MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MEKANSAL FONKSİYONEL VERİ ANALİZİ: CNN TABANLI YENİ BİR DOĞRUSAL OLMAYAN YAKLAŞIM

MERVE BAŞARAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İstatistik Anabilim Dalı

DANIŞMAN
Doç. Dr. Ufuk BEYAZTAŞ

İSTANBUL, 2025

MARMARA UNIVERSITY

INSTITUTE FOR GRADUATE STUDIES

SPATIAL FUNCTIONAL DATA ANALYSIS: A NOVEL NONLINEAR APPROACH BASED ON CNNs

MERVE BAŞARAN

MASTER THESIS

Department of Statistics

Thesis Supervisor

Doç. Dr. Ufuk BEYAZTAŞ

ISTANBUL, 2025

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince ilgisini ve kıymetli desteğini hiçbir zaman esirgemeyen Doç. Dr. Ufuk BEYAZTAŞ'a en içten teşekkürlerimi ve minnettarlığımı sunarım.

Bu tez, 124F096 numaralı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) projesi kapsamında yürütülmüştür. Bu vesileyle, aynı zamanda mensubu olduğum TÜBİTAK'a, sunduğu katkılar ve sağladığı olanaklar için teşekkür ederim.

Bu süreçte bana destek olan ve katkılarını esirgemeyen değerli dostlarıma da gönülden teşekkür ederim.

Son olarak en büyük minnettarlığımı ise, hayatım boyunca her koşulda yanımda olan, sevgilerini ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ve bu noktaya ulaşmamda büyük emeği bulunan sevgili annem Kiraz BAŞARAN'a, babam Metin BAŞARAN'a ve kardeşlerim Burak, Büşra ve Buse BAŞARAN'a sunarım.

Haziran 2025 **Merve BAŞARAN**

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ i
İÇİNDEKİLER ii
ÖZET iv
ABSTRACT v
KISALTMALAR vi
ŞEKİL vii
TABLO LİSTESİ viii
1. GİRİŞ 1
2. FONKSİYONEL VERİ ANALİZİ 4
2.1. Matematiksel Gösterimler 5
2.1.1. Hilbert uzayı 5
2.1.2. L_2 normu 6
2.2. Temel Açılımlar İçin Genişletme Teknikleri 6
2.2.1. Fourier temel açılımı 7
2.2.2. B-Spline temel açılımı 7
2.3. Fonksiyonel Temel Bileşen Analizi 8
3. FONKSİYONEL DOĞRUSAL REGRESYON 9
3.1. Skaler - Fonksiyon Doğrusal Regresyon Modeli 9
3.2. Mekansal Skaler – Fonksiyonel Doğrusal Regresyon Modeli 10
4. DOĞRUSAL OLMAYAN MEKANSAL SKALER-FONKSİYONEL REGRESYON MODELİ 12
4.1. Mekansal Otokorelasyon Parametresi ρ'nun Tahmini 14
4.2. Mekansal Fonksiyonel Derin Sinir Ağı Yapısı 16
4.2.1. Fonksiyonel Derin Sinir Ağı Eğitimi ve Parametre Ayarı 20
4.2.1.1. Algoritma 1 21
5. SAYISAL ANALİZLER 23

5.1. Simülasyon Çalışmaları 23
5.2. Brezilya Covid-19 Verisi 30
6. SONUÇ VE ÖNERİLER 38
KAYNAKLAR 40
ÖZGEÇMİŞ 43

ÖZET

MEKANSAL FONKSİYONEL VERİ ANALİZİ: CNN TABANLI YENİ BİR DOĞRUSAL OLMAYAN YAKLAŞIM

Mekansal bağımlılık içeren fonksiyonel verilerin doğru bir şekilde tahmin edilmesi, mühendislik ve bilimsel uygulamaların pek çoğu açısından kritik öneme sahiptir. Bu çalışmada, mekansal bağımlılıkları ve fonksiyonel açıklayıcıları derin öğrenme teknikleri aracılığıyla bütüncül biçimde birleştiren yeni bir doğrusal olmayan modelleme çerçevesiyle, mekansal fonksiyonel derin sinir ağı modeli geliştirilmiştir. Önerilen model, klasik skaler-fonksiyon regresyonunu mekansal otoregresif bir bileşen ile genişleterek, doğrusal olmayan karmaşık ilişkilerin yakalanmasında fonksiyonel derin sinir ağlarından faydalanmaktadır. Sağlam bir tahminleme elde etmek amacıyla, önerilen metodoloji iki aşamalı uyarlamalı bir yaklaşım izlemektedir: ilk olarak, mekansal bağımlılık parametresi maksimum olabilirlik yöntemiyle tahmin edilmekte; ardından, derin öğrenmeye dayalı doğrusal olmayan fonksiyonel regresyon uygulanmaktadır. Modelin etkinliği, kapsamlı Monte Carlo benzetimleri ve Brezilya COVID-19 verileri üzerinde gerçekleştirilen ampirik bir uygulama ile değerlendirilmiştir. Uygulamada, günlük ortalama ölüm sayılarının tahmin edilmesi hedeflenmiştir. Kestirim başarımı ölçütü temel alınarak yapılan karşılaştırmalı analizler, önerilen fonksiyonel derin sinir ağı modelinin, maksimum olabilirlik temelli mekansal fonksiyonel doğrusal regresyon modellerine kıyasla üstün performans sergilediğini göstermiştir. Brezilya COVID-19 verisine ilişkin sonuçlar, tüm modellerin eğitim aşamasında benzer ortalama kare hata değerleri ürettiğini; ancak test aşamasında yalnızca önerilen modelin en düşük ortalama kare tahmin hatasına ulaştığını ve bu doğrultuda diğer modellere kıyasla daha üstün genelleme yeteneği sergilediğini ortaya koymuştur.

Anahtar Kelimeler: Derin öğrenme, Makine öğrenmesi, Fonksiyonel temel bileşenler analizi, Mekansal otoregresif model, Mekansal bağımlılık.

ABSTRACT

SPATIAL FUNCTIONAL DATA ANALYSIS: A NOVEL NONLINEAR APPROACH BASED ON CNNs

Accurate prediction of spatially dependent functional data is critical for various engineering and scientific applications. In this study, a spatial functional deep neural network model was developed with a novel nonlinear modeling framework that seamlessly integrates spatial dependencies and functional predictors through deep learning techniques. The proposed model extends classical scalar-on-function regression by incorporating a spatial autoregressive component, while leveraging functional deep neural networks to capture complex nonlinear relationships. To ensure robust estimation, the methodology adopts a two-stage adaptive approach: the spatial dependence parameter is first estimated via maximum likelihood, followed by nonlinear functional regression using deep learning. The effectiveness of the proposed model is assessed through extensive Monte Carlo simulations and an empirical application based on Brazilian COVID-19 data, where the goal is to predict the average daily number of deaths. Comparative analysis with maximum likelihood-based spatial functional linear regression and functional deep neural network models demonstrates that the proposed algorithm significantly enhances predictive performance. The results from the Brazilian data reveal that while all models yield similar mean squared error values in the training phase, the proposed model achieves the lowest mean squared prediction error during testing, indicating superior generalization capability.

Keywords: Deep learning, Machine learning, Functional principal component analysis, Spatial autoregressive model, Spatial dependence.

KISALTMALAR

CNN **:** Convolutional Neural Network – Evreşimli Sinir Ağı

FDA **:** Functional Data Analysis – Fonksiyonel Veri Analizi

FDNN **:** Functional Deep Neural Network – Fonksiyonel Derin Sinir Ağı

FLR **:** Functional Linear Regression – Fonksiyonel Doğrusal Regresyon

FPCA **:** Functional Principal Component Analysis – Fonksiyonel Temel Bileşenler Analizi

i.i.d. **:** Independent and Identically Distributed – Bağımsız ve Özdeş Dağılımlı

ML **:** Maximum Likelihood – Maksimum Olabilirlik

MSE **:** Mean Squared Error – Ortalama Kare Hata

MSPE **:** Mean Squared Prediction Error – Ortalama Kare Tahmin Hatası

NSSoFRM **:** Nonlinear Spatial Scalar-on-Function Regression Model – Doğrusal Olmayan Mekansal Skaler-Fonksiyonel Regresyon Modeli

R^2 **:** Coefficient of Determination – Determinasyon Katsayısı

SAR **:** Spatial Autoregressive Model – Mekansal Otoregresif Model

SFDNN **:** Spatial Functional Deep Neural Network – Mekansal Fonksiyonel Derin Sinir Ağı

SoFRM **:** Scalar-on-Function Regression Model – Skaler - Fonksiyon Regresyon Modeli

SSoFRM **:** Spatial Scalar-on-Function Regression Model – Mekansal Skaler-Fonksiyonel Regresyon Modeli

ŞEKİL

Şekil 4.1 Önerilen Mekansal Fonksiyonel Derin Sinir Ağı (SFDNN) mimarisinin şematik yapısı.

Şekil 5.1 Skaler yanıt değişkenine ait 50 örnek gözlem, fonksiyonel açıklayıcılardan birine ait örnek gözlemler, skaler açıklayıcılardan birine ait örnek gözlemler ve gerçek regresyon katsayısı fonksiyonları.

Şekil 5.2 2021 ve 2022 yılları için Brezilya şehirlerinde meydana gelen ortalama ölüm sayılarını gösteren koroplet haritaları.

Şekil 5.3 Brezilya'ya ait COVID-19 verilerinin grafiksel gösterimi.

Şekil 5.4 Brezilya'daki 5570 şehirdeki ortalama ölüm sayılarına ilişkin yerel mekansal otokorelasyonu.

Şekil 5.5 Brezilya'daki ölüm sayılarını tahmin etme görevinde, ML, FDNN ve SFDNN modellerinin eğitim ve test veri setleri üzerindeki performanslarını karşılaştıran Taylor diyagramları.

Şekil 5.6 Brezilya COVID-19 veri seti için gözlemlenen ve tahmin edilen ölüm sayıları arasındaki ilişkiyi gösteren saçılım grafikleri.

TABLO LİSTESİ

Tablo 5.1 Hata dağılımının $\epsilon \sim N(0,1)$ olduğu 250 Monte Carlo simülasyonu üzerinden hesaplanan MSE, MPSE ve R^2 ölçütlerine göre ML, FDNN ve SFDNN modellerinin karşılaştırması.

Tablo 5.2 Hata dağılımının $\epsilon \sim t_3$ (merkezden sapmalı t-dağılımı) olduğu 250 Monte Carlo simülasyonu üzerinden hesaplanan MSE, MPSE ve R^2 ölçütlerine göre ML, FDNN ve SFDNN modellerinin karşılaştırması.

Tablo 5.3 Hata dağılımının $\epsilon \sim exp(1)$ (üstel dağılım) olduğu 250 Monte Carlo simülasyonu üzerinden hesaplanan MSE, MPSE ve R^2 ölçütlerine göre ML, FDNN ve SFDNN modellerinin karşılaştırması.

1. GİRİŞ

Son yıllarda yaşanan teknolojik gelişmeler, veri setlerinin elde ediliş biçimlerinde köklü değişimlere yol açmış ve karmaşık doğrusal ya da doğrusal olmayan yapıları yakalayabilen, giderek daha gelişmiş analiz araçlarının ortaya çıkmasına neden olmuştur (Hong ve ark., 2008; Khemani ve ark., 2024). Eğriler, görüntüler, şekiller ve daha genel anlamda sonsuz boyutlu uzaylarda yer alan nesnelerin grafiksel temsili bağlamında fonksiyonel veriler, sağlık, finans ve mühendislik gibi birçok alanda temel veri türü haline gelmiş ve analiz yöntemlerinin gelişmesini zorunlu kılmıştır. (Zhang ve Lu, 2004). Bu tür verilerin artan yaygınlığı, fonksiyonel veri analizine özel olarak uyarlanmış ileri istatistiksel yöntemlerin geliştirilmesini zorunlu kılmıştır (Storey ve Song, 2017). Bu alan, özellikle fonksiyonel ve skaler değişkenler arasındaki ilişkileri kuran regresyon modellerinin geliştirilmesi ve iyileştirilmesi yönünde önemli ilerlemelere zemin hazırlamıştır. Fonksiyonel veri analizine yönelik kuramsal gelişmelere ve güncel yöntemsel yaklaşımlara kapsamlı bir bakış için Ramsay ve Dalzell (1991), Ramsay ve Silverman (2006), Horvath ve Kokoszka (2012) ile Kokoszka ve Reimherr (2017)'e ait çalışmalar incelenmiştir.

Fonksiyonel açıklayıcılar ile skaler yanıtlar arasındaki ilişkilerin modellenmesinde Skaler-Fonksiyon Regresyon Modeli (SoFRM), hem teorik esnekliği hem de uygulama başarısı nedeniyle öne çıkmaktadır(bkz. Hastie ve Mallows, 1993; Ramsay ve Silverman, 2006; Morris, 2015; Reiss, Goldsmith, Shang ve Odgen, 2017). Son dönemde, sinir ağlarının fonksiyonel veri analizine entegre edilmesi, yöntemsel yelpazeyi genişletmiş; klasik doğrusal yaklaşımların ötesine geçerek daha esnek ve sağlam modelleme stratejilerinin geliştirilmesine olanak tanımıştır (bkz. Wang ve Cao, 2023; Thind ve ark., 2023). Bu doğrultuda geliştirilen SoFRM, fonksiyonel öngörücüler ile skaler yanıt değişkenleri arasındaki ilişkileri modellemek adına önemli katkılar sunmuş olsa da, çoğu modelde gözlemler arası mekansal bağımlılık göz ardı edilmiştir. Ancak, birçok pratik uygulamada örneklemler arasında belirgin mekansal bağımlılık söz konusudur. Bu bağımlılık, bağımsızlık varsayımının geçerliliğini ortadan kaldırmakta ve klasik modelleme yaklaşımlarının istatistiksel etkinliğini ve tahmin gücünü sınırlamaktadır.

Bu sınırlılığı aşmak adına geliştirilen Mekansal Skaler-Fonksiyonel Regresyon Modeli (SSoFRM), mekansal bağımlılığı doğrudan modele entegre eden ilk yaklaşımlar arasında

yer alır. Bu modelde mekansal etkileşim, yanıt değişkeni üzerindeki bir gecikme terimi aracılığıyla tanımlanan mekansal otoregresif yapı (SAR) ile modellenir. Ancak mevcut SSoFRM yaklaşımları genellikle yalnızca doğrusal ilişkilere ve tek bir fonksiyonel kovaryata dayanmaktadır. Bu durum çoklu açıklayıcı değişkenlerin (fonksiyonel ve skaler) birlikte yer aldığı ve doğrusal olmayan etkileşimlerin gözlemlendiği durumlarda SSoFRM yaklaşımlarının yetersiz kalmalarına yol açmaktadır.

Bu çalışmada önerilen model olan Doğrusal Olmayan Mekansal Skaler-Fonksiyonel Regresyon Modeli (NSSoFRM), bu eksiklikleri gidermeyi hedeflemektedir. Önerilen yaklaşım, bir yandan mekansal bağımlılığı SAR yapısı aracılığıyla modele dahil ederken, diğer yandan derin öğrenme mimarileri ile doğrusal olmayan ilişkileri ve çoklu açıklayıcı değişkenlerin etkileşimlerini esnek biçimde modellemektedir. Modelin ilk adımında, mekansal bağımlılık parametresi ρ, Maksimum Olabilirlik Tahmini (ML) ile elde edilmekte ve bu parametreye bağlı olarak doğrusal tahminleyici $(I_n - \rho W)^{(-1)}$ dönüşümüyle mekansal bağımlılık dikkate alınarak kovaryatlar yeniden düzenlenmektedir. Ardından, bu uzamsal olarak düzeltilmiş kovaryatlar bir Fonksiyonel Derin Sinir Ağı (FDNN) yapısına girdi olarak verilmekte; bu yapı doğrusal olmayan ilişkileri öğrenmekte ve daha yüksek doğrulukta tahminler üretmektedir. Modelin ikinci adımında, FDNN yapısı içerisinde yer alan fonksiyonel ve skaler ağırlık parametreleri, Adam optimizasyon algoritması kullanılarak belirlenmekte; katman sayısı, nöron sayısı, öğrenme oranı ve erken durdurma gibi hiperparametreler titizlikle ayarlanarak yüksek tahmin doğruluğu elde edilmektedir. Doğrusal olmayan etkileşimlerin, çoklu açıklayıcı değişkenlerin ve mekansal yapının birlikte ele alındığı bu birleşik yaklaşım, klasik SSoFRM modellerinin ötesine geçerek daha güçlü ve esnek bir tahmin çerçevesi sunmaktadır.

