T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ ALAN VE ÇEVRE KAVRAMLARI ARASINDAKİ TÜREV İLİŞKİSİNİ ANLAMLANDIRMA SÜRECİNDE ÖĞRETMEN MÜDAHALELERİNİN ROLÜ: PİRİE-KİEREN TEORİSİNE GÖRE

Malik DURMAZ

(Doktora Tezi)

İstanbul, 2022

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ ALAN VE ÇEVRE KAVRAMLARI ARASINDAKİ TÜREV İLİŞKİSİNİ ANLAMLANDIRMA SÜRECİNDE ÖĞRETMEN MÜDAHALELERİNİN ROLÜ: PİRİE-KİEREN TEORİSİNE GÖRE

THE ROLE OF TEACHER INTERVENTIONS IN MATHEMATICS PROSPECTIVE TEACHERS' UNDERSTANDING OF THE DERIVATIVE RELATIONSHIP BETWEEN AREA AND PERIMETER CONCEPTS: ACCORDING TO PIRIE-KIEREN THEORY

Malik DURMAZ

(Doktora Tezi)

Danışman
Prof. Dr. Sare ŞENGÜL

İstanbul, 2022

Tüm kullanım hakları

M.Ü. Eğitim Bilimleri Enstitüsü'ne aittir.

© 2022

ETİK BEYAN

Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak hazırladığım çalışmamda;

- Sunduğum bilgileri, dokümanları ve verileri akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Çalışmamda yararlandığım eserlerin tamamına atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Elde ettiğim verilerde ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı bildirir, aksi bir durumda aleyhimde doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

31/03/2022

Malik DURMAZ

ÖZGEÇMİŞ

2000-2004 Van Muradiye Alpaslan Anadolu Öğretmen Lisesi

2004-2009 Marmara Üniversitesi/ Atatürk Eğitim Fakültesi/ Ortaöğretim Fen Ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü/ Matematik Öğretmenliği Lisans Programı

2009-2012 Abant İzzet Baysal Üniversitesi/ Eğitim Bilimleri Enstitüsü/ Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans Programı

2013-… Siirt Üniversitesi/ Eğitim Fakültesi/ Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü/ Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda Öğretim Görevlisi

ÖN SÖZ

Anlama, genelde öğretimin her alanında özelde ise matematik öğretiminde önemli bir kavramdır. Anlamanın doğası ve göstergeleri hakkında bilgi sahibi olmak, etkili bir matematik eğitimi için önem arz etmektedir. Diğer taraftan matematiğin günlük hayata bakan penceresi olan alan ve çevre ve matematiğe tarihsel süreç içerisinde eşik atlatan türev üzerine düşünmeye değer kavramlardır. Bu kavramların arasındaki ilişkinin anlamlandırılma süreci ise üzerinde çalışılacak zor olsa da çok değerli bir konudur. Bu çalışmanın yayınlanmasındaki gecikmenin önemli sebeplerinden biri budur.

Her şeyden önce mülakatlara yüksek motivasyon ile katılan değerli gençlere teşekkür eder, ışıklarının yollarını aydınlatmasını dilerim. Uzun soluklu araştırma sürecinde beni yolda tutanlar, hocalarım, ailem ve dostlarım oldu. Bu nedenle verdiği her türlü destekten dolayı tez danışmanın Prof. Dr. Sare ŞENGÜL'e, değerli geri bildirimlerinden, fedakârlıklarından ve her türlü desteklerinden dolayı tez izleme komitemdeki Doç. Dr. Recai Akkuş ve Dr. Öğr. Üyesi Orhan ÇANAKÇI hocalarıma sonsuz teşekkür ederim. Davetimizi kabul edip tez jüri üyesi olarak bu sürece dâhil olan sundukları görüşlerle bu çalışmaya çok değerli geri bildirim sağlayan kıymetli hocalarım Prof. Dr. Zeynep GÜREL, Doç. Dr. Güneş YAVUZ, Doç. Dr. Özgür Kıvılcan DOĞAN ve Doç. Dr. Yasemin KATRANCI hocalarıma sonsuz teşekkür ederim. Bu süreçte yöntem konusundaki bilgi birikimiyle katalizör rolü oynayan ve her tökezlediğimde beni kaldıran Dr. Öğr. Üyesi Mustafa OBAY'a, doktora tezim için destekleriyle yanımda olan ve kaygılanan aileme ve dostlarıma teşekkürü borç biliyorum.

Bu tezi hayatıma giren tüm hocalarıma ve "hani yaylam senin ezelin" diyerek ilham veren merhum İbrahim ERKAL'a ithaf ederim…

Malik DURMAZ

ÖZET

Bu çalışmanın amacı ilköğretim matematik öğretmen adaylarının alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini anlamlandırma sürecini ve bu süreçte odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalelerinin rolünü Pirie ve Kieren'in ortaya koyduğu ve Martin'in katkılarıyla daha da sağlam temellere oturan Matematiksel Anlamanın Gelişimi Teorisi perspektifinden incelemektir. Fenomenografik araştırma desenine örnek teşkil eden bu çalışmada klinik mülakat ile veri toplanmıştır. Çalışmanın katılımcı grubu 2015-2016 eğitim öğretim yılı bahar döneminde Güneydoğu Anadolu Bölgesindeki bir devlet üniversitesinde ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü üçüncü sınıfta öğrenimine devam eden altı öğretmen adayından oluşmaktadır. Bu adayların üçü ile pilot çalışma yapılmış akabinde diğer üçü ile asıl çalışma yürütülmüştür. Klinik mülakatlar birer hafta arayla dört oturum şeklinde gerçekleştirilmiştir. Bu mülakatlardan elde edilen veriler, Pirie ve Kieren'in teorisindeki anlama seviyeleri ve bu teoriye Martin'in eklediği müdahale-geri katlama şemasına göre analiz edilmiştir.

Araştırmanın ana sonucu, uygun bir öğrenme ortamı sağlandığında, öğretmen adaylarının alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini kurabildiği yönündedir. Bu ortamı sağlarken imaj oluşturma ve özellikleri fark etme seviyelerine yeterli zamanın ayrılmasının önemi ortaya çıkmıştır. Katılımcılar anlamanın yedi seviyesinde faaliyet göstermişlerdir. Bu seviyeler içinde en fazla zaman, sırasıyla imaj oluşturma ve özellikleri fark etme seviyelerinde harcanmıştır. İmaj oluşturma seviyesindeki faaliyetler ile katılımcıların eksik ya da hatalı anlayışları düzelttiği ve kenar uzunluğu dışındaki farklı bağımsız değişkenler ile alan ve çevre fonksiyonlarını oluşturduğu gözlemlenmiştir. Mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışmak türündeki geri katlamaların eksik anlayışı geliştirme ve hatalı anlayışı düzeltmedeki önemi bu çalışmada ortaya çıkmıştır. Geri katlamaları başlatmada ise odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalelerinin işlevsel olduğu tespit edilmiştir.

Bu çalışma ile zaman, müdahalenin kaynağı ve şekli, geri katlamanın türü ve çıktısı ve bu süreçte çalışılan anlama seviyelerinin tamamının gösterilebileceği bir haritalandırma yöntemi geliştirilmiştir. Ayrıca anlamanın gelişiminde (duruma özgü müdahalelerde bulunabilmesi için) öğretmenin farkındalığının önemi ortaya çıkmıştır. Öğretmen farkındalığının bileşenleri çalışmanın sınırlıkları dâhilinde ve literatür ile uyumlu olarak ortaya konulmaya çalışılmıştır. Tüm bunların doğrultusunda öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Alan ve çevre arasındaki türev ilişkisi, matematiksel anlama, müdahale ve geri katlama, Pirie-Kieren teorisi.

ABSTRACT

THE ROLE OF TEACHER INTERVENTIONS IN MATHEMATICS PROSPECTIVE TEACHERS' UNDERSTANDING OF THE DERIVATIVE RELATIONSHIP BETWEEN AREA AND PERIMETER CONCEPTS: ACCORDING TO PIRIE-KIEREN THEORY

This study seeks to examine mathematics teacher candidates' understanding of the derivative relationship between the area and the perimeter and the role of explicit intentional teacher interventions in growth of this understanding based on the perspective of the Pirie-Kieren Theory, which has been built on even more solid foundations with the contributions of Martin. In this study, conducted via the phenomenographic research pattern, data were collected through clinical interview. The participating group of the study consists of six mathematıcs prospectıve teachers who continue their education in the third grade of the department of elementary mathematics teaching at a state university in south-eastern Anatolia region during the spring semester of the 2015-2016 academic year. A pilot study was implemented with three of these teacher candidates and then the main study was carried out with the other three of them. Clinical interviews are planned in the form of four sessions one week apart. Data from these interviews show the levels of comprehension in Pirie and Kieren's theory and the intervention-folding back scheme that Martin added to this theory.

The main finding of the study is that teacher candidates can establish a derivative relationship between the area and the perimeter when an appropriate learning environment is provided. While providing this environment, the importance of allocating enough time to image making and property noticing levels has emerged. Participants were engaged in seven levels of understanding. It was found out that time was mostly allocated for image making and property noticing, respectively. It was observed that while being engaged in the activities of the image making level, participants corrected misunderstandings and formed the area and the perimeter functions with different independent variables other than the side length. The importance of type of folding back in form of working at inner layer using in developing inadequate and correcting misunderstandings was revealed in this study. In initiating these folding backs, explicit intentional teacher interventions were found to be functional.

With this study, a mapping method was developed in which time, the source and type of the intervention, the type and output of the folding back, and the level of understanding studied in this process can be demonstrated. In addition, it was determined that teacher awareness (in order to make situation-specific interventions) is important in developing understanding. The components of teacher awareness were presented within the limitations of the study and in accordance with the literature. In line with all these considerations, recommendations were given.

Keywords: Derivative relationship between the area and the perimeter, growth of mathematical understanding, intervention and folding back, The Pirie-Kieren theory.

İÇİNDEKİLER

ETİK BEYAN i
ÖZGEÇMİŞ ii
ÖN SÖZ iii
ÖZET iv
ABSTRACT vi
İÇİNDEKİLER viii
TABLOLAR LİSTESİ xiii
ŞEKİLLER LİSTESİ xvi
BÖLÜM 1: GİRİŞ 1
1.1. Problem Durumu 1
1.2. Araştırmanın Amacı 12
1.3. Araştırmanın Önemi 13
1.4. Sınırlılıklar 18
1.5. Varsayımlar 19
1.6. Tanımlar 19
BÖLÜM 2: KURAMSAL ÇERÇEVE 21
2.1. Pirie ve Kieren'in Matematiksel Anlamanın Gelişimi Teorisi 21
2.1.1. Anlamaya Genel Bir Bakış 21
2.1.2. Pirie ve Kieren Teorisine Göre Anlamanın Seviyeleri 25
2.1.2.1. Ön Bilgi 27
2.1.2.2. İmaj Oluşturma 30
2.1.2.3. İmaja Sahip Olma 32
2.1.2.4. Özellikleri Fark Etme 33
2.1.2.5. Formelleştirme 34

2.1.2.6. Gözlem Yapma 35
2.1.2.7. Yapılandırma 36
2.1.2.8. Keşfetme 37
2.1.3. Geri Dönmeye Gereksinim Duymama Sınırları 39
2.1.4. Geri Katlama 41
2.1.5. Müdahale 44
2.1.6. Müdahale ve Geri Katlama Kategorileri 45
2.1.6.1 Müdahale Türleri 47
Odaklanmış Kasıtlı Öğretmen Müdahalesi 48
Odaklanmış Kasıtlı Akran Müdahalesi 48
Odaklanmış Kasıtlı Kendine Müdahale 48
Odaklanmamış Kasıtlı Öğretmen Müdahalesi 49
Odaklanmamış Kasıtlı Akran Müdahalesi 49
Odaklanmamış Kasıtlı Kendine Müdahale 50
Kasıtsız Öğretmen Müdahalesi 50
Kasıtsız Akran Müdahalesi 50
Kasıtsız Materyal Müdahalesi 51
Odaklanmış/Odaklanmamış Kasıtlı Materyal Müdahalesi 51
2.1.6.2. Geri Katlamanın Türleri 51
Mevcut Anlamaları Kullanarak Daha İç Bir Seviyede Çalışmak 52
Daha İç Bir Seviyede Toplamak 53
Konunun Dışına Çıkmak ve Orada Çalışmak 55
Sürekliliği Bozan Geri Katlama 56
2.1.6.3. Geri Katlamanın Çıktısı 56
Etkili Geri Katlama 57

