımsı ve $\mathfrak{e}(Q) = N$ olsun. $P^N \subseteq Q \subseteq (Q: A)$. Böylece $(Q: A)$,

Noether kuvvetli P-asalımsı ve $\mathfrak{e}(Q:A) \leq N$ olur.

1.2. Notherian Halkalarda Asalımsı İdeal

Bu başlık altında, Noetherian halkalarının tanımı verilecek ve Noetherian halkalarda asalımsı idealler ve özel alt sınıfları incelenecektir. Ayrıca bu bölümde Noetherian halkaların en önemli sonuçlarından biri, Aritmetiğin temel teoreminin bir genellemesi olan, Lasker-Noether teoremi incelenecektir.

Tanım 1.2.1 R nin her ideali sonlu olarak üretilmiş ise R ye Noetherian halka denir [4].

Teorem 1.2.2 R için aşağıdakiler denktir:

1. R Noetherian halkadır.
2. R nin her artan zinciri sonlu bir adımda durur.
3. R nin her boştan farklı ideal ailesi maksimal elemana sahiptir [4].

İspat. (1) ⇒ (2): R Notherian halka olsun. O halde her ideali sonlu üretilmiş olur. $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ olmak üzere R nin bir ideal zincirini alalım. $A = \bigcup A_i$ diyelim. Öncelikle A nın R halkasının bir ideali olduğunu gösterelim. $x, y \in A$ ve $r \in R$ olsun. Buna göre $x \in A_k, y \in A_m$ olacak şekilde $k < m$ tam sayıları bulunur. $A_k \subseteq A_m$ olduğundan $x, y \in A_m$ ve dolayısıyla $x - y \in A_m \subseteq A$ bulunur. Diğer taraftan, $rx \in A_k \subseteq A$ olduğundan A'nın R halkasının bir ideali olduğu gösterilmiş olur. Şimdi $A = (a_1, \ldots, a_s)$ olsun. Her $1 \leq i \leq s$ için $a_i \in A_{m_i}$ olacak şekilde m_i seçelim. O zaman $m = \max\{m_1, \ldots, m_s\}$ için her $a_i \in A_m$ olur. Buradan her $n > m$ için $A = (a_1, \ldots, a_s) \subseteq A_m \subseteq A_n \subseteq A$ ve dolayısıyla $A_m = A_n$ elde edilmiş olur.

(2) ⇒ (3): Artan zincir koşulu R halkasında geçerli olsun ve S, R nin boş olmayan bir idealler kümesi olsun. S nin hiçbir elemanının maksimal olmadığını varsayalım. S boş küme olmadığından $A_1 \in S$ şeklinde en az bir ideal bulabiliriz. Ancak kabule göre A_1 maksimal olamaz. O halde $A_2 \in S$ için $A_1 \subsetneq A_2$ dir. Aynı şekilde A_2 maksimal olmadığından $A_3 \in S$ için $A_2 \subsetneq A_3$ elde edilir. Böyle devam edersek bu, artan zincir koşuluyla çelişen bir idealler zinciriyle sonuçlanacaktır.

(3) ⇒ (1): R halkasında boş olmayan her idealler ailesinin bir maksimal eleman içerdiğini ve A nın R halkasının ideali olduğunu varsayalım. A nın tüm sonlu sayıda elemanlarından üretilmiş idealler ailesini F ile gösterelim. F, $\{0\} \in F$ olduğundan boş küme değildir.

$A^* = (a_1, \ldots, a_n)$, F kümesinin bir maksimal elemanı olsun. O halde $A^* \subseteq A$ olur. Diyelim ki $A^* \subsetneq A$ olsun. O halde $b \in A \backslash A^*$ bulabiliriz. Böylece $(b, a_1, \ldots, a_n) \in F$ ve $A^* \subsetneq (b, a_1, \ldots, a_n)$ elde edilir. Fakat $A^* \in F$ maximal eleman idi, bu bir çelişkidir. O halde $A^* = A$ olur ve bu da R halkasının Noetherian halka olduğunu gösterir.

Tanım 1.2.3 Bir R halkasının her ideali, R nin asalımsı ideallerinin sonlu bir kesişimi olarak temsil edilebiliyorsa Laskerian halka olarak adlandırılır [15].

Tanım 1.2.4 I, R halkasının bir ideali olsun. R nin A ve B idealleri için $I = A \cap B$ olması $I = A$ veya $I = B$ olmasını gerektiriyorsa I ya indirgenemez denir [24].

Lemma 1.2.5 R Noetherian halka ise, R deki her indirgenemez ideal asalımsıdır [6].

İspat A nın R halkasının asalımsı olmayan bir ideali olduğunu varsayalım. A nın indirgenebilir olduğunu göstereceğiz. A asalımsı ideal olmadığından $bc \in A$, $c \notin A$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $b^n \notin A$ olacak şekilde $b, c \in R$ elemanları bulunur. Böylece $bc \in A$ ve $c \notin A$ olduğundan $A \subsetneq (A: b)$ sonucu çıkar. Dikkat edersek $(A: b^k) \subseteq ((A: b^k): b) = (A: b^{k+1})$ dir. Böylece $A \subseteq (A: b) \subseteq (A: b^2) \subseteq \cdots$ olduğundan artan zincir koşulundan bir m doğal sayısı için $m < n$ iken $(A: b^m) = (A: b^n)$ olur. Diğer yandan $A \subsetneq (A: b) \subseteq (A: b^m)$ ve $b^m \notin A$ olduğundan $A \subsetneq A + b^m R$ dir. Buradan $A \subseteq (A: b^m) \cap (A + b^m R)$ elde edilir. Şimdi $x \in (A: b^m) \cap (A + b^m R)$ alalım. $x \in (A + b^m R)$ olduğundan bir $a \in A$ ve $r \in R$ için $x = a + b^m r$ olur. Aynı zamanda $x \in (A: b^m)$ olduğundan $ab^m + rb^{2m} = xb^m \in A$ olur. Buradan $rb^{2m} \in A$ ve $r \in (A: b^{2m})$ bulunur. m nin seçimi $(A: b^{2m}) = (A: b^m)$ eşitliğini verir. Dolayısıyla $r \in (A: b^m)$ ve $rb^m \in A$ ve buradan $x = a + b^m r \in A$ elde edilir. O halde A indirgenebilir olur.

Lemma 1.2.6 R bir halka ve $Q_1, \ldots Q_n$ R halkasının P-asalımsı idealleri olsun. O halde $\cap_{i=1}^{n} Q_i$ ideali de P-asalımsı olur [6].

İspat $Q = \cap_{i=1}^{n} Q_i$ diyelim. $ab \in Q$ ve $a \notin Q$ olsun. Her i için $ab \in Q_i$ olmasıyla birlikte en az bir j için $a \notin Q_j$ olur. Q_j, P-asalımsı olduğundan $b \in P$ olur. Ancak her i için $\sqrt{Q_i} = P$ olduğundan, her i için $b^{n_i} \in Q_i$ olacak şekilde bir n_i bulunur. Buradan $t = max\{ n_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ alırsak $b^t \in Q$ sonucu çıkar. Bu nedenle Q, R de asalımsıdır. Dikkat edersek $P \subseteq \sqrt{Q}$ dur. Ayrıca herhangi bir i için $Q \subseteq Q_i \subseteq P$ olduğundan $\sqrt{Q} \subseteq$

$\sqrt{Q_i} = P$ olur ve buradan $\sqrt{Q} = P$ elde edilir.

Teorem 1.2.7 R Noetherian ise, R nin her ideali, R nin indirgenemez ideallerin sonlu kesişimidir [6].

İspat S, indirgenemez ideallerin sonlu kesişimleri olarak yazılamayan tüm ideallerin kümesi olsun. S kümesinin boş olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki S kümesi boş olmasın. R Noetherian halka olduğundan S kümesinde $A \in S$ olacak şekilde S kümesindeki idealler içinde bir maksimal eleman bulabiliriz. A indirgenemez ideallerin sonlu bir kesişimi olmadığından kendisi de indirgenemez değildir. Buradan B ve C, A yı kapsayan idealler olmak üzere $A = B \cap C$ şeklinde yazılır. Fakat A maksimal eleman olduğundan $B, C \notin S$ elde edilir. Yani, B ve C nin her biri indirgenemez ideallerin sonlu bir kesişimidir. Bu, A nın indirgenemez ideallerin sonlu bir kesişimi olduğu anlamına gelir; bu ise $A \in S$ olduğundan bir çelişkidir.

Tanım 1.2.8 A, R halkasının bir ideali olsun. $A = \cap_{i=1}^{n} Q_i$ olacak şekilde $Q_1, \dots Q_n$; R halkasının P_i-asalımsı idealleri bulunabiliyorsa A nın asalımsı bir ayrışıma sahip olduğunu söyleriz. $s \neq r$ olmak üzere $\sqrt{Q_s} \neq \sqrt{Q_r}$ ve $\cap_{s \neq r} Q_s \nsubseteq Q_r$ $(1 \leq r \leq n)$ ise bu asalımsı ayrışıma indirgenmiş denir [6].

Sonuç 1.2.9. R Noetherian halkasının her ideali, R'nin asalımsı ideallerinin sonlu bir kesişimi olarak ifade edilebilir. Ayrıca, R'nin her ideali indirgenmiş asalımsı ayrışıma sahiptir [6].

İspat R Noetharian halkasının her idealinin asalımsı ideallerin sonlu kesişimi olduğu Lemma 1.2.5-Teorem 1.2.7 den görülür. İkinci iddia için A, R nin bir ideali ve her i için Q_i , R halkasının P_i-asalımsı idealleri ve $A = \cap_{i=1}^{n} Q_i$ olduğunu kabul edelim. Eğer bir j için $\cap_{i \neq j} Q_i \subseteq Q_j$ oluyorsa $A = \cap_{i=1}^{n} Q_i = \cap_{i \neq j} Q_i$ elde edilir. Yeniden indeksleme yaparsak j den büyük indeksler için birini çıkarabiliriz ve böylece $A = \cap_{i=1}^{n-1} Q_i$ elde edilir. Bu şekilde devam edersek, her k için $\cap_{i \neq k} Q_i \nsubseteq Q_k$ olacak şekilde A için asalımsı ayrışımı başlangıç ayrışımıdan çıkarılabilir. Şimdi yeni ayrışım için $r \neq s$ için $P_r = P_s$ kabul edelim. Teorem1.2.6 dan $Q = Q_r \cap Q_s$, P_r-asalımsı olur. Yani $A = Q \cap (\cap_{i \neq r,s} Q_i)$ asalımsı ayrışımdır. Bu şekilde devam edersek, verilen asalımsı ayrışımda,

$r \neq s$ olduğunda $P_r \neq P_s$ sonucu çıkar. Bu nedenle, her zaman R'nin herhangi bir ideali için indirgenmiş asalımsı ayrışım bulunur.

Önerme 1.2.10. Q, R Noetherian halkasının bir ideali olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

1. Q, asalımsıdır;
2. Q, Noether kuvvetli asalımsıdır.
3. Q, Mori kuvvetli asalımsıdır.
4. Q, düzgün asalımsıdır [7].

İspat 4 ⇒ 1: Tanımdan 1.1.5 ten elde edilir.

1 ⇒ 2: Q, P-asalımsı ideal olsun. R Noetherian halka olduğu için $P = \sqrt{Q} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ sonlu üretilmiştir. Her $1 \leq i \leq n$ için ${a_i}^{m_i} \in Q$ olacak şekilde $m_i \in \mathbb{N}$ bulunur. $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ diyelim. P^m idealinin üreteçleri $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = m$ olacak şekilde ${a_1}^{k_1}{a_2}^{k_2} \dots {a_n}^{k_n}$ lerdir. $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ olduğundan en az bir i için $k_i \geq m_i$ ve buradan ${a_1}^{k_1}{a_2}^{k_2} \dots {a_n}^{k_n} \in Q$ bulunur. Dolayısıyla $P^m \subseteq Q$ dur, yani Q Noether kuvvetli asalımsıdır.

2 ⇒ 3: Önerme 1.1.6 dan elde edilir.

3 ⇒ 4: Kabulden bir $s \in P - Q$ için $sP \subseteq Q$ dir. Q bir P-asalımsı olduğundan $P \subseteq (Q\colon s) \subseteq P$ dolayısıyla $P = \sqrt{Q} = (P\colon s)$ olur. R, Noetherian olduğundan 1 ⇒ 2 ispatında olduğu gibi bir $n \in \mathbb{N}$ için $P^n = (Q\colon s)^n \subseteq Q$ olur. Böylece, Q Noether kuvvetli asalımsı ve Önerme 1.1.8 den düzgün asalımsıdır.

1.3. Kuvvetli Laskerian Halkalarda Asalımsı İdealler

Bu bölümde, kuvvetli Laskerian halkalarda asalımsı ideallerle ilgili sonuçları inceleyeceğiz. Bu sonuçlar, kuvvetli Laskerian olma özelliğine ilginç bir denklikle sonuçlanacaktır.

Tanım 1.3.1 R halkasının her ideali sonlu tane Noether kuvvetli asalımsı idealin bir kesişimiyse R ye kuvvetli Laskerian halka denir [13].