Çalışmanın kalan bölümleri şu şekilde yapılandırılmıştır: Bölüm 2'de fonksiyonel veri analizi ve temel matematiksel bileşenler tanıtılmakta, Bölüm 3'te fonksiyonel doğrusal regresyon modelleri açıklanmaktadır. Bölüm 4'te doğrusal olmayan mekansal skaler-fonksiyonel regresyon modeli ayrıntılı biçimde sunulmakta; Bölüm 5'te önerilen modelin uygulaması, simülasyon ve gerçek veri (Breazilya COVID-19 verisi) üzerinden detaylı bir şekilde anlatılmakta ve farklı yöntemlerle karşılaştırmalı analizler sunulmaktadır. Son olarak, Bölüm 6'da çalışmanın genel sonuçları ve gelecekteki araştırma yönelimleri tartışılmaktadır.

2. FONKSİYONEL VERİ ANALİZİ

Fonksiyonel veri analizi (Functional Data Analysis, FDA), geleneksel istatistiksel yaklaşımlardan farklı olarak verileri süreklilik özelliğiyle temsil eder; bu da vektör biçimindeki veriler yerine fonksiyonlar aracılığıyla analiz yapılmasını sağlar. Geleneksel çok değişkenli istatistiksel yöntemlerin, zaman veya uzay gibi sürekli boyutlarda ölçülen karmaşık verileri açıklamakta yetersiz kalması, FDA yaklaşımının gelişmesine neden olmuştur. 1990'lı yıllardan itibaren Ramsay ve Silverman (1997, 2005) öncülüğünde sistematikleşen bu alan, günümüzde çevre bilimlerinden mühendisliğe, sağlıktan ekonomiye kadar çok sayıda disiplinde yaygın şekilde uygulanmaktadır.

Fonksiyonel veri setlerinde her bir gözlem, belirli bir aralık üzerinde tanımlı bir fonksiyon olarak ele alınır. Bu gözlemler genellikle zaman, konum veya başka bir sürekli indeks değişkenine bağlı olarak ölçülür. Matematiksel olarak, fonksiyonel veri $X_i(t) \in L^2(I)$, $t \in I \in \mathbb{R}, i \in 1, \dots, n$ şeklinde ifade edilir. Burada $X_i(t)$, i'inci gözleme karşılık gelen fonksiyonu, I ise gözlem yapılan aralığı ifade eder. Fonksiyonlar genellikle kare-integrallenebilirlik koşulunu sağlayan $L^2(I)$ Hilbert uzayı içerisinde yer alır. Bu yapılar, iç çarpım, norm ve ortogonal baz sistemleri aracılığıyla analiz edilebilir hale getirilir.

FDA ortalama, varyans ve kovaryans fonksiyonlarının tahmin edilmesi, fonksiyonlar arasında benzerliklerin ve ilişkilerin analiz edilmesi; zaman içinde ya da gruplar arasında meydana gelen fonksiyonel değişimlerin modellenmesi; ayrıca kümeleme, sınıflandırma, boyut indirgeme gibi çıkarımsal işlemlerin gerçekleştirilmesi gibi temel amaçlara hizmet etmektedir.

FDA'da ilk adım genellikle verilerin uygun bir baz sistemi (örneğin Fourier serileri, B-spline) altında temsil edilmesidir. Bu temsil, yüksek boyutlu fonksiyonel verileri sonlu boyutlu katsayı vektörlerine indirgenmesini sağlar. En yaygın tekniklerden biri olan Fonksiyonel Temel Bileşenler Analizi (FPCA), varyansı en iyi şekilde açıklayan ortogonal bileşenleri elde ederek hem yorumlanabilirliği artırır hem de hesaplama maliyetini düşürür.

Fonksiyonel veri analizi, çağdaş veri biliminin en önemli araçlarından biri haline gelmiştir. Sürekli ölçüm yapısına sahip karmaşık veri biçimlerinin doğrudan analiz edilmesine imkan tanıyan bu yaklaşım, özellikle büyük veri çağında anlamlı modelleme

ve çıkarım yapabilmek için vazgeçilmez bir yöntem haline gelmiştir. Bu tez çalışmasında fonksiyonel veriler, mekansal bağımlılık ve derin öğrenme yöntemleriyle ele alınarak, klasik modellerin ötesine geçilmesi hedeflenmektedir.

2.1. Matematiksel Gösterimler

Klasik istatistiksel analizde gözlemler genellikle skaler değerlerden oluşmakta ve doğrusal yapılar üzerinde tanımlanmaktadır. FDA'da ise gözlemler, belirli noktalarda ölçülüyor olsalar da, süreklilik gösteren ve sonsuz boyutlu fonksiyonel uzaylarda tanımlı olarak ele alınmaktadır. Bu yaklaşım, verilerin daha zengin bir yapıda temsil edilmesini sağlarken, analiz sürecinde fonksiyonel analiz kuramının ve araçlarının kullanılmasını zorunlu kılmaktadır. Bu bölümde, fonksiyonel verilerin yaşadığı uzamsal yapı ile FDA'nın kuramsal temellerini kavramsal olarak daha iyi açıklayabilmek amacıyla temel matematiksel gösterimlere ve ilgili tanımlamalara yer verilmiştir.

2.1.1. Hilbert uzayı

Bir vektör uzayı H, bir iç çarpım $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ile birlikte, iç çarpım ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir yapıya sahip olduğunda Hilbert uzayı olarak adlandırılır. Hilbert uzayı, fonksiyonel veri analizinde matematiksel temel olarak kullanılan, iç çarpım tanımı ile donatılmış tamamlanmış vektör uzayıdır. İç çarpım, H üzerinde tanımlı $\langle\cdot,\cdot\rangle : H\ x\ H \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f, g, h \in H$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

1. Pozitif Tanımlılık: $\langle f, f\rangle \geq 0$ ve $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$
2. Simetriklik: $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$
3. Lineerlik: : $\langle af + bg, h\rangle = a\langle f, h\rangle + b\langle g, h\rangle$

özelliklerini sağladığı durumda, $(H, \langle .\ ,\ . \rangle)$ çifti iç çarpım uzayı olarak adlandırılır.

$(H, \langle .\ ,\ . \rangle)$ iç çarpım uzayı iken bütün $f, g \in H$ için $|(f, g)|^2 \leq \langle f, f\rangle\langle g, g\rangle$ Cauchy – Schwartz eşitsizliği sağlanmaktadır. Ayrıca, iç çarpım ile tanımlanan norm $\left||f|\right| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ ve bu normdan türeyen metrik ise $d(f, g) = \left||f - g|\right|$ olarak tanımlanır. Hilbert uzayının ayırt edici özelliği tam (complete) olmasıdır. Bu durumda her Cauchy dizisi bu uzayda bir limite sahiptir. Eğer $\{f_n\} \subset H$ bir Cauchy dizisi ise, her bir $f \in H$ için $\lim_{n \to \infty} \left||f_n - f|\right| = 0$.

2.1.2. L_2 normu

Fonksiyonel veri analizinde gözlemler genellikle $L^2(I)$ uzayında tanımlı fonksiyonlardır. Bu uzay, belirli bir aralık üzerinde karesi integrallenebilir tüm ölçülebilir fonksiyonlardan oluşur. Fonksiyonların büyüklüğünü ve aralarındaki farkı ölçmek için kullanılan standart norm, L^2 normudur. Bu norm, fonksiyonun enerji içeriğini temsil eder ve L^2 uzayı, bu norm altında tam bir Hilbert uzayı oluşturur. Fonksiyonel veri analizinde özellikle kovaryans fonksiyonlarının ayrıştırılmasında önemli bir yere sahip olan Mercer Teoremi, pozitif tanımlı çekirdeklerin özdeğer ve özfonksiyon cinsinden temsil edilmesini sağlayarak fonksiyonel verilerin analizine teorik bir zemin sunmaktadır. Buna göre, $C_p(s,u)$ şeklinde tanımlı bir kovaryans fonksiyonu (2.1)'de olduğu şekilde ifade edilebilir:

$$C_p(s,u) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{pk}\phi_{pk}(s)\phi_{pk}(u) \tag{2.1}$$

(2.1)'de sergilenen eşitlikte λ_{pk} azalan sırada sıralanmış özdeğerleri, $\phi_{pk}(u)$ ise bunlara karşılık gelen ortonormal özfonksiyonları temsil etmektedir.Ayrıca $\int_0^1 C_p(s,u)\phi_{pk}(u)du = \lambda_{pk}\phi_{pk}(s)$ koşulu sağlanmaktadır. Bu ayrışım, fonksiyonel verilerin daha düşük boyutlu, anlamlı bileşenlerle temsil edilmesini sağlar ve boyut indirgeme yöntemlerinin teorik temelini oluşturur.

2.2. Temel Açılımlar İçin Genişletme Teknikleri

FDA'da, gözlemlenen fonksiyonların doğrudan işlenmesi genellikle mümkün olmadığından bu fonksiyonların uygun bir baz sistemi altında sayısal olarak temsil edilmesi gerekmektedir. Bu amaçla kullanılan yöntemler genişletme (expansion) teknikleri olarak adlandırılır. Genişletme teknikleri, her bir fonksiyonun, seçilen bir ortonormal ya da lineer bağımsız baz sistemine göre katsayılar üzerinden yaklaşık olarak ifade edilmesini sağlamaktadır. Böylece sonsuz boyutlu bir problemi sonlu boyutlu bir yapıya indirgemek mümkün hale gelir. Bu bölümde, fonksiyonel verilerin temsilinde sıklıkla kullanılan Fourier ve B-spline genişletme teknikleri detaylı biçimde ele alınmaktadır.

2.2.1. Fourier temel açılımı

Fonksiyonel veri analizinde sıkça başvurulan genişletme tekniklerinden biri**,** Fourier temel açılımıdır. Periyodik davranış sergileyen fonksiyonların bileşenlerine ayrıştırılması için sıklıkla Fourier serileri kullanılır. Bu temsillerde sinüs ve kosinüs fonksiyonları temel bileşenleri oluşturur. Böylece karmaşık fonksiyonel yapılar, frekans bileşenlerine ayrıştırılarak daha sade bir biçimde analiz edilebilir.

Bu temsilde, baz fonksiyonları $\{\phi_k(t)\}_{k=0}^{2r}$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}, \phi_{2r-1}(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(r\omega t),\ \phi_{2r}(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(r\omega t), r = 1, \dots, \frac{K-1}{2}$$

Burada K, kullanılan toplam fonksiyon sayısını; ω temel frekansı; $\phi(t) = [\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_{2r}(t)]$ ise bir fonksiyon vektörüdür. Bu baz fonksiyonları, $L^2([0,T])$ uzayında ortonormal olup, periyodik fonksiyonların temel frekans bileşenlerine ayrıştırılmasını sağlar. Fourier temsili sayesinde her bir fonksiyon, bu trigonometrik baz üzerinde bir katsayı vektörü ile yaklaşık olarak ifade edilebilir. Bu yapı, özellikle frekans tabanlı yorumların yapılmasını kolaylaştırmakta ve fonksiyonların kompakt bir şekilde temsil edilmesine olanak sağlamaktadır (Beyaztaş ve Shang, 2020a).

2.2.2. B-Spline temel açılımı

Fonksiyonel veri analizinde, fonksiyonların doğrusal olmayan ve yerel özelliklerini temsil etmek amacıyla sıklıkla başvurulan yöntemlerden biri B-spline baz açılımıdır. B-spline bazları, belirli bir tanım aralığına yerleştirilen düğüm noktalarına bağlı olarak oluşturulan parça parça polinomlardan oluşur. Bu yapıları sayesinde, süreksizlik, kırılma veya ani değişim gibi yerel özellikler gösteren fonksiyonel verilerin temsilinde güçlü ve esnek bir yaklaşım sunar.

Bu yöntemde, bir fonksiyon $\omega(u)$, sonlu sayıda B-spline baz fonksiyonu $\psi_m(\mathrm{u})$ kullanılarak yaklaşık olarak $\omega(u) = \sum_{m=1}^{M_p} c_m \psi_m(\mathrm{u})$ şeklinde ifade edilir. Burada $\{\psi_m(u)\}_{m=1}^{M_p}$ spline derecesi ve düğüm yapısına bağlı olarak tanımlanan B-spline baz fonksiyonlarını, c_m her bir baz fonksiyonuna karşılık gelen genişletme katsayısını, $M_p$ise kullanılan toplam baz fonksiyonu sayısını göstermektedir. Bu yaklaşım, fonksiyonların

sonlu boyutlu bir vektör uzayında ifade edilmesini sağlayarak regresyon, sınıflandırma ve boyut indirgeme gibi işlemlerde hesaplama kolaylığı ve yapısal esneklik sunmaktadır.

2.3. Fonksiyonel Temel Bileşen Analizi

FDA kapsamında her bir gözlem bir fonksiyon olarak tanımlandığı için, bu fonksiyonların doğrudan modellenmesi yerine, uygun bazlar altında temsil edilerek boyutlarının indirgenmesi gerekmektedir. Bu bağlamda, FPCA, varyansı en iyi şekilde açıklayan ortonormal bileşenler aracılığıyla fonksiyonların özetlenmesini sağlayan güçlü bir yöntem olarak öne çıkmaktadır. Her bir fonksiyonel açıklayıcı değişken $X_p(u)$, örneklem ortalaması olan $\mu_p(u)$ etrafında merkezlendikten sonra, kovaryans yapısından elde edilen ortonormal özfonksiyonlar $\phi_{pk}(u)$ cinsinden aşağıdaki biçimde temsil edilir:

$$X_p(u) \approx \mu_p(u) + \sum_{k=1}^{K_p} \xi_{pk}\phi_{pk}(u) \tag{2.2}$$

(2.2)'de sergilenen denklemde $\mu_p(u)$, $X_p(u)$'nun ortalama fonksiyonunu; $\phi_{pk}(u)$, p'inci fonksiyonel açıklayıcıya ait k'ıncı ortonormal temel bileşeni; ξ_{pk}, k'ıncı bileşene karşılık gelen fonksiyonel temel bileşen skorunu; $K_p$ise açıklanan toplam varyansa göre belirlenen bileşen sayısını ifade etmektedir.

Fonksiyonel temel bileşen (FPC) skorları $\xi_{pk} = \int_0^1 \{X_p(u) - \mu_p(u)\}\phi_{pk}(u)du$ integrali ile elde edilir. Bu yapı sayesinde her bir fonksiyon, sonlu sayıda bileşen kullanılarak anlamlı bir şekilde temsil edilebilir. Bileşen sayısı K_p, genellikle açıklanan toplam varyansın belirli bir oranını(%95) sağlayacak şekilde seçilmektedir.

FPCA, fonksiyonel verilerin düşük boyutlu ama bilgi açısından zengin bir şekilde temsil edilmesini sağlamakta; bu temsilin, regresyon ve sınıflandırma gibi sonraki analizlerde etkili biçimde kullanılmasına olanak tanımaktadır.

3. FONKSİYONEL DOĞRUSAL REGRESYON

Fonksiyonel Doğrusal Regresyon (Functional Linear Regression, FLR), istatistiksel modellemede bağımlı ve/veya bağımsız değişkenlerin fonksiyonel biçimde tanımlandığı bir regresyon yaklaşımıdır. Özellikle zaman gibi sürekli bir boyut boyunca yoğun şekilde toplanan gözlemleri içeren veri setlerinin analizinde yaygın olarak kullanılmaktadır. FLR'nin temel amacı, bu tür sürekli yapıya sahip verilerde değişkenler arasındaki doğrusal ilişkiyi, verinin tüm fonksiyonel yapısını koruyarak modellemek ve bu doğrultuda istatistiksel olarak anlamlı çıkarımlar elde etmektir.

FLR, klasik doğrusal regresyon modellerinin bir genellemesi olarak değerlendirilebilir. Klasik regresyonda açıklayıcı ve yanıt değişkenleri skaler biçimindeyken, FLR'de bu değişkenler eğri ya da fonksiyonel formda temsil edilir. Bu özelliği sayesinde FLR, yalnızca belirli bir zaman noktasındaki gözlemleri değil, tüm zaman aralığı boyunca değişkenin dinamik yapısını dikkate alarak modelleme imkanı sunar. Böylece daha zengin bilgi içeriğine dayalı analizlerin gerçekleştirilmesi ve daha isabetli kestirimlerin yapılması mümkün hale gelir.

FLR modelleri, açıklayıcı ve yanıt değişkenlerinin fonksiyonel veya skaler olmasına bağlı olarak üç temel kategoride sınıflandırılmaktadır. Bu modeller arasında fonksiyonel açıklayıcı değişkenler ile skaler yanıt değişkenleri arasındaki ilişkiyi etkin biçimde modelleyebilen SoFRM öne çıkmakta ve istatistiksel modelleme çerçevesine önemli katkılar sunmaktadır. Bu tez kapsamında, analizlerde temel alınan modellerden biri SoFRM'dir.