Dış Teşvikle Etkili Geri Katlama 57
Dış Teşvik Olmadan Etkili Geri Katlama 57
Etkisiz Geri Katlama 58
2.1.7. Haritalandırma 58
2.1.8. Matematiksel Anlamanın Gelişiminde Öğrenme Ortamlarının Yeri 60
2.1.8.1. Geleneksel Öğrenme Ortamları ve Anlama 60
2.1.8.2. Matematiksel Anlamanın Gelişimi ve Yapılandırmacılık 61
2.1.8.3. Matematiksel Anlamanın Gelişimi Teorisi ve Enaktivizm 64
2.1.9. Pirie ve Kieren'in Teorisi'nin Genel Bir Değerlendirilmesi 65
2.1.10. APOS Teori ve Bunun Pirie ve Kieren'in Teorisi ile Karşılaştırılması 67
2.2. Çevre ve Alan Arasındaki Türev İlişkisi 72
2.2.1. Çevre ve Alan 73
2.2.2. Türev 82
2.2.2.1. Türev Öğretimi İçin Problem Durumu 83
2.2.3. Çevre ve Alan Arasındaki Türev İlişkisi 95
2.2.3.1. Dairede Çevre ve Alan Arasındaki Türev İlişkisi 97
2.2.3.2. Karede Çevre ve Alan Arasındaki Türev İlişkisi 98
2.2.3.3. Eşkenar Üçgende Çevre ve Alan Arasındaki Türev İlişkisi 99
2.2.3.4. Düzgün Çokgenlerde Çevre ve Alan Arasındaki Türev İlişkisi 100
BÖLÜM 3: YÖNTEM 103
3.1. Araştırma Deseni 103
3.1.1. Fenomenografi 103
3.2. Çalışma Grubu 105
3.3. Veri Toplama Araçları 107
3.4. Verilerin Toplanması 109

3.4.1. Pilot Uygulama 111
3.4.2. Asıl Uygulama 116
3.5. Verilerin Analizi 117
3.5.1. Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları 132
3.5.2. Araştırmacının Rolü 135
3.6. Araştırmada Alınan Etik Önlemler 138
BÖLÜM 4: BULGULAR 140
4.1. Öğretmen Adaylarının Alan ve Çevre Kavramları Arasındaki Türev İlişkisini Anlamlandırma Sürecinde İzledikleri Yollar 140
4.1.1. Dairede Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisinin Kurulmasında İzlenilen Yollar 140
4.1.2 Karede Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisinin Kurulmasında İzlenilen Yollar 145
4.1.3. Eşkenar Üçgende Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisinin Kurulmasında İzlenilen Yollar 155
4.1.4. Düzgün n-gen'de Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisinin Kurulmasında İzlenilen Yollar 162
4.2. Müdahale ve Geri Katlama Süreçlerine Yönelik Bulgular 174
4.3. Öğretmen Adaylarının Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisini Yapılandırırken Anlama Seviyelerinde Toplam Faaliyet Süreleri 178
4.4. Pirie ve Kieren Modeline Göre Öğretmen Adaylarının Zihin Haritaları 180
4.4.1. Ömür'ün Türev İlişkisini Anlama Sürecindeki Zihin Haritası 181
4.4.2. Gaye'nin Türev İlişkisini Anlama Sürecindeki Zihin Haritası 184
4.4.3. Yavuz'un Türev İlişkisini Anlama Sürecindeki Zihin Haritası 187
BÖLÜM 5: SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER 192
5.1. Sonuç ve Tartışma 192

5.1.1. Anlamanın Gelişiminde Önemli Seviyeler 193
5.1.2. Anlamanın Gelişiminde Müdahale-Geri Katlama Döngülerinin Önemi 199
5.2. Öneriler 206
KAYNAKÇA 210
EKLER 220
EK-1: Etik Kurul İzni 220
EK-2: Yavuz 1. Oturum (Dairede Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi) 221
EK-3: Yavuz 2. Oturum (Karede Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi) 230
EK-4: Yavuz 3. Oturum (Eşkenar Üçgende Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi) 245
EK-5: Yavuz 4. Oturum (Düzgün n-gende Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi) 256
EK-6: Gaye 1. Oturum (Dairede Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi) 272
EK-7: Gaye 2. Oturum (Karede Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi) 279
EK-8: Gaye 3. Oturum (Eşkenar Üçgende Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi) 288
EK-9: Gaye 4. Oturum (Düzgün n-gende Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi) 293
EK-10: Ömür 1. Oturum (Dairede Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi) 302
EK-11: Ömür 2. Oturum (Karede Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi) 310
EK-12: Ömür 3. Oturum (Eşkenar Üçgende Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi) 318
EK-13: Ömür 4. Oturum (Düzgün n-gende Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi) 325

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 2.1. APOS Teori ile Pirie ve Kieren'in Teorisinin Karşılaştırılması 71

Tablo 2.2. Küçük Aralıklarla Ölçüm Yapıldığında Ortalama Hız Davranışı 88

Tablo 3.1. Katılımcıların Akademik Başarı Düzeyleri 107

Tablo 3.2. Katılımcıların Klinik Mülakat Süreleri 112

Tablo 3.3. Ramiz ile İkinci Oturumda Yapılan Karede Merkez Arayışı 113

Tablo 3.4. Katılımcıların Klinik Mülakat Süreleri 117

Tablo 3.5. Ömür'e Ait Çözümleme Kesiti 118

Tablo 3.6. Kodlamaların İçeriği 119

Tablo 3.7. Yavuz'un Kare Çalışmasından Bir Çözümleme Kesiti 121

Tablo 3.8. Gaye ve Ömür'ün Daire Çalışmasından Bir Çözümleme Kesiti 122

Tablo 3.9. Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisini Anlamadaki Seviyeler 124

Tablo 3.10. Gaye'nin Formelleştirme Seviyesindeki Eylemlerinden Bir Örnek 128

Tablo 3.11. Yavuz'un Gözlem Yapma Seviyesindeki Eylemlerinden Bir Örnek 129

Tablo 3.12. Çözümlemelerin Ekler Kısmındaki Sıralanışı 133

Tablo 3.13. Birinci ve İkinci Kodlamadaki Bildirilen Görüş Sayısı 135

Tablo 3.14. Yorumlayıcı Farkındalık Görüş Birliği Oranları 135

Tablo 4.1. Dairede Türev İlişkisini Kurarken Yapılan Eylemler 141

Tablo 4.2. Ömür'ün Dairede Türev İlişkisini Fark Etmesi 141

Tablo 4.3. Gaye'nin Dairede Halka Yapısına Ulaşması 142

Tablo 4.4. Ömür'ün Dairedeki Türev İlişkisini Değişim Oranı Cinsinden İfade Etmesi 144

Tablo 4.5. Karede Türev İlişkisini Kurarken Yapılan Eylemler 146

Tablo 4.6. Gaye'nin Karede Kenar Dairede Çapa Göre Çalışması 147

Tablo 4.7. Gaye'nin Karede İmaj Karşılaştırmaları 148

Tablo 4.8. Gaye'nin Karede Ağırlık Merkezinin Köşeye Uzunluğuna Göre Çalışması 149

Tablo 4.9. Yavuz'un Karede Standart Değişkene Göre Türev İlişkisini Kurması 150

Tablo 4.10. Ömür'ün Karede Halka Yapısını Açıklaması 152

Tablo 4.11. Ömür'ün Karedeki Türev İlişkisini Değişim Oranı Cinsinden İfade Etmesi 154

Tablo 4.12. Eşkenar Üçgende Türev İlişkisini Kurarken Yapılan Eylemler 155

Tablo 4.13. Yavuz'un Eşkenar Üçgende Kenar Uzunluğuna Göre Çalışması 156

Tablo 4.14. Ömür'ün Eşkenar Üçgenin Kenar Uzunluğuna 2t Ataması 157

Tablo 4.15. Yavuz'un Eşkenar Üçgende Türev İlişkisini Kurması 158

Tablo 4.16. Ömür'ün Eşkenar Üçgende Halka Yapısını Açıklaması 160

Tablo 4.17. Ömür'ün Üçgendeki Türev İlişkisini Değişim Oranı Cinsinden İfade Etmesi 161

Tablo 4.18. Düzgün Çokgende Türev İlişkisini Kurarken Yapılan Eylemler 162

Tablo 4.19. Yavuz'un Düzgün Çokgende Köşegenlere Göre Çalışması 163

Tablo 4.20. Yavuz'un Kenar Uzunluğunun Yarısına Göre Çalışması 164

Tablo 4.21. Yavuz'un Kenar Uzunluğunun Yarısına Göre Çalıştığını Fark Etmesi 166

Tablo 4.22. Yavuz'un Düzgün n-gende Türev İlişkisini Kurması 168

Tablo 4.23. Ömür'ün Düzgün n-gende Üçgende Halka Yapısını Açıklaması 170

Tablo 4.24. Yavuz'un Düzgün n-gen'deki Türev İlişkisini Değişim Oranı Cinsinden İfadesi 173

Tablo 4.25. Müdahale, Geri Katlama ve Geri Katlamanın Çıktısı Türlerinin Oturumlara Göre Dağılımı 175

Tablo 4.26. Odaklanmış Kasıtlı Öğretmen Müdahalelerinin Başlattığı Döngüler 177

Tablo 4.27. Seviyelere ve Mülakatlara Göre Zaman Dağılımı 179

Tablo 4.28. Ömür'ün Formelleştirme Seviyesindeki Söylemleri 183

Tablo 4.29. Ömür'ün Gözlem Yapma Seviyesindeki Faaliyetlerinden Biri 183
Tablo 4.30. Ömür'ün Aynı Seviyeye Geri Katlama Yapmasına Bir Örnek 184
Tablo 4.31. Gaye'nin Formelleştirme Seviyesindeki Faaliyetlerinden Biri 186
Tablo 4.32. Gaye'nin Gözlem Yapma Seviyesindeki Faaliyetlerinden Biri 187
Tablo 4.33. Yavuz'un Formelleştirme Seviyesindeki Faaliyetlerinden Biri 190
Tablo 4.34. Yavuz'un Gözlem Yapma Seviyesindeki Faaliyetlerinden Biri 191

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. Anlamanın Seviyeleri (Pirie ve Kieren, 1989, s.8; Pirie ve Kieren, 1994, s.167) 3

Şekil 2.1. Anlamanın Seviyeleri (Pirie ve Kieren, 1989, s.8; Pirie ve Kieren, 1994, s.167) 25

Şekil 2.2. İkinci Dereceden Denklemlerle İlgili İmaj Oluşturma Eylemleri (Pirie ve Kieren, 1994, s.179) 31

Şekil 2.3. Anlamanın Seviyeleri (Pirie ve Kieren, 1989, s.8; Pirie ve Kieren, 1994, s.167) 39

Şekil 2.4. Terasa'nın Denk Kesir Kombinasyonlarını Oluşturduğu Tablo (Pirie ve Kieren, 1994, s.169) 41

Şekil 2.5. Müdahale ve Geri Katlama Mekanizması (Martin, 2008, s.72) 46

Şekil 2.6. Haritalandırma Örneği 59

Şekil 2.7. APOS Teoriye Göre Matematiksel Bilginin Yapılandırılması (Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews ve Thomas, 1996, s.9) 69

Şekil 2.8. Ortalama Hız ve Sekant Kiriş Doğrusu 86

Şekil 2.9. Ortalama Hız ve Sekant Kiriş Doğrusu II 87

Şekil 2.10. Sekant Kiriş Doğrularının Teğete Yaklaşması 89

Şekil 2.11. Anlık Hız, Noktasal Türev, Noktada Çizilen Teğetin Eğimi 90

Şekil 2.12. Dairenin Alanı ve Çevresi Arasındaki Türev İlişkisinin Geometrik Yorumu 97

Şekil 2.13. Karenin Alanı ve Çevresi Arasındaki Türev İlişkisinin Geometrik Yorumu 98

Şekil 2.14. Üçgenin Alanı ve Çevresi Arasındaki Türev İlişkisinin Geometrik Yorumu 99

Şekil 2.15. Düzgün Çokgenin Alanı ve Çevresi Arasındaki Türev İlişkisinin Geometrik Yorumu 101

Şekil 3.1. Bektaş'ın Çalışma Kâğıtlarından Bir Kesit 125

Şekil 3.2. Bektaş (a) ve Seda'nın (b) Çalışma Kâğıtlarından Bir Kesit 126
Şekil 3.3. Seda'nın Özellikleri Fark Seviyesinde Yapmış olduğu Çalışmadan Bir Kesit 126
Şekil 3.4. Ömür'ün Kare ve Üçgen Çalışma Kâğıtlarından Bir Kesit 127
Şekil 3.5. Seda'nın Yapılandırma Seviyesinde Yazdığı Sonuçlar 130
Şekil 3.6. Anlama Sürecine İlişkin Zihin Haritası Örneği 131
Şekil 4.1. Ömür'ün Türev İlişkisini Anlama Sürecine İlişkin Zihin Haritası 182
Şekil 4.2. Gaye'nin Türev İlişkisini Anlama Sürecine İlişkin Zihin Haritası 185
Şekil 4.3. Yavuz'un Türev İlişkisini Anlama Sürecine İlişkin Zihin Haritası 189

BÖLÜM 1: GİRİŞ

Bu ana başlık altında önce araştırmaya temel teşkil eden problem durumu tartışılmıştır. Sonra araştırmanın amacı ve bu amaç doğrultusunda oluşturulan araştırma problemleri sunulmuştur. Son olarak araştırmanın önemi, sınırlılıkları, varsayımları ve kavramların tanımlarına yer verilmiştir.