Bir Kuvvetli Laskerian halkadaki her idealin kendi radikalinin bir kuvvetini içerdiğini, her ideal Noether kuvvetli asalımsı ideallerin sonlu bir kesişimi olduğundan ve Noether

kuvvetli asalımsı idealler radikallerinin bir kuvvetini içerdiğinden, görmek kolaydır. Ayrıca Noetherian halkadaki her asalımsı idealin Önerme 1.2.10'dan aynı zamanda Noether kuvvetli asalımsı olduğu ve Noetherian halkadaki her idealin asalımsı ideallerin sonlu bir kesişimi şeklinde olduğundan tüm Noetherian halkaların kuvvetli Laskerian olduğu sonucu çıkar.

Tanım 1.3.2 S bir R halkasının alt kümesi olmak üzere $1 \in S$ ve her $y, z \in S$ için $yz \in S$ ise S ye çarpımsal kapalı alt küme adını veririz [3].

Bir R halkasındaki herhangi bir P asal ideali için, $R\backslash P$ nin çarpımsal kapalı alt küme olduğunu gösterelim: $p, q \in R\backslash P$ alalım. $1 \in R\backslash P$ görmek kolaydır çünkü P has ideal olduğundan birimi içermez. Şimdi $pq \in P$ olsun. P asal olduğundan $p \in P$ veya $q \in P$ dir, bu ise kabulümüzle çelişir, yani $pq \in R\backslash P$ dir [6].

Tanım 1.3.3. A, R nin ideali ve S, R nin çarpımsal alt kümesi olsun. A nın S ye göre doygunluğunu $sat_S(A)$ ile gösterip aşağıdaki gibi tanımlayacağız:

$$sat_S(A) = \{r \in R \mid \exists s \in S \text{ için } rs \in A\}$$

Eğer P, R nin asal ideali ise, A nın R de çarpımsal bir alt küme olan $R\backslash P$ ye göre doygunluğu basitçe $sat_P\ (A)$ olarak göstereceğiz [13].

Lemma 1.3.4 S, R nin bir çarpımsal alt kümesi ve Q, R nin asalımsı idealiyse,

$$sat_S\ (Q) = \begin{cases} Q, & Q \cap S = \emptyset \ için \\ R, & Q \cap S \neq \emptyset \ için \end{cases}$$

gerçeklenir [13].

İspat: R nin bir S çarpımsal alt kümesi ve Q asalımsı ideali verilsin. İki durum söz konusudur.

Durum1: $Q \cap S = \emptyset$ olsun. $Q \subseteq sat_S\ (Q)$ kapsaması açıkça görülür. $x \in sat_S\ (Q)$ diyelim. O halde $xy \in Q$ şartını sağlayan bir $y \in S$ bulunur. $y \in S$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $y^n \in S$ olur. Fakat $Q \cap S = \emptyset$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $y^n \notin Q$ olur. Q asalımsı olduğundan $x \in Q$ ve buradan $sat_S\ (Q) \subseteq Q$ elde edilir.

Durum2: $Q \cap S \neq \emptyset$ olsun. O halde en az bir $s \in Q \cap S$ bulunur. $t \in R$ alalım. $ts \in Q$ ve $s \in S$ olduğundan $t \in sat_S(Q)$ olur. O halde $sat_S(Q) = R$ çıkar.

Tanım 1.3.5. I, R halkasının bir ideali olsun. $I \subseteq P$ asal ideali için, $I \subseteq P^* \subset P$ olacak şekilde hiçbir P^* asal ideali yoksa P ye I nın minimal asal ideali denir [16].

Önerme 1.3.6. Her has ideali içeren en az bir minimal asal ideal vardır [6].

İspat: Diyelim ki I, R halkasının bir has ideali ve $\mathcal{P}$, I yı içeren tüm asal ideallerin kümesi olsun. I yı içeren herhangi bir maksimal ideal asal olduğundan ve bu tür idealler mevcut olduğundan, $\mathcal{P}$ boş değildir. $\mathcal{P}$ de bir $\{P_j\}_{j\in\Delta}$ zincirini alalım. O halde $\cap_{j\in\Delta} P_j = Q$ nun I yı içeren bir ideal olduğu açıktır fakat Q nun asal olduğunu gösterelim. $ab \in Q$, $a \notin Q$ olsun. Şu halde bir k için $a \notin P_k$ olur. Zincirdeki P asal ideali için ya $P \supseteq P_k$ ya da $P \subseteq P_k$ dır. Eğer $P \supseteq P_k$ ise $ab \in P_k$ ve $a \notin P_k$ olduğundan $b \in P_k \subseteq P$ bulunur. Eğer $P \subseteq P_k$ ise $a \notin P_k$ olduğundan $a \notin P$ bulunur. P asal ve $ab \in P$ olduğundan $b \in P$ elde edilir. Zincirdeki her P asal ideali için $b \in P$ olmasından $b \in Q = \cap_{j\in\Delta} P_j$ elde edilir. Şu halde Q zincirin ters kapsama $\supseteq$ bağıntısına göre bir üst sınırı ve Zorn Lemmayı kullanarak, $\mathcal{P}$ nin istenildiği gibi en az bir minimal elemana sahip olması gerektiğini elde ederiz.

Teorem 1.3.7 $I \subseteq P$ sağlayan R nin bir P asal ideali için aşağıdakiler denktir:

1. P, I nın minimal asalıdır.
2. $R\backslash P$, I ile ayrık olan maksimal çarpımsal kümedir.
3. Her $a \in P$ için $xa^n \in I$ olacak şekilde bir $x \in R\backslash P$ ve $n \in \mathbb{N}$ bulunur [16].

İspat: $1 \Rightarrow 2$: $R\backslash P$ kapalı kümesini I ile ayrık olan kapalı kümelerin maksimali S ye genişletelim. Q, S ile ayrık olan ve I yı içeren ideallerin bir maksimali olsun. Bu durumda Q asaldır. $Q \cap S = \emptyset$ ve $R\backslash P \subseteq S$ olduğundan $Q \cap (R\backslash P) = \emptyset$ ve böylece $Q \subseteq P$ elde edilir. P minimal olduğundan $Q = P$ olur. $Q \cap S = \emptyset$ olduğundan $S \subseteq R\backslash Q = R\backslash P \subseteq S$ yani $S = R\backslash P$ bulunur.

$2 \Rightarrow 3$: $0 \neq a \in P$ alalım. $S = \{ya^n : y \in R\backslash P \text{ ve } n = 0,1,2, \dots\}$ kümesini oluşturalım. S nin $R\backslash P$ yi has içeren (yani, $R\backslash P \subsetneq S$) bir çarpımsal küme olduğu açıktır. $R\backslash P, I$ ile ayrık kapalı kümelerin maksimali olduğundan $S \cap I \neq \emptyset$ yani bir $x \in R\backslash P$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $xa^n \in I$ bulunur.

$3 \Rightarrow 1$: Q, R nin bir asal ideali ve $I \subseteq Q \subseteq P$ olsun. Bir $a \in P \backslash Q$ varsa kabulden $xa^n \in I$ koşulunu sağlayan $x \in R \backslash P$ ve $n \in \mathbb{N}$ bulunur. $xa^n \in I \subseteq Q$ ve Q asal olduğundan $x \in Q$ veya $a \in Q$ çelişkisi elde edilir. O halde $Q = P$ bulunur.

Lemma 1.3.8 P, R nin I ideali üzerinde bir minimal asalıysa I nın P ye göre doygunluğu P-asalımsıdır [13].

İspat: P nin I üzerinde bir minimal asal ideal olduğunu varsayalım. $ab \in sat_P(I)$ ve $a \notin sat_P(I)$ kabul edelim. O halde $abx \in I$ olacak şekilde bir $x \notin P$ bulunabilir. $a \notin sat_P(I)$ olduğundan $bx \in P$ bulunur. Buradan $x \notin P$ ve P asal olduğundan $b \in P$ çıkar. P, I nın minimal asalı ve $b \in P$ olduğundan, bir önceki teorem kullanılarak bir $r \in R \backslash P$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $rb^n \in I$ elde edilir. Sonuç olarak, $b^n \in sat_P(I)$, yani $sat_P(I)$ nın asalımsı ideal olduğu anlaşılır.

Lemma 1.3.9 J, R halkasının bir ideali, P asal ideal, $x \in R \backslash P$ ve $Q = (J : x)$ bir P-asalımsı ideal ise $J = Q \cap (J + xR)$ olur [13].

İspat: $J \subseteq Q$ ve $J \subseteq J + xR$ olduğundan $J \subseteq Q \cap (J + xR)$ olur. Ters kapsama için $y \in Q \cap (J + xR)$ alalım. O halde $y = j + bx$ olacak şekilde $j \in J$ ve $b \in R$ bulunabilir. $y \in Q$ olduğundan $jx + bx^2 = yx \in J$ sonucu çıkar. Bu bize $bx^2 \in J$ sonucunu verir ve bu durumda $bx \in Q$ olur. Ancak $Q \subseteq P$ ve $x \notin P$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $x^n \notin Q$ olur. Böylece $b \in Q$ elde edilir. Dolayısıyla $bx \in J$ bize istenildiği gibi $y = j + bx \in J$ sonucunu verir.

Teorem 1.3.10 da Laskerian halkalar için ilginç bir denklik gösteriyoruz. Ayrıca şunu belirtmeliyiz ki Teorem 1.3.10 daki sonuç, Teorem 1.3.14 teki kuvvetli Laskerian halkalar için istediğimiz denkliği gösterirken son derece yararlı olacaktır.

Teorem 1.3.10 R nin Laskerian olması için gerek yeter koşul aşağıdakilerin sağlanmasıdır.

i. R nin her A ideali ve P asal ideali için, A nın P ye göre doygunluğu, $x \notin P$ olacak şekilde $(A : x)$ biçimindedir.
ii. R nin her A ideali ve çarpımsal kümelerin azalan (S_n) zinciri için $(sat_{S_n}(A))$ azalan zinciri de belli bir adımda durur [13].

İspat: (⇒): A, R nin bir ideali ve P, R nin bir asal ideali olsun. R, Laskerian olduğundan herbir Q_i, P_i-asalımsı olmak üzere $A = Q_1 \cap \ldots \cap Q_k$ biçimindedir. Şimdi ilk iddayı kanıtlayalım. $sat_P(A) = sat_P(Q_1 \cap \ldots \cap Q_k) = sat_P(Q_1) \cap \ldots \cap sat_P(Q_k)$ sağlandığı açıkça görülür. Her i için, Lemma 1.3.4 e göre $sat_P(Q_i) = Q_i$ veya $sat_P(Q_i) = R$ olur. Gerekli durumlarda $sat_P(Q_i) = R$ eşitliğini sağlayan $sat_P(Q_i)$ leri kesişimin dışına atıp indisleri yeniden sıralarsak $Q_1, \ldots, Q_m$ asalımsı idealleri için $sat_P(Q_i) = Q_i$ elde edilir ve böylece $sat_P(A) = sat_P(Q_1 \cap \ldots \cap Q_m) = sat_P(Q_1) \cap \ldots \cap sat_P(Q_m) = Q_1 \cap \ldots \cap Q_m$ çıkar. Sonuç 1.2.9 a göre, bu asalımsı ayrışımın minimal olduğunu varsayabiliriz.

Durum1: $m = 0$ olduğunu varsayalım. O zaman $sat_P(A) = R$ olur. Bu nedende $A \nsubseteq P$ olur. O halde $x \in A \backslash P$ alırsak $sat_P(A) = (A : x)$ olur.

Durum2: $m = k$ olduğunu varsayalım. O zaman $sat_P(A) = A$ olur. $x = 1$ alırsak $sat_P(A) = (A : x)$ olur.

Durum 3: $0 < m < k$ olduğunu varsayalım, bu durumda $A \subseteq P$ dir. $P_1 \ldots P_k \subseteq P_1 \cap \ldots \cap P_k = \sqrt{A} \subseteq \sqrt{P} = P$ olduğundan bir i için $P_i \subseteq P$ olur. $P_i \subseteq P$ olacak şekilde tüm asal ideallerin $P_1 \ldots P_m$ olduğunu gösterelim. $m + 1 \leq i \leq k$ olacak şekilde bir i için $P_i \subseteq P$ olduğunu kabul edelim. Böylece $sat_P(Q_i) = R$ ve $Q_i \subseteq P_i \subseteq P$ olur. Ancak bu her $r \in R$ için $rs \in Q_i$ olacak şekilde $s \notin P$ var olduğu anlamına gelir. $P_i \subseteq P$ olduğundan $s \notin P_i$ bulunur. Q_i asalımsı olduğundan $r \in Q_i$ ve böylece $Q_i = R$ çelişkisi elde edilir. O zaman $1 \leq i \leq m$ olacak şekilde bir i için $P_i \nsubseteq P$ olduğunu kabul edelim. O halde $Q_i \nsubseteq P$ olur. Ancak bu $sat_P(Q_i) = R$ çelişkisini verir.