3.1. Skaler-Fonksiyon Doğrusal Regresyon Modeli

SoFRM, bağımlı değişkenin skaler , açıklayıcı değişkenin ise fonksiyonel olduğu regresyon modelidir. Bu yapı, klasik doğrusal regresyon modellerinin fonksiyonel veri analizi bağlamında özel bir genellemesi olarak değerlendirilmektedir. SoFRM, özellikle zaman, sıcaklık, hız gibi sürekli olarak ölçülen ve bir fonksiyon eğrisi oluşturan verilerin analizinde kullanılmaktadır. Modelin daha ayrıntılı biçimde tanımlanabilmesi için, rastgele seçilmiş bir $[Y_i, X_i(u)]$, $i \in \{1, \dots, n\}$ örneklemini ele alalım. Burada yanıt değişkeni $Y \in \mathbb{R}$ skaler, açıklayıcı değişken $X = \{X(u)\}_{\{u \in I\}}$ ise ikinci momenti sonlu olan ve karmaşık mekansal bağımlılıklar sergileyebilen stokastik bir süreçtir. Bu süreçte

gerçekleşen örneklerin, I ile gösterilen $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, sınırlı ve kompakt bir alt kümede yer alan $L^2(I)$ Hilbert uzayına ait kabul edilir.

Bu çerçevede, SoFRM (3.1) denklemde belirtildiği şekilde tanımlanmaktadır:

$$Y = \beta_0 + \int_I X(u)\,\beta(u)du + \epsilon \qquad (3.1)$$

Burada, $\beta_0 \in \mathbb{R}$ sabit terimi, $\beta(u) \in L^2(I)$ regresyon katsayısı fonksiyonu, ϵ ise ortalaması sıfır, varyansı σ^2 olan, bağımsız ve özdeş dağılmış (i.i.d.) normal hata terimidir.

Literatürde yer alan doğrusal SoFRM modeli (3.1), daha esnek modelleme yaklaşımlarına imkan sağlamak amacıyla, doğrusal olmayan ve parametrik olmayan modelleri de kapsayacak şekilde genişletilmiştir (bkz. James ve Silverman, 2005; Yao ve Müller, 2010; Müller vd., 2013; Reiss, Goldsmith, Shang ve Ogden, 2017). Ancak bu gelişmelere rağmen, birçok modelin temel varsayımı, örneklemdeki gözlemlerin birbirinden bağımsız olduğudur. Oysa enerji, finans, tarım ve sağlık gibi pek çok gerçek dünya uygulamasında, veriler mekansal korelasyonlar sergileyebilmekte ve dolayısıyla bu varsayım ihlal edilebilmektedir. Bu nedenle, daha doğru ve güvenilir istatistiksel çıkarımlar yapılabilmesi için, mekansal bağımlılığı açıkça dikkate alan analitik metodolojilerin geliştirilmesi zorunlu hale gelmiştir.

3.2 Mekansal Skaler - Fonksiyonel Doğrusal Regresyon Modeli

Fonksiyonel verilerdeki mekansal bağımlılıkları yakalamak amacıyla çeşitli istatistiksel modeller geliştirilmiştir. Bunlar arasında SAR, mekansal hata modeli ve mekansal Durbin modeli yer almaktadır (bkz. Bouka vd., 2023; Hu vd., 2021; Huang vd., 2021; Pineda-Rios vd., 2019; Ruiz-Medina, 2011, 2012; Hu vd., 2020; Beyaztaş, Mandal ve Shang, 2025). Mekansal regresyon modelleri arasında, SAR model belirgin bir öneme sahiptir; çünkü bu model, komşu mekansal birimler arasındaki etkileşimleri tek bir bağımlılık parametresi aracılığıyla yanıt değişkenine doğrudan yansıtarak, mekansal gecikmeyi etkin bir biçimde modelleme imkanı sunmaktadır.

Bu motivasyonla, bu çalışmada bölgeler arasındaki fonksiyonel veri setlerinde gözlemlenen mekansal bağımlılıkları modellemek amacıyla SSoFRM ele alınmıştır. Söz konusu model, (3.2)'de gösterildiği biçimde tanımlanmaktadır:

$$\mathrm{Y} = \beta_0 1_\mathrm{n} + \rho \mathrm{WY} + \int_\mathrm{I} \mathrm{X(u)}\, \beta(\mathrm{u})\mathrm{du} + \epsilon \qquad (3.2)$$

Bu eşitlik, mekansal bağımlılığı açıkça modele entegre etmek için, klasik SAR yapısına benzer şekilde dönüşüm matrisi uygulanarak (3.3) gibi de ifade edilebilir:

$$\mathrm{Y} = (\mathrm{I_n} - \rho W)^{-1}\beta_0 1_\mathrm{n} + (\mathrm{I_n} - \rho W)^{-1} \int_\mathrm{I} \mathrm{X(u)}\, \beta(\mathrm{u})\mathrm{du} + (\mathrm{I_n} - \rho W)^{-1}\, \epsilon \qquad (3.3)$$

(3.3) eşitliğinde I_n boyutlu nxn olan birim matris, I_n birim vektör, $\rho \in (-1,1)$ mekansal otokorelasyon parametresi ve $W = (w_{ii'})_{1 \le i,i' \le n}$ mekansal ağırlık matrisidir. Her $w_{ii'}$ konumlar arasındaki mekansal yakınlığı temsil eder. I ise genellikle [0,1] gibi birim aralığı temsil eden fonksiyon desteğidir.

Mevcut SSoFRM modellerine dair yapılan kapsamlı incelemeler sonucunda yanıt ve açıklayıcı değişkenler arasındaki ilişkinin çoğunlukla doğrusal yapılarla modellemeye dayandığı görülmektedir (Reiss, Goldsmith, Shang ve Ogden, 2017). Ancak gerçek dünyadaki olaylar genellikle karmaşık doğrusal olmayan bağımlılıklar ve etkileşim etkileri sergilediğinden, klasik modeller yeterince başarılı olamamaktadır (Lin vd., 2022). Ayrıca mevcut modeller genellikle yalnızca tek bir fonksiyonel açıklayıcıyı içerdiğinden, birden fazla fonksiyonel ve skaler değişkenin yer aldığı durumlarda yetersiz kalmaktadır. Bu kısıtları aşmak amacıyla, bir sonraki başlıkta detayları ile bahsedilecek NSSoFRM önerilerek hem doğrusal olmayan etkileşimler hem de çoklu değişkenler SSoFRM yapısına entegre edilmeye çalışılmıştır.

4. DOĞRUSAL OLMAYAN MEKANSAL SKALER-FONKSİYONEL REGRESYON MODELİ

NSSoFRM, birden fazla fonksiyonel ve skaler açıklayıcının modele dahil edilmesine imkan tanıyarak, mekansal bağımlılıkların daha gerçekçi ve kapsamlı biçimde temsil edilmesini sağlar. Parametre tahmini için, Thind vd. (2023) tarafından önerilen FDNN çerçevesi genişletilmiş ve fonksiyonel gözlemleri işleyebilecek şekilde uyarlanmıştır. Doğrusal olmayan genişletme, SAR yapısındaki tüm bileşenlere $g(\cdot)$ gibi dönüşümler uygulayarak karmaşık ilişkileri modellemeye olanak sağlamaktadır. Ancak bu tür bir yaklaşım, mekansal modelleme bağlamında çeşitli kısıtlılıklara ve sorunlara yol açmaktadır. Örneğin, ρWY terimine Y tahmin edilmeden önce doğrusal olmayan bir dönüşüm uygulandığında, mekansal sürecin içsel bağımlılık yapısı bozulmakta ve model yanlış tanımlanmaktadır. Bunun nedeni, mekansal otoregresif modellerin temel olarak $(I_n - \rho W)^{-1}$ ters dönüşümüne dayanarak komşu birimler arasında mekansal etkileri düzgün bir biçimde yaymasıdır. $g(\cdot)$ işlevinin bu ters dönüşümden önce uygulanması, mekansal etkileşimleri yöneten denge yapısını değiştirmekte ve bu durum ρ'nun tutarsız tahminine ve komşu gözlemlerin yanıt değişkenine etkisinin yanlış modellenmesine yol açmaktadır.

Bu zorlukların üstesinden gelmek için öncelikle mekansal bağımlılık yapısı izole edilip tahmin edilmekte, ardından doğrusal olmayan etkileşimler modele entegre edilmektedir. Mekansal otoregresif parametre ρ, maksimum olabilirlik (ML) yöntemiyle tahmin edilerek $\hat{\rho}$ olarak belirlenmektedir. Daha sonra, doğrusal kestiriciye $(\mathrm{I_n} - \hat{\rho} W)^{-1}$ dönüşümü uygulanmakta ve bu mekansal dönüşümle elde edilen yapı FDNN'ye giriş olarak verilmektedir. Böylece, mekansal olarak düzeltilmiş fonksiyonel ve skaler açıklayıcılar ile yanıt değişkeni arasındaki karmaşık doğrusal olmayan ilişkiler, FDNN içindeki $g(\cdot)$ dönüşüm fonksiyonu aracılığıyla esnek biçimde modellenir. Sonuç olarak, önerilen metodoloji, mekansal bağımlılık yapısını korurken aynı zamanda açıklayıcılarla yanıt değişkeni arasında doğrusal olmayan etkileşimleri modelleme esnekliği sağlamaktadır.

Fonksiyonel regresyon modeli, $\{Y_d, X_d(u), Z_d : d \in D\}$ şeklinde tanımlandığı gibi, ayrık mekansal konumlar kümesi $D = \{d_1, \ldots, d_n\} \subset \mathbb{R}^q, q \geq 1$ üzerinde gözlemlenen stokastik bir süreçten oluşmaktadır. Burada, yanıt değişkeni $Y_d \in \mathbb{R}$, açıklayıcı kümesi

fonksiyonel kovaryatlar $X_d = \{X_{1d}, \dots, X_{Pd}\}^T$ ve her bir $X_{pd} \in \mathcal{L}[0,1], p \in \{1, \dots, P\}$, ve skaler açıklayıcı değişkenlerden oluşan vektör $Z_d = \left(z_{1d}, \dots, z_{Jd}\right)^T \in \mathbb{R}^J$ ile gösterilmektedir. Notasyonu sadeleştirmek amacıyla, d_i konumu sadece i olarak ifade edilir. Bu çalışmada dikkate alınan SSoFRM (4.1) eşitliğindeki gibi formüle edilmiştir:

$$\mathrm{Y} = \beta_0 1_\mathrm{n} + \rho \mathrm{WY} + \int_0^1 \mathrm{X(u)}\, \beta(\mathrm{u}) \mathrm{du} + \mathrm{Z\Gamma} + \epsilon \tag{4.1}$$

(4.1), buna eşdeğer olarak (4.2) biçimde de ifade edilebilir.

$$\mathrm{Y} = (\mathrm{I_n} - \rho W)^{-1} \left\{ \beta_0 1_\mathrm{n} + \int_0^1 \mathrm{X(u)}\, \beta(\mathrm{u}) \mathrm{du} + \mathrm{Z\Gamma} + \epsilon \right\} \tag{4.2}$$

Eşitlik (4.2)'de, $\beta(u) = \{\beta_1(u), \dots, \beta_P(u)\}^T$, her biri $\mathcal{L}(0,1)$ fonksiyon uzayında tanımlı olan fonksiyonel açıklayıcıların regresyon katsayı vektörüdür. $\Gamma = \left(\gamma_1, \dots, \gamma_J\right)^T$ skaler açıklayıcı değişkenlere ait regresyon katsayılarını ifade eder. ρWY terimi mekansal bağımlılığı modellemek için kullanılır. Burada W, bilinen mekansal ağırlık matrisi olup, ρ buna karşılık gelen mekansal otokorelasyon parametresidir. Hata terimi ϵ ise rastgele değişkenliği temsil eder ve uygun şekilde yapılandırılmış mekansal bir kovaryans modeline göre dağılım göstermektedir.

Eşitlik (4.1)'deki yapıya, doğrusal olmayan bir modele genişletilmek amacıyla bir bağlantı fonksiyonu olan $g(\cdot)$ doğrudan uygulandığında modelleme sürecinde çeşitli yapısal ve teorik sorunlara neden olmuştur. Bu sorunun temelinde, mekansal bağımlılık terimi olan ρWY 'ye Y tahmin edilmeden önce doğrusal olmayan bir dönüşüm uygulamasının, mekansal korelasyon yapısını bozması sebep olmuştur. Bu durum model uyumsuzluğuna ve yanlı çıkarımlara sebep olmuştur. Bu sorunun giderilmesi için önce mekansal otoregresif parametre ρ ML tahmini ile elde edilir ve $\hat{\rho}$ olarak adlandırılır. Daha sonra, $(\mathrm{I_n} - \hat{\rho} W)^{-1}$ dönüşümü uygulanarak mekansal bağımlılık yapısı modele uygun şekilde entegre edilmektedir. Bu dönüşümle elde edilen kestirici, FDNN modeline giriş olarak sunulmaktadır. FDNN içinde yer alan doğrusal olmayan bağlantı fonksiyonu $g(\cdot)$ fonksiyonu, mekansal olarak düzeltilmiş fonksiyonel ve skaler açıklayıcılarla yanıt

değişkeni arasındaki karmaşık ilişkileri modellemek için kullanılmaktadır.

Bu yapı doğrultusunda, NSSoFRM eşitlik (4.3)'teki gibi tanımlanmaktadır:

$$\mathbb{E}[Y|X(u),Z] = g\left\{(\mathrm{I_n} - \hat{\rho}W)^{-1}\left(\beta_0 + \int_0^1 \mathrm{X(u)}\ \beta(\mathrm{u})\mathrm{du} + \ \mathrm{Z\Gamma}\right)\right\} \tag{4.3}$$

Bu formülasyon, mekansal bağımlılık yapısını korurken, açıklayıcılar ile yanıt değişkeni arasındaki doğrusal olmayan etkileşimlerin esnek bir şekilde modellenmesine olanak tanmaktadır. Böylece model, mekansal bağımlı fonksiyonel veri bağlamında hem anlamlı yorumlar yapılmasına hem de yapısal tutarlılığın korunmasına imkan sağlamaktadır.

4.1. Mekansal Otokorelasyon Parametresi ρ'nun Tahmini

Eşitlik (4.1) ile verilen SSoFRM modeli dikkate alınarak, her bir fonksiyonel açıklayıcı $X_p(u)$ için ortalama fonksiyon $\mu_p(u) = \mathbb{E}[X_p(u)], u \in [0,1]$ şeklinde tanımlanmaktadır. Buna karşılık gelen kovaryans operatörü ise eşitlik (4.4)'teki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned} C_p(s,u) &= Cov\{X_p(s), X_p(u)\} \\ &= \mathbb{E}[\{X_p(s) - \mu_p(s)\}\{X_p(u) - \mu_p(u)\}] \ \ s,u \in [0,1]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Mercer Teoremi uygulanarak, kovaryans fonksiyonu $C_p(s,u) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{pk}\phi_{pk}(s)\phi_{pk}(u)$ şeklinde tanımlanmaktadır. Burada λ_{pk} azalan sırada sıralanmış özdeğerler, $\phi_{pk}(u)$ ise karşılık gelen ortonormal özfonksiyonlardır ve $\int_0^1 C_p(s,u)\phi_{pk}(u)du = \lambda_{pk}\phi_{pk}(s)$ koşulunu sağlamaktadır. Karhunen-Loeve Teoremi'ne göre, her bir $X_p(u)$ fonksiyonu $X_p(u) = \mu_p(u) + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{pk}\phi_{pk}(u)$ şekilde ifade edilir. FPC skorları $\xi_{pk} = \int_0^1 \{X_p(u) - \mu_p(u)\}\phi_{pk}(u)du$ ile elde edilir.

Fonksiyonel açıklayıcının yaklaşık temsili için ilk K_p temel bileşen kullanılır:

$$X_p(u) \approx \mu_p(u) + \sum_{k=1}^{K_p} \xi_{pk}\phi_{pk}(u) \tag{4.5}$$

(4.5) eşitliğinde K_p seçimi, açıklanan varyans kriterine bağlıdır. Öyle ki her bir $X_p(u)$ için seçilen K_p temel bileşen, toplam varyansın en az %95'ini açıklayacak şekilde seçilmelidir.

Her bir konum d için FPC skorlarının birleştirilmesiyle oluşturulan vektör $\xi_d = \left(\xi_{11d}, \dots, \xi_{1K_1d}, \xi_{21d}, \dots, \xi_{PK_pd}\right)^T \in \mathbb{R}^K$ şeklinde tanımlanır. Burada toplam boyut $K = \sum_{p=1}^{P} K_p$ şeklindedir. Skaler açıklayıcılar Z_d ile birleştirildiğinde, Z skaler açıklayıcıların matrisi, Ξ FPC skorlarını içeren matris olmak üzere genişletilmiş tasarım matrisi $X_c = [1_n \ \Xi \ Z]$ şeklinde tanımlanır. Bu dönüşümler sonucunda sunulan model aşağıdaki formda elde edilir:

$$Y = \beta_0 1_n + \rho WY + X_c\theta + \epsilon \tag{4.6}$$

(4.6)'da θ, X_c ile ilişkili regresyon katsayı vektörüdür. $\epsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$ hata terimi normal dağılmıştır.