1.1. Problem Durumu

Matematik, geçmişten günümüze doğayı ve hayatı anlamak ve hayatı kolaylaştırmak için güvenilir bir araç olarak görülmektedir. Günümüzde ise hem günlük hayatı kolaylaştıran hem de bilim ve teknolojinin gelişimine ışık tutan bir araç haline gelmiştir. Bir kişinin evine alacağı herhangi bir ürün için en uygun maliyet hesabını çıkarması, matematiğin günlük hayattaki işlevine örnek verilebilir. Diğer taraftan Mars'a gönderilecek bir uzay aracı için en uygun rotayı belirlemek, matematiğin bilim ve teknolojideki işlevini yansıtabilmektedir. Bu nedenle gelişmek isteyen ülkelerin geleceklerini inşa ederken hem kendine yetebilen ve doğru kararlar alabilen hem de bilim ve teknoloji alanında yenilikler ortaya çıkarabilecek vatandaşlar yetiştirmek için matematik eğitimine önem verdikleri söylenebilir. Bunu sağlamak için de eğitim politikacıları, etkili matematik eğitimi için yol ve yöntemler denemektedirler.

Etkili bir matematik eğitimi için öğrencilerin bilgiyi zihinlerinde anlamlandırma ve oluşturma süreçlerini ve bu süreçlere etki eden içsel ve dışsal faktörlerin neler olduğunu ortaya çıkarmak önem arz etmektedir. VogGlasfeld [1990] bu doğrultuda, etkili bir matematik eğitimi için öğrencilerin zihinsel yapılarının ortaya çıkarılmasına ve bu yapıları istenilen eylemlerle sonuçlanacak şekilde yönlendirilmesine yönelik hipotezler üretilmesini tavsiye etmektedir (Aktaran: Pirie ve Kieren, 1992, s.506-507). Bu da anlamanın doğasını ortaya çıkarmayı, matematik eğitimi için önemli hale getirmektedir (Pirie ve Kieren, 1994). Anlamanın doğasını ortaya çıkarmak ise "Anlama nedir?", "Anlama nasıl geliştirilir?" ve "Anlamanın gerçekleştiği nasıl anlaşılır?" gibi sorulara cevap aramakla mümkün olabilir.

Anlama eğitimciler için önemli bir kavram olmasına rağmen "anlama" denildiğinde insanların aklına gelenler aynı olmayabilmektedir. Örneğin günlük hayatta ve sınıf

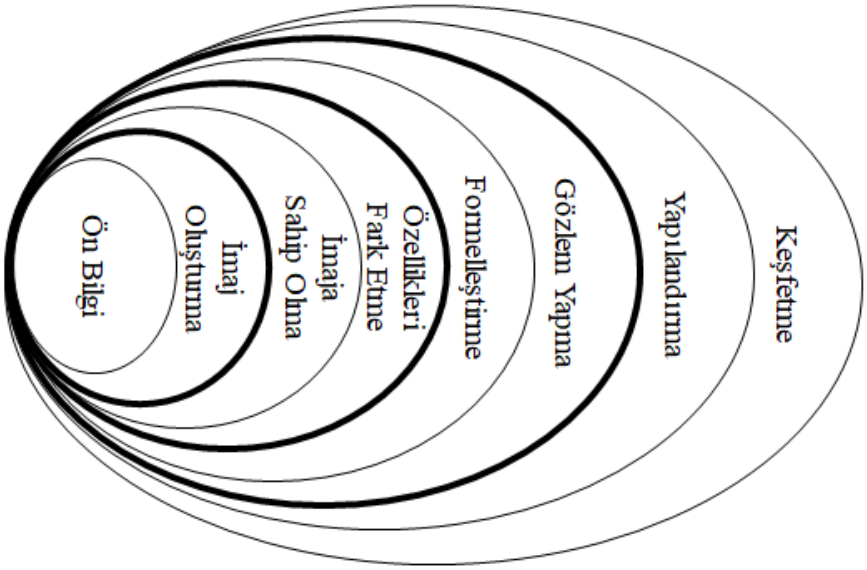
ortamlarında “Anladın mı?”, “Anlatabildim mi?” ve “Anlaşılmayan bir şey var mı?” gibi ifadeler sıkça kullanılmaktadır. Çoğunlukla tartışmanın devamı için onay almaya yönelik olarak bu sorular sorulmaktadır. Onay veren kişinin gerçekten anlayıp anlamadığını ortaya çıkarabilmek ise kolay değildir. Çünkü anlamanın (resim çizmek ya da bir müzik aletini çalmak gibi) somut bir göstergesi yoktur. Anlama zihinde gerçekleşir ve soyuttur. Her ne kadar anlayış geliştiğinde beynin fiziksel ve kimyasal yapısı değişse ve bu da kısmen incelenebilse de bu değişikliğin bilişsel olarak nasıl bir yapıya ya da anlayışa tekabül ettiğini söylemek oldukça zordur. Kaldı ki eğitim ortamlarına beyindeki değişimi takip etmek için birer nörolog ve nöroloğun ihtiyacı olan cihazları yerleştirmek de günümüz şartlarında pek mümkün görünmemektedir. Diğer taraftan bunun gerekliliği ve etik olup olmadığı da tartışmaya açıktır. Bu nedenle anlamayı betimlemekten ziyade anlamanın doğasını açıklamaya yönelik teoriler geliştirilmiştir.

Alan yazınındaki teorilerden bazıları anlamayı kategoriler halinde incelerken bazıları da anlamanın gelişimini açıklamaya çalışmaktadır. Örneğin Skemp (1976; 1978) anlamayı iki kategoriye ayırırken Buxton (1978) dört kategoride ele almıştır. Diğer taraftan Pirie (1988) anlamanın kategorilere ayrılmasına nazaran anlamanın nasıl gerçekleştiğini açıklayan çalışmaların matematik eğitimine daha fazla katkı sağlayacağını ifade etmiştir. Bu nedenle Pirie ve Kieren (1989, 1994) matematiksel anlamanın gelişimi teorisini geliştirmiştir. Dubinsky (1991) ise Piaget’in bilişsel evrim teorisi üzerine APOS (Action-Eylem, Processes-Süreçler, Object-Nesne, Schema-Şema) teoriyi geliştirerek anlamanın gelişimini açıklamaya çalışmıştır. Bu teorilerin detayları ve karşılaştırmaları ana hatlarıyla ikinci bölümde ele alınacaktır. Ancak problem durumuna açıklık getirmek amacıyla ilk olarak Pirie (1988) tarafından gerekçelendirilen, sonra Pirie ve Kieren (1989, 1994) tarafından geliştirilen ve Martin (2008) tarafından eklemeler yapılarak daha işlevsel hale getirilen matematiksel anlamanın gelişimi teorisi kısaca tanıtılacaktır.

Daha önce de bahsedildiği üzere anlama soyut ve zihinsel bir süreç olduğu için doğrudan gözlemlemek mümkün değildir. Bu nedenle anlamanın gelişip gelişmediği ile ilgili göstergelere bakmak gerekmektedir. Pirie ve Kieren’e (1994) göre eylem ve söylemler, anlamanın bir göstergesi olarak kullanılabilir. Araştırmacılara göre eylemler, bireyin matematiksel alt yapısına bağlı olarak gerçekleştirdiği zihinsel veya fiziksel faaliyetlerdir. Söylem ise bireyin kavramı soyutlamasını kolaylaştırmaya yönelik kullandığı genellikle sözel olan ifadelerdir. Söylem, yapılan eylemi soyutlamayı dolayısıyla sağlamlaştırmayı

sağlamaktadır. Dolayısıyla önce eylem gerçekleşir sonra bu eylemler bir söylem aracılığıyla soyutlanır.

Pirie ve Kieren'e göre (1989, 1994) matematiksel anlama dinamik ve kendini yenileyen bir süreçtir. Araştırmacılar bu süreci açıklayabilmek için sekiz seviyeden oluşan bir model ortaya koymuşlardır. Bunlar sırasıyla ön bilgi (primitive knowing), imaj oluşturma (imaje making), imaja sahip olma (image having), özellikleri fark etme (property noticing), formelleştirme (formalising), gözlem yapma (observing), yapılandırma (structuring) ve keşfetme (inventising) seviyeleridir. Bu seviyeleri gösteren model Şekil 1.1.'de sunulmuştur.



Şekil 1.1. Anlamanın Seviyeleri (Pirie ve Kieren, 1989, s.8; Pirie ve Kieren, 1994, s.167)

Anlama seviyeleri ikinci bölümde örnekleriyle birlikte detaylı olarak tanıtılacak olsa da problem durumunun daha açık bir şekilde ortaya konulması amacıyla burada kısaca değinilmiştir. Bu modele göre ön bilgi seviyesi, herhangi bir konudaki anlama için başlangıç düzeyi konumundaki anlayışı kapsar (Pirie ve Kieren, 1989, 1994; Pirie ve Martin, 2000). İmaj oluşturma seviyesi, zihinsel bir nesne oluşabilmesi için (Pirie ve Kieren, 1994) imaj oluşturmaya yönelik eylemlerden oluşur (Pirie ve Kieren, 1989, 1994). Birey, imaja sahip olma seviyesinde spesifik örnekler gibi eylemlerden kurtulup zihinsel yapılarını diğer bir deyişle imajları kullanmaya başlar. Özellikleri fark etme seviyesindeki birey, imajlar arasındaki benzerlik ve farklılıkların farkına vararak imajlar arasındaki bağlantıları oluşturmaya başlar (Pirie ve Kieren, 1989). Birey formelleştirme

seviyesine ulaştığında bir önceki seviyede fark ettiği özellikler üzerine düşünür (Pirie ve Kieren, 1989) ve matematiksel tanım ve yöntemleri oluşturmaya başlar (Pirie ve Kieren, 1994). Gözlem yapma seviyesindeki birey ise düşünce yapısını gözlemler, bunun üzerine derinlemesine düşünür, düşüncelerini koordine eder ve bunların sonucunu teorem olarak ifade edebilir. Yapılandırma aşamasında da teoremleri kendi içlerinde organize ederek aksiyomatik sistem içerisinde ispat eder (Pirie ve Kieren, 1994). Son seviye olan keşfetme seviyesinde ise birey, mevcut anlayışını temel alarak (artık mevcut anlayış, başka kavramlar için ön bilgi durumuna gelmiştir) önceki yapılardan farklı bir yapı oluşturmaya çalışır (Pirie ve Kieren, 1989). Şekil 1.1.'deki kalın çizgiler, geri dönmeye gereksinim duymama sınırı (don't need boundaries) olarak isimlendirilmektedir. Bu eşik atlandığı zaman önceki seviyelerde yapılmış olan özel eylemlere ihtiyaç duyulmamaktadır. Ancak bu, önceki anlayışa ihtiyaç duyulmayacağı anlamına gelmemektedir. Daha soyut ve genel bir anlayışın oluştuğunu işaret etmektedir (Pirie ve Kieren, 1989).