Şimdi her $j = m + 1, m + 2, \ldots, k$ için $x_j \in Q_j \backslash P$ seçelim. $x = x_{m+1} x_{m+2} \ldots x_k$ alalım. $x_j \notin P$ olduğundan $x \notin P$ olur ve böylece $j = m + 1, \ldots, k$ için $(Q_j : x) = R$ elde edilir. Her $i = 1, \ldots, m$ için $x \notin P_i$ olduğundan $(Q_i : x) = Q_i$ olur. Buradan $sat_P(A) = Q_1 \cap \ldots \cap Q_m = (Q_1 : x) \cap \ldots \cap (Q_m : x) \cap (Q_{m+1} : x) \cap \ldots \cap (Q_k : x) = (A : x)$. O halde i şıkkındaki iddia doğrudur.

ii yi göstermek için, R nin çarpımsal alt kümelerinin bir azalan zinciri olarak (S_n) ailesini alalım. Eğer n sabit ise $sat_{S_n}(A) = sat_{S_n}(Q_1) \cap \ldots \cap sat_{S_n}(Q_k)$ olur. Böylece her i için $(sat_{S_n}(Q_i))$ azalan zinciri belli bir adımdan sonra duruyorsa $(sat_{S_n}(A))$ azalan zinciri de

durur. İspatı iki durumda ele alacağız.

Durum 1: Her n için $Q_i \cap S_n \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Lemma 1.3.4 ten her n için $sat_{S_n}(Q_i) = R$ olur. Böylece $(sat_{S_n}(Q_i))$ azalan zinciri durur.

Durum 2: Bir N için $Q_i \cap S_N = \emptyset$ olduğunu varsayalım. O halde her $n \geq N$ için, $Q_i \cap S_n = \emptyset$ olur. Lemma 1.3.4 ten $sat_{S_n}(Q_i) = Q_i$ olur. Böylece $(sat_{S_n}(Q_i))$ azalan zinciri durur.

$(\Longleftarrow)$ R halkasının i ve ii koşullarını sağladığını varsayalım. A, R nin bir ideali olmak üzere A nın R de asalımsı ideallerinin bir kesişimi olarak yazılamayacağını varsayalım. P_1, A nın minimal asal ideali olsun. Lemma 1.3.8 den $sat_{P_1}(A), P_1$-asalımsı ideal ve i den bir $x_1 \in R\backslash P_1$ için $Q_1 = (A: x_1) = sat_{P_1}(A)$ elde edilir. $G_1 = A + x_1R$ alırsak Lemma 1.3.9 dan $A = Q_1 \cap G_1$ olur. $G_1 \subseteq G$ ve $A = Q_1 \cap G$ koşullarını sağlayan G idealleri arasında maximal elemanın $\widehat{G_1}$ olduğunu varsayalım. A nın varsayımına göre, $\widehat{G_1}$ has ideal olmalıdır, aksi takdirde $A = Q_1$ asalımsı ayrışımına sahip olur ve bu bir çelişkidir. P_2 yi $\widehat{G_1}$ in minimal asalı seçelim. A idealine yaptıklarımızın benzerini $\widehat{G_1}$ ideali için de yaparsak bir $x_2 \in R\backslash P_2$ için $Q_1 \neq Q_2 = (\widehat{G_1}: x_2)$ bir P_2-asalımsı ideal ve $\widehat{G_1} + x_2R = G_2 \supsetneq \widehat{G_1}$ olur. Böylece $\widehat{G_1} = Q_2 \cap G_2$ ve $A = Q_1 \cap Q_2 \cap G_2$ elde edilir. $\widehat{G_2}$ yi $G_2 \subseteq G$ ve $A = Q_1 \cap Q_2 \cap G_2$ koşullarını sağlayan G idealleri arasında maksimal eleman kabul edelim. Bu şekilde devam edersek, (Q_n) P_n-asalımsı ideallerin sonsuz bir dizisi ve azalan bir $(\widehat{G_n})$ dizisi elde ederiz. Her n için $H_n = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ alırsak $A = \widehat{G_n} \cap H_n$ bulunur. Ayrıca yukarıdaki inşaaya göre $x_n \in \widehat{G_n}\backslash P_n$ olduğunu unutmayalım. Şimdi $S_n = \cap_{1 \leq i \leq n} (R\backslash P_i)$ alalım. $sat_{S_n}(A) = H_n$ olduğunu göstereceğiz. $x \in sat_{S_n}(A)$ alalım. $xy \in A$ olacak şekilde $y \in S_n$ bulunur. Bu yüzden $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $xy \in Q_i$ olur. Fakat $1 \leq i \leq n$ için $y \in (R\backslash P_i)$ olduğundan $x \in Q_i$ olur. Böylece $x \in H_n$ ve $sat_{S_n}(A) \subseteq H_n$ elde edilir. Şimdi $x \in H_n$ alalım. $1 \leq i \leq n$ için $x \in Q_i$ olur. Her $k = 1, 2, \ldots, n$ için P_k nın seçimiyle $x_1, \ldots, x_{k-1} \in P_k$ ve $x_k \notin P_k$ olur. $x_n = y_n$ diyelim. Geriye doğru çalışarak, istediğimiz y yi yinelemeli olarak tanımlayacağız. Her k için $y_{k+1} \in P_k$ ise $y_k = x_k + y_{k+1}$ alalım. Aksi taktirde $y_k = y_{k+1}$ alalım. Şimdi $y = y_1$ olsun. y nin tanımına göre $1 \leq i \leq n$ için $y \in R\backslash P_i$, dolayısıyla $y \in S_n$ olur. $x_1, \ldots, x_n \in G_n \subseteq \widehat{G_n}$ olduğundan $xy \in H_n \cap \widehat{G_n} = A$ olur. Böylece $x \in sat_{S_n}(A)$ ve buradan $H_n \subseteq sat_{S_n}(A)$

olur. Sonuç olarak $H_n = sat_{S_n}(A)$ çıkar.

ii koşulundan (H_n) dizisi bir adımda durur. Yani bir N için $H_N = H_{N+1}$ ve böylece $A = H_{N+1} \cap \widehat{G_{n+1}} = H_N \cap \widehat{G_{n+1}}$ olur. $G_N \subseteq G$ ve $A = H_N \cap G$ olacak şekilde G idealleri arasında maximal eleman $\widehat{G_n}$ olduğundan $\widehat{G_n} = \widehat{G_{n+1}}$ elde edilir. $\widehat{G_n} \subsetneq \widehat{G_{n+1}}$ olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece, A, R nin asalımsı ideallerinin bir kesişimi olarak yazılabilir, yani R Laskerian halkadır.

Teorem 1.3.10, Lemma 1.3.11, Lemma 1.3.12 ve Önerme 1.3.13 den elde edilen sonucu kullanarak, şimdi Teorem 1.3.10 daki Laskerian halkalar için olana benzer şekilde kuvvetli Laskerian halkalar için bir denklik elde etmeye başlayabiliriz.

Lemma 1.3.11. Q, R nin P-asalımsı ideali ve $(Q:P) = Q$ olsun.

i. Q kuvvetli Noether asalımsı değildir.
ii. Bir $x \in P$ için $Q \neq (Q:x)$ bir P-asalımsı ideal fakat kuvvetli Noether asalımsı ideal değildir [13].

İspat: i. **(**$(Q:P) = Q$ olmak üzere Q nun kuvvetli Noether asalımsı ve $e(Q) = N$ olduğunu kabul edelim. O zaman $P^{N-1}P = P^N \subseteq Q$ olması $P^{N-1} \subseteq (Q:P) = Q$ olmasını gerektirir. Bu ise bir çelişkidir çünkü bu durumda $N - 1 < e(Q)$ olur.

$ii.i$ den **(**$(Q:P) = Q$ nun kuvvetli Noether asalımsı olmadığını biliyoruz. Şimdi bir $x \in P\backslash Q = P\backslash(Q:P)$ seçelim. Buradan $xP \nsubseteq Q$ olduğundan $xy \notin Q$ olacak şekilde $y \in P\backslash Q$ bulunur. $x \in P\backslash Q$ olduğundan $x^n \in Q$ olacak şekilde en küçük $n \geq 2$ tamsayısı vardır. Böylece $x^{n-1}(xy) = x^n y \in Q$ yani $xy \in (Q:x^{n-1})$ elde edilir. Buradan $x^{n-1} \in P$ olmak üzere $Q \subsetneq (Q:x^{n-1})$ bulunur. $x^{n-1}R \nsubseteq Q$ olduğundan Önerme 1.1.12 den $(Q:x^{n-1})$ bir P-asalımsı ideal olur. Şimdi $(Q:x^{n-1})$ nin Noether kuvvetli asalımsı ve $e(Q:x^{n-1}) = N$ olduğunu varsayalım. Herhangi bir k için $(Q:P^k) = \left((Q:P):P^{k-1}\right) = (Q:P^{k-1}) = \cdots = (Q:P) = Q$ olduğu görülür. O zaman $x^{n-1}P^N \subseteq Q$ olması $x^{n-1} \in (Q:P^N) = Q$ olmasını gerektirir. Bu ise n nin seçiminden dolayı çelişkidir.

Lemma 1.3.12. Q, R nin Noether kuvvetli P-asalımsı ideali ve $e(Q) = N$ olsun. Bu durumda,

i. Her bir $k < N$ için P^k lar birbirinden farklı ve $(Q:P^k)$ lar da birbirinden farklıdır.

ii. R nin herhangi bir A ideali için aşağıdakilerden sadece biri doğrudur:
   a. $(Q:A) = R$
   b. $(Q:A) = Q$
   c. $e(Q:A) \leq N-1$ olmak üzere $Q \subsetneq (Q:A)$ bir Noether kuvvetli P-asalımsı idealdir [13].

İspat: $i.$ $k_1 < k_2 < N$ olmak üzere $P^{k_1} = P^{k_2}$ ise $P^{N-k_2+k_1} = P^{N-k_2}P^{k_1} = P^{N-k_2}P^{k_2} = P^N \subseteq Q$ olur. $N - k_2 + k_1 < N$ olduğundan bu ise bir çelişkidir. Şimdi $k_1 < k_2 < N$ olmak üzere $(Q:P^{k_1}) = (Q:P^{k_2})$ kabul edelim. O zaman $(Q:P^{N-k_2+k_1}) = (Q:(P^{k_1}P^{N-k_2})) = ((Q:P^{k_1}):P^{N-k_2}) = ((Q:P^{k_2}):P^{N-k_2}) = (Q:P^N) = R$ olur. Bu durumda $P^{N-k_2+k_1} \subseteq Q$ ve $N - k_2 + k_1 < N$ olduğundan çelişki elde edilir.
$ii.$ Durum 1: $A \subseteq Q$ ise $(Q:A) = R$ olur.
Durum 2: $A \nsubseteq P$ olduğunu kabul edelim. $x \in (Q:A)$ alalım. O halde $xA \subseteq Q$ olur. Varsayımdan $xa \in Q$ yu sağlayan $a \in A\backslash P$ bulunur. Her n için $a^n \notin Q$ olduğundan $x \in Q$ olur. Böylece $(Q:A) = Q$ çıkar.
Durum 3: $A \subseteq P$ ve $A \nsubseteq Q$ olduğunu kabul edelim. Önerme 1.1.12 den $(Q:A)$ nın P-asalımsı olduğunu biliyoruz. Aynı zamanda $P^{N-1} \subseteq (Q:A)$ olması $P^{N-1}A \subseteq P^{N-1}P = P^N \subseteq Q$ olmasını gerektirir. Böylece $(Q:A)$ bir Noether kuvvetli asalımsı olur ve $e(Q:A) \leq N-1$ dir.

Önerme 1.3.13. Q, R halkasının P-asalımsı ideali olsun. Her (B_n) ideal dizisi için R nin ideallerinin $(Q:B_1B_2 \cdots B_k)$ artan zinciri belirli bir adımda durursa, Q Noether kuvvetli asalımsı idealdir [13].

İspat: İlk olarak $Q = P$ ise, o zaman Q nun Noether kuvvetli asalımsı olduğu açıktır. $Q \neq P$ varsayabiliriz. Bu durumda $(Q:s) = P$ yi sağlayan bir $s \in P$ olduğunu gösterelim. Aksinin doğru olduğunu kabul edelim. Bir $x_1 \in P\backslash Q$ seçelim. Bu durumda $x_1 \in (Q:x_1^{n_1})$ ve $x_1^{n_1} \notin Q$ olacak şekilde n_1 doğal sayısı vardır. Kabulümüzden $(Q:x_1^{n_1}) \neq P$ ve böylece $x_2 \in P\backslash(Q:x_1^{n_1})$ seçebiliriz. Bu halde $x_2 \in (Q:x_1^{n_1}x_2^{n_2})$ ve $x_2^{n_2} \notin (Q:x_1{}^{n_1})$ olacak şekilde n_2 doğal sayısı vardır. Bu şekilde devam edersek, $(Q:s) = P$ olacak şekilde bir $s \in P$ yoksa, $(Q:x_1^{n_1}) \subsetneq (Q:x_1^{n_1}x_2^{n_2}) \subsetneq \cdots$ olacak şekilde artan bir zincir elde ederiz ve bu zincir hiçbir zaman durmaz. Bu ise çelişkiye sebep olur. Böylece $(Q:s) = P$ olacak şekilde $s \in P$ vardır. $Q \neq P$ nin Noether kuvvetli asalımsı olmadığını

varsayalım. İlk varsayımdan $(Q:P) \subseteq (Q:P^2) \subseteq \cdots$ zinciri duracağından $(Q:P^n) = (Q:P^{n+1})$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. Ayrıca Q Noether kuvvetli asalımsı olmadığından $(Q:P^n) \subsetneq P$ olur. $(Q:P^n)$ bir P-asalımsı ideal ve $(Q:P^n) \neq P$ olduğundan $((Q:P^n):s) = P$ olacak şekilde bir $s \in P$ bulunur. Böylece $(Q:P^n s) = ((Q:P^n):s) = P$ olur. Bu durumda $s \in (Q:P^{n+1}) = (Q:P^n)$ dir. Fakat $s \in (Q:P^n)$ olması $((Q:P^n):s) = R$ olmasını gerektirir bu ise $(Q:P^n s) = P$ eşitliğinden $P = R$ çelişkisini verir. Böylece Q, Noether kuvvetli asalımsıdır.