Bu varsayımlar altında, modelin olabilirlik fonksiyonu şu şekilde yazılır:

$$L(\rho, \theta, \sigma^2) = \frac{1}{\frac{(2\pi\sigma^2)^n}{2}} |I_n - \rho W| \, exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}(Y - \rho WY - X_c\theta)^T(Y - \rho WY - X_c\theta)\right\} \tag{4.7}$$

Buna karşılık log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$lnL(\rho) = \frac{-n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) + \ln|I_n - \rho W| - \frac{1}{2\sigma^2}(Y - \rho WY - X_c\theta)^T(Y - \rho WY - X_c\theta) \tag{4.8}$$

Mekansal otokorelasyon parametresi ρ'nun tahmini, log-olabilirlik fonksiyonunun ρ açısından en büyüklenmesiyle (4.9)'daki gibidir.

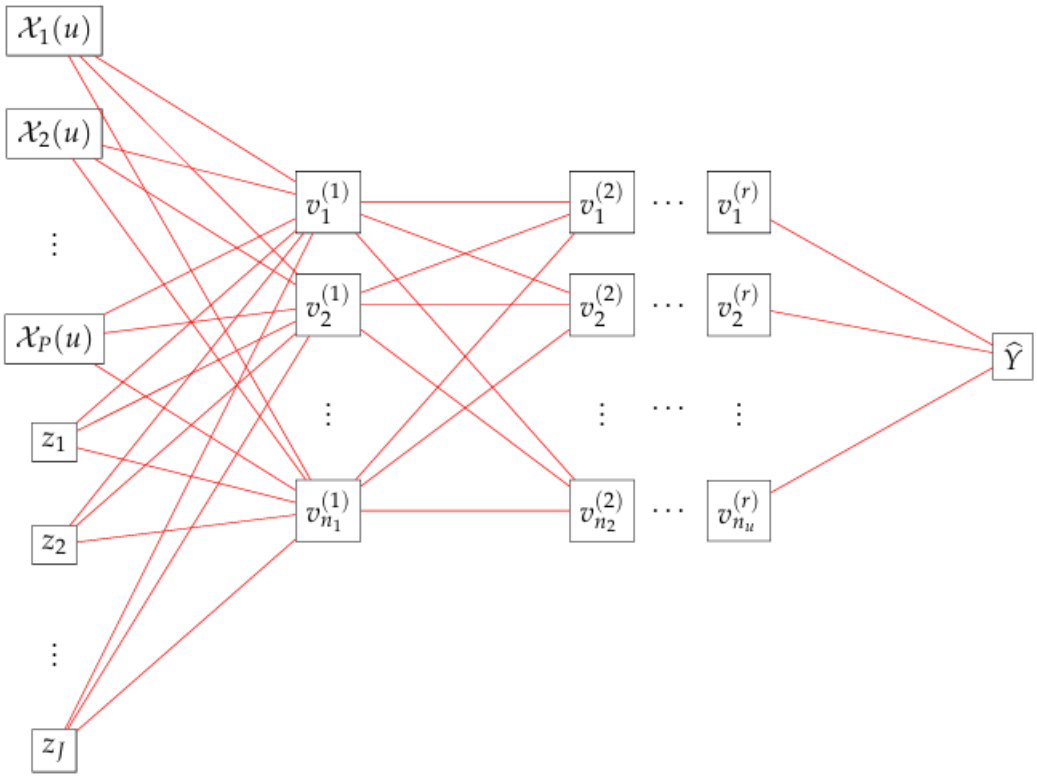
$$\hat{\rho} = arg\ \max_{\rho}\left\{\ln|\mathrm{I_n} - \rho W| - \frac{1}{2\sigma^2}(Y - \rho WY - X_c\theta)^T(Y - \rho WY - X_c\theta)\right\} \quad (4.9)$$

Bu optimizasyon işlemi genellikle Newton-Raphson ya da Broyden–Fletcher–Goldfarb Shanno (BFGS) gibi sayısal yöntemlerle gerçekleştirilir.

4.2. Mekansal Fonksiyonel Derin Sinir Ağı Yapısı

Sinir ağları, her biri "nöron" olarak adlandırılan hesaplama birimlerinden oluşan çok katmanlı bağlantılı yapılardır. Bu yapılar içinde yer alan ara katmanlar, genellikle gizli katmanlar olarak adlandırılır ve giriş verisini yinelemeli olarak dönüştürerek hiyerarşik özellik çıkarımına olanak tanır. Her bir nöron, bir önceki katmandan gelen çıktının ağırlıklı toplamına doğrusal olmayan bir aktivasyon fonksiyonu uygulayarak çalışır. Bu dönüşümlerin ardışık olarak birden fazla katmana uygulanması, modelin oldukça karmaşık fonksiyonları yaklaşık olarak öğrenmesini sağlar. Belirli bir gözlem için, ilk gizli katmanın çıktısı $v^{(1)}$ ile gösterilir ve $v^{(1)} = g(\omega^{(1)}x + b^{(1)})$şeklinde tanımlanır. Burada *x, J* boyutlu açıklayıcı değişken vektörü; $\omega^{(1)}$, $\mathrm{n_1}$ x J boyutlu ağırlık matrisi; $b^{(1)}$, ilk gizli katman için yanlılık terimi ve $g(.)$, aktivasyon fonksiyonu olup girişe doğrusal olmayan bir dönüşüm uygular (Tibshirani vd., 2009; Thind vd., 2023). Bu dönüşüm sonucunda elde edilen $\mathrm{n_1}$ boyutundaki $v^{(1)}$ vektörü, bir sonraki katmana aktarılır ve ağ, bu sayede veriden hiyerarşik temsiller öğrenmektedir.

Bu çalışmada önerilen NSSoFRM, $p \in \{1, \dots, P\}$ için sonsuz boyutlu fonksiyonel açıklayıcıları $X_p(u)$ içermektedir. Klasik sinir ağlarının aksine, burada ağırlıklar sonlu boyutlu matrisler değil, fonksiyonel kovaryatların tanımlı olduğu tüm aralık boyunca sürekli biçimde tanımlanmalıdır. Bu nedenle, ağırlık fonksiyonlarının da fonksiyonel açıklayıcıların model üzerindeki katkısının her noktada doğru biçimde hesaba katılabilmesi için sonsuz boyutlu olması gerekir. Bu gerekliliği karşılamak için, Thind vd. (2023) tarafından önerilen FDNN yaklaşımı benimsenmiştir ve Şekil 4.1'de genel bir fonksiyonel sinir ağı mimarisi gösterilmektedir.



Şekil 4.1 Önerilen Mekansal Fonksiyonel Derin Sinir Ağı (SFDNN) mimarisinin şematik yapısı

Şekil 4.1, hem fonksiyonel hem de skaler açıklayıcıları entegre ederek mekansal bağımlılık içeren bir skaler yanıt değişkenini modellemeye yöneliktir. Fonksiyonel kovaryatlar olan X_p(u), önce B-spline gibi temel fonksiyon genişletmeleri kullanılarak sonlu boyutlu bir uzaya yansıtılır ve bu yansıtma sonucunda elde edilen skaler özetler ağın girdisi olarak kullanılır. Skaler açıklayıcı değişkenler $z_j, j \in \{1, \dots, J\}$ için herhangi bir dönüşüm uygulanmaksızın doğrudan modele dahil edilir. Bu girişler, ilk gizli katmana aktarılır. Bu katmandaki her bir nöron, mekansal bağımlılığı dikkate alan bir ağırlıklı toplamın doğrusal olmayan bir dönüşümünü hesaplar. Bu işlem mekansal bağımlılığı dikkate alan $(I_n - \hat{\rho}W)^{-1}$ matrisinin tersiyle düzeltilerek gerçekleştirilir. Elde edilen aktivasyonlar, çok katmanlı gizli katmanlar boyunca ilerletilir ve bu sayede hiyerarşik doğrusal olmayan etkileşimler öğrenilir. Ağın çıktısı olarak elde edilen tek boyutlu değer $\widehat{Y}$, skaler yanıt değişkeninin beklenen değeri olarak yorumlanır. Bu yapı, karmaşık mekansal ve fonksiyonel ilişkilerin esnek ve güçlü biçimde modellenmesini mümkün kılarak, klasik regresyon yaklaşımlarının ötesine geçer.

Tek bir fonksiyonel kovaryat durumu için, $\ell \in \{1, \dots, n_1\}$ nöronu için ilgili fonksiyonel ağırlık $\omega_l(u)$ ile gösterilir. Buna karşılık gelen nöron aktivasyonu (4.10)'daki gibi

tanımlanır:

$$v_l^{(1)} = g\left[(\mathrm{I_n} - \hat{\rho}W)^{-1}\left\{\int_0^1 \omega_l(u)X(u)du\right\} + b_l^{(1)}\right] \tag{4.10}$$

(4.10)'da $g(.)$ aktivasyon fonksiyonunu, W mekansal ağırlık matrisini, $b_l^{(1)}$ ise ilk katmandaki ℓ'inci nöron için yanlılık terimini ifade etmektedir.

Fonksiyonel ağırlıklar, baz (temel) fonksiyonların doğrusal kombinasyonu olarak tanımlanır ve böylece model parametrelerinin sonlu boyutlu hale getirilmesi sağlanır. Bu amaçla, her bir fonksiyonel ağırlık $\omega_l(u) = \sum_{m=1}^{M} c_{lm}\psi_{lm}(u) = c_l^T\psi_l(u)$ olarak temsil edilir. Burada $\psi_l(u) = \{\psi_{l1}(u), \dots, \psi_{lM}(u)\}^T$ baz fonksiyon vektörünü, $c_l = (c_{l1}, \dots, c_{lM})^T$ baz katsayı vektörünü, M baz fonksiyon sayısını ifade etmektedir.

Bu çalışmada esnekliği ve hesaplama verimliliği nedeniyle B-Spline baz fonksiyonları kullanılmıştır (Boor, 2001). c_{lm} katsayıları başlangıçta ağda rastgele başlatılır ve eğitim süreci boyunca optimize edilir. (4.10) eşitliğindeki $\omega_l(u)$ ifadesi yerine $\omega_l(u) = \sum_{m=1}^{M} c_{lm}\psi_{lm}(u) = c_l^T\psi_l(u)$ ifadesi yazıldığında;

$$\begin{aligned} v_l^{(1)} &= g\left[(\mathrm{I_n} - \hat{\rho}W)^{-1}\left\{\int_0^1 \sum_{m=1}^{M} c_{lm}\psi_{lm}(u)X(u)du\right\}_{lm} + b_l^{(1)}\right] \\ &= g\left[(\mathrm{I_n} - \hat{\rho}W)^{-1}\left\{\sum_{m=1}^{M} c_{lm}\int_0^1 \psi_{lm}(u)X(u)du\right\} + b_l^{(1)}\right] \end{aligned} \tag{4.11}$$

(4.11)'deki integral terimi, uygun sayısal integrasyon (quadrature) yöntemleri kullanılarak yaklaşık olarak hesaplanır. Her bir nöronun çıktısı skaler bir değer olduğundan, sonraki katmanlara standart ileri beslemeli sinir ağı yapısı uygulanabilir.

NSSoFRM modelinin genel durumunda, hem P adet fonksiyonel hem de J adet skaler açıklayıcı değişken bulunduğunda, ilk gizli katmandaki ℓ'inci nöronun aktivasyonu (4.12) eşitliği gibi tanımlanır.

$$v_l^{(1)} = g\left[(\mathrm{I_n} - \hat{\rho}W)^{-1}\left\{\sum_{p=11}^{P}\int_0^1 \omega_{\mathrm{lp}}(\mathrm{u})X_p(u)du + \sum_{j=1}^{J}\omega_{\mathrm{lj}}^{(1)}z_j\right\}_{lm} + b_l^{(1)}\right] \quad (4.12)$$

Eşitlik (4.12)'de yer alan $\omega_{\mathrm{lj}}^{(1)}$ j'inci skaler açıklayıcı z_j ile ilişkili ağırlık, $\omega_{lp}(u)$ ise p'inci fonksiyonel açıklayıcı için ağırlık fonksiyonudur. $\omega_{lp}(u) = \sum_{m=1}^{M_p} c_{lpm}\psi_{lpm}(\mathrm{u})$ olacak şekilde B-Spline baz genişlemesi ile tanımlanır. Bununla beraber aktivasyon fonksiyonu (4.13) eşitliğindeki şekilde ifade edilir.

$$\begin{aligned} v_l^{(1)} &= g\left[(\mathrm{I_n} - \hat{\rho}W)^{-1}\left\{\sum_{p=11}^{P}\int_0^1 \sum_{m=1}^{M_p} c_{lpm}\psi_{lpm}(\mathrm{u})X_p(u)du + \sum_{j=1}^{J}\omega_{\mathrm{lj}}^{(1)}z_j\right\}_{lm} + b_l^{(1)}\right] \\ &= g\left[(\mathrm{I_n} - \hat{\rho}W)^{-1}\left\{\sum_{p11}^{P}\sum_{m=1}^{M_p} c_{lpm}\int_0^1 \psi_{lpm}(\mathrm{u})X_p(u)du + \sum_{j=1}^{J}\omega_{\mathrm{lj}}^{(1)}z_j\right\}_{lm} + b_l^{(1)}\right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Bu yapı, fonksiyonel ve skaler girişlerin sinir ağı içinde birlikte ve etkili biçimde öğrenilmesini sağlar. İlk gizli katmandaki aktivasyonlar hesaplandıktan sonra, bu aktivasyonlar sonraki katmanlara aktarılır ve nihayetinde ağdan tek boyutlu bir çıktı (skaler tahmin) elde edilir. Modelin başarımını değerlendirmek için gözlenen ve tahmin edilen değerler arasındaki farkı ölçen bir kayıp fonksiyonu kullanılır. En yaygın tercih edilen ölçüt, ortalama karesel hata (MSE) olup $\phi(\Theta) = \sum_{i=1}^{N}\left(Y_i - \hat{Y}_i(\Theta)\right)^2$ şeklinde tanımlanır. Θ ağdaki tüm öğrenilebilir parametreleri temsil ederken, $\hat{Y}_i(\Theta)$ i'inci gözlem için FDNN tarafından üretilen tahmin değeridir. Bu kayıp fonksiyonu, eğitim sürecinde modelin optimize edilmesi amacıyla kullanılır ve ağın hem fonksiyonel hem de skaler girdilerden anlamlı temsiller öğrenmesini sağlamaktadır.

4.2.1. Fonksiyonel derin sinir ağı eğitimi ve parametre ayarı

FDNN eğitimi, seçilen kayıp fonksiyonunu minimize etmeye yönelik gradyan tabanlı bir optimizasyon çerçevesini izlemektedir. Geleneksel derin öğrenme modellerinde olduğu gibi, gradyanlar geriye yayılım algoritması (Rumelhart vd., 1985) ile hesaplanır ve parametre güncellemeleri için Adam optimizasyon algoritması (Kingma ve Ba, 2014)

kullanılır.

Tüm öğrenilebilir parametreler için gradyan kümesi $\Delta\Theta$ şu şekilde ifade edilir:

$$\Delta\Theta = \left\{ \bigcup_{p=1}^{P} \bigcup_{m=1}^{M_p} \bigcup_{l=1}^{n_1} \frac{\partial \phi}{\partial c_{lpm}}, \bigcup_{r=1}^{R} \bigcup_{j=1}^{J_r} \bigcup_{l=1}^{n_r} \frac{\partial \phi}{\partial \omega_ljr}, \bigcup_{r=1}^{R} \bigcup_{l=1}^{n_r} \frac{\partial \phi}{\partial b_{lr}} \right\} \tag{4.14}$$

Bu gradyanlar, her bir eğitim gözlemi için ayrı ayrı hesaplanır ve tüm veri seti üzerinde parametre güncellemeleri yapılmasına imkan sağlamaktadır. Ancak, her adımda tüm veri seti üzerinden güncelleme yapmak hesaplama açısından maliyetli olduğundan, bunun yerine mini-yığın (mini-batch) yaklaşımı kullanılmaktadır. Bu yöntem ile, rastgele seçilen N_b sayıda gözlem içeren küçük veri alt gruplarıyla güncellemeler yapılır. Mini-yığın içindeki ortalama gradyan $\tilde{a} = \frac{1}{N_b}\sum_{i=1}^{N_b} \frac{\partial \phi}{\partial a_i}$ olarak tanımlanır ve bu gradyana karşılık gelen parametre güncellemesi $a \leftarrow a - \zeta\tilde{a}$ şeklinde gerçekleştirilir. Burada yer alan a güncellenmekte olan parametreyi, ζ ise öğrenme oranı olup optimizasyonda adım büyüklüğünü kontrol eden bir hiperparametredir (Ruder, 2016). Bu prosedür, tüm mini-yığınlar işlenene kadar yinelemeli olarak uygulanır. Tüm veri setinin bir kez taranması bir epok olarak adlandırılır. Epok sayısı, model başarımı ve yakınsama kriterlerine bağlı olarak hiperparametre olarak belirlenmektedir.