Piere- Kieren modeli ile ileri sürülen süreç, lineer gibi görünse de aslında "dinamik" ve "kendini yenileyen" bir anlama sürecine işaret etmektedir. Teoriye göre, birey hangi anlama seviyesinde olursa olsun önceki seviyeleri ve ön bilgileri senkronize olarak kullanır. Bu durum kendini yenileme olarak ifade edilir. Dinamik nitelemesi ile bireyin anlama seviyeleri arasında ileri gidişinin yanında duruma özgü olarak eski seviyelere geri dönüşler yapabilmesi kast edilmektedir. Çünkü teoriye göre birey bulunduğu katmanda çözemediği bir problem durumuyla karşılaşması halinde önceki bilgi seviyelerine geri dönerek bilişsel eksiklerini yeniden yapılandırabilmektedir (Pirie ve Kieren, 1994; Pirie ve Martin, 2000). Seviyeler arası bu geçiş, geri katlama (folding back) olarak isimlendirilmekte olup öğrenme ortamındaki birçok faktör bu duruma sebep olabilmektedir (Martin, 2008). Teorideki bu faktörler, ilk olarak Pirie ve Kieren (1992) tarafından müdahale olarak isimlendirilmiştir. Martin (2008) ise müdahale çeşitlerini, kaynağına, amacına ve odağına göre sınıflandırmıştır.

Martin'in (2008) müdahale ve geri katlama süreçleriyle ilgili çizdiği şemaya göre müdahalenin kaynağı, kişinin kendisi, arkadaşı, öğretmeni ya da kullandığı materyal olabilir. Müdahalenin kaynağı bireyin kendisi ise, içsel süreçleri doğrultusunda geri katlama gerçekleşir. Bu nedenle kasıtlı bir müdahale söz konusudur. Diğer dış faktörler (arkadaş, öğretmen ve materyal) geri katlamaya yol açmış ise bu müdahaleler kasıtlı ya da kasıtsız olabilir. Kasıtlı olup olmadığına müdahalenin kaynağı karar verir. Burada

dikkat edilmesi gereken iki nokta vardır. Birincisi, öğretmenin sorduğu bir soru, kullandığı jest ya da bir mimik, bireyin geri katlama yapmasının yolunu açabilir. Bu durumun kasıtlı bir müdahale mi kasıtsız bir müdahale mi olduğu öğretmenin beyanına göre belli olur. İkincisi ise öğretmen ya da arkadaş, bireyin geri katlama yapması amacıyla bir eylem ya da söylem gerçekleştirebilir. Ancak bu durumun müdahale olarak nitelendirilebilmesi için bireyin geri katlama yapması gerekmektedir.

Martin'in (2008) müdahaleler ile ilgili diğer bir kategorisi ise müdahalenin odağıdır. Şayet müdahale belirli bir anlayış seviyesine dönüş için yapılıyorsa odaklanmış müdahaledir. Belirli bir anlayış seviyesine dönüş için yapılmıyorsa odaklanmamış müdahale olarak nitelendirilmektedir. Tanımdan da anlaşılacağı üzere kasıtsız müdahaleler odaklanmamış müdahalelerdir. Kasıtlı müdahaleler ise odaklanmış da olabilir odaklanmamış da olabilir. Örneğin öğretmenin sorduğu "Başka bir yolu olabilir mi?" ya da "Emin misin?" gibi sorular odaklanmamış kasıtlı müdahalelerdir.

Daha önce de belirtildiği üzere dış faktörün yaptığı eylemin müdahale olabilmesi için bireyin geri katlama yapması gerekmektedir (Martin, 2008). Geri katlama ilk olarak Pirie ve Martin'in (2000) çalışmasında ele alınmıştır. Bu çalışmada geri katlamanın bir türü olan daha iç bir seviyede toplamak (collecting) tanımlanmıştır. Birey o an için ihtiyacı olan bilginin ne olduğunun farkında ancak otomatik olarak geri çağıramıyorsa bu geri katlama türünü gerçekleştiriyor demektir. İhtiyacı olan bilgiye (kitap, defter, öğretmen, arkadaş ya da bilgisayar gibi bir kaynaktan) ulaştığında uğraştığı problem durumu için işe yarıyorsa yeni geliştirdiği anlayışla ilişkilendirerek sağlam bir zihinsel yapı inşa edebilir.

Martin (2008) daha sonra üç farklı geri katlama türü daha tanımlamıştır. Bu geri katlamaları; a) mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışmak (work at inner layer using existing understanding), b) konunun dışına çıkmak ve orada çalışmak (moving out of topic & working there) ve c) sürekliliği bozan geri katlama (causing a discontinuity) olarak isimlendirmiştir. Mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışmak türünde geri katlama yapan bir birey, bir ya da birkaç seviye atlayacak şekilde bir anlayış geliştirmiştir. Ancak bir müdahaleye bağlı olarak iç seviyelerden birine yüksek bilinçle (çünkü dış seviyede bir anlayış ile uyarılmıştır) geri döner. Birey, geri katlama yaptığı anlayış seviyesi üzerinde çalışırken bu seviyeye yeni bir şeyler eklenebilir veya

seviyedeki anlayışı sadeleşebilir ve daha estetik hale gelebilir. Böylece mevcut anlayış daha sağlam temellere oturabilir.

Martin'in (2008) tanımladığı konunun dışına çıkmak ve orada çalışmak türünde geri katlama yapan bir birey, bulunduğu seviyede ilerlemesini engelleyen bir problemle karşılaşır. Bu problemi aşmak için önceki anlama seviyelerinden birine (çoğunlukla ön bilgi seviyesine) geri katlama yapar. Ancak bu geri katlama, başka konu ya da kavramla ilgili olduğu için birey, bariz bir şekilde konunun dışına çıkar. Konunun dışına çıkması belki bu geri katlamanın görece verimsiz olduğu kanısını doğurabilir. Ancak geri dönülen konu ya da kavram ile ilgili bir çalışma yapıldığı için bu konu ya da kavram ile ilgili zihinsel yapının sağlamlaştırıldığı söylenebilir.

Sürekliliği bozan geri katlama, Martin'in (2008) tanımladığı son geri katlama türüdür. Bu geri katlama, diğerlerinde olduğu gibi, bir müdahale ile gerçekleşir. Birey önceki anlayışlarından birine geri döner. Ancak konuyla ilgisiz eylemler yapar ve bu eylemlerin asıl problem ile bağlantısını kuramaz. Bu türde diğer geri katlamaların aksine mevcut anlayışı sağlamlaştırma yoktur. Ancak geri katlama olmasa da önceki zihinsel yapılara geri dönüş olduğu için Martin (2008) bunu da bir kategori olarak sunmuştur.

Geri katlama, anlayışın gelişmesi ve sağlamlaşması için çok önemli bir zihinsel faaliyettir (Martin, 2008; Pirie ve Martin, 2000). Geri katlamanın çıktısı Martin'in (2008) oluşturduğu şemanın son bileşenidir. Birey, geri katlamayla sağlamlaştırdığı anlayışını geri katlama yapmasına neden olan problem durumuna uygulayabiliyorsa geri katlamanın çıktısı etkilidir. Aksine uygulayamıyorsa, geri katlamanın çıktısı etkisizdir.

Geri katlama ve anlamanın seviyeleri göz önünde bulundurulduğu zaman anlamanın lineer bir sürecinin olmadığı (diğer bir deyişle seviyeler arası ileri geçişler ve geri dönüşlerin olduğu) yönündeki fikir daha da netleşmektedir. Bu noktada dikkat edilmesi gereken önemli bir husus daha ortaya çıkmaktadır. Anlamanın sekiz seviyeye ayrılmış olması, anlamanın gelişiminde her seviyeye tanımlı faaliyet sayısının ve bu faaliyetlerin süresinin eşit olduğu gibi bir yanılgı ortaya çıkması muhtemeldir. Nitekim alan yazınındaki çalışmalar (Argat, 2012; Codes, Astudillo, Martin ve Pérez, 2013; Gülkılık, 2013; Gülkılık, Uğurlu ve Yürük, 2015; LaCroix, 2002; Martin ve Pirie, 2003; Pirie, 2002; Pirie, Martin ve Kieren, 1996) anlamanın gelişiminde bu seviyelerdeki faaliyet sayısının farklı ağırlıklarının olduğunu ifade etmektedir.

Özetle Martin (2008) geri katlamanın sebebi (müdahale), türü ve çıktısı başlıklarını detaylandırmıştır. Böylece matematiksel anlamanın gelişimi teorisi, anlama sürecinin nasıl geliştiğinin ve bu süreci etkileyen içsel ve dışsal faktörlerin neler olabileceğinin incelenmesine fırsat sunan bir modele dönüşmüştür. Teori, matematiksel anlamanın gelişimini bütünsel olarak incelerken bu sürecin nasıl geliştiğinin betimlenebileceği bir haritalandırma yöntemi de sunmaktadır. Bu haritalandırma yöntemi ile ilgili olarak Pirie ve Kieren (1994, s.182) "öğrencilerin anlamalarının, *gözlendiği kadarıyla,* diyagramatik bir formda bir 'haritasını' oluşturmayı amaçlamaktayız" demektedir. Burada dikkat edilmesi gereken husus söz konusu haritalandırma yönteminin anlamanın gelişimini açıklamaya çalışmasıdır. Gelişen anlama sürecinde zihinde ne olduğunu bilmek ise mevcut koşullarda imkânsızdır. Bu haritalandırma yönteminde Şekil 1.1.'deki iç içe geçmiş dairelerden oluşan model üzerinde çizgiler ile anlamanın gelişimi resmedilmeye çalışılmaktadır. Bu dairesel model ile anlamanın gelişimini açıklamaya çalışan araştırmalar (Argat, 2012; Martin ve LaCorix, 2008; Martin, 2008; Nillas, 2010; Pirie ve Martin, 2000; Şengül ve Göktepe-Yıldız, 2016) bulunmakla birlikte anlamanın seviyelerini ve üzerinde çalışılan konuları gösteren tablo şeklinde modeller de geliştirilmiştir (Gulkılık, 2016; Gülkılık, 2013). Haritalandırma yöntemi, müdahale ve geri katlama döngüleri ile birlikte bu teori, araştırmacılara ve öğretmenlere matematiksel anlamanın öğrenme ortamlarında gelişimini, destekleme gözlemleme ve sınıflandırma için kullanabilecekleri güçlü bir araç olma noktasına taşınmıştır.

Teorinin matematiksel anlamanın gelişimini açıklamak için güçlü bir araç haline gelmesi, matematik konularının veya kavramlarının anlaşılması için bir reçete oluşturabileceği anlamına gelmemektedir. Nitekim Pirie ve Kieren (1992) anlamanın bireye özgü olmasını gerekçe göstererek herkes için geçerli bir reçetenin sunulmasının imkânsızlığına vurgu yapmaktadır. Buna ek olarak matematikteki konu ya da kavramların anlaşılması pek de kolay değildir. Çünkü matematiksel kavramlar (doğası gereği) soyut ve birbirleriyle ilişkili bir yapıya sahiptir.

Pirie ve Kieren (1989) matematiksel kavramların ilişkili olma durumunu, bir konu bağlamında olgunluğa erişmiş bir anlayışın başka bir konuya temel, diğer bir deyişle ön bilgi teşkil etmesiyle açıklamaktadır. Dolayısıyla yeni bir konu için gerekli ön bilgilerin yeteri seviyede olması, anlamanın sağlıklı bir şekilde gelişmesinin ön şartıdır. Bu öncelik sonralık ilişkisi, sadece anlamanın gelişiminde bulunmamaktadır. Matematiksel bilginin

tarihsel gelişim sürecinde de bu ilişki vardır. Örneğin Descartes'in kartezyen koordinatları bulmasıyla fonksiyonların grafikleri çizilmeye başlanmıştır. Ardından Fermat, bu grafiklere bir noktada çizilen teğet ile o noktadaki limit değerini incelemiştir. Fermat'ın yarım bıraktığı bu çalışmalar, Newton ve Leibniz tarafından eş zamanlı olarak farklı notasyonlarla türev ismiyle olgunlaştırılmıştır (Baki, 2014). Bu durumda Descartes'in kartezyen koordinatları üretmesi ve Fermat'ın fonksiyona çizilen teğet ile ilgili çalışmaları, türev kavramının ortaya çıkabilmesi için bir nevi ön bilgi oluşturmuştur.

