Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
Cilt 29, Sayı 3, 610-620, 2025

Süleyman Demirel University
Journal of Natural and Applied Sciences
Volume 29, Issue 3, 610-620, 2025

DOI: 10.19113/sdufenbed.1714782

(N+1) Boyutlu mKP Denklemi için Lineer Olmayan Periyodik Dalgaların Modülasyonu

Neşe ÖZDEMİR[*1]

[1]Marmara Üniversitesi, Teknoloji Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, 34469, İstanbul, Türkiye

(Alınış / Received: 04.06.2025, Kabul / Accepted: 22.10.2025, Online Yayınlanma / Published Online: 25.12.2025)

Anahtar Kelimeler
Dispersif Şok Dalgası,
Whitham Modülasyon Teorisi,
(N+1) Boyutlu mKP Denklemi

Öz: Bu çalışmada, basamak tipi başlangıç koşulları altında, defocusing (odaklanmayan) (n+1) boyutlu modifiye Kadomtsev–Petviashvili (mKP(d)) denkleminde ortaya çıkan dispersif şok dalgası (DSD) çözümleri incelenmiştir. DSD'ler, yavaş değişen modülasyon parametreleriyle tanımlanan lineer olmayan periyodik dalga çözümlerinin bir türü olarak değerlendirilmekte olup, bu nedenle analizde Whitham modülasyon teorisi kullanılmıştır. Bu amaçla, (n+1) boyutlu mKP(d) denklemine benzerlik dönüşümü uygulanarak, (1+1) boyutlu değişken katsayılı defocusing modifiye Korteweg–de Vries (nmKdV(d)) denklemi türetilmiştir. Daha sonra, ilgili denklem için Whitham sistemi türetilmiş ve sayısal olarak çözülmüştür. Elde edilen asimptotik çözümler ile nmKdV(d) denkleminin doğrudan sayısal simülasyonları karşılaştırılmıştır. Ayrıca, mKdV(d) denklemine ait asimptotik ve doğrudan sayısal çözümler yapılarak değişken katsayının etkisi araştırılmıştır. Elde edilen bulgular, modülasyon yaklaşımının DSD çözümlerinin yapısal özelliklerini anlamada güçlü bir araç olduğunu göstermektedir.

Modulation of Nonlinear Periodic Waves of the (N+1) Dimensional mKP Equation

Keywords
Dispersive Shock Waves ,
Whitham Modulation Theory,
(N+1) dimensional mKP equation

Abstract: In this study, dispersive shock wave (DSW) solutions arising from the defocusing (n+1)-dimensional modified Kadomtsev–Petviashvili (mKP(d)) equation under step-like initial conditions are investigated. DSWs are considered as a class of nonlinear periodic wave solutions characterized by slowly varying modulation parameters; therefore, the analysis is carried out within the framework of Whitham modulation theory. For this purpose, a similarity transformation is applied to the (n+1)-dimensional mKP(d) equation to derive a (1+1)-dimensional variable-coefficient defocusing modified Korteweg–de Vries (nmKdV(d)) equation. The corresponding Whitham system is then derived and solved numerically. The resulting asymptotic solutions are compared with direct numerical simulations of the nmKdV(d) equation. Additionally, asymptotic and direct numerical solutions of the mKdV(d) equation are obtained to examine the effect of the variable coefficient. The findings demonstrate that the modulation approach is an effective tool for understanding the structural features of DSW solutions.

1. Giriş

Dispersif şok dalgaları (DSD), zayıf dispersiyon ve zayıf lineer olmayan etkilerin birlikte etkili olduğu sistemlerde ortaya çıkan, yüksek frekanslı salınımlardan oluşan dalga trenleri ile karakterize edilen yapılardır. Bu tür yapılar; akışkan dinamiği, süperakışkanlık, plazma fiziği ve optik gibi çeşitli alanlarda gözlemlenmektedir [1–3]. Uzay-zaman düzleminde genişleyen karakteristik bir fan yapısı sergileyen DSD'lerin genliğin maksimum ve minimum olduğu sınırları, sırasıyla ön kenar (leading edge) ve arka kenar (trailing edge) olarak adlandırılır.

DSD'ler, literatürde farklı isimlerle de anılmaktadır. Örneğin, su dalgalarında "undular bore", plazma fiziğinde ise "çarpışmasız şok" dalgası olarak da tanımlanmaktadır ve atmosferik ile okyanus olayların anlaşılmasında da önemli bir rol oynar. Whitham modülasyon teorisi, DSD'lerin yavaş değişen fiziksel büyüklüklerini karakterize etmek için geliştirilmiş bir yöntemdir [4]. Bu teori, korunum yasalarını temel alarak dispersif ve lineer olmayan etkilerin birlikte analiz edilmesini mümkün kılar. Ancak, korunum yasalarının bilinmediği durumlarda, çoklu ölçekler yöntemi, ters saçılım metodu (Inverse Scattering Method) gibi alternatif asimptotik yaklaşımlar kullanılmaktadır [5,6].

*Sorumlu yazar: nese.ozdemir@marmara.edu.tr

Literatür dikkatlice incelendiğinde, DSD'lere yönelik çalışmaların büyük ölçüde (1+1) boyutlu denklemlerle sınırlı olduğu görülmektedir. Bu sınırlamanın temel nedeni, daha yüksek boyutlu denklemler için gerekli matematiksel araçların eksikliğidir. Ancak, son yıllarda Ablowitz öncülüğünde, daha yüksek boyutlu modelleri inceleyen çalışmalarda belirgin bir artış yaşanmış ve (2+1) boyutlu Kadomtsev-Petviashvili (KP), Benjamin-Ono (BO) ve modifiye KP (mKP) denklemleri için Whitham modülasyon sistemlerini türetilmiştir [7-9]. [7]'de, DSD'nin parabolik bir cephe boyunca yayıldığı varsayımı kullanılmış ve denklemler silindirik (1+1) boyutlu denklemlere indirgenerek analiz yapılmıştır. [8] ve [9] çalışmalarında ise [7]'de ele alınan özel varsayımlardan farklı olarak daha genel bir yaklaşım benimsenmiştir. Bu genel yaklaşım, Riemann değişkenleri cinsinden ifade edilebilen ve tekil olmayan (non-singular) Whitham sistemlerinin elde edilmesini sağlamış, böylece hem DSD evriminin modellenmesine hem de periyodik çözümlerin doğrusal kararlılık analizinin yapılmasına olanak tanımıştır.

DSD'lere ilişkin çalışmalar, yalnızca (2+1) boyutlu denklemlerle sınırlı kalmamış; (3+1) boyutlu BO, Gardner-KP ve mKP denklemleri gibi daha yüksek boyutlu sistemlere de uygulanmıştır [10-12]. Bunlara ek olarak, defocusing non-lineer Schrödinger (NLS) denklemi için de Whitham modülasyon denklemleri türetilmiş, bu yöntem iki, üç ve daha yüksek boyutlu modellere başarıyla uyarlanmıştır [13]. [14] çalışmasında, daha yüksek boyutlu denklemlerde DSD yayılımını inceleyen ilk yaklaşımlardan biri olan (n+1) boyutlu BO denklemi ele alınmış ve ilgili denklem için DSD teorisi inşaa edilmiştir. Mevcut çalışmada ise, (n+1) boyutlu defocusing mKP (mKP(d)) denklemi üzerinde durularak DSD çözümleri hem asimptotik hem de sayısal yöntemlerle incelenmiştir. mKP(d) denklemine ilişkin modülasyon sistemi, DSD çözümlerinde BO denklemine kıyasla belirgin yapısal farklılıklar göstermektedir. Özellikle, mKP(d) denklemine karşılık gelen Whitham sisteminde tanımlanan Riemann tipi değişkenlerinin sınır koşullarında sağlaması gereken eşitsizlikler, şok yapısının evrimini doğrudan etkilemekte ve dalga davranışını belirgin biçimde değiştirmektedir. Bu bağlamda, mKP(d) denklemine ilişkin bu analiz yalnızca mevcut çalışmaların bir genellemesi değil, özgün bir modülasyon dinamiğini ortaya koyan yeni bir katkı niteliğindedir.