FDNN'de çok sayıda hiperparametre bulunduğundan, bu parametrelerin uygun şekilde seçilmesi model başarımı için kritik öneme sahiptir. Bu nedenle, hiperparametre ayar süreci 4.2.1.1 başlığında anlatılan Algoritma 1 ile özetlenmiştir. Yaygın bir yaklaşım, her hiperparametre için önceden belirlenmiş olası değerler kümesini sistematik olarak taramaktır. Bu amaçla, k-katlı çapraz doğrulama (cross-validation) kullanılır (Tibshirani vd., 2009; Thind vd., 2023). Bu yöntemde, hiperparametre kombinasyonlarını içeren bir arama ızgarası oluşturulmaktadır. Her bir aday konfigürasyon için veri seti *K* parçaya bölünür, model *K*-1 parça üzerinde eğitilir, kalan parça doğrulama seti olarak kullanılır. Tahmin performansı ise ortalama karesel tahmin hatası (MSPE), MSPE = $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{K}\sum_{i\in S_b}\left(\widehat{Y}_i^{(-b)} - Y_i\right)^2$ formülü ile hesaplanır. S_b b'inci doğrulama alt kümesini, $\widehat{Y}_i^{(-b)}$ modelin *K*-1 alt küme ile eğitildikten sonra gözlem i için yapılan tahmini, *n* ise

toplam örnek sayısını belirtmektedir. En düşük MSPE değerini veren hiperparametre kombinasyonu model için optimal ayar olarak seçilir.

4.2.1.1. Algoritma 1: Fonksiyonel sinir ağları için eğitim prosedürü

Girdiler:

Fonksiyonel Girdiler: $X_p(u), p \in \{1, \dots, P\}$, Skaler Girdiler: $z_j, j \in \{1, \dots, J\}$, Hiperparametreler: Öğrenme oranı ζ, gizli katman sayısı, katman başına nöron sayısı, aktivasyon fonksiyonları, ağırlık küçültme(weight decay) katsayısı, doğrulama bölmesi oranı, fonksiyonel ağırlık için baz fonksiyon sayısı, fonksiyonel ağırlıkların tanımlı olduğu alan, eğitim epok sayısı, mini-batch büyüklüğü, erken durdurma kriteri, yakınsama eşiği τ.

Amaç: Eğitim sonrası optimize edilmiş parametreler Θ elde etmek.

1. Adım: Hiperparametrelerin başlatılması gerekir. Bu noktada durdurma kriteri olarak minimum kayıp iyileşme eşiğini temsil eden $\tau > 0$ değeri tanımlanır. Ayrıca iterasyon sayacı $\eta = 0$, başlangıçtaki hata farkı $\delta = 0$ olarak atanır.

2. Adım: Eğitim sürecinin tanımlanması gerekir. δ, τ'dan küçük olduğu sürece aşağıdaki işlemler gerçekleştirilir.

- İleri Yönlü Yayılım (Forward Propagation): İlk olarak fonksiyonel ve skaler değişkenler olan $X_p(u)$ ve z_j ilk gizli katmana dahil edilir. Fonksiyonel girdiler için integraller baz genişleme ile $\int_0^1 \psi_{lm}(u) X_p(u) du \approx \widetilde{\psi_{lm}}$ formülü kullanılarak yaklaşık olarak hesaplanır. $E = g\left\{(\mathrm{I_n} - \hat{\rho} W)^{-1} \left\{\sum_{p=1}^{P} \sum_{m=1}^{M_p} c_{lpm} \widetilde{\psi_{lpm}} + \sum_{j=1}^{J} \omega_{\mathrm{lj}}^{(1)} z_{j_{lm}}\right\} + b_l^{(1)}\right\}$ hesabı ile nöron aktivasyonları hesaplanır. Hesaplanan aktivasyonlar sonraki katmanlara iletilir ve kayıp fonksiyonu $\phi(\Theta)$ hesaplanır.
- Geri Yönlü Yayılım (Backpropagation): Tüm ağ parametreleri için gradyanlar $\Delta\theta$ hesaplanır. Her bir parametre $a \in \zeta \tilde{a}$ için $a \leftarrow a - \zeta \tilde{a}$ olarak güncellenir.
- Durdurma Kriterini Değerlendirme: Eğer $\eta = 0$ ise $\delta = \phi(\Theta)$ eşitliği sağlanır. Aksi takdirde $\delta = |\delta - \phi(\Theta)|$ olacak ve iterasyon sayacı $\eta \leftarrow \eta + 1$ şeklinde artırılır.

3. Adım: Optimize edilen parametreler elde edilir. Eğitilmiş nihai parametre kümesi oluşturulur.

5. SAYISAL ANALİZLER

5.1. Simülasyon Çalışmaları (Monte Carlo Deneyleri)

Önerilen SFDNN yöntemin doğruluğunu değerlendirmek amacıyla bir dizi Monte Carlo simülasyonu gerçekleştirilmiştir. SFDNN'in performansı, iki alternatif yöntem olan klasik FDNN ve ML tabanlı model kullanılarak karşılaştırılmıştır. ML-tabanlı yaklaşımda, fonksiyonel açıklayıcılar önce FPCA ile daha düşük boyutlu bir uzaya yansıtılmış, ardından parametreler ML yöntemi ile tahmin edilmiştir. Simülasyon çalışmalarına ilişkin örnek kodlara şu GitHub bağlantısından ulaşılabilir: https://github.com/mervebasaran/SpatialFunctionDNN

Veri üretim süreci, Beyaztaş, Mandal ve Shang (2025) tarafından sunulan çerçevenin genişletilmiş bir versiyonunu izlemiştir. $X(u) = \{X_1(u), X_2(u), X_3(u)\}^T$ olmak üzere üç fonksiyonel açıklayıcı simüle edilmiştir. Bunlara ek olarak, $Z = (z_1, z_2, z_3)^T$şeklinde üç skaler açıklayıcı değişken tanımlanmıştır. Her bir fonsiyonel açıklayıcı $X_p(u), p \in \{1,2,3\}$ $[0,1]$ aralığında ve eşit aralıklı 101 noktada gözlemlenmekte ve $X_p(u) = \sum_{j=1}^{5} \kappa_j v_j(u)$ şeklinde üretilmektedir. Burada $\kappa_j \sim \mathcal{N}(0, 4\mathrm{j}^{-3/2})$ ve $v_j(u) = \sin(j\pi u) - \cos(j\pi u)$ olarak tanımlanmıştır. Fonksiyonel açıklayıcılara karşılık gelen regresyon katsayı fonksiyonları $\beta_1(u) = \sin(2\pi u)$, $\beta_2(u) = \cos(2\pi u)$, $\beta_3(u) = 2\sin(2\pi u)$ olarak, skaler açıklayıcı değişkenler $z_j \sim \mathcal{N}(0,1), \mathrm{j} \in \{1,2,3\}$ ve regresyon katsayıları $\Gamma = (1.25, -2, 2.15)^T$ şeklinde tanımlanmıştır.

Mekansal bağımlılığı modellemek için**,** ters uzaklık ağırlıklı (inverse distance weighted) mekansal ağırlık matrisi W oluşturulmuştur, elemanları ise 5.1'deki şekilde tanımlanır:

$$\omega_{ii'} = \frac{1}{1 + |i - i'|}, i \neq i' \qquad (5.1)$$

Ana köşegen elemanları $\omega_{ii} = 0$'dır. Uygun ölçeklendirme sağlamak amacıyla büyük i'ler için $W_i = \frac{\omega_ii\prime}{\sum_{i'=1}^{n} \omega_ii\prime}$ satır normalizasyonu yapılır.

Simülasyon çalışmasında yanıt değişkeni aşağıdaki SSoFRM'e göre üretilmiştir:

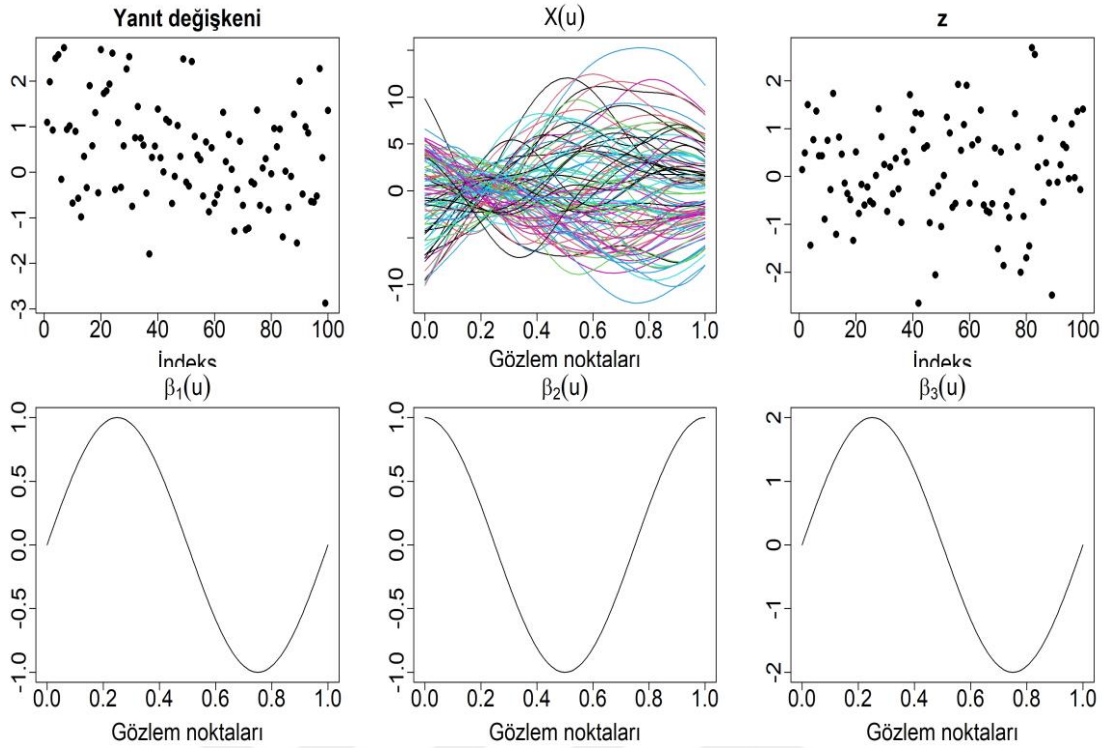
$$Y = (\mathrm{I_n} - \rho W)^{-1}\left\{\beta_0 1_n + \int_0^1 X(u)\,\beta(u)du + Z\Gamma + \epsilon\right\} \quad (5.2)$$

Hata dağılımı için $\epsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\epsilon \sim t_3$ (merkez dışı parametreye sahip t-dağılımı) ve $\epsilon \sim exp(1)$ olmak üzere üç senaryo ele alınmıştır. Ağır kuyruklu t_3 dağılımlı hatalar, zaman zaman aşırı değerlere sahip olan, Gauss olmayan bir gürültü yapısı ortaya koyar. Bu da standart doğrusal varsayımdan sapmalara yol açar ve model tahmininin karmaşıklığını artırır. Benzer şekilde, üstel dağılımlı hatalar $exp(1)$ pozitif çarpıklık gösterir; bu durum yanıt değişkeninde asimetri oluşturur ve geleneksel modelleme yaklaşımlarını zorlayan doğrusal olmayan örüntüler meydana getirir.

Mekansal bağımlılığın etkisini değerlendirmek üzere $\rho \in \{0.1, 0.5, 0.9\}$ olmak üzere üç farklı ρ değeri kullanılmıştır. Bu değerler sırasıyla zayıf, orta ve güçlü mekansal bağımlılığı temsil etmektedir. Farklı deneysel koşullar altında, hem FDNN hem de onun mekansal varyantı olan SFDNN'nin, özellikle doğrusal olmayan dönüşümlerin bulunduğu durumlarda geleneksel makine öğrenimi tabanlı yaklaşıma kıyasla üstün performans göstermesi beklenmektedir. Ayrıca, önerilen SFDNN'nin, mekansal bağımlılıkların daha belirgin olduğu senaryolarda, özellikle de ρ değerinin orta ila yüksek düzeylerde olduğu durumlarda ($\rho = 0.5, 0.9$ olduğunda), daha yüksek kestirim doğruluğu sağlaması öngörülmektedir.

Şekil 5.1, sigmoid bağlantı dönüşümü altında, özellikle mekansal bağımlılık parametresinin $\rho = 0.9$ olarak ayarlandığı durumda, benzetimle oluşturulan veri kümesini ve karşılık gelen regresyon katsayısı fonksiyonlarını görsel olarak sunmaktadır.

Şekil 5.1'de yer alan sol üst panelde skaler yanıt değişkenine ait 50 adet örnek gözlem, sağ üst panelde fonksiyonel açıklayıcılardan birine ait örnek gözlemler (üç fonksiyonel açıklayıcının yapıları benzer olduğundan yalnızca biri gösterilmiştir), sol orta panelde skaler açıklayıcılardan birine ait örnek gözlemler (benzer şekilde, yalnızca üç skaler değişkenden biri sunulmuştur), sağ orta, sol alt ve sağ alt panellerde ise gerçek regresyon katsayısı fonksiyonları gösterilmektedir. Veriler, hata terimi $\epsilon \sim exp(1)$ ve mekansal bağımlılık parametresi $\rho = 0.9$ olacak şekilde üretilmiştir.



Şekil 5.1 Sırasıyla; skaler yanıt değişkenine ait 50 örnek gözlem, fonksiyonel açıklayıcılardan birine ait örnek gözlemler, skaler açıklayıcılardan birine ait örnek gözlemler ve gerçek regresyon katsayısı fonksiyonları

Simülasyon deneylerinde, model performansı farklı eğitim örneklem büyüklükleri altında değerlendirilmiştir; özellikle $n_{train} \in \{100, 250, 500\}$ durumları dikkate alınmıştır. Her bir senaryo için, genelleme performansını değerlendirmek üzere $n_{test} = 1000$ boyutunda bağımsız bir test veri seti üretilmiştir. Modeller önce oluşturulan veri setleri üzerinde eğitilmiş, ardından test örnekleri kullanılarak kestirim doğrulukları değerlendirilmiştir. Kestirim performansını nicel olarak ölçmek amacıyla hem eğitim hem de test veri setleri için MSE ve R^2 olarak iki temel değerlendirme ölçütü kullanılmıştır. Özellikle, modelin örnekleme içi kestirim başarımı, eğitim verisi üzerindeki MSE ve R^2 değerleri ile; örnekleme dışı başarımı ise MSPE ve test verisine ait determinasyon katsayısı R^2_{test} ile ölçülmüştür. Bu değerlendirme ölçütleri aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır.

$$MSE = \frac{1}{n_{train}} \sum_{i=1}^{n_{train}} \left(Y_i - \widehat{Y}_i\right)^2, \qquad R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n_{train}} \left(Y_i - \widehat{Y}_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n_{train}} (Y_i - \bar{Y})^2}$$

$$MSPE = \frac{1}{n_{test}} \sum_{i=1}^{n_{test}} \left(Y_i^* - \widehat{Y_i^*}\right)^2, \qquad R_{test}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n_{test}} \left(Y_i^* - \widehat{Y_i^*}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n_{test}} (Y_i^* - \overline{Y^*})^2}$$

Burada üst simge olarak kullanılan * işareti, gözlemlerin test veri setine ait olduğunu belirtmektedir; *Y* ve *Y** ise sırasıyla eğitim ve test veri setlerindeki yanıt değişkeninin ortalama değerlerini temsil etmektedir. Genelleme performansının geçerli bir şekilde değerlendirilmesini sağlamak amacıyla, eğitim ve test örnekleri birbirinden bağımsız ve örtüşmeyen gözlemler içerecek şekilde oluşturulmuştur.

Simülasyon sonuçları Tablo 5.1–3'te sunulmuştur. Gauss tipi hatalar altında (bkz. Tablo 5.1), tüm modeller düşük düzeyde mekansal bağımlılık durumlarında ($\rho = 0.1$) güçlü kestirim performansı sergilemekte, MSPE ve R^2_{test} değerlerinde ise göreli olarak küçük farklar gözlemlenmektedir. Ancak mekansal otokorelasyon arttıkça ($\rho = 0.5\ ve\ \rho = 0.9$), ML tabanlı modelin MSPE değeri önemli ölçüde artmakta; bu da modelin mekansal bağımlılıkları yeterince yakalayamadığını göstermektedir. ML'ye kıyasla daha sağlam bir yapı sunan FDNN modeli bile, yüksek düzeyde mekansal bağımlılık altında belirgin bir doğruluk kaybı yaşamaktadır. Buna karşılık, önerilen SFDNN modeli, tüm mekansal bağımlılık düzeylerinde en düşük MSPE değerini koruyarak en yüksek R^2_{test} performansına ulaşmakta ve bu durum, derin öğrenme çerçevesine açık biçimde mekansal bağımlılıkların dahil edilmesinin etkinliğini ortaya koymaktadır. Özellikle $\rho = 0.9$ durumunda, ML modelinin MSPE değeri SFDNN modelinin yaklaşık üç katı olup, karmaşık fonksiyonel veri yapıları için mekansal farkındalığı olan modellemelerin gerekliliğini doğrulamaktadır.