Matematik tarihi ile öğretim programlarında ele alınan matematik konuları arasında, kavramların öncelik sonralık ilişkisine dayalı bir paralellik vardır. Lise son sınıfa kadar türev konusuna temel teşkil eden kavramlar öğretilmektedir. Son sınıfa gelindiğinde ise türev kavramı ele alınmaktadır (MEB, 2018a). Dolayısıyla türev kavramını lise son sınıfta anlamaya çalışan bir birey,1600'lü yıllara kadar üretilmiş matematik bilgisinin büyük bir bölümüne ön bilgi olarak sahip olup Newton ve Leibniz'in sonsuz küçüklük fikrini anlamaya çalışıyor demektir. Bu süreçte de bireylerin zorlanmaları olasıdır. Nitekim Bingölbali (2008) türevi öğrenmek için ön bilgi olarak bulunması gereken (fonksiyon, limit, trigonometri, geometri, değişim oranı, hız gibi) kavramların çokluğuna işaret etmektedir. Ön bilgi konumundaki kavramları anlamak, kendine has zorluklar barındırırken türevi anlamak için bu kavramları iyi bilmek ve bunları türev konusuyla ilişkilendirmek gerekmektedir.

Türev kavramını öğrenmek başlı başına bir zorluk teşkil ederken (Asiala, Cottrill, Dubinsky ve Schwingendorf, 1997; Çetin, Dane ve Bekdemir, 2012; Orton, 1983; Tatar, Okur ve Tuna, 2008) bu çalışmanın odaklandığı alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinin kurulmasında yaşanılan zorluğun (Mamolo ve Zazkis, 2012) doğal olduğu söylenebilir. Bu zorluğun ana sebeplerinden biri, türev bilgisinin zayıf olması olabilir. Ancak Mamolo ve Zazkis'in (2012) bu zorluğu raporladığı çalışma grubu, analiz derslerini almış ve başarıyla tamamlamış kişilerden oluşmaktadır. Bu durumda alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini kurma konusunda yaşanılan zorlukların olası başka sebebi, Zazkis ve Mamolo'nun (2011) işaret ettiği üzere, bu konular öğretilirken kullanılan geleneksel formüller olabilir.

Genel olarak alan ve çevre kavramları öğretilirken kenar uzunluğuna bağlı fonksiyonlar üzerinde çalışılır. Örneğin 1-8. sınıflar için yayınlanan Matematik Dersi Öğretim

Programı'nda (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018b, s.47) "Kare ve dikdörtgenin çevre uzunlukları ile kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi açıklar" kazanımı bulunmaktadır. Aynı kazanımın açıklamasında ise "Bir karenin çevre uzunluğunun, bir kenarın uzunluğunun dört katı olduğu buldurulur" ifadesine yer verilmektedir. Benzer durum 9-12. sınıflar için yayınlanan Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programında (MEB, 2018a) bulunmaktadır. Örneğin üçgenin alan formülü taban uzunluğu ve yükseklik bağımsız değişkenlerine göre oluşturulmasına yönelik kazanım bulunmaktadır. Zazkis ve Mamolo (2011) kenar bağımsız değişkenine göre alan ve çevre fonksiyonlarının kurulmasını, geleneksel olarak değerlendirmektedirler.

Geleneksel formüllere bağlı kalmak, bireylerin alternatif yol ve yöntemler kullanamamasına ve böylece rutin olmayan problem durumlarına çözüm üretememesine yol açabilmektedir (Battista ve Clements, 1996; Dağlı ve Peker, 2012; Esen ve Çakıroğlu, 2012; Mamolo ve Zazkis, 2012). Örneğin Esen ve Çakıroğlu (2012) öğretmen adaylarının 1x1x2 boyutlarında birim küpleri kullanarak bir prizmanın hacmini hesaplamakta zorlandığını raporlamışlardır.

Alan ve çevre arasında türev ilişkisini kurmada yaşanılan zorluklar, geleneksel formüllere bağlı kalmanın kısıtlayıcı olmasına verilebilecek bir diğer örnektir. Düzgün geometrik şekillerde türev ilişkisini kurabilmek için ağırlık merkezinin kenarına dik uzaklığı bağımsız değişkenine göre alan ve çevre fonksiyonları oluşturmak gerekmektedir. Ancak geleneksel formüllerde çoğunlukla kenar uzunluğu bağımsız değişkeni kullanıldığı için Mamolo ve Zazkis'in (2012) çalışmasındaki zorluğa benzer zorlukların ortaya çıkması muhtemeldir.

Matematik dersi öğretim programlarında (MEB, 2018a, 2018b) verilen kazanım modellemeleri göz önüne alındığı geleneksel modellemeler ile yetiştirilen bireylerin daha sonraki yıllarda alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini kurmada zorluk yaşayacağı açıktır. Üstelik düzgün geometrik şekillerde türev ilişkisini kurabilmek için ağırlık merkezinin kenarına dik uzaklığı bağımsız değişkenine göre alan ve çevre fonksiyonlarını oluşturmak gerektirmektedir. Mamolo ve Zazkis'in (2012) çalışmasında da bu zorlukların ortaya çıkacağı ifade edilmektedir.

Yukarıda sıralanan olası sebeplerden (türev kavramının zorluğu ve geleneksel formüllere bağlı kalmak) dolayı çevre ve alan arasındaki ilişkinin kurulabilmesi için kuvvetli bir

kavramsal temele ihtiyaç olduğu söylenebilir. Alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinin kavramsal temelleri, ikinci bölümde detaylı olarak sunulacak olmasına rağmen (problem durumuna açıklık getirebilmek adına) bu bölümde kısaca ele alınacaktır. Dairede yarıçap bağımsız değişkenine göre oluşturulan alan fonksiyonunun türevi, dairenin çevre fonksiyonunu vermektedir. Eşkenar üçgen, kare ve diğer düzgün çokgenlerde de benzer bir türev ilişkisi bulunmaktadır. Bu ilişki, "ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı" bağımsız değişkeni ile alan ve çevre fonksiyonları oluşturularak kurulabilir. Türev ilişkisi, sadece düzlemsel düzgün şekillerin alan ve çevre fonksiyonları arasında yoktur. Aynı zamanda düzgün çok yüzlülerin hacimleri ile yüzey alanları arasında da, uygun bağımsız değişken (ağırlık merkezinin yüzeye dik uzaklığı) seçimiyle kurulabilmektedir. Kürede ise yarıçap bağımsız değişkenine göre hacmin türevi, kürenin yüzey alanını vermektedir.

Çember ve küredeki formüller genel olarak yarıçap bağımsız değişkenine göre oluşturulmaktadır. Bu durumda türev ilişkisi kolaylıkla görülebilmektedir. Ancak daha önceden de belirtildiği üzere düzgün geometrik şekil ve cisimlerin alan ve çevre fonksiyonları geleneksel olarak kenar uzunluğuna bağlı olarak oluşturulduğu için türev ilişkisini kurmak zorlaşmaktadır. Çünkü düzlemsel şekillerde türev ilişkisi oluşturulurken seçilmesi gereken bağımsız değişken ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığıdır. Benzer şekilde düzgün çok yüzlülerde ise bağımsız değişken ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığıdır. Mamolo ve Zazkis'in (2012) çalışması, bu tezi destekler niteliktedir.

Alan ve çevre arasındaki türev ilişkisi, ilk olarak Zazkis ve Mamolo'nun (2011) sınıf içi gözlem yaptıkları bir çalışmada tesadüfi olarak bulunmuştur. Mamolo ve Zazkis (2012) bu ilişkinin öğrenciler tarafından kurulabilme durumunu incelemişlerdir. Son olarak Zazkis, Sinitsky ve Leikin'in (2013) alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini matematiksel olarak ispatlamaya çalışmıştır. Düzgün çokgenler ile ilgili ispatlarda bağımsız değişken olarak "iç teğet çemberinin yarıçapı" ifadesi kullanılmıştır. Ancak bu kullanım düzgün çok yüzlülerde kısıtlamaya (iç teğet çember küresi gibi çok da matematiksel olmayan bir kullanımına) sebep olmuştur. Bu çalışmada söz konusu kısıtlılığı aşmak için bağımsız değişken olarak "çokgenlerde ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı" kullanılmıştır. Bu durum, bu çalışmanın bir parçası olarak, Durmaz ve Şengül'ün (2018) matematik kongresinde sundukları sözlü bildiride ele alınmıştır. Alan ve çevre arasındaki türev ilişkisine yönelik ispatlar, detaylı olarak ikinci bölümde bulunmaktadır.

Alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini kurmak, çok sayıda kavramın aynı anda kullanılmasını sağlar. Böylece bu kavramlar arasında bağlantılar oluşturulur. Matematiksel kavramlar arası ilişkileri kurmak matematik eğitimiyle geliştirilmesi hedeflenen önemli becerilerden biri olan ilişkilendirme becerisi ile ilgilidir. İlişkilendirme becerisi, matematik ile matematiği, diğer disiplinler ile matematiği, günlük hayat ile matematiği ilişkilendirebilmek şeklinde tanımlanmaktadır (Bingölbali ve Çoşkun, 2016; MEB, 2009; NCTM, 2000). Dolayısıyla alan ve çevre arasındaki ilişkinin birey tarafından kurulmasıyla ilişkilendirme becerisinin gelişebileceği söylenilebilir. Diğer taraftan alan ve çevre kavramları hem geometri hem de ölçme öğrenme alanlarının içinde bulunmaktadır. Ölçme öğrenme alanı da Altun'un (2010) dediği gibi matematiğin günlük hayatla ilişkilendirilme potansiyeli en yüksek öğrenme alanıdır. Ayrıca alan ve çevre hesaplanarak geometrik şekiller daha anlaşılabilir hale gelmektedir (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013). Durum böyle iken alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinin anlaşılmasının incelenmesi araştırmaya değer bir konudur.

Matematik bölümü öğrencilerinin alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini kurabilme düzeyini araştıran Mamolo ve Zazkis'in (2012) çalışmasında otuz iki kişilik katılımcı grubunda sadece bir kişinin bu ilişkiyi oluşturabildiği tespit edilmiştir. Söz konusu araştırmada karedeki türev ilişkisi kendilerine izah edilen katılımcıların sadece yarısı bu ilişkinin varlığına ikna olabilmiştir. Literatür taramasında bu ilişkinin öğrenciler tarafından kurulmasında zorluğu aşmaya yönelik herhangi bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Yapılan çalışmalar incelendiğinde öğrencilerin türev ilişkisini anlamlandırabilmesi için

a) hem alan ve çevreye ilişkin formüllerin birer fonksiyon olduğu farkındalığının (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013) oluşması,

b) hem de Zazkis ve Mamolo'nun (2011) deyimiyle (kenar uzunluğuna bağlı) geleneksel formüllerin dışına çıkarak Durmaz ve Şengül'ün (2018) tanımladığı değişkene göre bu fonksiyonların oluşturulmasının önemi ortaya çıkmaktadır. Diğer taraftan anlamanın formelleştirme seviyesinde ortaya çıkan ortak yol ve yöntem (Pirie ve Kieren, 1994) olarak nitelendirilebilecek (hem kenar uzunluğuna bağlı hem de alışılagelmişin dışına çıkıp başka değişkenlere bağlı olarak oluşturulan) bu fonksiyonların öğrenenler tarafından oluşturulabilmesi için fırsat sunulmasının önemi literatür tarafından vurgulanmaktadır (Altun, 2010; Akkuş, Akkaş ve Yıldırım, 2018; Küçük ve Demir, 2009;

Pesen, 2008; Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013). Bu durumda hem alan ve çevre fonksiyonlarının üretilmesi hem de bunlar arasında türev bağlantısının oluşturulması, kavramlar arası ilişkilendirme becerisinin ve yüksek anlama düzeyinin gelişimi için önemlidir. Bu nedenle "alan ve çevre arasındaki türev ilişkisi bağlamında,

- Pirie–Kieren (1989, 1994) teorisi bağlamında açıklanan her bir anlama katmanında öğrencilerin gösterdikleri faaliyet çeşitlerine ne şekilde ve ne kadar süre ile yer verilirse ve
- Martin'in (2008) çalışması ile Pirie ve Kieren'in (1989, 1994) teorisine kattığı müdahale ve geri katlama süreçleri göz önüne alındığında, bu müdahale çeşitlerinden hangileri ile öğrencilerin anlama katmanlarındaki faaliyetleri yönlendirilirse anlamanın gelişimi teşvik edilebilir?" sorularına yanıt aramanın Mamolo ve Zazkis'in (2012) raporladığı, bireyler tarafından alan ve çevre arasındaki arasındaki ilişki kurulurken yaşanılan zorluğun aşılmasına yardımcı olabileceği düşüncesinden hareketle çalışma planlanmıştır. Çalışma Pirie ve Kieren'in (1989, 1994) matematiksel anlamanın gelişimi teorisi ve Martin'in (2008) müdahale çeşitleri ve geri katlama süreçleri teorik çerçeveleri kullanılarak yürütülmüştür.