Teorem 1.3.14. Bir R halkasının kuvvetli Laskerian olması için gerek yeter koşul aşağıdaki iki koşulun sağlanmasıdır:

i. Her (B_k) ideal dizisi ve A ideali için, $((A:B_1B_2\ldots B_k))$ artan zinciri belli bir adımda durur.
ii. R nin her azalan çarpımsal (S_n) küme zinciri ve A ideali için $(sat_{S_n}(A))$ azalan zinciri belli bir adımda durur [13].

İspat: ($\Rightarrow$): R halkası kuvvetli Laskerian halka olsun. R de i şıkkının doğru olduğunu gösterelim. R nin ideallerinin (B_k) dizisini ve A idealini göz önüne alalım. R kuvvetli Laskerian olduğu için her Q_i, Noether kuvvetli P_i-asalımsı ideal ve $e(Q_i) = N_i$ olmak üzere $A = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_r$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda $(A:B_1) = ((Q_1 \cap Q_2 \ldots \cap Q_r):B_1) = (Q_1:B_1) \cap \ldots \cap (Q_r:B_1)$ olur. Dolayısıyla her artan $((Q:B_1B_2\ldots B_k))$ zincirinin durduğunu göstermek yeterlidir. $1 \leq i \leq r$ için sabit bir i alalım. Lemma 1.3.12'ye göre herhangi bir B ideali için şu üç durumdan biri geçerlidir: $a.$ $(Q_i:B) = R$, $b.$ $(Q_i:B) = Q_i$, ya da $c.$ $e(Q_i:B) \leq N_i - 1$ olmak üzere $Q_i \subsetneq (Q_i:B)$ bir Noether kuvvetli P_i-asalımsı ideal olur. Şimdi aşağıdaki üç durumu düşünelim.

Durum 1: $B_1\ldots B_n \subseteq Q_i$ olacak şekilde bir n sayısı olduğunu kabul edelim. Böylece $(Q_i:B_1\ldots B_n) = R$ ve buradan her $m > n$ için $(Q_i:B_1\ldots B_n) \subseteq (Q_i:B_1\ldots B_m) \subseteq R$ olduğundan $R = (Q_i:B_1\ldots B_m)$ elde edilir, yani zincir durur.

Durum 2: Her k için $B_1\ldots B_k \nsubseteq Q_i$ olsun. Bu durumda $(Q_i:B_1\ldots B_k) \neq R$ olur. Lemma 1.3.12 den $(Q_i:B_1\ldots B_k) = Q_i$ ya da $e(Q_i:B_1\ldots B_k) \leq N_i - 1$ olmak üzere $Q_i \subsetneq (Q_i:B_1\ldots B_k)$ bir Noether kuvvetli P_i-asalımsı idealdir. Şimdi $((Q_i:B_1\ldots B_k))$ zincirinin belli bir adımda durmadığını varsayalım. Böylece $k_1 < k_2 < \cdots < k_{N_i-1}$ doğal sayıları

$Q_i \subsetneq \left(Q_i : B_1 \dots B_{k_1}\right) \subsetneq \left(Q_i : B_1 \dots B_{k_2}\right) \subsetneq \cdots \subsetneq \left(Q_i : B_1 \dots B_{k_{N_i-1}}\right)$ olacak şekilde bulunur. Lemma 1.3.11 den $\left(Q_i : B_1 \dots B_{k_1}\right)$ ideali $e(Q_i : B_1 \dots B_{k_1}) \leq N_i - 1$ olacak şekilde bir Noether kuvvetli P_i-asalımsı idealdir. Benzer şekilde $\left(Q_i : B_1 \dots B_{k_2}\right) = \left(\left(Q_i : B_1 \dots B_{k_1}\right) : B_{k_1+1} \dots B_{k_2}\right) \supsetneq \left(Q_i : B_1 \dots B_{k_1}\right)$ olduğundan yine Lemma 1.3.12 den $\left(Q_i : B_1 \dots B_{k_2}\right)$ ideali $e(Q_i : B_1 \dots B_{k_2}) \leq N_i - 2$ olacak şekilde bir Noether kuvvetli P_i-asalımsı idealdir. Yukarıdaki gibi devam edersek, $\left(Q_i : B_1 \dots B_{k_{N_i-1}}\right)$ ideali $e(Q_i : B_1 \dots B_{k_{N_i-1}}) \leq 1$ olacak şekilde bir Noether kuvvetli P_i-asalımsı idealdir. Böylece $P_i \subseteq \left(Q_i : B_1 \dots B_{k_{N_i-1}}\right) \subseteq P_i$ yani $\left(Q_i : B_1 \dots B_{k_{N_i-1}}\right) = P_i$ elde edilir. Yine Lemma 1.3.12 den $\left(Q_i : B_1 \dots B_{k_{N_i}}\right)$ bir P_i-asalımsı ideal olacağından $\left(Q_i : B_1 \dots B_{k_{N_i}}\right) \subseteq P_i$ ve buradan $P_i = \left(Q_i : B_1 \dots B_{k_{N_i-1}}\right) \subseteq \left(Q_i : B_1 \dots B_{k_{N_i}}\right) \subseteq P_i$ elde edilir. Böylece $\left(Q_i : B_1 \dots B_{k_{N_i-1}}\right) = \left(Q_i : B_1 \dots B_{k_{N_i}}\right)$ çıkar yani $((Q_i : B_1 \dots B_k))$ zinciri belli bir adımda durur. O halde Teoremin ilk iddiası doğru olur. Kuvvetli Laskerian halkalar Laskerian olduğundan $ii.$ koşulu Teorem 1.3.10 dan elde edilir.

($\Leftarrow$): R halkası i ve ii koşulunu sağlayan bir halka olsun. A, R nin bir ideali ve P de R nin bir asal ideali olsun. $sat_P(A) = (A : x)$ i sağlayan bir $x \in R \backslash P$ olmasın. $x_1 \in R \backslash P$ alalım. Yukarıdaki kabulden $(A : x_2) \nsubseteq (A : x_1)$ olacak şekilde bir $x_2 \in R \backslash P$ vardır. Buradan $(A : x_1) \subsetneq (A : x_1 x_2)$ olur. Yine kabulden $(A : x_3) \nsubseteq (A : x_1 x_2)$ olacak biçimde $x_3 \in R \backslash P$ bulunur. Böylece $(A : x_1) \subsetneq (A : x_1 x_2) \subsetneq (A : x_1 x_2 x_3)$ elde edilir. Bu şekilde devam edersek artan bir $((A : x_1 x_2 \dots x_k))$ dizisi bulunur ve bu i koşuluyla çelişir. Bu nedenle, $sat_P(A) = (A : x)$ i sağlayan bir $x \in R \backslash P$ bulunur, yani Teorem 1.3.10 daki i koşulu sağlanır. Böylece R Laskerian halkadır. Şimdi, Q nun R de bir P-asalımsı ideal olduğunu kabul edelim. Önerme 1.3.13 ve i koşuluna göre, Q, Noether kuvvetli asalımsı olmak zorundadır. R deki her asalımsı ideal Noether kuvvetli asalımsı olduğundan R, istendiği gibi kuvvetli Laskerian halkadır.

2. POTENTLY ASALIMSI İDEALLER

2.1. Potently Asalımsı İdeallerin Temel Özellikleri

Asal ideallerin aşağıdaki özelliği bu ideallerin Cebirsel geometriye ve Genel topolojiye uygulama alanı oluşturmasını sağlayan Zariski topolojisini veren en önemli özelliktir.

Teorem 2.1.1 $P \subset R$ nin bir ideali olsun. P nin asal olması için g.y.k. I ve J, R nin idealleri ve $IJ \subseteq P$ iken $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ olmasıdır [24].

İspat: ($\Rightarrow$): P, R nin asal ideali olsun. I ve J, R nin idealleri olmak üzere $IJ \subseteq P$ ve $I \nsubseteq P$ kabul edelim. Bir $r \in I - P$ seçelim. Her $s \in J$ için $rs \in P$ ve $r \notin P$ olduğundan $s \in P$ ve buradan $J \subseteq P$ elde edilir.
($\Leftarrow$): $rs \in P$ olacak şekilde $r, s \in R$ alalım. $I = (r)$ ve $J = (s)$ olsun. Bu durumda $IJ = (r)(s) = (rs) \subseteq P$ olur ve kabulden $r \in I \subseteq P$ veya $s \in J \subseteq P$ elde edilir. Böylece P nin asal olduğu anlaşılır.

Yukarıdaki teoremde asal ideallerin ideal teorik karakterizasyonu verilmiştir. Bu ideal teorik karakterizasyonun bir benzeri asalımsı idealler için doğru mudur? sorusu akla gelmektedir, yani Q bir asalımsı ideal, I ve J ise R halkasının iki ideali ve $IJ \subseteq Q$ iken $I \subseteq Q$ veya bir n doğal sayısı için $J^n \subseteq Q$ olmak zorunda mıdır? Şimdi aşağıdaki örnekle bu duruma negatif bir cevap verilmektedir.

Örnek 2.1.2 F bir cisim, $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$ değişkenlerin bir kümesi olmak üzere $R = F[X]$ olsun. $Q = (\{{X_i}^2, X_1X_j : i \geq 1 \text{ ve } j \geq 2\})$ idealini alalım. Bu durumda $\sqrt{Q} = (X)$ bir maksimal ideal olduğundan Önerme 1.1.3 e göre Q bir asalımsı ideal çıkar. Şimdi $A = (X_1)$ ve $B = (\{X_j : j \geq 2\})$ ideallerini alalım. Bu durumda $AB = (\{X_1X_j : j \geq 2\}) \subseteq Q$ olur. $X_1 \notin Q$ olduğundan $A \nsubseteq Q$ elde edilir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $X_2X_3 \dots X_{n+1} \notin Q$ olduğundan $B^n \nsubseteq Q$ çıkar. Yani yukarıdaki sorunun cevabı asalımsı idealler için negatiftir.

Yukarıdaki örnek bize asalımsı ideallerden daha kuvvetli fakat asal ideallerden daha zayıf olan bir ideal sınıfının var olduğunu söylemektedir. Bu ideal sınıfı, asalımsı ideal tanımındaki elemanların çarpımının ideallerin çarpımına genişletilmesiyle aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır. Bu bölümdeki tüm uğraşlarımız bu ideal sınıfının cebirsel

özelliklerini elde etmek ve daha önceki bölümlerde tanımlanan klasik ideallerle arasındaki ilişkileri vermektir.

Tanım 2.1.3 Q, R halkasının bir ideali olsun. R nin I ve J idealleri için $IJ \subseteq Q$ ve $I \nsubseteq Q$ olması bir $n \in \mathbb{N}$ için $J^n \subseteq Q$ olmasını gerektiriyorsa Q idealine potently asalımsı ideal denir [13].

Tanımdan açıkça anlaşılacağı üzerine her potently asalımsı ideal aynı zamanda bir asalımsı idealdir, gerçekten Q bir potently asalımsı ideal ve $rs \in Q$ olacak şekilde $r, s \in R$ verilsin. $I = (r)$ ve $J = (s)$ idealleri alınırsa, $IJ = (rs) \subseteq Q$ olur. Potently asalımsılıktan $r \in I \subseteq Q$ veya bir $n \in \mathbb{N}$ için $s^n \in J^n \subseteq Q$ elde edilir, o halde Q bir asalımsı idealdir. Fakat genelde her asalımsı idealin potently asalımsı olmadığı bir önceki örnekten anlaşılır.

Önerme 2.1.4. Q, R nin bir potently P-asalımsı ideali ise $(Q:A)$ ideali de herhangi bir $A \nsubseteq Q$ ideali için R halkasının potently P-asalımsı idealidir [13].

İspat: Q, potently P-asalımsı ve A, R nin $A \nsubseteq Q$ olacak şekilde bir ideali olsun. R nin B, C idealleri için $BC \subseteq (Q:A)$ ve $B \nsubseteq (Q:A)$ olsun. O halde $BAC \subseteq Q$ ve $BA \nsubseteq Q$ olur. Potently asalımsılık tanımına göre bir n doğal sayısı $C^n \subseteq Q \subseteq (Q:A)$ elde edilir. Ayrıca Önerme 1.1.11 den $\sqrt{(Q:A)} = P$ olur.

Önerme 2.1.5 te potently asalımsı ideal kavramının, iki farklı özellikten birine sahip asalımsı ideale eşdeğer olduğunu gösteriyoruz.

Önerme 2.1.5. Q, bir P-asalımsı ideal olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i. Q, potently P-asalımsı idealdir.
ii. $Q \subseteq I$, $J \subseteq P$, R nin idealleri olmak üzere; $IJ \subseteq Q$ ve $I \neq Q$ ise bir $n \in \mathbb{N}$ için $J^n \subseteq Q$ olur.
iii. $Q \subseteq J \subseteq P$, R nin idealleri olmak üzere $s \in P \backslash Q$ ve $sJ \subseteq Q$ ise bir $n \in \mathbb{N}$ için $J^n \subseteq Q$ olur [13].