Tablo 5.1 Hata dağılımının *ϵ~N(0,1)* olduğu 250 Monte Carlo simülasyonu üzerinden hesaplanan MSE, MPSE ve R^2 ölçütlerine göre ML, FDNN ve SFDNN modellerinin karşılaştırması

n_{train}	ρ	ML				FDNN				SFDNN			
		MSE	**R^2**	**MPSE**	**R^2_{test}**	**MSE**	**R^2**	**MPSE**	**R^2_{test}**	**MSE**	**R^2**	**MPSE**	**R^2_{test}**
100	**0.1**	0.988	0.967	2.344	0.936	0.966	0.968	1.438	0.953	0.963	0.968	1.516	0.952
		(0.200)	(0.007)	(1.181)	(0.029)	(0.177)	(0.006)	(0.134)	(0.005)	(0.164)	(0.005)	(0.209)	(0.006)
	0.5	1.045	0.961	3.454	0.916	1.142	0.960	2.124	0.946	0.985	0.964	1.629	0.950
		(0.230)	(0.010)	(3.672)	(0.102)	(0.224)	(0.007)	(0.628)	(0.007)	(0.170)	(0.007)	(0.322)	(0.008)
	0.9	1.193	0.964	37.165	0.928	5.672	0.870	44.441	0.857	3.656	0.919	13.782	0.884
		(0.290)	(0.010)	(30.278)	(0.046)	(5.880)	(0.100)	(44.583)	(0.099)	(5.796)	(0.102)	(13.919)	(0.108)
250	**0.1**	1.098	0.962	2.625	0.918	1.081	0.963	1.300	0.955	1.069	0.964	1.315	0.955
		(0.109)	(0.005)	(2.043)	(0.067)	(0.097)	(0.006)	(0.116)	(0.005)	(0.087)	(0.006)	(0.099)	(0.004)

	0.5	1.150	0.960	2.505	0.935	1.278	0.957	1.669	0.953	1.084	0.963	1.384	0.957
		(0.211)	(0.008)	(1.694)	(0.056)	(0.177)	(0.007)	(0.348)	(0.006)	(0.151)	(0.007)	(0.180)	(0.006)
	0.9	1.291	0.959	16.232	0.929	2.388	0.930	29.068	0.922	1.225	0.962	8.219	0.948
		(0.145)	(0.005)	(16.227)	(0.039)	(1.159)	(0.027)	(38.912)	(0.013)	(0.112)	(0.006)	(12.748)	(0.015)
500	**0.1**	1.123	0.962	3.096	0.904	1.001	0.966	1.215	0.960	1.02	0.966	1.244	0.96
		(0.172)	(0.006)	(4.142)	(0.119)	(0.084)	(0.003)	(0.117)	(0.005)	(0.118)	(0.004)	(0.105)	(0.005)
	0.5	1.214	0.959	1.875	0.947	1.173	0.961	1.497	0.956	1.040	0.966	1.185	0.962
		(0.166)	(0.005)	(0.840)	(0.018)	(0.119)	(0.003)	(0.328)	(0.006)	(0.098)	(0.003)	(0.136)	(0.004)
	0.9	1.244	0.960	15.892	0.949	2.023	0.937	23.73	0.919	1.109	0.965	4.108	0.957
		(0.160)	(0.004)	(15.21)	(0.029)	(0.495)	(0.011)	(22.085)	(0.026)	(0.106)	(0.005)	(4.792)	(0.009)

Tablo 5.1'de hata dağılımının $\epsilon \sim N(0,1)$ olduğu 250 Monte Carlo simülasyonu üzerinden hesaplanan MSE, MPSE ve R^2 ölçütlerine göre ML, FDNN ve SFDNN modellerinin karşılaştırması sunulmaktadır. Parantez içinde verilen değerler standart hataları göstermektedir. Performans ölçütleri, üç farklı eğitim örneklem büyüklüğü n_{train} ve üç farklı mekansal otokorelasyon parametresi ρ altında hesaplanmıştır.

Ağır kuyruklu hata senaryosu altında (bkz. Tablo 5.2), ML ve FDNN yaklaşımları, özellikle yüksek düzeyde mekansal bağımlılık durumlarında belirgin bir performans bozulması yaşamaktadır; bu durum, MSPE değerlerindeki keskin artışla açıkça gözlemlenmektedir. Aşırı değerlere karşı hassasiyet özellikle ML modeli için dikkat çekicidir; çünkü bu model, ağır kuyruklu dağılımlara uyum sağlayabilecek esnekliğe sahip değildir. FDNN modeli ise sınırlı bir iyileşme sunsa da, mekansal bağımlılıkları açık biçimde modelleyemediği için hata büyümesine karşı hala duyarlıdır. Buna karşın, önerilen SFDNN modeli, ağır kuyruklu gürültüye karşı dikkate değer bir dayanıklılık göstermekte; özellikle $\rho = 0.9$ durumunda, anlamlı şekilde daha düşük MSPE ve daha yüksek R^2_{test} değerleri elde ederek üstün kestirim performansı sergilemektedir.

Tablo 5.2 Hata dağılımının $\epsilon \sim t_3$ *(merkezden sapmalı t-dağılımı)* olduğu 250 Monte Carlo simülasyonu üzerinden hesaplanan MSE, MPSE ve R^2 ölçütlerine göre ML, FDNN ve SFDNN modellerinin karşılaştırması

n_{train}	ρ	ML				FDNN				SFDNN			
		MSE	**R^2**	**MPSE**	**R^2_{test}**	**MSE**	**R^2**	**MPSE**	**R^2_{test}**	**MSE**	**R^2**	**MPSE**	**R^2_{test}**
100	**0.1**	3.000	0.905	4.158	0.879	3.018	0.907	4.028	0.877	3.047	0.906	4.374	0.870
		(1.549)	(0.037)	(1.265)	(0.035)	(1.724)	(0.041)	(1.210)	(0.036)	(1.687)	(0.039)	(1.373)	(0.041)
	0.5	2.885	0.900	4.957	0.883	3.942	0.873	6.054	0.860	2.920	0.900	4.247	0.884
		(2.120)	(0.058)	(1.558)	(0.029)	(4.459)	(0.121)	(5.025)	(0.096)	(2.132)	(0.058)	(0.955)	(0.023)
	0.9	3.043	0.914	38.242	0.818	6.501	0.857	45.208	0.822	3.053	0.915	22.641	0.873

		(0.867)	(0.029)	(31.013)	(0.228)	(6.812)	(0.078)	(33.112)	(0.070)	(0.934)	(0.028)	(21.802)	(0.036)
250	**0.1**	2.895	0.908	48.109	0.824	2.800	0.913	47.524	0.840	2.804	0.912	47.584	0.839
		(0.789)	(0.028)	(170.35)	(0.223)	(0.727)	(0.025)	(171.1)	(0.225)	(0.713)	(0.025)	(171.24)	(0.225)
	0.5	2.970	0.905	5.143	0.870	3.005	0.904	3.561	0.903	2.886	0.909	3.225	0.907
		(0.519)	(0.016)	(4.321)	(0.114)	(0.447)	(0.014)	(0.740)	(0.020)	(0.451)	(0.014)	(0.629)	(0.021)
	0.9	3.353	0.902	32.317	0.863	4.598	0.871	28.062	0.862	3.228	0.906	14.358	0.894
		(1.027)	(0.028)	(29.493)	(0.080)	(1.540)	(0.032)	(27.298)	(0.030)	(1.018)	(0.028)	(15.238)	(0.024)
500	**0.1**	3.013	0.901	3.923	0.882	2.968	0.905	3.073	0.906	2.951	0.905	3.045	0.907
		(0.751)	(0.024)	(2.718)	(0.080)	(0.666)	(0.022)	(0.654)	(0.019)	(0.701)	(0.022)	(0.672)	(0.019)
	0.5	3.095	0.903	4.522	0.883	3.105	0.905	4.116	0.882	2.913	0.910	3.703	0.889
		(0.605)	(0.019)	(2.133)	(0.051)	(0.636)	(0.020)	(1.653)	(0.049)	(0.635)	(0.020)	(1.641)	(0.049)
	0.9	4.136	0.882	25.779	0.839	4.741	0.867	24.11	0.878	4.041	0.887	11.84	0.911
		(3.489)	(0.073)	(31.158)	(0.238)	(3.383)	(0.068)	(30.98)	(0.020)	(3.562)	(0.074)	(18.132)	(0.016)

Tablo 5.2'de hata dağılımının $\epsilon \sim t_3$ (merkezden sapmalı t-dağılımı) olduğu 250 Monte Carlo simülasyonu üzerinden hesaplanan MSE, MPSE ve R^2 ölçütlerine göre ML, FDNN ve SFDNN modellerinin karşılaştırması sunulmaktadır. Parantez içinde verilen değerler standart hataları göstermektedir. Performans ölçütleri, üç farklı eğitim örneklem büyüklüğü n_{train} ve üç farklı mekansal otokorelasyon parametresi ρ altında hesaplanmıştır.

Hatalar asimetrik üstel dağılıma uyduğunda (bkz. Tablo 5.3), modeller arasındaki performans farkı daha da belirgin hale gelmektedir. Üstel dağılımlı hatalar, yanıt değişkeninde çarpıklık oluşturmakta ve bu durum, simetrik Gauss varsayımına dayanan geleneksel modeller için özellikle zorlayıcı olmaktadır. Beklendiği üzere, ML modeli en kötü performansı sergilemekte; ρ arttıkça MSPE değerinde keskin bir artış ve R^2_{test} değerinde anlamlı bir düşüş gözlenmektedir. FDNN modeli, bir miktar daha sağlam olsa da, özellikle yüksek düzeyde mekansal bağımlılık durumunda $\rho = 0.9$ belirgin bir kestirim performansı düşüşü göstermektedir. Buna karşılık, SFDNN modeli, tüm mekansal korelasyon düzeylerinde en düşük MSPE değerlerini istikrarlı bir şekilde elde ederek, asimetrik gürültü yapısına uyum sağlama becerisini ortaya koymaktadır.

Tablo 5.3 Hata dağılımının *$\epsilon \sim exp(1)$ (üstel dağılım)* olduğu 250 Monte Carlo simülasyonu üzerinden hesaplanan MSE, MPSE ve R^2 ölçütlerine göre ML, FDNN ve SFDNN modellerinin karşılaştırması

n_{train}	ρ	ML				FDNN				SFDNN			
		MSE	**R^2**	**MPSE**	**R^2_{test}**	**MSE**	**R^2**	**MPSE**	**R^2_{test}**	**MSE**	**R^2**	**MPSE**	**R^2_{test}**
100	**0.1**	1.002	0.964	2.500	0.928	1.006	0.964	1.350	0.957	1.010	0.964	1.357	0.957

		(0.241)	(0.009)	(1.939)	(0.055)	(0.162)	(0.008)	(0.236)	(0.008)	(0.182)	(0.008)	(0.215)	(0.008)
	0.5	1.034	0.965	8.861	0.805	1.315	0.957	1.828	0.945	1.020	0.966	1.545	0.950
		(0.296)	(0.009)	(15.52)	(0.311)	(0.547)	(0.013)	(0.316)	(0.347)	(0.010)	(0.282)	(0.009)	(0.009)
	0.9	1.161	0.961	37.082	0.886	3.499	0.896	39.827	0.871	2.414	0.926	15.459	0.903
		(0.322)	(0.013)	(32.332)	(0.238)	(2.771)	(0.074)	(34.476)	(0.082)	(1.933)	(0.064)	(12.341)	(0.071)
250	**0.1**	1.129	0.960	4.668	0.884	1.024	0.965	1.263	0.959	1.019	0.965	1.248	0.959
		(0.266)	(0.011)	(11.165)	(0.236)	(0.194)	(0.008)	(0.198)	(0.004)	(0.209)	(0.009)	(0.198)	(0.005)
	0.5	1.093	0.963	2.690	0.934	1.264	0.958	1.734	0.952	1.055	0.965	1.366	0.956
		(0.238)	(0.008)	(1.421)	(0.043)	(0.264)	(0.007)	(0.435)	(0.008)	(0.181)	(0.006)	(0.248)	(0.007)
	0.9	1.062	0.969	21.107	0.874	2.937	0.918	19.973	0.919	1.172	0.966	5.464	0.944
		(0.160)	(0.004)	(26.802)	(0.240)	(1.144)	(0.025)	(25.639)	(0.013)	(0.212)	(0.007)	(5.032)	(0.014)
500	**0.1**	1.148	0.961	4.862	0.883	1.042	0.967	1.402	0.957	1.034	0.966	1.372	0.957
		(0.174)	(0.006)	(11.494)	(0.238)	(0.062)	(0.003)	(0.240)	(0.008)	(0.088)	(0.003)	(0.213)	(0.008)
	0.5	1.055	0.964	2.542	0.929	1.152	0.962	1.613	0.954	1.005	0.967	1.291	0.960
		(0.163)	(0.007)	(1.663)	(0.051)	(0.157)	(0.006)	(0.496)	(0.010)	(0.177)	(0.006)	(0.247)	(0.008)
	0.9	1.200	0.961	14.194	0.911	1.999	0.937	22.077	0.931	1.209	0.961	4.291	0.946
		(0.203)	(0.006)	(22.944)	(0.072)	(0.431)	(0.010)	(24.368)	(0.010)	(0.143)	(0.005)	(4.650)	(0.020)

Tablo 5.3'te hata dağılımının $\epsilon \sim exp(1)$ (üstel dağılım) olduğu 250 Monte Carlo simülasyonu üzerinden hesaplanan MSE, MPSE ve R^2 ölçütlerine göre ML, FDNN ve SFDNN modellerinin karşılaştırması sunulmaktadır. Parantez içinde verilen değerler standart hataları göstermektedir. Performans ölçütleri, üç farklı eğitim örneklem büyüklüğü n_{train} ve üç farklı mekansal otokorelasyon parametresi ρ altında hesaplanmıştır.

Tüm deneysel koşullar genelinde elde edilen sonuçlar, SFDNN modelinin, özellikle yüksek mekansal bağımlılık ve Gauss olmayan hata durumlarında, kestirim doğruluğu açısından hem ML hem de FDNN modellerine kıyasla anlamlı derecede üstün performans sergilediğini ortaya koymaktadır. SFDNN'nin sağladığı avantaj, verilerin güçlü mekansal otokorelasyon gösterdiği $\rho = 0.9$ ve hataların ağır kuyruklu ya da çarpık dağıldığı senaryolarda en belirgin hale gelmektedir; bu tür durumlarda geleneksel yöntemler güvenilir kestirimler üretememektedir.

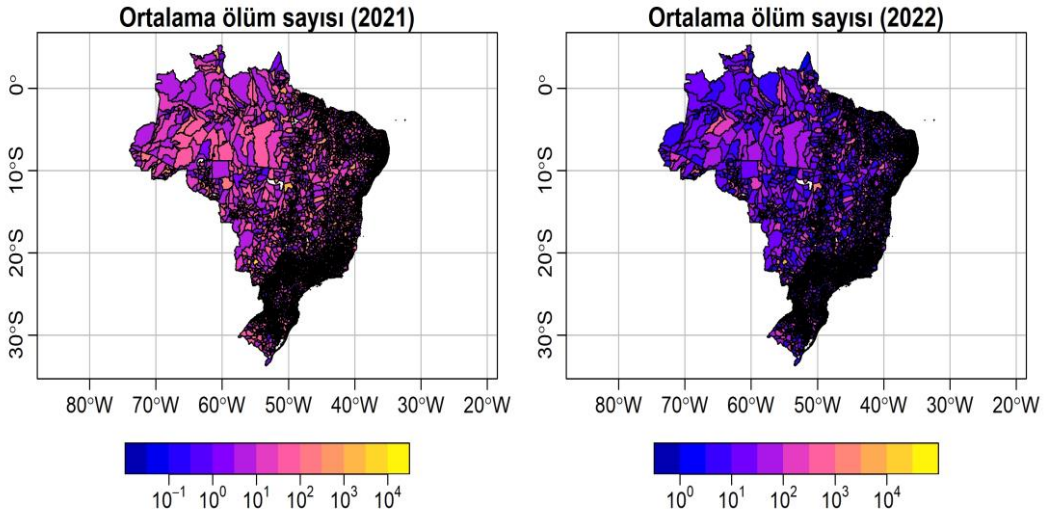
5.2. Brezilya Covid-19 Verisi

Bulaşıcı hastalıkların mekansal ve zamansal dinamiklerini anlamak, etkili halk sağlığı müdahaleleri açısından son derece önemlidir. Bu bölümde**,** 5.570 Brezilya şehrine ait

COVID-19 istatistiklerinden oluşan büyük ölçekli bir veri kümesi analiz edilerek, coğrafi yakınlık ve doğrusal olmayan ilişkilerin pandemi sonuçları üzerindeki etkileri detaylı şekilde incelenmektedir. *COVID19* R paketi aracılığıyla temin edilen bu veri seti (Guidotti ve Ardia, 2020), şehir bazında günlük ölüm sayısını skaler yanıt değişkeni olarak içermekte; bunun yanında üç fonksiyonel açıklayıcı değişken, günlük doğrulanmış vaka sayısı, günlük aşılanan kişi sayısı ve günlük tam aşılanan kişi sayısı, pandeminin zaman içindeki evrimsel yapısını yansıtmaktadır. Ayrıca, COVID-19'un şehirler ve kırsal bölgeler üzerindeki etkilerindeki farklılığı göz önüne almak amacıyla şehir nüfusu da skaler bir açıklayıcı değişken olarak modele dahil edilmiştir. Veri kümesi 2021 ve 2022 yıllarını kapsamaktadır; bu da zaman içindeki eğilimleri analiz etmeye ve aşılamanın ve halk sağlığı önlemlerinin uzun vadeli etkilerini değerlendirmeye olanak tanımaktadır.