1.2. Araştırmanın Amacı

Problem durumunda bahsedildiği üzere alan ve çevre kavramları matematiğin günlük hayata bakan önemli pencereleridir. Newton ve Leibniz gibi büyük matematikçilerin olgunlaştırdığı anlık değişim oranı diğer bir deyişle türev kavramı (Baki, 2014; Çetinkaya, Erbaş ve Alaca, 2013) ise alan ve çevre arasında kuvvetli bir ilişki oluşturmaktadır. Bu ilişkinin öğretimi için bireylerin bu ilişkiyi anlamlandırma süreçlerinin ve bu süreçte etkili olan içsel ve dışsal faktörlerin ortaya çıkarılması önem arz etmektedir. Bu noktada "öğretmen adaylarının alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini anlamlandırma sürecinin ve bu süreçte odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalelerinin rolünün Pirie ve Kieren'in teorisine göre incelenmesi" amacıyla bu çalışma yürütülmüştür.

Araştırmanın amacına yönelik "Öğretmen adayları alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini nasıl anlamlandırmaktadırlar ve bu süreçte odaklanmış kasıtlı öğretmen

müdahalelerinin rolü nedir?" sorusu araştırma problemi olarak belirlenmiştir. Bu problem cümlesi kapsamında aşağıdaki alt problemler araştırılmıştır.

1. Öğretmen adaylarının alan ve çevre kavramları arasındaki türev ilişkisini anlamlandırma sürecinde izledikleri yollar (yaptıkları faaliyetler) Pirie-Kieren Teorisine göre nasıl gelişmektedir?
2. Odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahaleleri ve buna bağlı olarak gelişen geri katlamalar, öğretmen adaylarının alan ve çevre kavramları arasındaki türev ilişkisini anlamlandırma sürecinde nasıl rol oynamaktadır?
3. Öğretmen adayları, alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini yapılandırırken anlama seviyelerinde toplam faaliyet süresi ne kadardır?
4. Bu süreç sonunda Pirie ve Kieren Modeline göre öğretmen adaylarının zihin haritaları nasıl şekillenmektedir?

Bu çalışmada anlamanın gelişimini tespit edebilmek için nitel araştırma desenlerinden biri olan fenomenografi kullanılmıştır. Fenomenografi, bireylerin anlama, düşünme ve öğrenme gibi öznel zihinsel süreçlerini incelemek ve bu süreçlerdeki farklılıkları ortaya çıkarmak için geliştirilen bir araştırma desenidir. Fenomenografi başka bir alanda geliştirilip de eğitim alanına uyarlanmış bir araştırma yöntemi değildir. Fenomenografik araştırmaların ürettiği bilgi, eğitim ile ilgili sorulara yanıt vermesi yönüyle önemlidir. Çünkü fenomenografik araştırmalarda, öğrencilerin algılarının öğretmen tarafından nasıl değerlendirileceği ve öğrencilerin daha iyi anlayışlara nasıl ulaşabileceğine yanıt aranmaktadır (Marton, 1986).

1.3. Araştırmanın Önemi

Bireylerin matematiksel kavramları öğrenirken ya da bir problemi çözerken izledikleri yolları ortaya çıkarmak, matematik eğitimcilerine bu kavram ve problemleri derslerinde ele alırken yardımcı olabilir (Asiala, Cottrill, Dubinsky ve Schwingendorf, 1997). Bu amaçla Pirie ve Kieren'in (1989, 1994) matematiksel anlamanın gelişimi teorisini kullanarak çeşitli konularda anlamanın gelişimini inceleyen yurt dışında yapılan çalışmalar bulunmaktadır (Codes, Astudillo, Martin ve Pérez, 2013; Martin, 2008; Nillas, 2010; Pirie ve Kieren, 1989, 1992, 1994; Pirie ve Martin, 2000; Thom ve Pirie, 2006). Ülkemizde de bu teoriye göre yürütülen çalışmalar gittikçe artmaktadır (Argat, 2012;

Gökalp, 2012; Gulkilik, 2016; Gülkılık, 2013; Gülkılık, Uğurlu ve Yürük, 2015; Kaba ve Şengül, 2015; Katrancı, 2014; Şengül ve Kaba, 2016; Şengül, Kaba ve Erdoğan, 2017). Bu artışa dayanarak matematiksel anlamanın araştırılmasının matematik eğitimine ışık tutmak gibi bir öneminin olduğu söylenebilir. Pirie ve Kieren'in geliştirdiği matematiksel anlamanın gelişimini teorik çatı kabul eden bu çalışma ile hem ulusal hem de uluslararası literatüre katkı sağlanacağı düşünülmektedir.

Pirie ve Kieren (1989, 1994) teorik çerçevesi doğrultusunda matematiksel anlamanın gelişimini inceleyen araştırmaların bazılarında yalnızca anlama sürecinde öğrencilerin çıkabildikleri anlama seviyeleri ile bu seviyelerde gösterdikleri faaliyet sayıları karşılaştırılmıştır (Argat, 2012; Codes, Astudillo, Martin ve Pérez, 2013; Gülkılık, 2013; Gülkılık, Uğurlu ve Yürük, 2015; Martin ve Pirie, 2003; Pirie; 2002). Bu araştırmaların hiçbirinde öğrencilerin hangi anlama seviyesinde ne kadar süre ile faaliyet gösterdiğine yönelik bir analiz yapılmamıştır. Oysa ki öğrenme ortamlarında anlamanın gelişimini destekleyebilmek için hangi anlama seviyesine ne kadar süre ayrılması gerekliliği zamanın etkili kullanılması bağlamında önem arz etmektedir. Bu nedenle yürütülen bu çalışma ile anlamanın seviyelerinde faaliyet gösterme süresinin araştırılmasının literatüre katkı sağlayacağı söylenebilir.

Akpınar ve Aydın'ın (2007) yaptığı araştırmaya göre öğrenci fikirlerini önemseyen ve bu fikirleri ortaya çıkarmak için öğretmenlerin rehberlik (yerinde müdahale) yaptığı yapılandırmacı öğrenme ortamları öğretmenler tarafından olumlu bulunmaktadır. Ancak öğretmenler, zaman kısıtlılığı gibi gerekçelerle bilginin kaynağının öğretmen olduğu geleneksel öğrenme ortamlarını tercih edebilmektedirler (Temizöz ve Özgün Koca, 2008). Bununla birlikte Duatepe Paksu ve Akkuş'un (2007) yaptığı sınıf içi gözleme göre öğretmenler, ders süresinin yüzde altmışlık bir bölümünü ders aktivitelerine ayırmaktadırlar. Bu durumda öğretmenlerin sınıf içi dinamikleri yönlendirme becerileri sorgulanabilir. Öğretmenin sınıf içi dinamikleri yönlendirebilmesi için pedegojik alan bilgisinin bir bileşeni olan öğrencinin anlamasına ilişkin yeterliliğin (Park ve Oliver, 2008) gelişmiş olması önem arz etmektedir. Bu noktada öğretmen hangi tür sorular ile kasıtlı müdahaleler yaparsa öğrenen bireylerin anlamalarının gelişimlerinin önündeki engeller aşılır sorusu önem kazanmaktadır. Bu çalışmanın kasıtlı öğretmen müdahalelerinin (öğretmen adaylarının alan ve çevre arasındaki türev ilişkisi özelinde)

anlamanın gelişimindeki rolünü araştırması yönüyle literatüre katkı sağlayacağı umulmaktadır.

Herhangi bir uyaranın müdahale olabilmesi, geri katlama tetiklemesi gerekmektedir (Martin, 2008). Dolayısıyla anlamanın gelişiminde önemli yeri olan müdahale ve geri katlamanın eş zamanlı olarak değerlendirilmesi gerekmektedir. Müdahaleye bağlı olarak gelişen geri katlamanın önemine Pirie ve Kieren (1992) işaret etmiştir ancak detaylandırmamıştır. Martin (2008) müdahale ve geri katlama sürecinin şemasını çıkararak Pirie ve Kieren'in (1989, 1994) teorisini daha sağlam temeller üzerine oturmuştur. Martin'in (2008) müdahale-geri katlama döngülerine ilişkin şemayı ortaya koymasından önce yapılan çalışmalar (Borgen ve Manu, 2002; Pirie ve Kieren, 1992, 1994; Pirie, Martin ve Kieren, 1996; Thom ve Pirie, 2006) anlamanın gelişiminde geri katlamanın önemine işaret etmektedir. Aynı şekilde güncel çalışmaların büyük bir çoğunluğu (Gülkılık, 2013; Gülkılık, Uğurlu ve Yürük, 2015) geri katlamanın önemine vurgu yapmaktadır. Söz konusu çalışmalar, her ne kadar Martin'in (2008) tanımladığı geri katlama kategorilerine göre anlamanın gelişimini incelemeseler de tarif ettikleri geri katlama şeklinin mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma olduğu sonucu ortaya çıkmaktadır. Martin'in (2008) tanımladığı müdahale-geri katlama döngüsü bileşenlerinin anlamanın gelişimindeki rolünü inceleyen çalışmalar (Mabotja, Chuene, Maoto ve Kibirige, 2018) ise azınlıktadır. Bu çalışmanın Martin'in (2008) ortaya koyduğu şemadaki müdahale ve müdahaleye bağlı olarak gelişen geri katlama döngülerindeki (materyal ve arkadaş müdahalesi dışındaki) bileşenlerin anlamanın gelişimindeki rolünü incelemesi yönüyle literatüre katkı sağlayacağı beklenmektedir.

Matematiksel anlamanın gelişimi teorisinin önemli özelliklerinden biri anlamanın gelişimi ile ilgili bir harita sunabilmesidir (Pirie ve Kieren, 1994). Yapılan çalışmalar (Argat, 2012; Codes, Astudillo, Martin ve Pérez, 2013; Gökalp, 2012; Gülkılık, Uğurlu ve Yürük, 2015; Martin ve LaCorix, 2008; Martin, 2008; Nillas, 2010; Pirie ve Martin, 2000; Sengul ve Goktepe-Yildiz, 2016) çoğunlukla Şekil 1.1.'deki modeli kullanmaktadır. Bazı çalışmalar (Gülkılık, 2013; Gulkılık, 2016) ise konu ve anlama seviyesini gösteren tablo şeklinde haritalandırma yapmaktadır. Bu çalışmada anlamanın seviyeleri, müdahale-geri katlama döngüleri ve zamanı bütünleşik olarak gösterebilecek bir haritalandırma yönteminin ortaya konulması bakımından literatüre önemli bir katkı sunacağı düşünülmektedir.