İspat: (i)⇒(ii): $Q \subseteq I$, $J \subseteq P$, R nin idealleri olmak üzere $IJ \subseteq Q$ ve $I \neq Q$ olsun. Bu durumda $I \nsubseteq Q$ ve Q potently asalımsı olduğundan bir n için $J^n \subseteq Q$ olur.

(ii)⇒ (iii): $Q \subseteq J \subseteq P$, R nin idealleri, $s \in P\backslash Q$ ve $sJ \subseteq Q$ olsun. O halde $(sR + Q)J \subseteq Q$ ve $Q \subsetneq sR + Q$ olduğundan (ii) den bir n için $J^n \subseteq Q$ olur.

(iii)⇒ (i): $IJ \subseteq Q$ ve $I \nsubseteq Q$ olacak şekilde R nin I, J idealleri verilsin. Bir $s \in I - Q$ seçelim. $s \notin P$ olduğunu kabul edelim. Her $j \in J$ için $sj \in Q$ ve Q asalımsı olduğundan $j \in Q$ elde edilir. Böylece $J \subseteq Q$ olur. Şimdi $s \in P$ olduğunu kabul edelim. $J \nsubseteq P$ olsa $IJ \subseteq Q$ ve Q bir P-asalımsı olduğundan $I \subseteq Q$ çelişkisi çıkar. O halde $J \subseteq P$ elde edilir. Buradan $Q \subseteq Q + J \subseteq P$ ve $s(Q + J) \subseteq Q$ bulunur ve (iii) den bir n için $J^n \subseteq Q$ olur, yani Q potently asalımsıdır.

Önerme 2.1.6. Q, R nin bir ideali olsun. Q nun potently asalımsı olması için g.y.k. her $a \notin Q$ için $(Q: a)^n \subseteq Q$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ bulunmasıdır [13].

İspat. (⇒): Q potently asalımsı ve $a \notin Q$ olsun. Buradan $(aR)(Q: a) \subseteq Q$ ve $aR \nsubseteq Q$ olduğundan potently asalımsılıktan bir $n \in \mathbb{N}$ için $(Q: a)^n \subseteq Q$ elde edilir.
(⇐): Herhangi bir $k \notin Q$ için $(Q: k)^n \subseteq Q$ koşulunu sağlayan bir $n \in \mathbb{N}$ olsun. K ve L idealleri için $KL \subseteq Q$ ve $K \nsubseteq Q$ olsun. Bir $k \in K\backslash Q$ seçelim. $kL \subseteq Q$ yani $L \subseteq (Q: k)$ olduğundan kabulümüzden bir $n \in \mathbb{N}$ için $L^n \subseteq (Q: k)^n \subseteq Q$ olur. O halde Q potently asalımsıdır.

Önerme 2.1.7. Her Noether kuvvetli asalımsı ideal aynı zamanda bir potently asalımsı idealdir [13].

İspat. Q nun $e(Q) = N$ olacak şekilde bir Noether kuvvetli P-asalımsı ideal olduğunu kabul edelim. $IJ \subseteq Q$ ve $I \nsubseteq Q$ olacak şekilde I ve J idealleri alalım. Bir $x \in I\backslash Q$ seçelim. Her $j \in J$ için $xj \in Q$ olduğundan bir n için $j^n \in Q$ olur ve böylece $J \subseteq P$ çıkar. Buradan $J^N \subseteq P^N \subseteq Q$ yani Q, potently asalımsı olur.

Yukarıdaki önermenin tersi genelde doğru değildir, aşağıdaki örnek bu durumu vurgulamaktadır.

Örnek 2.1.8 F bir cisim ve $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$ sonsuz değişken kümesi olsun. Şimdi $Q = (\{X_i^i : i \in \mathbb{N}\})$ idealini alalım ve Q nun potently asalımsı bir ideal olduğunu fakat Noether kuvvetli asalımsı ideal olmadığını gösterelim. $IJ \subseteq Q$ ve $I \nsubseteq Q$ olacak şekilde

I, J idealleri verilsin. Bir $f \in I \backslash Q$ seçelim. Burada f nin $X_{i_1}^{d_1} \ldots X_{i_n}^{d_n}$ formunda ve tüm j ler için $d_j < i_j$ olacak biçimde bir en az bir terimi vardır. $\alpha_j = i_j - d_j$ olsun. Bir $g \in J$ alalım, bu durumda $fg \in Q$ olur. O zaman g deki her terim $X_{i_j}^{d_j}$ nin veya üssü i den büyük eşit olan bir değişken X_i nin katıdır. $[\frac{i_j}{a_j}]$ sayısı $\frac{i_j}{a_j}$ nin üst değeri yani $\frac{i_j}{a_j}$ den büyük eşit olan en küçük tam sayı olmak üzere $n = \sum_{j=1}^{m} [\frac{i_j}{a_j}]$ alalım. Buradan $J^n \subseteq Q$ elde edilir, yani Q, potently asalımsı olur. Ayrıca $\sqrt{Q} = P = (X)$ dir. Her n için $X_{n+1}^n \in P^n/Q$ olduğu görülür ve böylece Q, Noether kuvvetli asalımsı değildir.

Aşağıdaki sonuçta bir potently asalımsı idealin Noether kuvvetli asalımsı ideal olması için gerekli ek koşullar verilmektedir.

Sonuç 2.1.9. Q, R halkasının potently P-asalımsı ideali olsun. R nin $K \nsubseteq Q$, $L \nsubseteq (Q:K)$ ve $LP \subseteq (Q:K)$ olacak şekilde K ve L idealleri varsa Q Noether kuvvetli asalımsı ideal olur [13].

İspat. Q, R nin potently P-asalımsı ideali olsun. R nin $AK \nsubseteq Q$, $L \nsubseteq (Q:K)$ ve $LP \subseteq (Q:K)$ olacak şekilde K ve L ideallerini alalım. $K \nsubseteq Q$ ve Q potently P-asalımsı olduğundan, $(Q:K)$ da Önerme 2.1.4'e göre potently P-asalımsıdır. Böylece $LP \subseteq (Q:K)$ ve $L \nsubseteq (Q:K)$ olduğundan $P^n \subseteq (Q:K)$ yani $P^n K \subseteq Q$ elde edilir. Buradan $K \nsubseteq Q$ olduğundan $P^{nm} = (P^n)^m \subseteq Q$ olur. Böylece Q, Noether kuvvetli asalımsıdır.

Önerme 2.1.10. Q bir P-asalımsı ideal olsun. Q nun Noether kuvvetli asalımsı olması için g.y.k. Q nun hem Mori kuvvetli asalımsı hem de potently asalımsı olmasıdır [13].

İspat ($\Rightarrow$) Önerme 1.1.6 ve Önerme 2.1.7 den çıkar.
($\Leftarrow$) Varsayalım ki Q, hem Mori kuvvetli hem de potently P-asalımsı ideal olsun. Mori kuvvetli asalımsı olduğu için, $xP \subseteq Q$ olacak şekilde $x \in R \backslash P$ vardır. Bu durumda $(xR)P \subseteq Q$ ve $xR \nsubseteq Q$ olur. Potently asalımsı olduğundan $P^n \subseteq Q$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla, Q Noether kuvvetli asalımsı idealdir.

Aşağıdaki iki örnek potently asalımsı ve düzgün asalımsı ideal kavramlarının genelde birbirini gerektirmediğini göstermektedir.

Örnek 2.1.11 (Düzgün asalımsı olup potently asalımsı olmayan ideal) K karakteristiği 2 olan bir cisim ve $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$, K cismi üzerinde sonsuz değişken kümesi olsun. $K[X]$ polinom halkasını ve $Q = (\{{X_i}^2, X_1X_j : i \geq 1 \; ve \; j \geq 2\})$ idealini alalım. Burada $\sqrt{Q} = P = (X)$ maksimal ideal olur. Önerme 1.1.4 ten Q asalımsı idealdir. Şimdi $f = X_{i_1} + X_{i_2} + \cdots + X_{i_n} \in P$ alalım. K cisminin karakteristiği 2 olduğundan $f^2 = (X_{i_1} + X_{i_2} + \cdots + X_{i_n})^2 = X_{i_1}^2 + X_{i_2}^2 \dots + X_{i_n}^2 \in Q$ elde edilir. Böylece Q düzgün asalımsı ve $ord(Q) = 2$ olur. Ancak $(X_1)(X_2, X_3, \dots, X_n, \dots) \subseteq Q$ ve $(X_1) \nsubseteq Q$ alınırsa her $n \in \mathbb{N}$ için $(X_2X_3 \dots X_{n+1}) \in (X_2, X_3, \dots, X_n, \dots)^n \backslash Q$ olur. Sonuç olarak Q, potently asalımsı değildir [13].

Örnek 2.1.12 (Potently asalımsı fakat düzgün asalımsı olmayan bir ideal) F bir cisim ve $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$ sonsuz değişken kümesi olsun. $F[X]$ polinom halkasını ve $Q = (\{{X_i}^i : i \geq 1\})$ idealini alalım. Örnek 2.1.8 den Q bir potently asalımsı idealdir. Şimdi düzgün asalımsı olmadığını gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için ${X_n}^n = X_n^{n-1}X_n \in Q$ ve $X_n^{n-1} \notin Q$ olduğu kolaylıkla görülür. Q düzgün asalımsı ideal ise sabit bir $m \in \mathbb{N}$ sayısını, her $n \in \mathbb{N}$ için $X_n^m \in Q$ olacak şekilde bulabilmeyiz. Fakat $X_{m+1}^m \notin Q$ olduğundan Q, düzgün asalımsı değildir [13].

2.2. Bazı Özel Halkalarda Potently Asalımsı İdealler

Önerme 2.2.1. Q, R Noetherian halkasının bir asalımsı idealiyse potently asalımsıdır [13].

İspat Q asalımsı ideal olduğundan Önerme 1.2.10 dan Q bir Noether kuvvetli asalımsı idealdir. Dolayısıyla Önerme 2.1.7'ye göre, Q bir potently asalımsıdır.

Tanım 2.2.2 R halkasının her ideali temel idealse yani her K ideali bir $k \in K$ için $K = (k) = Rk$ ise R ye temel ideal halkası denir. Bir R tamlık bölgesi temel ideal halkasıysa R ye TİB denir [6].

Tanımdan her TİB Noetheriandır. Aşağıdaki örnek tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 2.2.3 $R = \mathbb{Z}[X]$ tam katsayılı polinom halkası Noetherian halkadır. Fakat $I =$

$(X, 3)$ ideali temel olmayan bir ideal olduğundan R TİB değildir.

Sonuç 2.2.4. R bir TİB ve Q asalımsı ideal olsun. O zaman Q, potently asalımsıdır.

İspat. Tüm TİB'lerin Noetherian olduğu bilinmektedir. Bu nedenle sonuç, Önerme 2.2.1 den elde edilir.

Tanım 2.2.5 R bir tamlık bölgesi ve $p, q \in R$ verilsin. $p = qr$ eşitliğini sağlayan bir $r \in R$ varsa q, p yi böler denir ve $q|p$ ile gösterilir. $0 \neq p \in R$ birimsel olmayan bir elemanı için $q, r \in R$ ve $p = qr$ iken q ya da r birimsel oluyorsa p ye indirgenemez eleman denir. $p, q \in R$ elemanları için $p|q$ ve $q|p$ oluyorsa p ve q ya ilgili elemanlar denir ve $p \sim q$ ile gösterilir. R tamlık bölgesi aşağıdaki iki şartı sağlıyorsa R ye TAÇ bölge denir:

i) Her $0 \neq a \in R$ birimsel olmayan eleman $p_1, p_2, \dots, p_n \in R$ indirgenemez elemanlar olmak üzere $a = p_1 p_2 \dots p_n$ şeklinde yazılabilir.

ii) Yukarıdaki yazılış sıra ve ilgililik düşünülmeksizin tek türlüdür yani $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_s \in R$ indirgenemez elemanlar olmak üzere $a = p_1 p_2 \dots p_n = q_1 q_2 \dots q_s$ ise $n = s$ ve her $i = 1,2, \dots, n$ için $p_i \sim q_{j_i}$ dir [24].

TİB'de asalımsı ideallerin potently asalımsı olduğu bilinmektedir. Fakat bu tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölgelerde doğru değildir. Örnek 2.1.11 de asalımsı idealin potently asalımsı olmadığını gösterdik. K bir cisim ve $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\}$, K cismi üzerinde sonsuz değişken kümesi olsun. $K[X]$ tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölgedir. Bu örnek tek türlü asal çarpanlara ayrılan bölgede asalımsı idealin potently asalımsı olmadığına dair bir örnektir.

Tanım 2.2.6 V bir tamlık bölgesi olsun. Eğer V deki tüm idealler kapsama bağıntısıyla tam sıralı ise yani V nin her I, J ideali için $I \subseteq J$ veya $J \subseteq I$ oluyorsa V ye değer halkası denir [20].

Tanım 2.2.7 V bir değer halkası olsun. V nin her asalımsı ideali kendi radikalinin bir kuvvetine eşit ise V ye bir ayrık değer halkası denir [12].

Tanım 2.2.7 den ayrık değer halkasında her asalımsı idealin Noether kuvvetli olduğu açıktır. Bunu göz önünde bulundurarak asalımsı ve potently asalımsılığın ayrık değer halkalarında denk olduğunu gösterelim.