Makale şu şekilde düzenlenmiştir: Bölüm 2'de, (n+1) boyutlu mKP(d) denklemine benzerlik dönüşümü uygulanarak, (1+1) boyutlu değişken katsayılı defocusing modifiye KdV (nmKdV(d)) denklemi türetilmiştir. Bölüm 3'te, bir asimptotik pertürbasyon yöntemi olan çoklu ölçekler metodu kullanılarak, Riemann tipi değişkenleri cinsinden Whitham modülasyon denklemleri türetilmiştir. Klasik mKdV(d) denklemi için Whitham sistemi, uygun Riemann değişkenleri cinsinden köşegensel hidrodinamik formdadır. Ancak, nmKdV(d) gibi değişken katsayılı denklemler için Whitham sistemleri bu formda değildir. nmKdV(d)–Whitham sisteminin köşegensel olmayan yapısından dolayı, nmKdV(d) denkleminin Whitham sistemleri sayısal olarak çözülmüş ve ilgili sonuçlar Bölüm 4'te sunulmuştur. Sayısal sonuçlar, özel olarak seçilen $n = 4$ için yapılmıştır. Ayrıca, mKdV(d) ve nmKdV(d) denklemlerinin doğrudan sayısal çözümleri, modifiye edilmiş üstel zaman farkı dördüncü mertebeden Runge-Kutta (ETDRK4) yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Buna ek olarak, Whitham sistemini çözmek için kullanılan asimptotik yöntemin başarısı, orijinal denklemlerin doğrudan çözümleriyle karşılaştırılarak test edilmiştir. Son olarak, denklemlerin doğrudan sayısal çözümlerinde kullanılan ETDRK4 için hata analizi yapılmıştır. Bu makale, DSD'lerin farklı fiziksel sistemlerdeki davranışlarını anlamaya yönelik katkılar sunmayı hedeflemektedir. Özellikle, farklı geometriye sahip değişken katsayılı mKdV denklemleri için elde edilen sonuçlar, literatürdeki mevcut boşlukları doldurarak yeni bir perspektif sunmaktadır.

2. (N+1) Boyutlu mKP(d) Denklemi için İndirgeme Analizi

Bu çalışmanın temel amacı, (n+1) boyutlu, lineer olmayan bir kısmi türevli denklem olan mKP(d) denkleminde gözlemlenen dispersif şok dalgası (DSD) çözümlerini incelemektir:

$$(v_t - 6v^2 v_x + \varepsilon^2 v_{xxx})_x + \sigma \sum_{i=1}^{n-1} v_{y_i y_i} = 0 \qquad (1)$$

Denklem (1)'de görülen $v = v(x, y_i, t), (i = 1,2, \dots, n-1,\ 0< \mathcal{E} <<1$ zayıf dispersiyonu gösteren bir sabit ve $\sigma = \pm 1'$dir. DSD çözümlerinin elde edilmesinde, [15] numaralı çalışmada önerilen yöntem genelleştirilerek uygulanacaktır. Bu doğrultuda ilk adım olarak, Denklem (1) için aşağıdaki şekilde tanımlanan basamak tipi başlangıç koşulu (*t=0*) dikkate alınmaktadır:

$$v(n,0) = \begin{cases} v_l & n < 0, \\ v_r & n \geq 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Burada, $\eta = x + \frac{1}{2}\Psi(y_i, t)$'dir. İstenilen türde bir indirgeme elde edebilmek amacıyla, v'nin, γ bir reel sabit olmak üzere, başlangıç koşulu $\Psi(y_i, 0) = \gamma({y_1}^2 + {y_2}^2 + \cdots + {y_{n-1}}^2)$ olan aşağıdaki özel çözüm formunu sağladığı kabul edilmektedir:

$$v = h\left(x + \frac{\Psi(y_i, t)}{2}, t \right) \qquad (3)$$

(3) ile verilen v fonksiyonunun aşağıdaki sınır koşullarını sağladığı kabul edilir:

$$\eta \to -\infty \text{ iken } v \to v_l\, S(t) \; ve \; \eta \to \infty \text{ iken } v \to v_r\, S(t). \quad (4)$$

Bu noktada tanımlanan $S(t)$ çalışmanın devamında belirlenecektir. (3) çözüm formunun Denklem (1)'de kullanılmasıyla

$$\left(\frac{1}{2}\Psi_t h_\eta + h_t - 6h^2 h_\eta + \varepsilon^2 h_{\eta\eta\eta}\right)_\eta + \sigma\left(\frac{1}{4}h_{\eta\eta}\sum_{i=1}^{n-1}\Psi_{y_i}^2 + \frac{1}{2}h_\eta\sum_{i=1}^{n-1}\Psi_{y_i y_i}\right) = 0 \quad (5)$$

elde edilir. Daha sonra, (4) numaralı sınır koşulu uygulanır. Bu aşamada, $\Psi_{y_i y_i}$'nin y değişkeninden bağımsız olduğu kabulü altında, h_η'nin katsayısı yalnızca t değişkenine bağlı olduğu sonucuna ulaşılır. Böylece, aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

$$\Psi_t + \frac{\sigma}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(\Psi_{y_i})^2 = 0, \quad (6)$$

$$h_t - 6h^2 h_\eta + \varepsilon^2 h_{\eta\eta\eta} + \frac{\sigma}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(\Psi_{y_i y_i})h = 0. \quad (7)$$

Denklem (6) "dalgaya şeklini veren denklem (front shape equation)" olarak adlandırılır ve bu denklemin $\Psi(y,0) = \gamma(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2)$ altındaki çözümü karakteristikler metodu kullanılarak

$$\Psi(y_i, t) = \frac{\gamma(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2)}{1 + 2\gamma\sigma t} \quad (8)$$

formunda elde edilir. Dikkat edilirse, $\Psi_{y_i y_i}$'nin varsayımla çelişmediği gözlemlenmektedir. Bu durum, $\Psi_{y_i y_i}$'nin tüm t değerleri için y_i değişkenlerinden bağımsız olduğunu göstermektedir. Bu bağlamda, şu yorumlar yapılabilir: Pozitif t-ekseni doğrultusunda $\gamma\sigma > 0$ koşulu sağlandığında negatif t-ekseninde kritik bir t değerinde ($t_c = \frac{-1}{2\sigma\gamma}$) patlama (blow-up) gerçekleşir. Bunu önlemek amacıyla, analizde $\gamma\sigma > 0$ ve $t > 0$ kabul edilmiştir. Sonuç olarak, Denklem (8)'in Denklem (7)'de yerine yazılmasıyla, nmKdV(d) denklemi olarak adlandıracağımız denklem aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$h_t - 6h^2 h_\eta + \varepsilon^2 h_{\eta\eta\eta} + p(t)h = 0 \quad (9)$$

Burada, $p(t) = \frac{\sigma\gamma(n-1)}{1+2\sigma\gamma t}$ 'dir. Ek olarak, $t_0 = \frac{1}{(n-1)\sigma\gamma}$ şeklinde tanımlanırsa $p(t) = \frac{1}{t_0 + \frac{2}{n-1}t}$ formuna dönüşür. Bu analiz kapsamında, $\sigma = 1$ durumu incelenecektir. Alternatif durum olan $\sigma = -1$ için sonuçlar, yalnızca γ yerine $-\gamma$ koyularak elde edilir. Sonsuzdaki sınır koşullarını belirlemek amacıyla, Denklem (9)'da yer alan η'ya bağlı türevler ihmal edildiğinde, bu denklem adi diferansiyel bir denklem haline indirgenir. Bu denklemin $S(0) = 1$ başlangıç koşulu altında çözümü, (4)'te verilen $S(t)$'yi belirler:

$$S(t) = \left(\frac{t_0}{t_0 + \frac{2}{n-1}t}\right)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (10)$$