Akkuş (2013) araştırmasında, öğretmenlerin genel olarak bilginin kaynağı olma eğiliminde olduğunu gözlemlemiştir. Bilgiyi doğrudan verme eğiliminin olduğu öğrenme ortamlarında, formelleştirme ve sonrasındaki anlama seviyelerinde ortaya çıkan bilgiler doğrudan öğrenciye sunulur. Mamolo ve Zazkis'in (2012) alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini matematik bölümü öğrencilerine doğrudan sunması da bu açıdan incelenebilir. Mamolo ve Zazkis'in (2012) ilişkinin ispatını doğrudan sunmasının başlangıç noktası teorem olarak değerlendirilirse gözlem yapma, ilişkinin ispat edilmesi yapılandırma, bu süreçte alan ve çevre hesabıyla ilgili yol-yöntem anlamına gelen fonksiyonların kullanılması formelleştirme seviyesindeki eylemler (Pirie ve Kieren, 1994) olarak değerlendirilebilir. Bu seviyelerdeki öğretmen tarafından oluşturulan anlama faaliyetlerinin öğrencilere sunulması, öğrencilerin bu faaliyetleri içselleştirmesini sağlamayabilir. Çünkü bu durumda, söz konusu faaliyetlerde ortaya çıkan anlamalara temel teşkil edecek imaj oluşturma, imaja sahip olma ve özellikleri fark etme gibi seviyeler eksik kalacaktır. Oysa anlamanın gelişiminde ortaya çıkan ihtiyaçlara ve karşılaşılan problemlere istinaden eksik ya da hatalı anlayışların düzeltilmesi için imaj oluşturma gibi seviyelerdeki faaliyetler önemlidir (Argat, 2012; Codes, Astudillo, Martin ve Pérez, 2013; Gülkılık, 2013; Gülkılık, Uğurlu ve Yürük, 2015; LaCroix, 2002; Martin ve Pirie, 2003; Pirie; 2002). Bu araştırmada Mamolo ve Zazkis'in (2012) yaptığının aksine katılımcı öğretmen adaylarına bu ilişkiyi en baştan başlayarak kurma ve takıldıkları yerlerde müdahaleler ile geri katlama yapma olanağı sağlanmaya çalışılmıştır. Böylece Mamolo ve Zazkis'in (2012) alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinin anlaşılmasında karşılaşılan zorluğa çözüm önerisi geliştirilmeye çalışılmıştır. Ayrıca bu çalışma ile katılımcı öğretmen adaylarına alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini ön bilgilerden hareketle anlamlandırma ve üretme deneyimi yaşatılarak onların gelecekteki öğrencilerine (bilgiyi doğrudan vermek yerine) bilgi üretme sürecinde rehberlik yapmalarını sağlayacak tutum ve becerileri geliştirmesi beklenmektedir. Nitekim Akkuş, Akkaş ve Yıldırım (2018) bu durumu aşmak için öğretmen adaylarının öğrenme fırsatı oluşturabilmeleri için bilgi ve anlayışlarını inşa edebilecekleri ve kavramlar arası ilişkileri kurabilecekleri ortamları deneyimlemelerini önermektedir. Benzer şekilde Pirie ve Kieren (2000) anlamanın gelişimini teşvik eden ortamlar ile öğrencilerin geri katlama yaparak matematiksel anlamalarını sağlamlaştırma becerisinin geliştirilebileceğini iddia etmektedir. Ancak yapılan literatür taramasında bu becerinin gelişimini değerlendiren

herhangi bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Bu çalışma geniş zamana yayılması açısından Pirie ve Kieren'in (2000) bu tezini test etme fırsatı sunmaktadır. Diğer taraftan bu tez doğru ise katılımcı öğretmen adaylarının ileride karşılaşabilecekleri durumlara yönelik geri katlama yapma becerisinin geliştirilmesi, çalışmanın bir diğer katkısını ortaya çıkarmaktadır. Son olarak alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini kurarken birçok bilgi arasında bağlantılar oluşturacakları için katılımcıların matematik eğitimi açısından önemli olan (Bingölbali ve Çoşkun, 2016; MEB, 2009; NCTM, 2000) ilişkilendirme becerilerinin gelişmesi beklenilmektedir.

Alan ve çevre arasındaki türev ilişkisi Zazkis ve Mamolo'nun (2011) sınıf içi gözlemlerinde, bir öğrencinin dikkatini çekmesiyle önemli hale gelmiştir. Bu çalışmada, karede bu ilişki ispatlanmaya çalışılırken "kenar uzunluğunun yarısı" gibi bir bağımsız değişken kullanılmıştır. Mamolo ve Zazkis'in (2012) bu ilişkiyi sunup matematik bölümü öğrencilerinin kabul edip etmediğini araştırdığı çalışmada ise karede ilişki izah edilirken "yarıçap ya da kenarın yarısı" bağımsız değişkeni kullanılmıştır. Son olarak Zazkis, Sinitsky ve Leikin'in (2013) düzgün çokgenlerdeki alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini ispatlamaya çalıştıkları araştırmada, bağımsız değişken olarak "iç teğet çemberinin yarıçapı" kullanılmıştır. Genel olarak her üç çalışmada da çember analojisine (benzetme) dayalı bir tartışma yürütülmüştür. Ancak değişkenin bu şekilde isimlendirilmesi, düzgün çok yüzlülerde (iç teğet çember küresi gibi) kısıtlamaya yol açabilir (Durmaz ve Şengül, 2018). Bu noktadan hareketle Durmaz ve Şengül (2018) matematikçilerin katıldığı bir kongrede, alan ve çevre arasındaki türev ilişkisi için "ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı" bağımsız değişkeni seçimini sözlü bildiri ile tartışmışlardır. Bu çalışmanın ikinci bölümünde söz konusu bağımsız değişkene göre ispatlar detaylarıyla ele alınmıştır. Bu çalışmanın Zazkis, Sinitsky ve Leikin'in (2013) önerdiği bağımsız değişkenden daha işlevsel olan "ağırlık merkezinin kenara (düzgün çok yüzlülerde yüzeye) dik uzaklığı" bağımsız değişkenine göre türev ilişkisini kurması yönüyle alan yazınına katkı sunakcaktır.

Çokgenlerin alan ve çevrelerini hesaplama öğretilirken genel olarak kenar uzunluğuna bağlı formüller ile çalışılır. Zazkis ve Mamolo (2011) bu formül kullanımını, "geleneksel" olarak nitelemektedir. Bunun sonucu olarak da öğrencilerin, alternatif yol ve yöntem kullanımı gerektiren problem durumlarına çözüm üretemediğini ortaya çıkaran çalışmalar (Battista ve Clements, 1996; Dağlı ve Peker, 2012; Esen ve Çakıroğlu, 2012;

Mamolo ve Zazkis, 2012) bulunmaktadır. Oysa alan ve çevre hesaplamak için oldukça farklı yöntemler geliştirmek mümkündür. Bu çalışma, geleneksel formüllerin dışına çıkıp alan ve çevre hesabında "ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı" bağımsız değişkenine göre fonksiyonlar önermektedir. Bu çalışmanın geleneksel formüllerin dışına çıkarak alan ve çevre fonksiyonları önermesi yönüyle literatüre katkı sağlayacağına inanılmaktadır. Ayrıca gelenekselin dışına çıkma perspektifinin matematiğin farklı konularında da göz önüne alınabilmesi için yol gösterici olacağı umulmaktadır.

Alan ve çevre formüllerinin birer fonksiyon belirtmesi (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013) çoğunlukla göz ardı edilen bir durumdur. Çünkü alan ve çevre kavramlarının öğretimine ilkokulda başlanılır. Fonksiyon kavramı ise ortaöğretimde öğretilir. Bu durumun sonucu olarak da bu formüllerin birer fonksiyon olarak görülmemesi muhtemeldir. Alan ve çevre formüllerini birer fonksiyon olarak vurgulaması yönüyle bu çalışmanın öğrenme ortamlarında sorgulayıcı öğrenme sürecinin yakalanabilmesinde referans teşkil edeceği söylenebilir.

Eğitim sürecinde ortaya çıkan (öğrenme, anlama ve düşünme nasıl gerçekleşiyor ve bireylere göre nasıl bir farklılık gösteriyor gibi) sorulara cevap arayan fenomenografik araştırmaların sonuçları, bu soruları cevaplaması yönüyle önemlidir (Marton, 1986). Bu araştırmada öğretmen adaylarının alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini anlama süreçleri, Pirie ve Kieren'in geliştirdiği matematiksel anlamanın gelişimi teorisine göre incelenmiştir. Fenomenografik araştırmaların eğitim açısından önemli sonuçlar ortaya çıkarması (Marton, 1982) yönüyle de bu araştırmanın matematik eğitimi literatürüne katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Ayrıca anlamanın gelişimi destekleyen öğrenme ortamları oluşturmak için bir model olması yönüyle de bu çalışmanın önem arz ettiği düşünülmektedir.

1.4. Sınırlılıklar

Araştırma; a) çalışma grubundaki (2015-2016 Eğitim Öğretim Yılı Bahar Döneminde bir devlet üniversitesinde öğrenimlerine üçüncü sınıfta devam eden) üç öğretmen adayı ve b) bu öğretmen adayları ile yapılan dört klinik mülakat ile sınırlıdır. Bu klinik mülakatlarda sırasıyla dairede, karede, üçgende ve düzgün çokgenlerde alan ve çevre arasındaki türev ilişkisine odaklanılmıştır. Klinik mülakatların amacı anlamanın gelişimi ortaya çıkarmak

olduğu için odaklanmış ya da odaklanmamış kasıtlı öğretmen müdahaleleriyle tasarlanmıştır.

1.5. Varsayımlar

Araştırma kapsamında yapılan klinik mülakatlarda gelişen diyalogların katılımcıların gerçek düşüncelerini yeterli düzeyde açıklayabildikleri varsayılmıştır.

1.6. Tanımlar

Pirie ve Kieren'in sekiz katmanlı matematiksel anlama modelindeki katmanlar ve katmanlar arasındaki ilişkileri belirten tanımlar aşağıdaki gibidir.

Ön Bilgi (Primitive Knowing, Birinci Katman): Herhangi bir matematik konusundaki anlama için başlangıç sayılabilecek ön bilişsel bilgi düzeyidir.

İmaj Oluşturma (Image Making, İkinci Katman): İmaj oluşturmaya yönelik zihinsel eylemlerin yapıldığı seviyedir. Böylece zihinsel görselleştirme yapılabilir ve eylemler zihinsel bir nesne haline gelmeye başlar.

İmaja Sahip Olma (Image Having, Üçüncü Katman): Örnekler gibi eylemlerden kurtulup zihinsel yapıların kullanıldığı böylece imajların zihinsel bir form aldığı seviyedir. İlkel soyutlamadır çünkü imaja dayalı eylemler sınırlı olabilir ya da yeterince zihinsel imaj oluşturulamamıştır. Bu nedenle soyutlama hatalı ya da eksik olabilir.

Özellikleri Fark Etme (Property Noticing, Dördüncü Katman): Bilinçsiz öğrenmenin en dış katmanıdır. Bu katmanda imajlar arasında ayrımlar, kombinasyonlar ve bağlantılar fark edilir.

Formelleştirme (Formalising, Beşinci Katman): Birey bu katmanda fark edilen özelliklerin üzerine bilinçli bir şekilde düşünür, ortak özellikleri çıkarır, zihinsel eylemlerin kökleri olan imajlardan kurtulur, matematiksel tanımları ve yöntemleri oluşturmaya başlar.

Gözlem Yapma (Observing, Altıncı Katman): Birey bu katmanda düşünce yapısını gözlemler, bu derinlemesine düşüncelerin sonuçlarının farkına varır, düşüncelerini

koordine eder ve tutarlı olarak organize eder. Böylece bilinçli bir farkındalık gelişir. Bunların sonucunu teorem olarak ifade eder.

Yapılandırma (Structuring, Yedinci Katman): Birey bu katmanda, önceki düşünce yapılarını sıralar ve ilişkilendirir. Formel gözlemlerine dayalı bu düşüncelerini, aksiyomatik bir yapı içinde düşünür ve bir araya gelen teoremlerin ilişkisini fark eder. Tüm bu teoremleri gerekçelendirmeye ya da doğrulamaya çalışarak ispat etmeye çalışır.

Keşfetme (Inventising, Sekizinci Katman): Birey bu katmanda, önceki katmanlarda oluşturduğu anlayışı temel alarak önceki yapılardan farklı yeni bir düşünce oluşturur. Diğer bir deyişle mevcut düzenin ötesine geçer.

Geri Dönmeye Gereksinim Duymama Sınırı (Don't Need Boundaries): Pirie ve Kieren sekiz katmanlı matematiksel anlama modelinde kalın olarak işaretlenmiş çizgilerdir. Gelişen bir anlama sürecinde olan bir birey, bu sınırlardan bir sonraki anlama katmanına (örneğin imaj oluşturmadan imaja sahip olma) geçtiğinde bir önceki seviyenin gerektirdiği özel eylemlere ihtiyaç duymayacaktır. Bu sınırlardan kesin bir şekilde bir önceki anlayışa geri dönmeme durumu kastedilmemektedir. Sadece daha soyut ve genel bir seviyede çalışabilecek bir anlayışın geliştiği kastedilmektedir.