Önerme 2.2.8. V bir ayrık değer halkası ve Q bir asalımsı ideal olsun. Bu halde Q bir potently asalımsıdır [13].

İspat. Tanım 2.2.7 den biliyoruz ki Q bir P-asalımsı ise bir $n \in \mathbb{N}$ için $Q = P^n$ biçimindedir. Böylece Q Noether kuvvetli asalımsı olur ve Önerme 2.1.7 den potently asalımsıdır.

Teorem 2.2.9 V cisim olmayan bir değer halkası ve $Q \subset V$ ideali için aşağıdakiler sağlanır.

(i) Q sonlu üretilmişse bir temel idealdir.

(ii) $\sqrt{Q}$, V nin bir asal idealidir.

(iii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} Q^n = P_0$, V nin bir asal idealidir. Bir $k \in \mathbb{N}$ için $Q^k = Q^{k+1}$ ise Q bir idempotent asaldır.

(iv) $P \subset Q$ ve P bir asal idealse $P \subseteq P_0$ dır.

(v) J, V nin bir ideali ve $Q \subset \sqrt{J}$ ise bir $n \in \mathbb{N}$ için $Q^n \subseteq J$ dir [12].

İspat. (i): $Q = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ olsun. V bir değer halkası olduğundan $a_1R, a_2R, \dots, a_nR$ temel idealleri karşılaştırılabilirdir. O halde bir $t \in \{1,2, \dots, n\}$ için $a_1R, a_2R, \dots, a_nR$ idealleri a_tR tarafından kapsanır. Buradan $Q = (a_1, a_2, \dots, a_n) \subseteq (a_t) \subseteq Q$ yani $Q = (a_t)$ temel ideal olur.

(ii): $\sqrt{Q}, Q$ yu kapsayan minimal asal ideallerin kesişimidir. S, Q nun minimal asal ideallerinin kümesi olsun. V değer halkası olduğu için S tam sıralıdır böylece S tek bir asal ideal içerir, yani $\sqrt{Q} = P$ asaldır.

(iii): P_0 ın asal olduğunu yani $V - P_0$ ın çarpımsal küme olduğunu gösterelim. $x, y \in V - P_0$ olsun. Bu durumda $k, m \in \mathbb{N}$ için $x \notin Q^k$ ve $y \notin Q^m$ elde edilir. Bu durumda V değer halkası olduğundan $Q^k \subset (x)$ ve $Q^m \subset (y)$ elde edilir. Buradan $Q^k(y) \subset (xy)$ olur. $Q^m \subset (y)$ olduğundan $Q^kQ^m = Q^{k+m} \subseteq Q^k(y) \subset (xy)$ yani $xy \notin Q^{k+m}$ elde edilir. Böylece $xy \in V - P_0$ yani P_0 bir asal ideal olur. Şimdi bir $k \in \mathbb{N}$ için $Q^k = Q^{k+1}$ olsun. Bu durumda $P_0 = Q^k$ asal olur. $Q^k \subseteq Q^k = P_0$ ve P_0 asal olduğundan $Q \subseteq P_0 = Q^k \subseteq Q^2 \subseteq Q$ ve buradan $Q = P_0 = Q^2$ idempotent asal olur.

(iv): $P \subset Q$ ve P bir asal ideal olsun. Bir $t \in \mathbb{N}$ için $Q^t \subseteq P$ olsaydı $Q \subseteq P \subseteq Q$ dan $P = Q$ çelişkisi elde edilirdi. O halde her $k \in \mathbb{N}$ için $Q^k \nsubseteq P$ olur ve V değer halkası olduğundan $P \subset Q^k$ elde edilir. Böylece $P \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} Q^n = P_0$ bulunur.

(v): J, V nin bir ideali ve $Q \subset \sqrt{J}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $Q^n \nsubseteq J$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda V değer halkası olduğundan $J \subseteq Q^n$ ve buradan $J \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} Q^n = P_0$ elde edilir. Böylece $\sqrt{J} \subseteq \sqrt{P_0} = P_0 \subseteq Q$ çelişkisi elde edilir. O halde bir $n \in \mathbb{N}$ için $Q^n \subseteq J$ elde edilir.

Önerme 2.2.10. V bir değer halkası ve Q, V nin bir P-asalımsı ideali olsun. Bu durumda Q nun potently asalımsı olması için g.y.k. $(Q:P) = Q$ veya $(Q:P)$ idealinin P nin bir kuvveti olmasıdır. Özel olarak ikinci durumda, Q, V nin Noether kuvvetli P-asalımsı idealdir [13].

İspat. V değer halkası olduğu için her $s \in V \backslash P$ için $sP = P$ ve dolayısıyla $Q \subseteq (Q:P) \subseteq P$ olur. Eğer $(Q:P)$, P nin bir kuvveti ise Q açıkça Noether kuvvetli P-asalımsı ideal olur. Q, Noether kuvvetli değilse, potently asalımsı olması ancak ve ancak $(Q:P) = Q$ olmasıyla mümkün olduğunu gösterelim. Diyelim ki $(Q:P) = Q$ olsun. I ve J, V nin $IJ \subseteq Q$ ve $I \nsubseteq Q$ koşullarını sağlayan idealleri olsun. Bu durumda $J \subseteq P = \sqrt{Q}$ olur. Varsayalım ki $P \neq J$ olsun. Bir önceki teoremin (v). şıkkından bir $n \in \mathbb{N}$ için $J^n \subseteq Q$ olur yani Q potently asalımsıdır. Tersine, Q nun potently asalımsı olduğunu, ancak Noether kuvvetli asalımsı olmadığını varsayalım. $s \in (Q:P) \setminus Q$ alalım. O halde $sP \subseteq Q$ fakat $s \notin Q$ olur. Q potently asalımsı olduğundan bir $n \in \mathbb{N}$ için $P^n \subseteq Q$ olur. Ancak bu, Q nun Noether kuvvetli asalımsı olduğu anlamına gelir yani bir çelişkidir. Bu nedenle, $(Q:P) = Q$ olur.

Lemma 2.2.11. V bir değer halkası, tek maksimal ideali M ve I ise temel (sonlu üretilmiş) olmayan bir ideal olsun. Bu durumda $IM = I$ olur [13].

İspat $IM \subseteq I$ olduğu açıktır. Ters kapsamayı göstermek için $x \in I$ alalım. I temel ideal olmadığından Teorem 2.2.9 (i) den sonlu da üretilmemiştir. $I \subseteq xV$ olsa $I = xV$ temel ideal olur bu ise çelişkidir. O halde $xV \subsetneq I$ olur. $y \in xV \backslash I$ alalım. V değer halkası olduğundan $xV \subsetneq yV \subseteq I$ olur. O halde bir $m \in M$ için $x = ym$ yani $x \in IM$ olur.

Böylece $IM = M$ elde edilir.

Teorem 2.2.12 V cisim olmayan bir değer halkası ve P sıfırdan farklı bir asal ideal olsun. Q bir P-asalımsı ideal ve $x \in V - P$ ise $Q = Q(x)$ tir. Özel olarak Q sonlu üretilmişse P maksimal idealdir [12].

İspat $x \notin P$ ve V bir değer halkası olduğundan $Q \subset (x)$ dir. Ayrıca $(Q:x)(x) \subseteq Q$ olduğu açıktır. Şimdi $a \in Q$ alalım. $Q \subset (x)$ olduğundan $a = xb$ olacak şekilde bir $b \in V$ vardır. Buradan $b \in (Q:x)$ ve böylece $a = xb \in (Q:x)(x)$ elde edilir. Sonuç olarak $Q = (Q:x)(x)$ bulunur. Diğer yandan Q bir P-asalımsı ve $x \notin P$ olduğundan $(Q:x) = Q$ ve böylece $Q = Q(x)$ olur. Q sonlu üretilmişse Teorem 2.2.9 (i) den temel idealdir, o halde $Q = (a)$ koşulunu sağlayan $a \in Q$ bulunur ve $(a) = (a)(x) = (ax)$ olur. $x \in V - P$ ise $(a) = (a)(x) = (ax)$ eşitliğinden $a = bax$ olacak şekilde bir $b \in V$ vardır. V tamlık bölgesi olduğundan $1 = bx$ ve böylece x bir birimsel olur. O halde tüm birimsel olmayan elemanlar P de yani P maksimal idealdir.

Önerme 2.2.13 V tek maksimal ideali M olan bir değer halkası ve Q da üretilmiş bir P-asalımsı idealse Q bir potently asalımsıdır [13].

İspat Bir önceki teoreme göre sonlu üretilmiş P-asalımsı ideallerde $P = M$ olur. I ve J, V nin idealleri olmak üzere $IJ \subseteq Q$ ve $I \nsubseteq Q$ olsun. Q asalımsı ideal ve $I \nsubseteq Q$ olduğundan $J \subseteq P$ olur. Eğer $J \subsetneq P$ ise Teorem 2.2.9 dan Q, J nin bir kuvvetini içerir. O halde $J = P = M$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $J^n \nsubseteq Q$ olduğunu varsayalım. V bir değer halkası olduğundan $Q \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} J^n$ elde edilir ve ayrıca Teorem 2.2.9 dan $\bigcap_{n=1}^{\infty} J^n$ bir asal idealdir. $\bigcap_{n=1}^{\infty} J^n \subseteq P$ ve P, Q yu kapsayan minimal asal olduğundan $\bigcap_{n=1}^{\infty} J^n = P = J$ olduğu görülür. Ayrıca P idempotent olmak zorundadır. Lemma 2.2.11'e göre I bir temel idealdir, aksi halde $I = IM = IP = IJ \subseteq Q$ olur. O halde bir $x \in I$ için $I = xV$ olur. Ayrıca $IJ = xP \subseteq Q$ olduğunu biliyoruz. V bir değer halkası ve $I \nsubseteq Q$ olduğundan $Q \subset I = xV$ olur. Şimdi $q \in Q$ alalım. Buradan $q = xv$ olacak şekilde $v \in V$ vardır. $Q \neq xV$ olduğundan v birimsel olamaz ve böylece $v \in M = P = J$ dir. O halde $q \in xP$ yani $Q \subseteq xP$ ve böylece $Q = xP$ elde edilir. Q temel ideal ve $Q \subseteq I = xV$ olduğundan bir birimsel olmayan $b \in V$ için $Q = xbV$ ve böylece $xbV = Q = xP$ bulunur. V tamlık bölgesi olduğundan $P = bV$ temel ideal olur. Böylece $b \in P = \sqrt{Q}$ olduğundan bir $n \in \mathbb{N}$ için $b^n \in Q$ ve buradan

$J^n = P^n = b^n V \subseteq Q$ olur. Sonuç olarak Q bir potently asalımsıdır.

Sonuç 2.2.14 Bir boyutlu bir ayrık değer halkası olmayan bir değer halkasında sıfırdan farklı her temel ideal bir potently asalımsı idealdir fakat Nother kuvvetli asalımsı ideal değildir [13].

İspat. V bir boyutlu ayrık olmayan değer halkası ve M, V nin sıfır olmayan bir maksimal ideali olsun. Q sıfırdan farklı bir temel ideal olsun. Bu durumda $\sqrt{Q} = M$ olduğundan Q bir M-asalımsı idealdir. Önerme 2.2.13 dan Q bir potently asalımsıdır. Ancak Önerme 2.2.13 nın ispatında gösterildiği gibi M idempotent olur. Böylece Q, Noether kuvvetli olamaz.

2.3. Cebirsel yapılar altında potently asalımsı idealler

Teorem 2.3.1 R bir halka ve I, Q da $I \subseteq Q$ olacak şekilde R nin idealleri olsun. Bu durumda Q nun R nin bir potently asalımsı ideali olması için g.y.k. Q/I nın R/I bölüm halkasının bir potently asalımsı ideali olmasıdır [13].

İspat.($\Rightarrow$): $K/I \nsubseteq Q/I$ ve $(K/I)(L/I) \subseteq Q/I$ olacak şekilde R/I nın $K/I, L/I$ idealleri verilsin. Buradan $(KL + I)/I = (K/I)(L/I) \subseteq Q/I$ ve böylece $K \nsubseteq Q$ olmak üzere $KL \subseteq KL + I \subseteq Q$ elde edilir. Q potently asalımsı olduğundan $L^n \subseteq Q$ sağlayan bir $n \in \mathbb{N}$ bulunur. Buradan $L^n + I \subseteq Q$ ve böylece $(L/I)^n = (L^n + I)/I \subseteq Q/I$ olur. O halde Q/I potenty asalımsı olur.
($\Leftarrow$) $K \nsubseteq Q$ ve $KL \subseteq Q$ olacak şekilde R nin K, L idealleri verilsin. $K + I$ ve $L + I$ nin her ikisinin de I yi içeren idealler olduğu görülür ve ayrıca $(K + I)(L + I) = KL + KI + LI + I^2 \subseteq KL + Q = Q$ olur. Buradan $(K + I)(L + I) + I \subseteq Q$ ve böylece $((K + I)/I))((L + I)/I) = ((K + I)(L + I) + I)/I \subseteq Q/I$ elde edilir. Ayrıca $(K + I)/I \nsubseteq Q/I$ ve Q/I bir potently asalımsı olduğundan bir $n \in \mathbb{N}$ için $(L + I)^n/I \subseteq Q/I$ olur. Böylece $L^n \subseteq (L + I)^n \subseteq Q$ elde edilir. Sonuç olarak Q, potently asalımsı olur.