3. nmKdV(d) Denkleminin Whitham Modülasyon Denklemlerinin Türetilmesi

İncelemenin devamında, (1+1) boyutlu Denklem (9) ile verilen nmKdV(d) denklemine ait Whitham modülasyon denklemlerinin türetilebilmesi amacıyla bir tür asimptotik analiz olan çoklu ölçekler metodu [16] kullanılacaktır. Bu yöntemin uygulanabilmesi için, $h = h(\theta, \eta, t)$ şeklinde bir fonksiyon varsayılmakta olup, burada θ hızlı değişkeni temsil etmek üzere aşağıdaki tanımlamalar yapılmaktadır:

$$\theta_\eta = \frac{k(\eta,t)}{\varepsilon}, \quad \theta_t = \frac{\omega(\eta,t)}{\varepsilon} = -\frac{kV}{\varepsilon}. \quad (11)$$

Burada verilen , k dalga sayısını, ω açısal hızı ve V faz hızını göstermektedir. Ayrıca, Denklem (11) aracılığıyla $(\theta_\eta)_t = (\theta_t)_\eta$ uyumluluk koşulundan,

$$k_t + (kV)_\eta = 0 \quad (12)$$

elde edilir ve Denklem (12) "dalgaların korunumu yasası (conservation of waves)" olarak da adlandırılmaktadır. Böylelikle gerekli olan ilk modülasyon denklemi elde edilmiş olur. Sonraki adımda, hızlı ve yavaş değişkenler arasındaki ilişkiler

$$\frac{\partial}{\partial\eta} = \frac{k}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{-\omega}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\eta} \quad (13)$$

olarak tanımlanarak, bu bağıntılar Denklem (9)'da kullanılırsa,

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(-\omega\frac{\partial h}{\partial\theta} + k^3\frac{\partial^3 h}{\partial\theta^3} - 6h^2 k\frac{\partial h}{\partial\theta}\right) + \left(\frac{\partial h}{\partial t} + 3k^2\frac{\partial^3 h}{\partial\eta\partial\theta^2} + 3kk_\eta\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2} - 6h^2\frac{\partial h}{\partial\eta} + p(t)h\right) + \left(3k\frac{\partial^3 h}{\partial\theta\partial\theta^2} + 3kk_\eta\frac{\partial^2 h}{\partial\theta\partial\eta} + 3kk_\eta\frac{\partial^2 h}{\partial\theta^2} + k_{\eta\eta}\frac{\partial h}{\partial\theta}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial^3 h}{\partial\eta^3} = 0 \quad (14)$$

elde edilir. Daha sonra, h ε'nun kuvvetlerine göre seriye açılır;

$$h(\theta,\eta,t) = h_0(\theta,\eta,t) + \varepsilon h_1(\theta,\eta,t) + \varepsilon^2 h_2(\theta,\eta,t) + \cdots \quad (15)$$

ve ε'nun aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirek ε mertebesinde problemler hiyerarjisi elde edilir. Bu çalışmada yalnızca ilk iki pertürbasyon probleminin incelenmesi yeterli görüldüğünden, söz konusu problemler aşağıda sunulmaktadır:

$$O(\varepsilon^{-1}): \quad -\omega\frac{\partial h_0}{\partial\theta}-6kh_0^2\frac{\partial h_0}{\partial\theta}+k^3\frac{\partial^3 h_0}{\partial\theta^3}=0, \qquad (16)$$

$$O(1): \quad -\omega\frac{\partial h_1}{\partial\theta}-6k\frac{\partial(h_0^2h_1)}{\partial\theta}+k^3\frac{\partial^3 h_1}{\partial\theta^3}=\mathcal{N}. \qquad (17)$$

Burada,

$$\mathcal{N}=-\left(\frac{\partial h_0}{\partial t}-6h_0^2\frac{\partial h_0}{\partial\eta}+3k^2\frac{\partial^3 h_0}{\partial\eta\partial\theta^2}+3kk_\eta\frac{\partial^2 h_0}{\partial\theta^2}+p(t)h_0\right) \qquad (18)$$

dir. Denklem (16) ile verilen ε^{-1} mertebeli problemin çözümüyle analiz sürecine devam edilecektir. Dikkat edilirse, Denklem (16) ile mKdV(d) denklemi aynı yapıdadır. Gerekli ara işlemler yapılarak Denklem (16) için ilerleyen dalga çözümü aşağıdaki gibi bulunur:

$$h_0(\theta,\eta,t)=a-\frac{a-b}{1-\frac{b-c}{a-c}\mathrm{sn}^2(2K(m)(\theta-\theta_0),m)} \qquad (19)$$

Denklem (19)'da yer alan a, b ve c, (19) denkleminin çözümünü eliptik fonksiyonlar cinsinden ifade etmek için gerekli cebirsel işlemlerde ortaya çıkan ve reel olan terimleri göstermektedir. Ayrıca $a>b>c$ eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca, $sn(z,m)$ Jacobi eliptik sinüs fonksiyonudur. $K=K(m)$ birinci tip tam eliptik integrali ve m modülü göstermektedir. Ayrıca, (11) kullanılarak, hızlı değişken olan θ

$$\theta(\eta,t)=\int_{-L}^{\eta}\frac{k(x',t)}{\varepsilon}dx'-\int_0^t\frac{k(\eta,t')V(\eta,t')}{\varepsilon}dt'. \qquad (20)$$

olarak bulunur. (19)'da görülen θ_0 integrasyon sabitidir ve bir sonraki bölümde yapılacak sayısal çözümler karşılaştırılarak yaklaşık olarak belirlenecektir.

Diğer taraftan, Whitham sistemini daha sade hale getirmek için

$$a=r_2+r_3-r_1,\quad b=r_3+r_1-r_2,\quad c=r_1+r_2-r_3 \qquad (21)$$

olarak tanımlanır. r_1, r_2, r_3 Riemann tipi değişkenler olarak adlandırılmaktadır ve $r_3>r_2>r_1$ ilişkisi geçerlidir. (19) ile verilen ilerleyen dalga çözümü (21) yardımıyla Riemann tipi değişkenler cinsinden yeniden yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$h_0(\theta,\eta,t)=(r_2+r_3-r_1)+\frac{2(r_2-r_1)}{1-\frac{r_3-r_2}{r_3-r_1}\mathrm{sn}^2[2(\theta-\theta_0)K,m]} \qquad (22)$$

elde edilir ve aşağıdaki bağıntılar geçerlidir ([17], denklem 255):

$$m=\frac{r_3^2-r_2^2}{r_3^2-r_1^2},\quad k^2=\frac{r_3^2-r_1^2}{4K^2},\quad V=-2(r_1^2+r_2^2+r_3^2). \qquad (23)$$

$sn^2(z,m)$ eliptik fonksiyonu $2K(m)$ periyotludur ve h_0 fonksiyonunun periyodu 1'dir. h_0'ın tanımı gereği, $m\to 1$ iken $sn(z,m)\to \mathrm{sech}\,(z)$ olduğundan soliter dalga çözüm formu, $m\to 0$ iken $sn(z,m)\to \sin(z)$'dir ve buradan da sinüs dalga formu elde edilir. Burada, h_0'ın açık ifadesinde ortaya çıkan r_1, r_2 ve r_3'ü tam olarak belirlemek için bir üst mertebe probleme ihtiyaç vardır. Bu sebeple f_0 bir üst mertebe problem olan (17)'de yerine yazıldığında denklemin sağ yanında θ'ya bağlı sekülerlik oluşmaktadır. Oluşan bu sekülerliği önlemek için kendine eş (adjoint) problemin çözümünden

$$\int_0^1\mathcal{N}\,d\theta=0,\quad \int_0^1 h_0\,\mathcal{N}\,d\theta=0 \qquad (24)$$

sekülerlik koşulları elde edilir. Elde edilen ekülerlik koşullarında, aşağıdaki verilen ilişkiler kullanılarak sadeleştirilir. Bu özellikler kısmi integrasyon tekniği kullanılarak gösterilebilir:

$$\int_0^1\frac{\partial^i h_0}{\partial\theta^i}d\theta=0,\quad \int_0^1 h_0\frac{\partial^j h_0}{\partial\theta^j}d\theta=0,\quad i=1,2,\dots \text{ve } j=1,3,\dots \qquad (25)$$

$$\int_0^1 h_0\frac{\partial^2 h_0}{\partial\theta^2}d\theta=-\int_0^1(\frac{\partial h_0}{\partial\theta})^2d\theta. \qquad (26)$$

Denklem (25) ve (26) , (24)'te kullanılırsa nmKdV(d) denklemine ait sekülerlik koşulları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 h_0d\theta+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(2\int_0^1 h_0^3d\theta\right)+p(t)\int_0^1 h_0d\theta=0 \qquad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 h_0^2d\theta+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(3\int_0^1 h_0^4-3k^2\int_0^1(\frac{\partial h_0}{\partial\theta})^2d\theta\right)+2p(t)\int_0^1 h_0^2d\theta=0. \qquad (28)$$

(27) ve (28)'de yer alan integraller (22) ile verilen h_0 ve eliptik fonksiyonların özelliklerinden yararlanılarak hesaplanır [17].