Geleneksel regresyon modelleri**,** çoğu zaman gözlemler arasında bağımsızlık varsayımına dayanır ve bir şehrin salgın eğrisinin komşu bölgelerden ne ölçüde etkilendiğini göz ardı eder. Brezilya'da yüksek nüfus yoğunluğu ve şehirler arası seyahatin yaygınlığı dikkate alındığında, mekansal otokorelasyonun ihmal edilmesi, müdahale önlemlerinin, aşı kampanyalarının ve politika kararlarının etkinliğine dair yanıltıcı sonuçlara yol açabilir. Mekansal bağımlılığı modele dahil etmek, komşu şehirlerin benzer epidemiyolojik eğilimler göstermesi nedeniyle müdahalelerin gerçek etkisini daha doğru tahmin etmemizi sağlar; çünkü bu şehirler genellikle kaynakları, sağlık hizmetlerine erişimi ve insan hareketliliği kalıplarını paylaşmaktadır (bkz. örn. Beyaztaş ve diğ., 2024; Beyaztaş, Mandal ve Shang, 2025).

Şekil 5.2, 2021 ve 2022 yıllarında Brezilya şehirlerindeki COVID-19 ölümlerinin mekansal dağılımını gösteren koroplet haritalarını sunmaktadır. Haritalar, ölümlerin mekansal olarak kümelendiğini açıkça ortaya koymakta; bu da ölüm oranlarının rastgele dağılmadığını, aksine güçlü bir mekansal bağımlılık gösterdiğini ortaya koymaktadır. Özellikle, yüksek ölüm sayısına sahip şehirler, genellikle diğer yüksek ölüm oranına sahip şehirlerle coğrafi olarak yakın konumdadır. Bu durum, virüsün yayılımı ve şiddetinin yerel bulaş dinamikleri, sağlık altyapısı ve bölgesel politika önlemleri tarafından anlamlı biçimde etkilendiğini göstermektedir. Bu mekansal kümelenme, ölüm verilerinde mekansal bağımlılığın açık biçimde modellenmesinin gerekliliğini vurgulamaktadır.



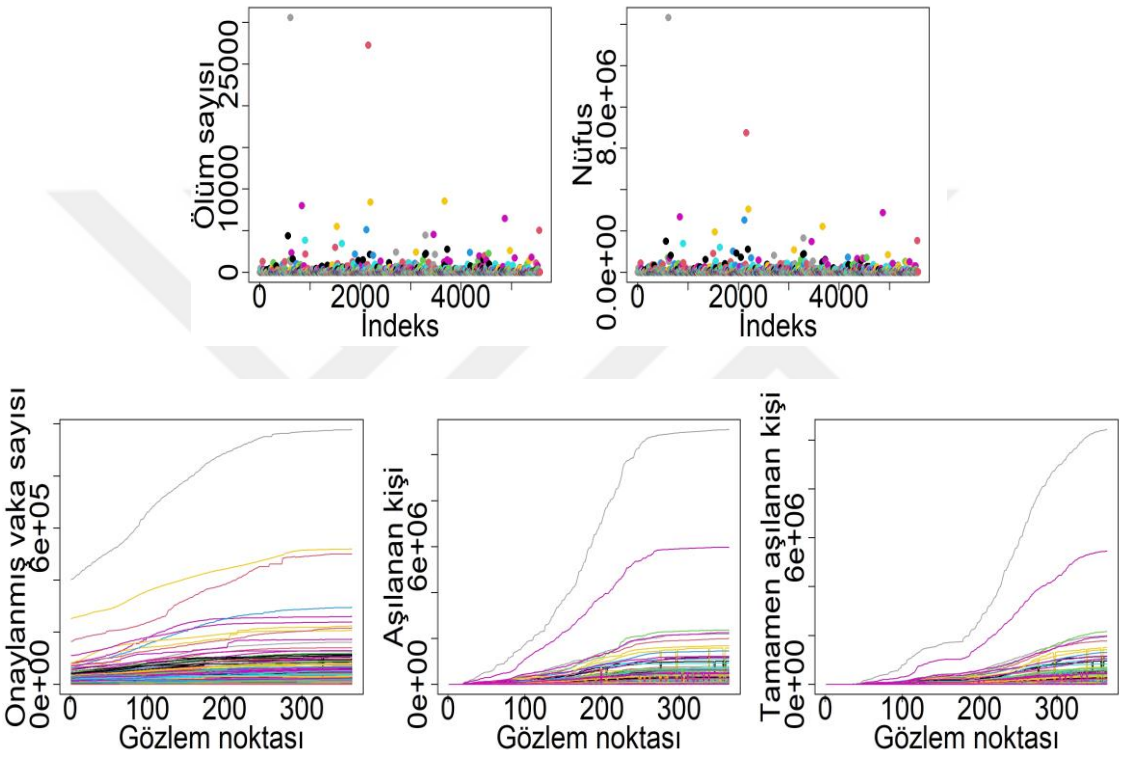
Şekil 5.2 2021 (sol panel) ve 2022 (sağ panel) yılları için Brezilya şehirlerinde meydana gelen ortalama ölüm sayılarını gösteren koroplet haritaları

Klasik modellerin temel sınırlılıklarından biri, açıklayıcı değişkenler ile yanıt değişkeni arasında doğrusal ilişki varsayımına dayanıyor olmalarıdır. Ancak COVID-19 vakasında, hem açıklayıcı değişkenlerin kendi başlarına günlük ölüm sayısı üzerindeki etkileri hem de aralarındaki etkileşimler oldukça doğrusal olmayan yapılar sergileyebilir. Örneğin, doğrulanmış vaka sayısı ile aşılama oranları, ölüm oranları üzerinde basitçe toplanabilir bir etki yaratmaz. Bunun yerine, bu değişkenlerin birleşik etkisi eşik davranışları, doygunluk etkileri veya sinerjik etkiler gösterebilir. Nitekim Beyaztaş, Shang ve Mandal (2025) tarafından yapılan çalışmada, COVID-19 verilerinde aşılama oranları ile vaka sayıları arasında güçlü etkileşim etkileri gözlemlenmiştir.

Bu çalışmada, mekansal bağımlılıkları ve doğrusal olmayan etkileşimleri modelleme çerçevemize dahil ederek, Brezilya'daki COVID-19 kaynaklı ölümlere ilişkin daha gerçekçi bir kestirim mekanizması sunulmaktadır. Önerilen SSFDNN modeli, bu karmaşık bağımlılıkları esnek bir şekilde modellememizi mümkün kılmakta; standart doğrusal modellerin tespit edemediği yüksek boyutlu ilişkileri yakalayabilmektedir. Şekil 5.3, hem yanıt hem de açıklayıcı değişkenlerdeki potansiyel aykırı değerleri ortaya koyan bir görsel sunum sağlamaktadır. Bu aykırı değerlerin analiz üzerindeki etkisini en aza indirmek amacıyla, tüm değişkenlere doğal logaritma dönüşümü uygulanmış ve böylece modelin dayanıklılığı ve güvenilirliği artırılmıştır.

Brezilya'daki 5.570 şehri kapsayan ağ için 5570×5570 boyutunda tanımlanan mekansal ağırlık matrisi $W = (\omega_{ii'})$ oluşturulurken, bi-square ağırlıklandırma şeması ve

uyarlanabilir bant genişliği seçimi ile birlikte en yakın komşular (K-nearest neighbors) yöntemi uygulanmıştır. İlk aşamada, her şehrin coğrafi koordinatları (enlem ve boylam) kullanılarak, herhangi iki konum i ve i' arasındaki çift yönlü büyük daire mesafeleri $\{d_{ii'}\}$ hesaplanmıştır. Ardından, her şehir i için, bu mesafeler temel alınarak en yakın h komşu belirlenmiştir. Buradaki h değeri, çapraz doğrulama (cross-validation) yöntemi ile optimize edilmiştir.



Şekil 5.3 Brezilya'ya ait COVID-19 verilerinin grafiksel gösterimi

Şekil 5.3'te yer alan sol üst panelde 2021 yılına ait doğrulanmış vaka sayıları, sağ üst panelde nüfus, sol orta panelde günlük doğrulanmış vaka sayıları, sağ orta panelde aşılanan kişi sayısı, en alt panelde ise tamamen aşılanan kişi sayısını görüntülenmektedir. Farklı renkler farklı şehirleri temsil etmektedir. Doğrulanmış vaka sayıları, aşılanan ve tamamen aşılanan kişi sayıları $1 \leq t \leq 365$ olacak şekilde zamanın bir fonksiyonu olarak verilmiştir.

Uyarlanabilir bant genişliği H_i, şehir i'nin en yakın dört komşusu arasındaki en büyük mesafe olarak tanımlanır ve $H_i = \max\{d_{ii'}: i' \in N_4(i)\}$ şeklinde tanımlanır. Burada $N_4(i)$, şehir i'ye en yakın h=4 komşudan oluşan kümeyi temsil etmektedir. Her komşu

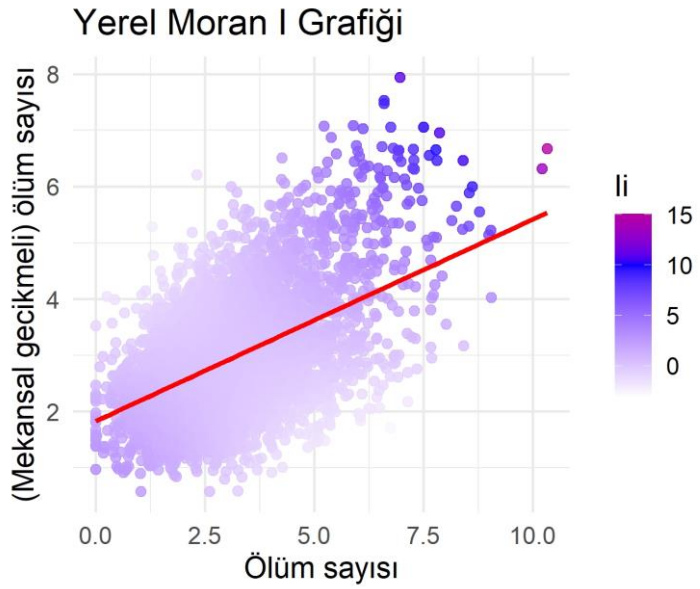
şehir i' için tanımlanan mekansal ağırlık $\omega_{ii'}$, eğer $i' \in N_h(i)$ ise $\omega_{ii'} = \left(1 - \left(\frac{d_{ij}}{H_i}\right)^2\right)^2$ şeklinde tanımlı bir bi-kare çekirdek fonksiyonu ile hesaplanmaktadır. i'nin en yakın komşuları arasına girmeyen şehirlere sıfır ağırlık atanır. Bu sayede hem yakınlık bilgisi hem de lokal komşuluk yapısı, mekansal modellemeye esnek ve etkili biçimde entegre edilir.

Şehir i'nin en yakın h komşusu arasında yer almayan şehirler için ağırlık $\omega_{ii'} = 0$ olarak atanır. Son olarak ağırlıklandırma şemasında tutarlılığı sağlamak amacıyla, her şehir için atanan ağırlıklar bir olacak şekilde $\omega_{ii'} = \frac{\omega_{ii'}}{\sum_{i' \in N_h(i)} \omega_{ii'}}$ işlemiyle normalize edilir. Bu ifade, her bir şehir için komşularına ait mekansal ağırlıkların toplamının 1 olmasını sağlamaktadır. Bu sayede, ağırlık yapısının göreli etkisi korunarak mekansal katkılar dengelenmiş olur.

Sonraki adımda, her bir konumun çevresindeki benzer değerlerin anlamlı mekansal kümelenme derecesini değerlendirmek amacıyla geliştirilen yerel Moran's *I* istatistiği (Anselin, 1995) hesaplanır. i'inci şehir için yerel Moran's *I* istatistiği aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$I_i = \frac{n(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i'=1}^{n}(Y_{i'} - \bar{Y})^2} \sum_{i'=1}^{n} \omega_{ii'}(Y_{i'} - \bar{Y}) \qquad (5.3)$$

Uygulamalı çalışmalarda**,** yerel Moran's *I* değerleri sıklıkla mekansal görselleştirme amacıyla kullanılmakta olup, güçlü ya da zayıf mekansal bağımlılıkların bulunduğu bölgeleri ortaya çıkarmaktadır. Yüksek bir I_i değeri, ilgili konumun benzer değerlere sahip (yüksek, düşük ya da orta) bir kümeye ait olduğunu göstermektedir. Buna karşılık, düşük bir I_i değeri, söz konusu alanın çevresinin önemli ölçüde farklı değerlere sahip bölgelerle çevrili olduğunu ifade eder. Bu sınıflandırma, mekansal kümelenmeyi Yüksek-Yüksek, Düşük-Düşük, Yüksek-Düşük, Düşük-Yüksek olacak şekilde dört temel kategoriye ayırır.



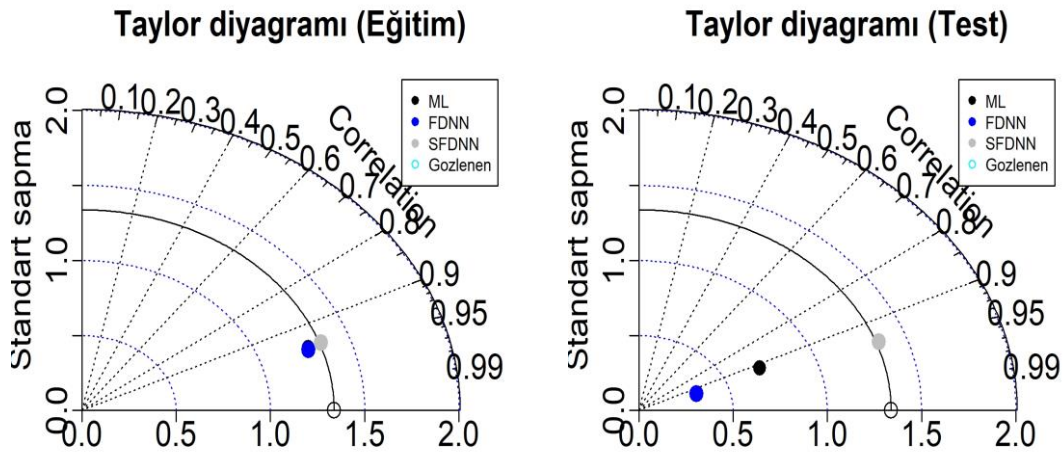
Şekil 5.4 Brezilya'daki 5570 şehirdeki ortalama ölüm sayılarına ilişkin yerel mekansal otokorelasyonu

Elde edilen yerel Moran's *I* değerleri Şekil 5.4'te gösterilmektedir. Bu grafikte yer alan regresyon doğrusunun pozitif eğimi, veride genel olarak pozitif mekansal otokorelasyonun varlığına işaret etmektedir. Bu durum, ölüm sayılarının mekansal olarak kümelendiğini; yüksek değerlerin diğer yüksek değerlerin yakınında, düşük değerlerin ise diğer düşük değerlerin yakınında ortaya çıktığını göstermektedir.