Tanım 2.3.2 R halkasının bir J idealine $IJ = 0$ olacak şekilde $0 \neq I$ ideali bulunabiliyorsa düzensiz (irregular) ideal denir [13].

Lemma 2.3.4 Q nun R de potently asalımsı olması için g.y.k. R/Q daki her düzensiz idealin nilpotent olmasıdır [13].

İspat. ($\Rightarrow$): J/Q, R/Q nun bir düzensiz ideali olsun. Bu durumda R/Q da $(I/Q)(J/Q) = (IJ + Q)/Q = 0$ olacak şekilde R/Q nun sıfırdan farklı bir I/Q ideali vardır. Böylece $I \nsubseteq Q$ olmak üzere $IJ \subseteq Q$ olur. Q, potently asalımsı olduğundan bir $n \in \mathbb{N}$ için $J^n \subseteq Q$ ve buradan $(J/Q)^n \subseteq (J^n + Q)/Q = 0$ elde edilir.
($\Leftarrow$): R/Q nun her düzensiz idealinin nilpotent olduğunu varsayalım. R nin J, K idealleri için $J \nsubseteq Q$ olmak üzere $JK \subseteq Q$ olsun. Bundan dolayı $(J/Q)(K/Q) = (JK + Q)/Q = 0$ ve $(J/Q) \neq 0$ olur. Bu nedenle, K/Q, R/Q da düzensiz olur. Varsayımdan (K/Q) nilpotent yani bir $n \in \mathbb{N}$ için $(K^n + Q)/Q = (K/Q)^n = 0$ olur. Sonuç olarak $K^n \subseteq Q + K^n \subseteq Q$ elde edilir.

Lemma 2.3.5 R bir halka olsun ve J, $R[X]$ in bir ideali olsun. Bu durumda J deki polinomların katsayılarından oluşan J_C kümesi R nin bir idealidir [13].

İspat $s, t \in J_C$ alalım. $g(X)$ ve $h(X)$, sırasıyla her polinomdaki diğer terimler olmak üzere $sX^n + g(X)$, $tX^m + h(X) \in J$ olur. Genelliği kaybetmeden, $n \geq m$ kabul edebiliriz. $X^{n-m} \in R[X]$ olduğundan üzere $tX^n + X^{n-m}h(X) = X^{n-m}(tX^m + h(X)) \in J$ olur. Buradan $(s-t)X^n + r(x) = sX^n + g(X) - (tX^n + X^{n-m}h(X)) \in J$ olur. Yani $s - t \in J_C$ dir. Şimdi $y \in R$ alalım. $ysX^n + yg(X) = y(sX^n + g(X)) \in J$ olduğundan $ys \in J_C$ bulunur. Böylece J_C, R nin bir idealidir.

Lemma 2.3.6. $p(X) = s_nX^n + \cdots + s_1X + s_0 \in R[X]$ sıfır bölen ve I, $R[X]$'de bir ideal olsun. I nın elemanları arasında $p(X)q(X) = 0$ şartını sağlayan $0 \neq q(X) = t_mX^m + \cdots + t_1X + t_0 \in I$ en küçük dereceliyse tüm i ve j ler için $a_ib_j = 0$ olur [13].

İspat. $p(X) = s_nX^n + \cdots + s_1X + s_0$ ve $q(X) = t_nX^n + \cdots + t_1X + t_0$ olsun. I nın elemanları arasında $q(X)$ polinomu, $p(X)q(X) = 0$ olacak şekilde en küçük dereceli polinom olsun. $s_nt_mX^{m+n}$, $p(X)q(X)$'deki $(m+n)$. Dereceden tek terim olduğundan $a_nb_m = 0$ dır. Böylece der $(s_nq(X)) < m$ ve $\big(s_nq(X)\big)p(X) = 0$ olur. Burada $s_n \in R$ olduğu için $\big(s_nq(X)\big) \in I$ dir. $q(X)$, I da en küçük derecedeyse $s_nq(X) = 0$ olduğu sonucu çıkar. $r \geq n - i$ için $s_rq(X) = 0$ olduğunu kabul edelim. Buradan $p(X)q(X)$, $s_{n-(i+1)}t_mX^{m+(n-(i+1))} + f(X)$ e indirgenir, çünkü $p(X)q(X)$ in bu katsayıdaki diğer terimleri sıfırdır. O halde $s_{n-(i+1)}t_m = 0$ olur. Yukarıdakine benzer şekilde, $der(s_{n-(i+1)}t_mq(X)) < m$ ve $\big(s_{n-(i+1)}t_mq(X)\big)p(X) = 0$ dır. Buradan $s_{n-(i+1)} \in R$

olduğu için $s_{n-(i+1)}t_m q(X) \in I$ olur. Dolayısıyla $s_{n-(i+1)}t_m q(X) = 0$ olmalıdır. Böylece, tümevarım yoluyla bunun $p(X)$ in tüm katsayıları için doğru olduğu sonucu çıkar.

Lemma 2.3.7. R nin her düzensiz idealinin nilpotent olması için g.y.k. $R[X]$ in her düzensiz idealinin nilpotent olmasıdır [13].

İspat. ($\Rightarrow$): J, $R[X]$ in düzensiz bir ideali olsun. Bu durumda $R[X]$ te $IJ = 0$ olacak şekilde $0 \neq I$ ideali vardır. O halde J tamamı sıfır bölenlerden oluşan bir idealdir. $q(X)$ polinomunu I daki minimal dereceli polinom olarak alalım. Bu durumda her $p(X) \in J$ için $q(X)p(X) = 0$ olur. $q(X)$ in katsayıları tarafından üretilen R deki ideali $I_{q(X)}$ ile gösterelim. Lemma 2.3.5 ten J_C de R de bir idealdir. Lemma 2.3.6 dan $I_{q(x)}J_C = 0$ olur. Varsayımdan bir $n \in \mathbb{N}$ için $J_C^n = 0$ olur. Ayrıca $J \subseteq J_C[X]$ olduğundan $J^n \subseteq (J_C[X])^n = J_C^n[X] = 0$ ve $J^n = 0$ bulunur.
($\Leftarrow$): J, R nin düzensiz bir ideali olmak üzere istenen özelliğin $R[X]$ te doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda R de $IJ = 0$ olacak şekilde $0 \neq I$ ideali vardır. O zaman $I[X] \neq 0$ olmak üzere $I[X]J[X] = (IJ)[X] = 0$ olur. Varsayımdan bir $n \in \mathbb{N}$ için $(J[X])^n = J^n[X] = 0$ ve böylece $J^n \subseteq J^n[X] = 0$ elde elde edilir.

Teorem 2.3.8. R halkasında Q idealinin potently asalımsı olması için g.y.k. $Q[X]$ idealinin $R[X]$ te potently asalımsı olmasıdır [13].

İspat Q, R nin bir potently asalımsı ideali olsun. Lemma 2.3.4 den, R/Q daki tüm düzensiz ideallerin nilpotent olduğunu biliyoruz. Lemma 2.3.7 den, bunun $(R/Q)[X]$ te de doğru olduğu anlaşılır. Böylece $R[X]/Q[X] \cong (R/Q)[X]$ izomorfizması ve Lemma 2.3.4 kullanılırsa $Q[X]$ in de potently asalımsı olduğu sonucu çıkar. Tersi için de benzer teknik kullanılır.

Tanım 2.3.9 R bir halka ve S, R nin çarpımsal alt kümesi olmak üzere R nin S ye göre yerelleştirmesi $S^{-1}R = \left\{\frac{x}{y} \mid x \in R \; ve \; y \in S\right\}$ olarak tanımlanır. R nin herhangi bir P asal ideali için $S = R - P$ çarpımsal alt kümesine göre R halkasının yerelleştirmesi kısaca R_P ile gösterilir ve aşağıdaki biçimde tanımlanır: $R_P = \{\frac{x}{y} \mid x \in R \text{ ve } y \in R \backslash P\}$ [6].

Önerme 2.3.10. Q, R tamlık bölgesinin potently asalımsı ideali ve P de $P \supseteq Q$ koşulunu sağlayan bir asal idealse Q_P de R_P nin potently asalımsı idealidir [13].

İspat. $I_P \; ve \; J_P$, R_P nin idealleri olmak üzere $I_P \nsubseteq Q_P$ ve $I_P J_P \subseteq Q_P$ olsun. Şimdi $IJ \subseteq Q$ olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $x \in IJ/Q$ olsun. $I_P J_P = (IJ)_P$ olduğundan $xs \in Q$ olacak şekilde bir $s \in R\backslash P$ vardır. Q bir potently asalımsı ve $x \notin Q$ olduğundan bir $m \in \mathbb{N}$ için $s^m \in Q$ ve böylece $s \in \sqrt{Q} \subseteq P$ çelişkisi elde edilir. O halde $IJ \subseteq Q$ dur. Fakat $I_P \nsubseteq Q_P$ olduğundan $I \nsubseteq Q$ çıkar. Böylece bir $n \in \mathbb{N}$ için $J^n \subseteq Q$ ve sonuç olarak $J_P^n \subseteq Q_P$ sağlanır.

Önerme 2.3.11 R bir tamlık bölgesi ve Q, sonlu tane maksimal ideal tarafından içerilen bir asalımsı ideal olsun. Eğer $P \supseteq Q$ olacak şekilde her asal ideal için Q_p, R_p nin potently asalımsı idealiyse Q da R nin potently asalımsı idealidir [13].

İspat. $Max(R)$, R nin tüm maksimal ideallerinin kümesi olsun. $I \nsubseteq Q$ ve $IJ \subseteq Q$ olacak şekilde R nin I ve J ideallerini göz önüne alalım. $i \in I \setminus Q$ seçelim. $M \supsetneq Q$ ve $I_M \subseteq Q_M$ olacak şekilde bir $M \in Max(R)$ seçelim. Bir $s \in R\backslash M$ için $is \in Q$ olur. Q asalımsı olduğundan $s^n \in Q$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $s \in \sqrt{Q} \subseteq M$ çelişkisi elde edilir. Böylece, Q yu içeren her $M \in Max(R)$ için, varsayıma göre bir $n_M \in \mathbb{N}$ için $I_M \nsubseteq Q_M$ ve $J_M^{n_M} \subseteq Q$ olur. Şimdi $n = max\{n_M \mid M \in Max(R), M \supsetneq Q\}$ alalım. Buradan $J^n = \cap_{M \in Max(R)} J_M^n \subseteq \cap_{M \in Max(R)} Q_M = Q$ olur.

Tanım 2.3.12 Bir R halkasının yalnızca sonlu sayıda maksimal ideali varsa ise bu halka yarı lokal halka olarak adlandırılır [6].

Örnek 2.3.13 Her cisim ve ayrıca her değer halkası bir yarı lokal halkadır. Fakat değer halkası olmayan yarı lokal halkalar da vardır. Örneğin, p bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ değer halkası olmayan (cisim de olmayan) bir yarı lokal halkadır.

Sonuç 2.3.14 Q bir yarı lokal tamlık bölgesi R nin asalımsı ideali olsun. Q yu içeren her P-asal ideali için Q_P, R_P de potently asalımsı idealse Q da R de potently asalımsıdır [13].

İspat. Q sonlu sayıda maksimal ideal tarafından içerildiğinden istenen sonuç Önerme 2.3.11 den elde edilir.

Tanım 2.3.15 Bir R tamlık bölgesinin her yerelleştirmesi bir değer halkasıysa R ye Prüfer bölgesi denir [9].

Sonuç 2.3.16. R bir Prüfer bölge ve Q, R nin sonlu üretilmiş bir ideali olsun. $\sqrt{Q}$ boyutu bir olan maksimal idealse Q, potently asalımsı idealdir [13].

İspat. $\sqrt{Q} = M$ boyutu bir olan maksimal ideal olduğundan Q_M has olacak şekilde tek yerelleştirme halkası R_M dir. Ayrıca R bir Prüfer bölge olduğundan R_M bir değer halkasıdır. Q bir sonlu üretilmiş ideal olduğundan Q_M de sonlu üretilmiştir. R_M bir değer halkası olduğundan Q_M bir temel idealdir. O halde Önerme 2.2.13'e göre Q_M bir potently asalımsı idealdir. Böylece, Önerme 2.3.11 den Q nun kendisinin de potently asalımsı olduğu anlaşılır.

Önerme 2.3.17. Her R_i bir halka olmak üzere $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$ ve $Q = \prod_{i=1}^{n} Q_i$, R nin bir ideali olsun. Bir $j \in \{1,2, \dots, n\}$ için Q_j potently asalımsı ve her $i \neq j$ için $Q_i = R_i$ ise Q, R nin bir potently asalımsı idealidir. Bu iddianın tersi de doğrudur [13].