(12) dalgaların korunumu yasası ve (27)-(28) sekülerlik koşullarından üç tane denklem elde edilir. Dikkat edilirse, (22)'de üç bilinmeyen (r_1, r_2, r_3) vardır ve buradan üç tane korunum yasasına ihtiyaç olduğu açıktır. (12), (27) ve (28) denklemleri sırasıyla çözülerek aşağıdaki modülasyon denklemleri türetilir:

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} + v_i(r_1, r_2, r_3)\frac{\partial r_i}{\partial \eta} + p(t)d_i = 0, \quad i = 1,2,3. \tag{29}$$

elde edilmiş olur. Açıktır ki bu denklem sistemi kuasilineer denklem sistemidir ve

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{pmatrix} \tag{30}$$

şeklinde köşegen elemanları v_i, $(i = 1,2,3)$, olan bir köşegen matristir. Bu matrisin elemanları mKdV(d) denkleminin Whitham karakteristik hızlarını verir [18] ve açık ifadeleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} v_1 &= -2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) + \tfrac{K(r_2^2 - r_1^2)}{E}, \\ v_2 &= -2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - \tfrac{4K(r_3^2 - r_2^2)(r_2^2 - r_1^2)}{E(r_3^2 - r_1^2) - K(r_2^2 - r_1^2)} \\ v_3 &= -2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - \tfrac{4K(r_3^2 - r_2^2)}{K - E}. \end{aligned} \tag{31}$$

d_i'ler $(i = 1,2,3)$

$$G_1 = r_1 + r_2 + r_3 - 2(r_2 + r_3)\frac{\Pi}{K}, \quad G_2 = r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - 2(r_3^2 - r_1^2)\frac{E}{K}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{K(r_1 G_2 - r_2 r_3 G_1)}{E(r_1^2 - r_3^2)}, \\ d_2 &= -\frac{K(r_2 G_2 - r_1 r_3 G_1)}{E(r_3^2 - r_1^2) - K(r_2^2 - r_1^2)}, \\ d_3 &= \frac{E(r_3 G_2 - r_1 r_2 G_1)}{(K - E)(r_3^2 - r_1^2)} \end{aligned} \tag{32}$$

şeklindedir. $K = K(m(\eta, t)), E = E(m(\eta, t))$ ve $\Pi = \Pi(\alpha^2, m)$ sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü tip tam eliptik integralleri göstermektedir. Ek olarak, $\alpha^2 = (r_3 - r_2))/((r_3 - r_1)$'dir.

Böylece, nmKdV(d) denklemi için Whitham modülasyon denklemleri Riemann değişkenleri cinsinden köşegen hale en yakın forma indirgenmiş olur. Dikkat edilirse, (29) denkleminde $h(t) = 0$ alınırsa nmKdV(d) için elde edilen Whitham sistemi mKdV(d) için Kamchatnov tarafından bulunan Whitham sistemine indirgendiği kolayca görülebilir [18].

4. nmKdV(d) Denklemi İçin Dispersif Şok Dalga Çözümleri

Çalışmanın bu bölümünde ise, özel olarak seçilen boyut değeri $n = 4$ için, Whitham sisteminin ilgili başlangıç koşulları altında hesaplanan sayısal çözümleriyle nmKdV(d) denklemlerinin doğrudan sayısal çözümlerinin bulunması amaçlanmaktadır. Denklem (9)'da $n = 4$ yazılırsa,

$$h_t - 6h^2 h_\eta + \varepsilon^2 h_{\eta\eta\eta} + \frac{3}{2t + 3t_0}h = 0 \tag{33}$$

olur. Bu denklem için Whitham modülasyon denklem sistemi (Denklem (29)) köşegen yapıda olmadığından, analitik çözüm elde edilmesi oldukça güçtür. Bu nedenle analitik çözüm yerine, Shampine tarafından geliştirilen MATLAB tabanlı sayısal çözücü tercih edilmiştir [19]; bu çözücü sonlu fark yöntemlerinin bir arada kullanılmasına olanak tanımaktadır. (1+1)-boyutlu nmKdV(d) denkleminin doğrudan sayısal çözümü için ise, spektral tabanlı sayısal yöntemler arasında en etkili olarak değerlendirilen ve birçok lineer olmayan evrim türü diferansiyel denklemin çözümünde hız ve doğruluk açısından üstünlüğü kanıtlanmış "Exponential Time Differencing Runge Kutta-4" (ETDRK4) yöntemi kullanılacaktır. İleride, bu iki sayısal hesaplama yönteminden elde edilen çözümler karşılaştırılacaktır.

İlk adım olarak, klasik mKdV(d) ve nmKdV(d) denklemlerinin, (2) başlangıç koşulu ve ilgili sınır koşulları altında sayısal çözümleri, ETDRK4 [20, 21] yöntemi kullanılarak elde edilecektir. Uygulanacak doğrudan sayısal yöntemde sınır koşullarının sabit olması gerekmektedir. Klasik problem olan mKdV(d) denklemi için sınır koşulları sabitken, nmKdV(d) denklemi için sınır koşulları t'ye bağlı olarak değişmektedir. Bu nedenle, öncelikle aşağıdaki dönüşüm uygulanarak sınır koşulları uygun hale getirilecektir:

$$h = S(t)\xi \tag{34}$$

Burada, $S(t) = \left(\frac{3t_0}{2t + 3t_0}\right)^{\frac{3}{2}}$'dir. Denklem (34)'ün Denklem (9)'da kullanılmasıyla

$$\xi_t - 6S^2\xi^2\xi_\eta + \varepsilon^2\xi_{\eta\eta\eta} = 0 \tag{35}$$

olur. Böylece, Denklem (35)'in sol tarafta $\xi_- = v_l$, sağ tarafta ise $\xi_+ = v_r$ sabit sınır değerlerine sabit olur . Ayrıca, ETDRK4 yöntemini uygulayabilmek için (35) denklemi η 'ya göre türetilip $\xi_\eta = z$ olarak adlandırılırsa,

$$z_t - 6S^2(\xi^2 z)_\eta + \varepsilon^2 z_{\eta\eta\eta} = 0 \tag{36}$$

elde edilir. Sonrasında, Denklem (36)'ya Fourier dönüşümü uygulanarak

$$\hat{z}_t = \mathbf{L}\hat{z} - 6S^2\mathbf{N}(\hat{z},t) \qquad (37)$$

elde edilir ve yapılan analizin devamında, $\hat{z} = F(z)$ z'nin Fourier dönüşümünü, ve $z = F^{-1}(\hat{z})$ ise ters Fourier dönüşümünü göstermektedir. Ayrıca, **L** lineer terim ve **N** lineer olmayan terimi temsil etmektedir ve aşağıdaki gibi elde edilirler:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= -i\varepsilon^2 k^3 z, \\ \mathbf{N}(\hat{z},t) &= -ikF[(\xi_- + \textstyle\int_{-L}^{\eta} F^{-1}(\hat{z})dy)^2 F^{-1}(\hat{z})] \end{aligned} \qquad (38)$$