ML, FDNN ve önerilen SFDNN modelleri, Brezilya'ya ait 2021 yılı COVID-19 veri kümesi üzerinde eğitilmiştir. Eğitilen modeller, daha sonra 2022 yılına ait skaler ve fonksiyonel öngörücüler kullanılarak 2024 yılı için ortalama ölüm sayısını tahmin etmek amacıyla uygulanmıştır. Bulgular, üç ML tabanlı yöntemin de eğitim aşamasında benzer MSE değerleri ürettiğini göstermektedir; sırasıyla ML: 0.192, FDNN: 0.184 ve SFDNN: 0.168. Ancak, kestirim doğruluğu açısından değerlendirildiğinde, önerilen SFDNN modeli, en düşük MSPE olan 0.253 değeriyle diğer yöntemlere kıyasla daha iyi bir performans göstermektedir. Buna karşılık, ML ve FDNN modelleri sırasıyla 0.708 ve 1.106 değerlerinde daha yüksek RMSE (kök ortalama karesel hata) sergilemektedir. Bu sonuçlar, SFDNN modelinin, Brezilya COVID-19 veri kümesindeki karmaşık mekansal ve fonksiyonel bağımlılıkları etkili bir şekilde yakalayabildiğini ortaya koymaktadır.

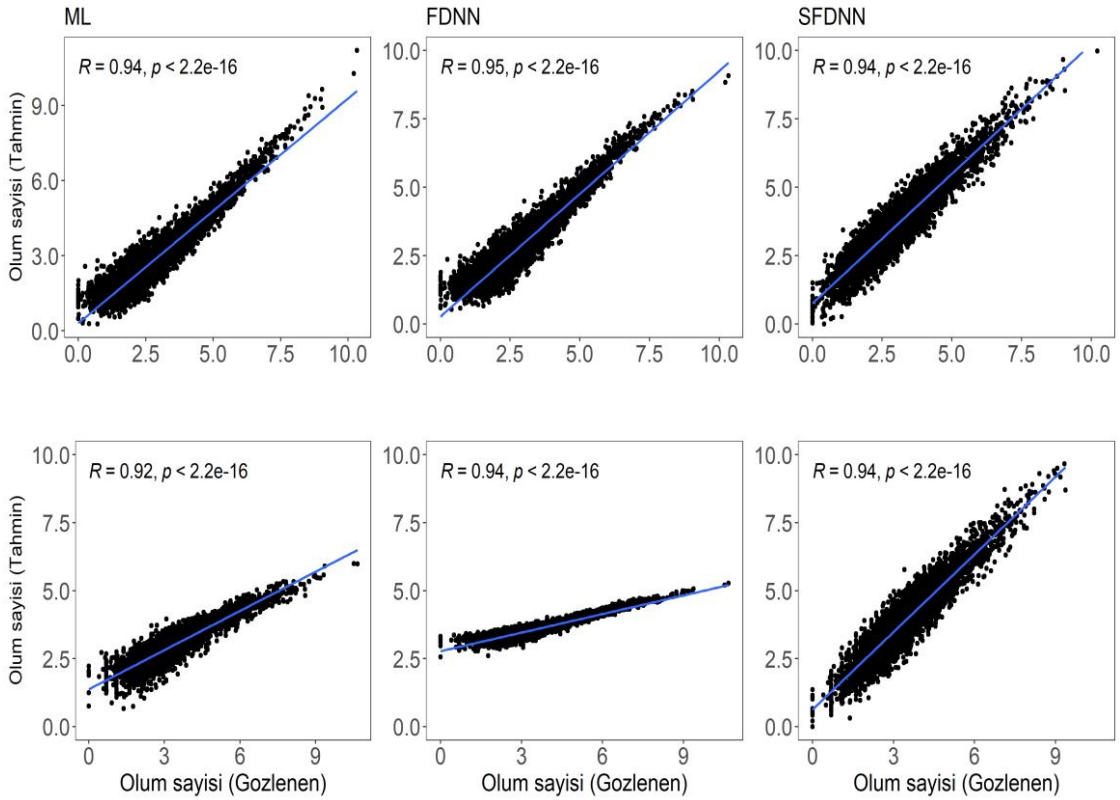
Şekil 5.5'te sunulan Taylor diyagramları, hem eğitim hem de test aşamalarında model performansına dair ayrıntılı bir değerlendirme sağlamaktadır. Bu diyagramlarda, SFDNN modelinin gözlemlenen verilerle daha güçlü bir uyum gösterdiği, daha yüksek korelasyon

ve iyileştirilmiş varyans temsili ile açıkça görülmektedir. ML ve FDNN modelleri de mekansal bağımlılıkları belli ölçüde yakalayabilmiş olsa da, gözlemlenen değerlerle olan korelasyonları nispeten daha düşüktür. Bu durum, bu modellerin veri kümesindeki karmaşık mekansal-fonksiyonel etkileşimleri modelleme konusunda daha az etkili olduklarını göstermektedir.



Şekil 5.5 Brezilya'daki ölüm sayılarını tahmin etme görevinde, ML, FDNN ve SFDNN modellerinin eğitim (sol) ve test (sağ) veri setleri üzerindeki performanslarını karşılaştıran Taylor diyagramları

Şekil 5.6, SFDNN modelinin kestirim üstünlüğünü ortaya koyan ek kanıtlar sunmaktadır. Bu şekilde yer alan gözlemlenen ve tahmin edilen değerlerin saçılım grafikleri, her üç yöntemin de gözlemlerle yüksek düzeyde korelasyon gösterdiğini ortaya koysa da, SFDNN modeli, kestirim doğruluğu açısından öne çıkmakta ve noktaların regresyon doğrusu etrafında daha sıkı kümelendiğini göstermektedir. Bu iyileşme, SFDNN modelinin, hem fonksiyonel öngörücüler arasındaki doğrusal olmayan etkileşimleri hem de veride doğal olarak bulunan mekansal bağımlılıkları yakalayabilme becerisinden kaynaklanmaktadır. Ayrıca bu etkenler, standart ML ve FDNN yaklaşımları tarafından daha sınırlı ölçüde ele alınmaktadır. Elde edilen yüksek korelasyon katsayıları (R = 0.95'e kadar çıkmaktadır), özellikle test verisi üzerinde SFDNN'nin güçlü performansını ortaya koymakta; bu da mekansal ve fonksiyonel etkileşimlerin modellenmesinin, büyük ölçekli epidemiyolojik uygulamalarda güvenilir ölüm tahmini için kritik önemde olduğunu göstermektedir.



Şekil 5.6 Brezilya COVID-19 veri seti için gözlemlenen ve tahmin edilen ölüm sayıları arasındaki ilişkiyi gösteren saçılım grafikleri

Şekil 5.6'da ilk satır, modellerin 2021 yılına ait eğitim veri seti üzerindeki performansını, ikinci satır ise 2022 yılına ait test sonuçlarını göstermektedir. Üç sütun sırasıyla ML, FDNN ve SFDNN modellerine karşılık gelmektedir. Her bir grafikte uyumlu bir regresyon doğrusu yer almakta olup, Pearson korelasyon katsayısı (R) gözlemlenen ve tahmin edilen değerler arasındaki ilişkinin gücünü ifade etmektedir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, yüksek boyutlu verilerdeki mekansal bağımlılıkları ve fonksiyonel ilişkileri etkili bir şekilde yakalayabilen yeni bir doğrusal olmayan modelleme yaklaşımı önerilmiştir. Mekansal otoregresif bir yapı ile derin öğrenme tabanlı fonksiyonel regresyon yaklaşımını birleştiren SFDNN modeli, zamansal-mekansal alanlarda kestirim modellemesi için esnek ve sağlam bir çözüm sunmaktadır. Geleneksel skaler-fonksiyon regresyon modelleri, gözlemler arasında doğrusal ve bağımsız ilişki varsayımına dayanırken, SFDNN modeli, karmaşık doğrusal olmayan bağımlılıkları ve mekansal korelasyonları dikkate alarak kestirim doğruluğunu anlamlı ölçüde artırmaktadır.

Kapsamlı Monte Carlo simülasyonları aracılığıyla gerçekleştirilen analizlerde, SFDNN modeli, özellikle güçlü mekansal bağımlılık içeren senaryolarda, mevcut ML ve FDNN modellerinden daha üstün performans sergilemiştir. Elde edilen sonuçlar, tüm modellerin eğitim aşamasında benzer performans gösterdiğini, ancak SFDNN modelinin test aşamasında en düşük MSPE değerine ulaştığını, dolayısıyla genelleme yeteneğinin daha yüksek olduğunu ortaya koymuştur. Brezilya COVID-19 verisi üzerinde gerçekleştirilen ampirik uygulama, bu bulguları daha da doğrulamış; SFDNN modelinin ortalama ölüm sayısı tahmininde en yüksek kestirim doğruluğuna ulaştığını göstermiştir.

Bu çalışmanın katkıları kestirim performansının ötesine geçerek, mekansal-fonksiyonel öğrenme ve bunun daha geniş uygulama alanlarına dair önemli içgörüler sunmaktadır. Önerilen model, mekansal bağımlılık yapısını bir derin sinir ağına entegre ederek hem mekansal hem de fonksiyonel etkileşimleri etkili biçimde öğrenebilmekte; bu yönüyle zamansal-mekansal tahminleme uygulamaları için özellikle değerli hale gelmektedir. Ayrıca, SFDNN modeli, klasik regresyon modellerinin temel sınırlılığı olan doğrusal yapı varsayımını aşarak, gerçek dünya olgularını yakalamada kritik öneme sahip esnek doğrusal olmayan dönüşümlere olanak tanımaktadır. Modelin, birden fazla fonksiyonel ve skaler öngörücüyü veri odaklı bir şekilde işleyebilme yeteneği, onu nüfus sağlığı, yer bilimleri, iklim modelleme ve çevresel izleme gibi pek çok alanda ölçeklenebilir ve genellenebilir bir araç haline getirmektedir.

Modelin güçlü yönlerine rağmen, gelecekte araştırılması gereken çeşitli alanlar da bulunmaktadır. Örneğin, mekansal olarak bağımlı fonksiyonel verilerle çalışan derin sinir ağlarının eğitimi, geleneksel yöntemlere kıyasla daha fazla hesaplama kaynağı

gerektirmektedir. Gelecek çalışmalarda, verimli optimizasyon teknikleri ve GPU hızlandırmalı eğitim süreçleri araştırılarak modelin ölçeklenebilirliği artırılabilir. Bununla beraber bu çalışmada mekansal ağırlıkların oluşturulmasında K-en yakın komşu yaklaşımı ve bi-square çekirdek fonksiyonu kullanılmıştır. Gelecekteki çalışmalar, uyarlanabilir mekansal çekirdekler ya da veri odaklı yöntemler kullanarak mekansal bağımlılık modellemesini daha da hassaslaştırabilir. Ayrıca, bu çalışma mekansal fonksiyonel verilere odaklanmışken, önemli bir genişletme, zamana bağlı değişen bağımlılıkların da modele dahil edilmesi ve böylece tam anlamıyla zamansal-mekansal fonksiyonel bir derin öğrenme modeline ulaşılması olabilir. Son olarak, derin öğrenme modelleri güçlü kestirim yetenekleri sunsa da gelecekte belirsizliklerin modellenmesi açısından Bayesyen yaklaşımların veya tahmin aralıklarının entegrasyonu, daha güçlü çıkarımlar elde edilmesini sağlayabilir.

KAYNAKLAR

Anselin, L. (1995). Local indicators of spatial association–LISA. *Geographical Analysis*, 27(2), 93–115.

Beyaztas, U., Mandal, A., & Shang, H. L. (2025). Enhancing spatial functional linear regression with robust dimension reduction methods. *Journal of Multivariate Analysis*, in press.

Beyaztas, U., Shang, H. L., & Mandal, A. (2025). Robust function-on-function interaction regression. *Statistical Modelling*, in press.

Beyaztas, U., Shang, H. L., Sezer, G. B., Mandal, A., Zoh, R. S., & Tekwe, C. D. (2024). Spatial function-on-function regression. *arXiv Technical Report*. https://arxiv.org/abs/2412.17327

Bouka, S., Dabo-Niang, S., & Nkiet, G. M. (2023). On estimation and prediction in spatial functional linear regression model. *Lithuanian Mathematical Journal*, 63(1), 13–30.

de Boor, C. (2001). *A Practical Guide to Splines*. Springer, New York.

Guidotti, E., & Ardia, D. (2020). COVID-19 Data Hub. *Journal of Open Source Software*, 5(51), 2376.

Hastie, T., & Mallows, C. (1993). A statistical view of some chemometrics regression tools: Discussion. *Technometrics*, 35(2), 140–143.

Hong, X., Mitchell, R. J., Chen, S., Harris, C. J., Li, K., & Irwin, G. W. (2008). Model selection approaches for non-linear system identification: A review. *International Journal of Systems Science*, 39(10), 925–946.

Horvath, L., & Kokoszka, P. (2012). *Inference for Functional Data with Applications*. Springer, New York.

Hu, X. J., Li, Y. L., & Shi, X. P. (2021). Functional spatial autoregressive analysis of SO_2 and air temperature in Fenwei Plain. *Science Technology and Engineering*, 21(28), 11938–11946.

Hu, Y., Wu, S., Feng, S., & Jin, J. (2020). Estimation in partial functional linear spatial autoregressive model. *Mathematics*, 8(10), 1680.

Huang, T., Saporta, G., Wang, H., & Wang, S. (2021). A robust spatial autoregressive scalar-on-function regression with t-distribution. *Advances in Data Analysis and Classification*, 15(470), 57–81.

James, G. M., & Silverman, B. W. (2005). Functional adaptive model estimation. *Journal of the American Statistical Association*, 100(470), 565–576.

Khemani, B., Patil, S., Kotecha, K., & Tanwar, S. (2024). A review of graph neural networks: Concepts, architectures, techniques, challenges, datasets, applications, and future directions. *Journal of Big Data*, 11(1), 18.

Kingma, D., & Ba, J. (2014). Adam: A method for stochastic optimization. *arXiv Technical Report*. https://arxiv.org/abs/1412.6980

Kokoszka, P., & Reimherr, M. (2017). *Introduction to Functional Data Analysis*. CRC Press, Boca Raton.

Lin, H., Eggesbø, M., & Peddada, S. D. (2022). Linear and nonlinear correlation estimators unveil undescribed taxa interactions in microbiome data. *Nature Communications*, 13(1), 4946.

Morris, J. S. (2015). Functional regression. *Annual Review of Statistics and Its Application*, 2(1), 321–359.

Müller, H.-G., Wu, Y., & Yao, F. (2013). Continuously additive models for nonlinear functional regression. *Biometrika*, 100(3), 607–622.

Pineda-Rios, W., Giraldo, R., & Porcu, E. (2019). Functional SAR models: With application to spatial econometrics. *Spatial Statistics*, 29, 145–159.

Ramsay, J. O., & Dalzell, C. J. (1991). Some tools for functional data analysis. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 53(3), 539–572.

Ramsay, J. O., & Silverman, B. W. (1997). *Functional Data Analysis*. Springer, New York.

Ramsay, J. O., & Silverman, B. W. (2006). *Functional Data Analysis* (2nd ed.). Springer, New York.

Reiss, P. T., Goldsmith, J., Shang, H. L., & Ogden, R. T. (2017a). Methods for scalar-on-function regression. *International Statistical Review*, 85(2), 228–249.

Ruder, S. (2016). An overview of gradient descent optimization algorithms. *arXiv Technical Report*. https://arxiv.org/abs/1609.04747

Rumelhart, D., Hinton, G., & Williams, R. (1985). Learning internal representations by error propagation. *Technical Report*, University of California, San Diego, Institute for Cognitive Science.

Ruiz-Medina, M. D. (2011). Spatial autoregressive and moving average Hilbertian processes. *Journal of Multivariate Analysis*, 102(2), 292–305.

Ruiz-Medina, M. D. (2012). Spatial functional prediction from spatial autoregressive Hilbertian processes. *Environmetrics*, 23(1), 119–128.

Storey, V. C., & Song, I.-Y. (2017). Big data technologies and management: What conceptual modeling can do. *Data & Knowledge Engineering*, 108, 50–67.

Thind, B., Multani, K., & Cao, J. (2023). Deep learning with functional inputs. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 32(1), 171–180.

Tibshirani, R., Hastie, T., & Friedman, J. (2009). *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction* (2nd ed.). Springer, New York.

Wang, H., & Cao, J. (2023). Nonlinear prediction of functional time series. *Environmetrics*, 34(5), e2792.

Yao, F., & Müller, H.-G. (2010). Functional quadratic regression. *Biometrika*, 97(1), 49–61.

Zhang, D., & Lu, G. (2004). Review of shape representation and description techniques. *Pattern Recognition*, 37(1), 1–19.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı: Merve BAŞARAN

Eğitim: Boğaziçi Üniversitesi, Matematik Bölümü (Lisans Derecesi), 2014-2020.

İş Tecrübesi: TÜBİTAK BİLGEM, Kıdemli Uzman Araştırmacı, 2020 – Devam ediyor.

Teknik Bilgiler: Java, C, R, SQL, Microsoft Office, Jira, Jazz IBM.

Yabancı Diller: Türkçe (Anadil), İngilizce (Tam Profesyonel Yeterlilik), İtalyanca (Başlangıç).

Sertifikalar: ISTQB Foundation Level, Project Management Professional (PMP) Eğitimi, Sistem Mühendisliği Eğitimi, DO178C, ISO IEC 17025, TS ISO/IEC 25051.