İspat. ($\Rightarrow$): Bir $j \in \{1,2, \dots, n\}$ için Q_j potently asalımsı ve her $i \neq j$ için $Q_i = R_i$ olsun. Bu durumda $R/Q \cong R_j/Q_j$ ve ayrıca $Q/Q \cong Q_j/Q_j$ olur. Q_j, R_j de potently asalımsı olduğundan Teorem 2.3.1'e göre Q_j/Q_j de R_j/Q_j de potently asalımsı olur. İzomorfizmadan Q/Q da R/Q nun potently asalımsı ideali olur. Yine Teorem 2.3.1'e göre Q, R nin bir potently asalımsı ideali olur.
($\Leftarrow$): Şimdi Q, R nin bir potently asalımsı ideali olsun. Bu durumda Q asalımsı olduğundan $\sqrt{Q} = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{Q_i}$ de R nin asal ideali olur. Bu durumda bir $j \in \{1,2, \dots, n\}$ için $\sqrt{Q_j}$ bir asal ideal ve her $i \neq j$ için $\sqrt{Q_i} = R_i$ olur. Böylece her $i \neq j$ için $Q_i = R_i$ elde edilir. Bu durumda $R/Q \cong R_j/Q_j$ ve ayrıca $Q/Q \cong Q_j/Q_j$ olur. Yukarıdakine benzer şekilde Q_j, R_j nin potently asalımsı ideali olur.

Önerme 2.3.18. $f: R \to S$, R nin ideallerini S nin ideallerine resmeden bir halka homomorfizması (örneğin bir epimorfizma) olsun. Q, S nin potently asalımsı bir idealiyse, $f^{-1}(Q)$ da R nin bir potently asalımsı idealidir [13].

İspat. I ve J, R nin idealleri olmak üzere $IJ \subseteq f^{-1}(Q)$ ve $I \not\subseteq f^{-1}(Q)$ olsun. Bu

durumda görüntü alırsak: $f(IJ) \subseteq f(f^{-1}(Q)) \subseteq Q$ olur. IJ, R nin ideali olduğundan varsayımdan $f(IJ)$ de S nin bir idealidir. Böylece $f(IJ) = f(I)f(J) \subseteq Q$ elde edilir. $f(I)$ ve $f(J)$ yine varsayımdan S nin iki idealidir. $f(I)f(J) \subseteq Q$ ve $I \nsubseteq f^{-1}(Q)$ olduğundan $f(I) \nsubseteq Q$ olur. Q bir potently asalımsı ideal olduğundan bir $n \in \mathbb{N}$ için $f(J)^n = f(J^n) \subseteq Q$ ve böylece $J^n \subseteq f^{-1}(Q)$ elde edilir. O halde, $f^{-1}(Q)$, R de bir potently asalımsıdır.

Önerme 2.3.19 $f: R \to S$ örten bir halka homomorfizması ve $Q, Çek(f)$ yi kapsayan R nin bir potently asalımsı ideali olsun. Bu durumda $f(Q)$ da S nin bir potenly asalımsı idealidir.

İspat. K ve L, S nin idealleri olmak üzere $KL \subseteq f(Q)$ ve $K \nsubseteq f(Q)$ olsun. f örten homomorfizma olduğundan $K = f(I)$ ve $L = f(J)$ olacak şekilde R nin I ve J idealleri vardır. Ayrıca $KL = f(I)f(J) = f(IJ) \subseteq f(Q)$, $K = f(I) \nsubseteq f(Q)$ ve $Çek(f) \subseteq Q$ olduğundan $IJ \subseteq Q$ ve $I \nsubseteq Q$ elde edilir. Q bir potently asalımsı ideal olduğundan bir $n \in \mathbb{N}$ için $J^n \subseteq Q$ ve buradan $L^n = f(J)^n = f(J^n) \subseteq f(Q)$ elde edilir. Sonuç olarak $f(Q), S$ nin potently asalımsı idealidir.

Tanım 2.3.20 (i) M bir R-modül ve K, M nin alt modülü olsun. $(K: M) = \{x \in R: xM \subseteq K\}$ kümesi R nin bir idealidir.
(ii) M bir R-modül olsun. $R \times M$ kümesi bileşen bileşen toplama işlemine göre ve aşağıdaki biçimde tanımlanan çarpma işlemine göre değişmeli ve birimli bir halkadır: her $(s, m), (t, n) \in R \times M$ için $(s, m)(t, n) = (st, sn + tm)$. Bu halkaya R-modül M nin triviyal genişlemesi denir ve $R \ltimes M$ ile gösterilir [2].

Not 2.3.21 M bir R-modül, Q, R nin bir ideali ve N, M nin bir alt modülü olsun. $Q \ltimes N$ nin $R \ltimes M$ nin bir ideali olması için g.y.k. $QM \subseteq N$ olmasıdır [2].

Tanım 2.3.22 M bir R-modül ve N, M nin has alt modülü olsun. I, R nin ideali ve K, M nin alt modülü olmak üzere $IK \subseteq N$ olması $K \subseteq N$ veya bir $n \in \mathbb{N}$ için $I^n \subseteq (N: M)$ olmasını gerektirirse N ye potently asalımsı alt modül denir.

Aşağıdaki sonuçta M bir R-modülü göstermektedir ve bu sonuç triviyal genişlemenin potently asalımsı ideallerini araştırmaktadır.

Teorem 2.3.23 $\mathfrak{J}, R \ltimes M$ nin potently asalımsı idealiyse aşağıdaki durumlardan biri

geçerlidir:

i. Q, R nin potently asalımsı ideali olmak üzere $\mathfrak{J} = Q \ltimes M$ dir.

ii. Q, R nin potently asalımsı ideali, N, M nin potently asalımsı alt modülü olmak üzere $\mathfrak{J} = Q \ltimes N$ ve $\sqrt{Q} = \sqrt{(N:M)}$ dir.

İspat. $\mathfrak{J}, R \ltimes M$ nin potently asalımsı ideali olsun. $\mathfrak{J}$ bir asalımsı ideal olduğundan [2, Teorem 3.6] dan ya Q, R nin bir asalımsı ideali ve $N = M$ olur ya da Q, R nin bir asalımsı ideali, N, M nin bir asalımsı alt modülü olmak üzere $\sqrt{Q} = \sqrt{(N:M)}$ ve $\mathfrak{J} = Q \ltimes N$ dir.

1. Durum: Q, R nin bir asalımsı ideali ve $N = M$ olsun. Şimdi Q nun potently asalımsı olduğunu gösterelim. $IJ \subseteq Q$ koşulunu sağlayan R nin I, J idealleri verilsin. $(I \ltimes IM)(J \ltimes JM) = IJ \ltimes IJM \subseteq Q \ltimes M = \mathfrak{J}$ olur. $\mathfrak{J}$ potently asalımsı olduğundan $I \ltimes IM \subseteq Q \ltimes M = \mathfrak{J}$ veya bir $n \in \mathbb{N}$ için $(J \ltimes JM)^n = J^n \ltimes J^n M \subseteq Q \ltimes M = \mathfrak{J}$ olur. Buradan $I \subseteq Q$ veya bir $n \in \mathbb{N}$ için $J^n \subseteq Q$ bulunur. O halde Q bir potently asalımsıdır.

2. Durum: R nin bir asalımsı ideali, N, M nin bir asalımsı alt modülü olmak üzere $\sqrt{Q} = \sqrt{(N:M)}$ ve $\mathfrak{J} = Q \ltimes N$ olsun. 1. Durumdakine benzer şekilde Q nun potently asalımsı olduğu görülür. Şimdi N nin potently asalımsı olduğunu gösterelim. $LV \subseteq N$ koşulunu sağlayan R nin L ideali ve M nin V alt modülü verilsin. $((V:M)Q \ltimes V)(L \ltimes LM) \subseteq Q \ltimes N = \mathfrak{J}$ ve $\mathfrak{J}$ potently asalımsı olduğundan $((V:M)Q \ltimes V) \subseteq Q \ltimes N = \mathfrak{J}$ veya bir $n \in \mathbb{N}$ için $(L \ltimes LM)^n = L^n \ltimes L^n M \subseteq Q \ltimes N = \mathfrak{J}$ bulunur. Böylece $V \subseteq N$ veya $L^n \subseteq Q \subseteq (N:M)$ gerçeklenir. Dolayısıyla N bir potently asalımsı alt modül olur.

Lemma 2.3.24. Maksimal ideallerin kuvvetleri potently asalımsıdır.

İspat. M, R nin bir maksimal ideali ve bir $n \in \mathbb{N}$ için $Q = M^n$ olsun. $\sqrt{Q} = M$ maksimal olduğundan Önerme 1.1.4'e göre Q bir M-asalımsıdır. Ayrıca $\sqrt{Q}^n \subseteq Q$ olduğundan Q Noether kuvvetli asalımsı olur. Dolayısıyla Önerme 2.1.7'ye göre Q bir potently asalımsıdır.

Teorem 2.3.25 R her maksimal ideali sonlu üretilmiş bir yarı lokal halka olsun. R nin her potently asalımsı ideali asaldır g.y.k. R sonlu tane cismin direkt çarpımına izomorftur.

İspat. R yarı lokal halka olduğundan sonlu tane maksimal ideali vardır, bunlar $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ olsun. Bir önceki Lemmadan her $i = 1,2, \dots, n$ için ${Q_i}^2$ potently asalımsıdır.

Varsayımdan $Q_i = {Q_i}^2$ bulunur. $Jac(R), R$ nin Jacobson radikali olmak üzere $Jac(R) = Q_1 Q_2 \dots Q_n$ ve buradan $Jac(R)^2 = Jac(R)$ bulunur. Her maksimal ideali sonlu üretilmiş olduğundan $Jac(R)$ de sonlu üretilmiş olur ve [6] Nakayama Lemmadan $Jac(R) = Q_1 Q_2 \dots Q_n = 0$ bulunur. Dolayısıyla [6] Çin Kalan Teoreminden $R \cong R/Q_1 \times R/Q_2 \times \dots \times R/Q_n$ olur ve burada Q_i maksimal olduğundan her R/Q_i bir cisimdir. Tersine, $R = F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$ sonlu tane cismin direkt çarpımına eşit olsun. Q, R nin bir potently asalımsı ideali olsun. $\sqrt{Q}$ asal olduğundan $Q = F_1 \times F_2 \times \dots \times (0) \times F_i \times \dots \times F_n$ biçiminde olmak zorundadır. Burada Q nun asal olduğu açıkça görülür.

KAYNAKLAR

[1] Alhazmy, K., Almahdi, F., Bouba, E., & Koç, S. (2025). Some results concerning uniformly (1-absorbing) primary ideals. *Journal of Algebra and its Applications*.

[2] Anderson, D. D., & Winders, M. (2009). Idealization of a module. *Communications in Algebra*, 1(1), 3–56.

[3] Arabacı, T. (2022). S-asal idealler ve S-asal alt modüller (Doctoral dissertation, Marmara Üniversitesi, Turkey).

[4] Benhissi, A. (2022). Chain conditions in commutative rings. Springer, Berlin.

[5] Bourbaki, N. (1972). Commutative Algebra (5th ed.). Hermann.

[6] Çallıalp, F., & Tekir, Ü. (2009). Değişmeli halkalar ve modüller. Birsen Yayınevi.

[7] Cox, J. A., & Hetzel, A. J. (2007). Uniformly primary ideals. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 212, 1–8.

[8] Faith, C. (1984). The structure of valuation rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 31(1–3), 7–27.

[9] Fontana, M., Huckaba, J., & Papick, I. (1996). Prüfer domains. CRC Press.

[10] Fuchs, L. (2002). Ideal theory in Prüfer domains—an unconventional approach. *Journal of Algebra*, 252, 411–430.

[11] Gilmer, R. (1972). Multiplicative Ideal Theory (1st ed.). Marcel Dekker, Inc., New York.

[12] Gilmer, R., & Heinzer, W. (1993). Primary ideals with finitely generated radical in a commutative ring. *Manuscripta Mathematica*, 78(1), 201–221.

[13] Gilmore, C. (2021). Potently primary ideals (Master's thesis, Tennessee Technological University).

[14] Gorton, C. E. (2004). Generalization of primary ideals. Louisiana-Mississippi Section of the MAA.

[15] Heinzer, W., & Lantz, D. (1981). The Laskerian property in commutative rings. *Journal of Algebra*, 72(1), 101–114.

[16] Huckaba, J. A. (1988). Commutative Rings with Zero Divisors. Marcel Dekker, New York.

[17] Koç, S. (2015). Sürekli fonksiyon halkalarının bazı özel idealleri (Master's thesis, Marmara Üniversitesi, Turkey).

[18] Koç, S. (2019). Değişmeli halkaların bazı özel idealleri ve modüllerin bazı özel alt modülleri (Doctoral dissertation, Marmara Üniversitesi, Turkey).

[19] Kunz, E. (1985). Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry. Springer.

[20] Larsen, M. D., & McCarthy, P. J. (1971). Multiplicative Theory of Ideals. Academic Press, New York.

[21] Nagata, M. (1962). Local Rings. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics.

[22] Northcott, D. G. (1972). Ideal Theory (6th ed.). Kingprint Ltd.

[23] Ohm, J. (1966). Primary ideals in Prüfer domains. *Canadian Journal of Mathematics*, 18, 1024–1030.

[24] Sharp, R. Y. (2000). Steps in Commutative Algebra (No. 51). Cambridge University Press.

[25] Üregen, R. N. (2019). On uniformly pr-ideals in commutative rings. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(4), 1878–1886.

[26] Visweswaran, S. (1991). Prime divisors of powers of ideals in some Laskerian rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 73(2), 203–209.

[27] Wang, F., & Kim, H. (2016). Foundations of Commutative Rings and Their Modules. Springer, Singapore.

[28] Koç, S., Tekir, Ü., & Ulucak, G. (2019). On strongly quasi primary ideals. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 56(3), 729–743.