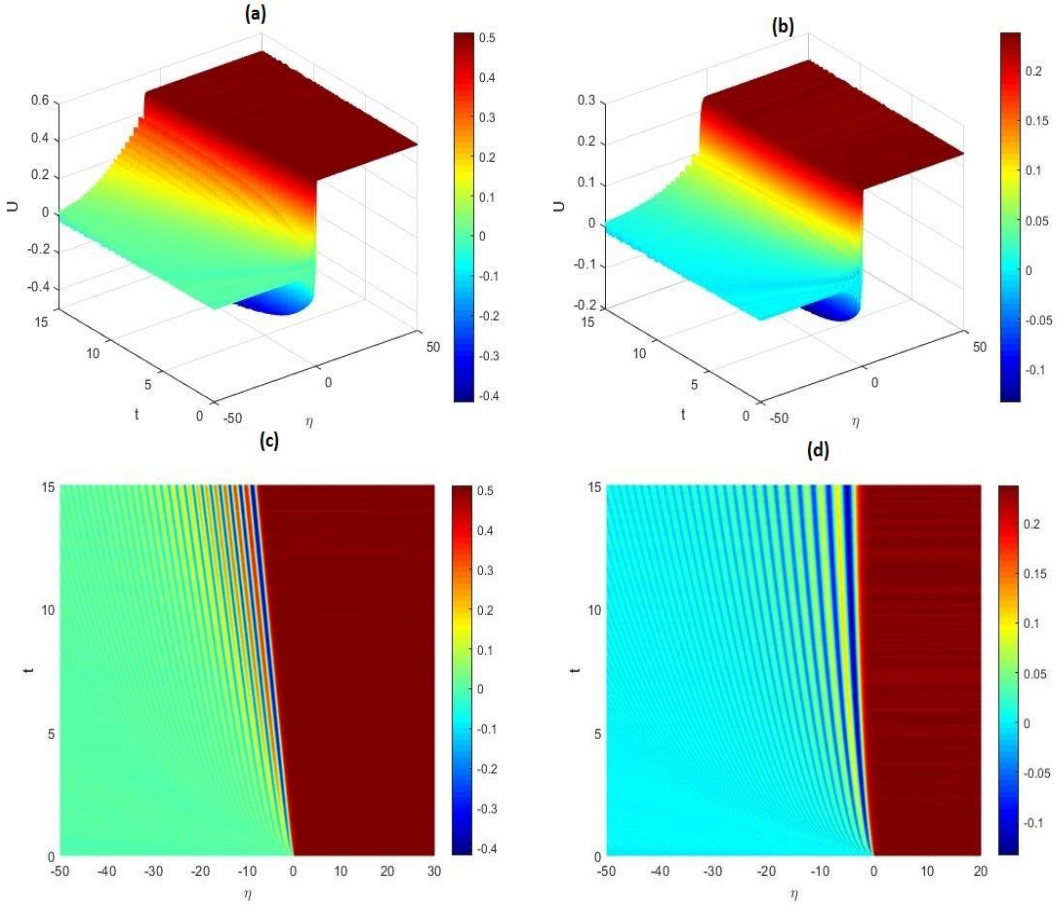
Burada, L parametresi, pozitif olmak üzere çözüm uzayının sınırını belirlemektedir. Klasik mKdV(d) denkleminin nmKdV(d) denkleminden tek farkı, lineer olmayan terimi gösteren **N**'nin zamana bağlı terimler içermesidir. ETDRK4 yönteminin spektral doğruluğu için z'nin başlangıç koşulları düzgün ve periyodik olmalıdır. Fakat, v için olan (2) başlangıç koşulundan

$$z(\eta,0) = -\delta(\eta) \qquad (39)$$

elde edilir. Burada, δ Dirac delta fonksiyonudur. Bu nedenle (39) başlangıç koşulu aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir:

$$z(\eta,0) = -\frac{\tilde{\zeta}}{2}\mathrm{sech}^2(\tilde{\zeta}\eta). \qquad (40)$$

Burada, $\tilde{\zeta}$ büyük pozitif bir sabittir. Yapılan Fourier dönüşümüyle (35) denklemi (36) denklemine dönüşür. (36) denklemi sonlu $[-L, L]$ aralığında ETDRK4 sayısal şeması kullanılarak çözülebilir. ETDRK4 yöntemi için Fourier modu $N = 2^{15}$, alan büyüklüğü $L = 200$, adım aralığı 10^{-3} olarak alınarak $t = 15$ için sayısal hesaplar yapılmıştır. Ayrıca, $t_0 = 10, \varepsilon^2 = 10^{-3}$ ve $\tilde{\zeta} = 10$ olarak seçilmiştir. Klasik mKdV(d) ve nmKdV(d) denklemlerine ait doğrudan çözümlerin grafiksel sonuçları Şekil 1'de sunulmuştur. Her iki denklemde de faz hızı V'nin negatif olması nedeniyle, DSD yayılımının sola doğru gerçekleştiği gözlemlenmiştir. Grafiklerden görüldüğü üzere, klasik mKdV(d) denklemi için zaman ilerledikçe ön kenarda (leading edge) oluşan küçük genlikli dalgaların genliği sıfırda sabit kalırken, arka kenarda (trailing edge) oluşan en büyük genliğe sahip dalga katarının genliği seviye farkının iki katı olan 1 değerine yaklaşmaktadır. Buna karşılık, nmKdV(d) denklemi için zamana bağlı terimin etkisiyle arka kenarın seviyesi zamanla azalmakta ve arka kenardaki en büyük genliğe sahip dalga katarının genliği de düşüş göstermektedir.



Şekil 1. v_r =0.5 ve v_l =0 basamak tipi başlangıç değerleri için $t = 15$'te (a) mKdV(d) denkleminin doğrudan sayısal çözümü (b) $n = 4$ için nmKdV(d) denkleminin doğrudan sayısal çözümü (c) mKdV(d) denkleminin uzay-zaman grafiği ve (d) nmKdV(d) denkleminin uzay-zaman grafiği

Ayrıca, Şekil 1'de klasik mKdV(d) ve nmKdV(d) denklemlerinin $t = 0$ ile $t = 15$ arasındaki doğrudan sayısal çözümlerine ait uzay-zaman grafikleri de verilmiştir. Bu grafikler, nmKdV(d) denkleminin, klasik mKdV(d) denkleminden farklı olarak dalga katarlarının zamanla birbirinden uzaklaştığını ortaya koymaktadır.

Analize, mKdV(d) ve nmKdV(d) denklemlerinin Whitham sistemlerinin sayısal çözümünü bulmak için devam edeceğiz. Klasik mKdV(d) denklemine ait Whitham sistemi için Riemann değişkenlerinin sağlaması gereken sınır koşulları başlangıç koşullarının sınırdaki değerleri olarak sabitlenmiştir. Fakat, nmKdV(d) denkleminin sağlaması gereken sınır koşulları $S(t)$ fonksiyonuna bağlı olarak değiştiği için nmKdV(d) denklemine ait Whitham sistemi için sınır koşulları da zamana bağlı olarak belirlenmelidir. nmKdV(d) denklemleminin Whitham sistemi için sol sınır uç ($m \to 0$) ve sağ sınır uç ($m \to 1$) için, Denklem (29)'da η uzaysal değişkenine bağlı türev terimleri ihmal edilerek elde edilen adi diferansiyel denklem sistemi çözülür. Bunun için, ilk adım olarak Denklem (32) ile verilen d_i'lerin ($i = 1,2,3$) $m \to 0$ ve $m \to 1$ durumundaki limitleri yardımcı kaynak [17] yardımıyla aşağıdaki gibi bulunur:

$$\lim_{m\to\ 0} h_1 = r_1, \quad \lim_{m\to} h_2 = \frac{r_1^2}{r_3}, \quad \lim_{m\to\ 0} h_3 = \frac{r_1^2}{r_3}, \tag{41}$$

$$\lim_{m\to\ 1} h_1 = 2r_1, \quad \lim_{m\to\ 1} h_2 = 2r_1, \quad \lim_{m\to\ 1} h_3 = r_3. \tag{42}$$

Ayrıca, nmKdV(d) denklemi için (2) basamak tipi başlangıç koşulu altında çözüm arandığı için, (2) koşulu r_1, r_2, r_3 Riemann- tipi değişkenler cinsinden belirlenmelidir ve bu başlangıç koşulunun (29) Whitham sistemi için de geçerli olduğuna dikkat edilmelidir. Böylece, Whitham sistemi için başlangıç koşulu aşağıdaki gibi belirlenir:

$$r_1(\eta, 0) = v_l,$$
$$r_2(\eta, 0) = \begin{cases} v_l, & \eta < 0 \\ v_r, & \eta \geq 0 \end{cases}, \; r_3(\eta, 0) = v_r \tag{43}$$

mKdV(d) denkleminde DSD çözümleri gözlemlenmesi için Denklem (2)'de verilen parametreler için $v_r > v_l$ eşitsizliğinin sağlanması gerekir. Diğer durumlar için mKdV-Whitham modülasyon sistemi farklı tipte şok dalga çözümleri [22]. Fakat bu durum bu çalışmanın kapsamı dışındadır. (48) başlangıç koşullarıyla birlikte, nmKdV(d) denklemi için (42) ve (43) limit değerleri adi diferansiyel denkleminde yerlerine yazılarak sırasıyla Riemann değişkenlerinin sol uç ve sağ uçtaki sınırları belirlenir. Buna göre, $m \to 0$ ve $m \to 1$ iken sırasıyla Riemann değişkenleri

$$r_1(\eta, t) \to \frac{30\sqrt{30}\, v_l}{(30 + 2t)^{3/2}},$$

$$r_2(\eta, t),\ r_3(\eta, t) = \frac{\sqrt{{v_r}^2(15+t)^3 - {v_l}^2 t(675 + t(45+t))}}{(15+t)^{3/2}} \tag{44}$$

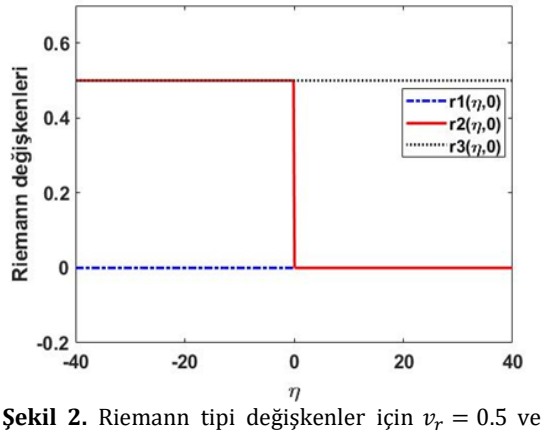
$$r_1(\eta, t), \qquad r_2(\eta, t) \to \frac{27000 v_l}{(30 + 2t)^3}, \tag{45}$$
$$r_3(\eta, t) \to \frac{30\sqrt{30} v_r}{(30 + 2t)^{3/2}}$$

DSD çözümleri için $t_0 = 10$ seçimi için $v_l = 0$ ve $v_r = 0.5$ başlangıç koşulları ele alınmıştır (Şekil 2):

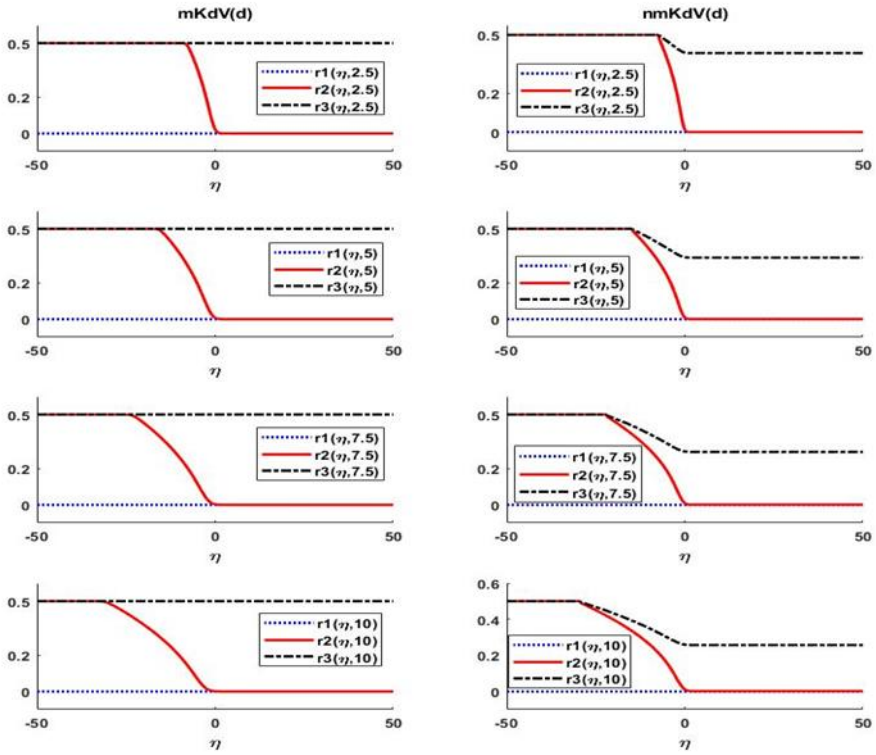
$$r_1(\eta, 0) = 0, r_2(\eta, 0) = \begin{cases} 0, & \eta < 0 \\ 0.5, & \eta \geq 0 \end{cases}, \quad r_3(\eta, 0) = 0.5. \tag{46}$$

Benzer hesaplama farklı v_l ve v_r değerleri için de yapılabilir. (29) nmKdV(d)-Whitham sisteminin, (46) başlangıç koşulları ve (44)-(45) sınır koşullarıyla birlikte sayısal çözümlerinin bulunmasında, Shampine tarafından birinci mertebe hiperbolik kısmi türevli denklemler için geliştirilmiş MATLAB tabanlı sayısal çözücü kullanılmıştır [19]. Hesaplarda iki basamaklı Lax-Wendrof yönteminin farklı bir türü kullanılmıştır. Sayısal çözümde η için $[-200,200]$ tanım kümesinde $N = 2^{12}$ nokta kullanılmıştır. Çözümlerin grafikleri $t = 2.5, 5, 7.5$ ve $t = 10$ 'da klasik mKdV(d) ve nmKdV(d) denklemleri için Şekil 3'te verilmiştir.

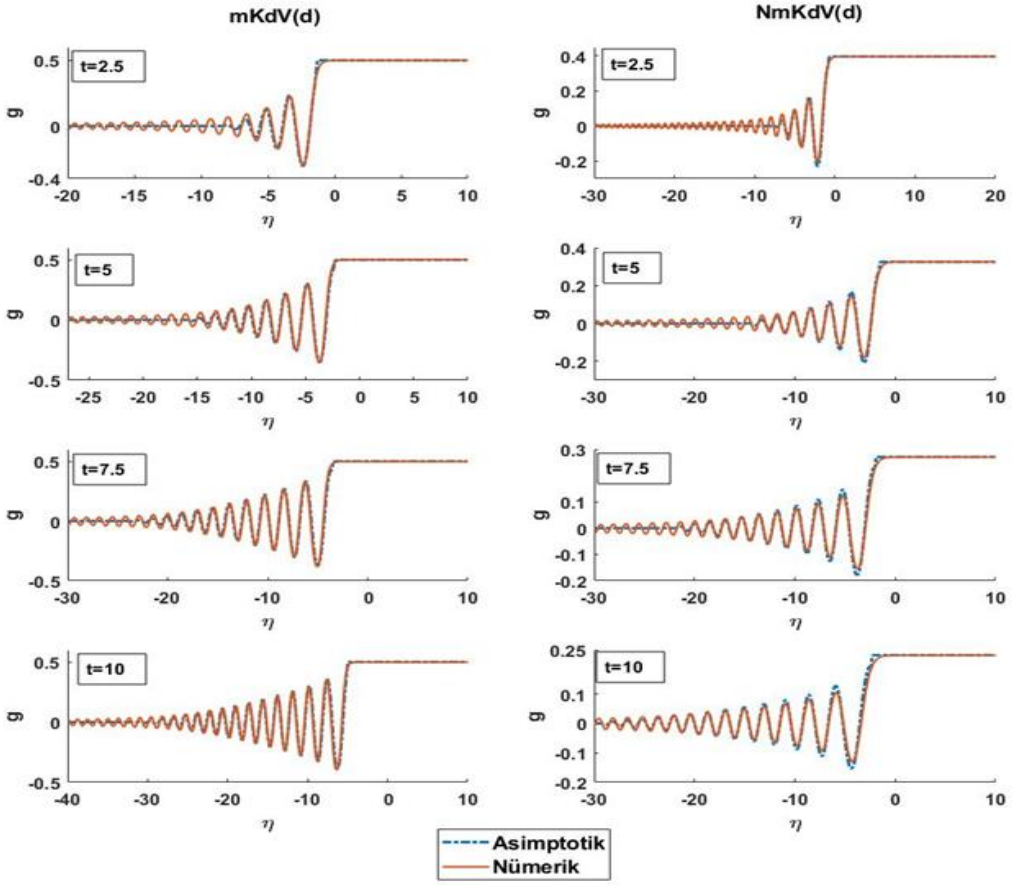
Şekil 3'ten de görülebileceği gibi $r_1(\eta, t)$ ve $r_3(\eta, t)$ zamanla birbirine yaklaşmaktadır. Bu aşamadan sonra, elde edilen bu sonuçların uyumluluğunu göstermek için (22) ile verilen h_0 ve (20) hızlı değişken olan θ kullanılarak mKdV(d) ve nmKdV(d) denklemlerinin belirli bir t anındaki DSD çözümleri Şekil 4'te çizdirilmiştir. Buradan, mKdV(d) ve nmKdV(d) denklemlerinde görülen DSD'lerin yapısıyla ilgili olarak ön kenar genliğinin ve salınımların dalga boyunun asimptotik yaklaşım ve sayısal çözümle uyumlu olduğu görülür. Fakat, dalga katarlarının konumları arasında ufak bir fark mevcuttur. Bunun nedeni, (19) ilk mertebe problemin



Şekil 2. Riemann tipi değişkenler için $v_r = 0.5$ ve $v_l = 0$ seçimine karşı gelen (2) başlangıç koşulları (t=0).



Şekil 3. t = 2.5, 5, 7.5 ve 10 anlarında sol panelde mKdV(d) ve sağ panelde n=4 için nmKdV(d) denklemine ait Whitham sistemlerinin asimptotik çözümü sonucunda elde edilen Riemann değişkenleri. Burada, t_0=10 alınmıştır.



Şekil 4. Sol panelde mKdV(d) denklemi, sağ panelde ise n=4 için elde edilen nmKdV(d) denklemine ait $v_l = 0$ ve $v_r = 0.5$ basamak tipi başlangıç koşulu için t = 2.5, 5, 7.5 ve 10 anlarında doğrudan sayısal çözümler ile Whitham sisteminden elde edilen asimptotik çözümler karşılaştırılması. Burada, t_0=10 ve $\varepsilon^2 = 0.001$ alınmıştır.

çözümünde yer alan θ_0'ı yaklaşık olarak belirleyebilmemizdir. Asimptotik çözümlerin elde edilirken gerekli olan θ_0'ların belirlenmesi için doğrudan sayısal çözümlerden elde edilen sol taraflardaki seviye değeriyle sağ taraftaki en büyük dalga katarının genlik değerinin ortalaması alınmıştır. Asimptotik çözümde, bu ortalama değere en yakın genliğe sahip ortadaki dalga katarına göre θ_0 belirlenmiştir. Faz farkı θ_0 , başlangıç değer problemlerinin özelliğinden dolayı sabit değildir.

4.1. ETDRK4 metodu için hata analizi

Bu kısımda, klasik mKdV(d) ve nmKdV(d) denklemlerinin basamak tipi başlangıç koşulu ele alarak doğrudan sayısal çözümde kullanılan ETDRK4 yöntemi için hata analizi yapılmıştır. Literatürde yapılan taramalar sonucunda, özellikle değişken katsayılı denklemler için kullanılan sayısal yöntemlere dair detaylı bir hata analizi bulunmadığı gözlemlenmiştir. Bu çalışmada ise, ele alınan nmKdV(d) denklemi zamana bağlı terim içermektedir ve yapılan analiz bu anlamda önemlidir.

Analiz kapsamında, farklı zaman adımlarıyla elde edilen sayısal çözümler kıyaslanarak ETDRK4 yönteminin doğruluğu ve uygulanabilirliği değerlendirilecektir. Bunun için, referans bir çözüm elde etmek için küçük bir zaman adımı ($h = 0.0001$) kullanılmış ve elde edilen çözüm "gerçek çözüm" olarak adlandırılmıştır (U^g). Daha sonra, sırasıyla $h = 0.0005, 0.001, 0.005$ ve 0.01 zaman adımlarıyla elde edilen diğer çözümler (U^s) ile kıyaslanmıştır. Bu kıyaslama, aşağıdaki maksimum norm yardımıyla yapılmıştır:

$$L_\infty = \max_l \left| U_l^g - U_l^s \right|$$

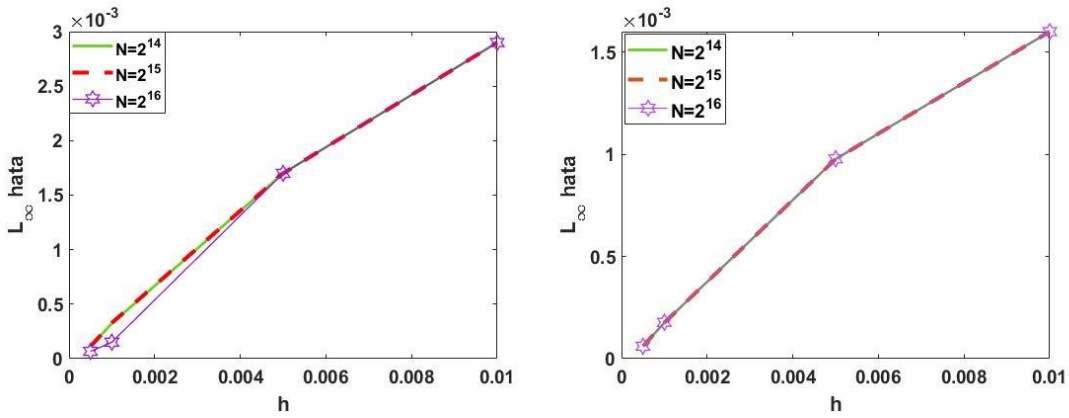
Burada, L_∞ , iki çözüm arasındaki maksimum mutlak farkı ifade eder. Her iki denklem için de maddesel koordinat η'nın tanım aralığı [-200,200], $\varepsilon^2 = 0.05$ ve Fourier modu $N = 2^{14}, N = 2^{15}, N = 2^{16}$ alınarak norm hata değerleri hesaplanmıştır. Fourier modlarının sayısı sabit tutulmuş ve hata analizi hem mKdV(d) hem de nmKdV(d) denklemleri için hesaplanmıştır. Sonuçlar, Tablo 1 ve Tablo 2'de verilmiştir. Tablolarda, N Fourier modu ve h R maddesel koordinatı, ε zayıf dispersiyon etkisini belirleyen parametredir. Ayrıca, Şekil 5 yardımıyla analiz görselleştirilmiştir.

Tablo 1. mKdV(d) denklemi için hata analizi

h (zaman adımı)	$N = 2^{14}$	$N = 2^{15}$	$N = 2^{16}$
0.0005	1.1091e-04	1.1130e-04	1.1374e-04
0.001	3.2387e-04	3.2786e-04	3.3173e-04
0.005	0.0017	0.0017	0.0017

Tablo 2. nmKdV(d) denklemi için hata analizi

h (zaman adımı)	$N = 2^{14}$	$N = 2^{15}$	$N = 2^{16}$
0.0005	1.1091e-04	1.1130e-04	1.1374e-04
0.001	3.2387e-04	3.2786e-04	3.3173e-04
0.005	0.0017	0.0017	0.0017



Şekil 5. Sol panelde mKdV(d) denklemi, sağ panelde $n = 4$ alınarak nmKdV(d) denklemi için $t = 10$'daki farklı Fourier modları (N) için L_∞ normuna göre hataların karşılaştırılması. Burada, başlangıç seviyesi (0.5, 0) ve $\varepsilon^2 = 0.05$ olarak seçilmiştir.

Elde edilen bulgular, hem mKdV(d) hem de nmKdV(d) denklemi için zaman adımı arttıkça hata büyüklüğünün belirgin şekilde yükseldiğini göstermektedir. Ancak, Fourier modlarının $N = 2^{14}$'ten $N = 2^{16}$'ya çıkarılması çıkarılması durumunda hata büyüklüğünde önemli bir değişiklik gözlenmemiştir.

Bu analiz, ETDRK4 yönteminin mKdV(d) ve nmKdV(d) denklemlerinin sayısal çözümlerinde güvenilir bir yaklaşım olduğunu doğrulamış ve hata analizi alanında yeni bir bakış açısı sunarak önemli bir katkı sağlamıştır.

5. Sonuçlar

Bu çalışmada, (n+1) boyutlu mKP(d) denkleminin DSD çözümleri detaylı olarak incelenmiştir. Bu amaçla, denkleme benzerlik dönüşümü uygulanmış ve orijinal mKP(d) denklemi, (n+1) boyutlu değişken katsayılı modifiye Korteweg-de Vries (nmKdV(d)) denklemine indirgenmiştir. Özel olarak seçilen $n = 4$ için nmKdV(d) denkleminin zamana bağlı terimler içeren çözümleri incelenmiş, bu çözümler sayısal yöntemlerle elde edilen doğrudan çözümler ve asimptotik yaklaşımlar aracılığıyla karşılaştırılmıştır. Elde edilen grafikler, DSD'lerin ön kenar genlikleri ve dalga boylarının asimptotik çözümler ile sayısal çözümler arasında yüksek düzeyde uyum sağladığını göstermektedir. Yapılan analizler, zamana bağlı sınır koşullarındaki değişimlere rağmen Whitham modülasyon teorisinin klasik mKdV(d) ve nmKdV(d) denklemleri için oldukça başarılı ve doğru bir yaklaşım sunduğunu ortaya koymuştur.

Ek olarak, DSD'lerin yayılma zarfı, yayılma hızı ve belirli bir andaki maksimum ve minimum genlik büyüklükleri gibi önemli bilgiler doğrudan sayısal çözümlerle tespit edilemezken, Whitham modülasyon denklemlerinin çözümleri bu tür bilgilerin elde edilmesini mümkün kılmıştır. Bu çalışmada, indirgenmiş denklemler aracılığıyla bu parametreler başarılı bir şekilde hesaplanmıştır. Ayrıca, farklı t değerleri için yapılan sayısal analizler, DSD çözümlerinin ön ve arka kenar seviyelerinde meydana gelen değişimleri detaylı bir şekilde ortaya koymuştur. Ek olarak, ETRK4 metodu için yapılan hata analizi, elde edilen sonuçların tutarlı olduğunu göstermektedir.

Çalışmanın sonuçları, (n+1) boyutlu mKP(d) denkleminden özel varsayımlar altında verilmiştir. (2+1) ve (3+1) boyutlu sistemlerin genelleştirilmesi ile elde edilebilecek (n+1) boyutlu daha yüksek boyutlu sistemlerin DSD çözümlerine yönelik analizlerin [22]'de kullanılan yöntem kullanılarak elde edilmesi, gelecekteki çalışmalar için önemli bir araştırma konusu oluşturabileceğini göstermektedir.

.

Etik Beyanı/Declaration of Ethical Code

Bu çalışmada, "Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi" kapsamında uyulması gerekli tüm kurallara uyulduğunu, bahsi geçen yönergenin "Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler" başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbirinin gerçekleştirilmediğini taahhüt ederim.

Kaynakça

[1] Wan, W., Jia, S., Fleischer, J. W. 2007. Dispersive superfluid-like shock waves in nonlinear optics. Nature Physics, 3(1), 46–51.

[2] Vargas-Magaña, R. M., Marchant, T. R., Smyth, N. F. 2021. Numerical and analytical study of undular bores governed by the full water wave equations and bidirectional Whitham–Boussinesq equations. Physics of Fluids, 33(6), 067105.

[3] El, G. A., Hoefer, M. A. 2016. Dispersive shock waves and modulation theory. Physica D: Nonlinear Phenomena, 333, 11–65.

[4] Whitham, G. B. 1965. Non-linear dispersive waves. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 283, 238–261.

[5] Gurevich, A. V., Pitaevskii, L. P. 1974. Nonstationary structure of a collisionless shock wave. Soviet Physics JETP, 38, 291–297.

[6] Hoefer, M. A., Ablowitz, M. J. 2009. The theory of dispersive shock waves for NLS and DNLS. Physical Review A, 79(5), 053819.

[7] Ablowitz, M. J., Demirci, A., Ma, Y.-P. 2016. Dispersive shock waves in the Kadomtsev–Petviashvili and two dimensional Benjamin-Ono equations. Physica D: Nonlinear Phenomena, 333, 84–98.

[8] Ablowitz, M. J., Biondini, G., Wang, Q. 2017. Whitham modulation theory for the Kadomtsev–Petviashvili equation. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 473(2204), 20160695.

[9] Ablowitz, M., Biondini, G., Wang, Q. 2017. Whitham modulation theory for the two-dimensional Benjamin-Ono equation. Physical Review E, 96(3), 032225.

[10] Demirci, A. 2020. Dispersive shock waves in three-dimensional Benjamin-Ono equation. Wave Motion, 94, 102502.

[11] Aslanova, G., Demirci, A., Ahmetolan, S. 2022. Modulated periodic wavetrains in the spherical Gardner equation. Wave Motion, 109, 102844.

[12] Özdemir, N., Demirci, A., Ahmetolan, S. 2023. Undular bores in the (3+1)-dimensional mKP equation. Physics Letters A, 483, 129051.

[13] Abeya, A., Biondini, G., Hoefer, M. A. 2023. Whitham modulation theory for the defocusing nonlinear Schrödinger equation in two and three spatial dimensions. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 56(10), 105302.

[14] Demirci, A. 2019. Özel bir başlangıç koşulu altında (N+1) boyutlu Benjamin-Ono denklemi için Whitham modülasyon teorisi. Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi, 8(3), 89–98.

[15] Özdemir, N., Demirci, A., Ahmetolan, S. 2024. Evolution of nonlinear periodic waves in the focusing and defocusing cylindrical modified Korteweg-de Vries equations. International Journal of Theoretical Physics, 63(12), 1–13.

[16] Luke, J. C. 1966. A perturbation method for nonlinear dispersive wave problems. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences, 292, 403–412.

[17] Byrd, P. F., Friedman, M. D. 1971. Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists. Second edition, revised edn., Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 67. Springer, New York–Heidelberg, 358 s.

[18] Ablowitz, M. J., Biondini, G., Rumanov, I. 2018. Whitham modulation theory for (2+1)-dimensional equations of Kadomtsev–Petviashvili type. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 51(21), 215501.

[19] Shampine, L. F. 2005. Solving hyperbolic PDEs in MATLAB. Applied Numerical Analysis and Computational Mathematics, 2(3), 346–358.

[20] Cox, S. M., Matthews, P. C. 2002. Exponential time differencing for stiff systems. Journal of Computational Physics, 176(2), 430–455.

[21] Kassam, A.-K., Trefethen, L. N. 2005. Fourth-order time-stepping for stiff PDEs. SIAM Journal on Scientific Computing, 26(4), 1214–1233.

[22] El, G. A., Hoefer, M. A., Shearer, M. 2017. Dispersive and diffusive-dispersive shock waves for nonconvex conservation laws. SIAM Review, 59(1), 3–61.