Geri Katlama (Fold Back): Bireyin anlaması geliştikçe mevcut katmanda çözemeyeceği problemler ile karşılaşması muhtemeldir. Bunun sebebi, önceki seviyelere bağlı yetersiz anlama olduğunda birey, daha iç (alt) katmanlara geri dönüp döndüğü katmanların zihinsel faaliyetleri aracılığıyla anlamasını genişletmeye çalışabilir. Bu durumda ortaya çıkan ve bireyin bulunduğu katmandaki kavramsal yapılandırmasını güçlendirmek amacıyla daha önceki katmanlara geri dönme eylemine geri katlama denir.

Müdahale (Intervention): Gelişen anlama sürecinde bireyin geri katlama yapmasını tetikleyen uyarımlardır. Bu uyarım içsel ya da dışsal olabilir. Sözlü olarak gözlemlenebileceği gibi sözsüz de olabilir.

BÖLÜM 2: KURAMSAL ÇERÇEVE

Bu bölümde araştırmaya temel teşkil eden kuramsal çerçeve, iki ana başlık halinde ele alınmıştır. Birinci ana başlık altında matematiksel anlama konusu genel hatlarıyla tanıtılıp Pirie ve Kieren'in ortaya koyduğu matematiksel anlamanın gelişimi teorisi incelenmiştir. İkinci ana başlık altında ise alan, çevre ve türev kavramları ele alınacaktır. Sonra bu kavramlar arasındaki ilişki tartışılmıştır.

2.1. Pirie ve Kieren'in Matematiksel Anlamanın Gelişimi Teorisi

Bu ana başlık altında önce anlama teorileri ile ilgili genel ve özet şeklinde bir çerçeve sunulmuştur. Sonra Pirie ve Kieren tarafından geliştirilen matematiksel anlamanın gelişimi teorisi tanıtılmıştır. Bölümün alt başlıkları aracılığıyla da bu teorinin detaylı bir incelemesi yapılmıştır.

2.1.1. Anlamaya Genel Bir Bakış

Etkili bir matematik öğretimi için bireylerin matematik bilgisini zihinlerinde yapılandırırken nasıl bir süreç izlediğini, bu sürece etki eden içsel ve dışsal faktörlerin neler olduğunu ortaya çıkarmak önem arz etmektedir. Bunun önemine işaret etmek için VonGlasfeld [1990] "Eğitimde öncelikle öğrencilerin kavramsal yapılarının modeli çıkarılmalıdır ve daha sonra öğrencilerin bu yapıları, öğretmenin beklentileri ve hedefleri doğrultusundaki matematiksel eylemlerle sonuçlanacak şekilde nasıl değiştirebileceklerine dair hipotezler üretilmelidir" ifadesini kullanmaktadır (Aktaran: Pirie ve Kieren, 1992, s.506-507). Bu nedenle anlama konusu, eğitim için, önemli bir hal almaktadır (Pirie ve Kieren, 1994). Diğer taraftan anlamanın ne olduğu çoğunlukla açıklanmaya ihtiyaç duymaktadır. Hayatın genelinde ve dolayısıyla matematik sınıflarında "anladınız mı, anlatabildim mi" gibi onay isteyen ve aslında "tamam mı" gibi onay alma amacıyla kullanılan ifadelere denk gelmek mümkündür. Bu tarz sorulara sözel ya da vücut diliyle onay alındıktan sonra ya da onay alınmadan konuşmaya ya da derse devam edilir. Böyle bir durumda dinleyici "evet anladım" dediğinde gerçekten anlama gerçekleşmiş midir? Anlamanın gerçekleşip gerçekleşmediğinin göstergeleri nelerdir?

Anlamanın gerçekleştiğini nasıl anlayabiliriz? Ya da anlamanın suyun kaynaması gibi somut bir göstergesi bulunmakta mıdır?

Su kaynama noktasına geldiğinde üzerinde bulunan atmosfer basıncını yener ve yüzeyde oluşan hava kabarcıklarından suyun kaynadığı anlaşılır. Ancak anlamanın gerçekleşmesinin suyun kaynamasına benzer bir somut göstergesi yoktur. Anlama insan zihninde gerçekleşir ve soyuttur. Şüphesiz ki anlama gerçekleştiğinde beynin nörokimyası değişmekte, nöronlar arası yeni bağlantılar artmakta, mevcut bağlantılar güçlenmektedir. Ancak beynin nörofizyolojisinde gerçekleşen her bir değişim anlamanın gerçekleştiğine delalet etmeyebilir ve bu değişimleri tüm eğitim ortamlarında anlık olarak takip etmek pek de mümkün değildir.

Eğitim ortamlarında sıkça kullanılan "anladınız mı?" sorusuna geri dönülecek olursa, bu soruyla tam olarak ne sorulmak istenmektedir? Bilginin (uzun ya da kısa süreli) hafızaya kaydedilip kaydedilmediği mi yoksa bilginin zihindeki farklı bilgilerle etkileşime girip yapılandırıldığı mı ima edilmektedir? Anlama ile bilginin hiçbir işleme tabi tutulmadan hafızaya kaydedilmesi farklı şeylerdir. Çünkü anlama, bilgiler arasında bilinçli bağlantılar oluşturmak ve bunların ne anlama geldiğini bilmek ile ilgilidir. Bağlantıların sayısı ve niteliği de anlamanın niteliğini belirlemektedir (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013).

Her ne kadar eğitim ortamlarında dile pelesenk olan "anladınız mı?" sorusu anlamanın gerçekleşip gerçekleşmediğini ya da ne kadar gerçekleştiğini tespit etme amacı taşımıyorsa da eğitimciler için bunu belirlemek önem arz etmektedir. Bu durumda "anlama nasıl tespit edilebilir?" sorusu önem kazanmaktadır. Bilişsel süreçleri ve becerileri takip ve teşhis etmek, anlama için bir gösterge argümanı olarak sunabilir. Çünkü anlama bilişsel bir süreçtir ve zihinde gerçekleşir. Anlamayı tespit edebilmek için öncelikle tanımlamak gerekmektedir. Anlama üzerine çalışan eğitimciler farklı tanımlamalar yapmaktadır. Tanımlardaki farklılaşmaların temel kaynağı ise anlamanın soyut bilişsel süreçler üzerine kurgulanmasıdır. Ve bu konuyla ilgilenen kişilerin anlama üzerine bilimsel temellere dayandırdıkları ve gerekçelendirdikleri teorileri vardır (Buxton, 1978; Dubinsky, 1991; Pirie, 1988; Pirie ve Kieren, 1989, 1994; Skemp, 1976, 1978).

Anlamayı açıklamaya çalışan teorilerden bir kısmı (Buxton, 1978; Skemp, 1976) anlamanın ne olduğunu açıklamaya çalışır ve anlamanın kategorilerini ortaya koymaya çalışmaktadır. Diğer teoriler (Pirie ve Kieren, 1989, 1994; Dubinsky, 1991) ise anlamanın ne olduğundan ziyade anlamanın nasıl gerçekleştiğine odaklanmaktadır. Tüm teorileri bu başlık altında incelemek mümkün olmasa da bazı teoriler bu başlık altında kısaca tanıtılmaya çalışılacaktır.

Anlamayı tanımlamaya çalışan ve kategorileştiren ilk teori, Skemp (1976) tarafından oluşturulmuştur. Yukarıda Van de Walle, Karp ve Bay-Williams'ın (2013) bağlantı fikrini ön plana çıkaran anlama tanımı verilmişti. Bu tanım aslında Skemp (1976, 1978) tarafından ileri sürülen kategorileştirmeye dayalı anlama teorisini işaret etmektedir. Bu teoriye göre bağlantısız bilgi edinimi enstrümental (işlemsel, instrumental) anlama olarak değerlendirilmektedir. Türev konusunda "üstü öne getir, üstü bir azalt" gibi salt işleme dayalı ve lokal olarak geçerli bir anlayış bu duruma örnek verilebilir. Bilgilerin bir birleriyle (neden, nasıl ve nerede gibi soruları karşılayabilecek şekilde) ilişkilendirildiği durum ise ilişkisel (kavramsal, relational) anlama olarak nitelendirilmektedir.

Skemp'in anlama üzerine geliştirdiği teoriyi yetersiz bulan Buxton (1978) anlamayı dört seviyeye ayırmıştır. Bu seviyelendirmeye göre alışılmış hareket (rote) ilk seviyedir. Bu seviye işlemsel anlamaya denk gelmektedir. Çarpım tablosunu ezberlemiş birinin "7x9=?" sorusuna hiç düşünmeden ve içsel bir süreç geliştirmeden hızlıca 63 cevabını vermesi bu seviyeye örnek olarak gösterilmektedir. Araştırmacı ikinci seviyeyi gözlemsel (observational) olarak isimlendirmiştir. Bu seviyedeki bir kişi çarpım tablosunu ezberlemekten ziyade (9 ile çarpmada birler basamağının birer birer küçülmesine benzer) örüntü gibi yöntemler geliştirir. Bu yöntemlere dayanarak "7x9=?" sorusuna cevap verir. Üçüncü seviye anlaşılır olma (Insightful) aşamasıdır. Bu seviye ilişkisel anlamaya yakındır. Örnek olarak "7x9=?" sorusuna yanıt verilirken "7'yi 10 ile çarpıp 70 bulunması ve 70'den 7 çıkarılması" gibi bir çıkarım vardır. Öğrenci bu ve benzeri çıkarımları yapabilir. Ancak bu seviyede bir öğrenci kabul edilebilir bir formel ispat geliştiremez. Son seviye olan formel (formal) seviyesinde kabul edilebilir bir matematiksel ispat durumu söz konusudur. Dokuz ile çarpma kuralını fark eden bir kişi bu seviyede "$9.a = (10-1).a = 10.a - a$" gibi bir formel ispat üretebilir. Diğer bir deyişle sezgisel olarak bir önceki aşamada farkına vardığı işlemlerin arka planındaki matematiksel yapıyı modelleyebilir ya da ispatlayabilmektedir. Buxton bu seviyelerin birbirine

karışabileceğini ifade etse de yaptığı seviyelendirme lineer bir anlayış gelişimini işaret etmektedir.

Matematiksel anlamanın doğasını ortaya çıkarmak matematik eğitimi açısından önemlidir. Bu noktada anlamanın ne olduğu ya da türlerinin neler olduğu gibi sorular sorulması değerlidir. Ancak matematik eğitimine daha büyük katkı sağlayacak soru anlamanın nasıl geliştiğidir. Çünkü bu soru, matematik eğitimcilerine öğretim sürecinde harita olarak kullanabileceği enstrümanlar sunabilir. Bu gerekçe ile (daha önce de bahsedildiği üzere) matematiksel anlama nasıl gerçekleşir sorusuna cevap verebilecek diğer teoriler oluşturulmuştur. Pirie ve Kieren'in *matematiksel anlamanın gelişimi teorisi* (Pirie, 1988; Pirie ve Kieren, 1989, 1994) ve Dubinsky'nin (1991) APOS (Action-Eylem, Processes-Süreçler, Object-Nesne, Schema-Şema) teorisi "anlama nasıl gerçekleşir" sorusuna cevap arayan teorilere örnek olarak verilebilir.

Dubinsky (1991) tarafından geliştirilen APOS teori Piaget'in bilişsel evrim teorisi üzerine kuruludur. Teoride Piaget'in yansıtıcı soyutlama (reflective abstraction) süreci ile ilişkili düşünceler üzerinde durulur. Matematiksel kavramlar zihinde inşa edilirken yaşanılan süreçler dört aşamada ele alınır. Teoriye göre anlama süreci eylemlerle başlar. Eylemler bir süreç (processes, algoritma) oluşturmak için içselleştirilir. Örneğin genel türev denklemi ile polinom fonksiyonlarda türev hesaplamaya yönelik anlayış eylem olarak değerlendirilsin. Bu eylemler tekrarlanıp üzerine düşünüldüğü zaman polinom fonksiyonların türevini hesaplamaya yönelik "üstü bir azalt, üstü öne getir" gibi bir algoritmanın gelişmesi muhtemeldir. Bu algoritma bireyi, tekrardan genel türev denklemine başvurma işinden kurtaracaktır. Sözkonusu algoritmanın oluşması, süreç olarak ifade edilen bilişsel yapının geliştiğini gösterir. Anlamanın gelişiminde oluşan bu süreçler zihinsel bir nesne oluşturmak için örülür (encapsulate). Eylem, süreç ve nesnelerin toplamı da bir şema oluşturur (Dubinsky, 1991). Teorinin detayları, APOS teori ile Pirie ve Kieren'in teorisinin karşılaştırılması başlığının altında detaylı olarak ele alınacaktır.

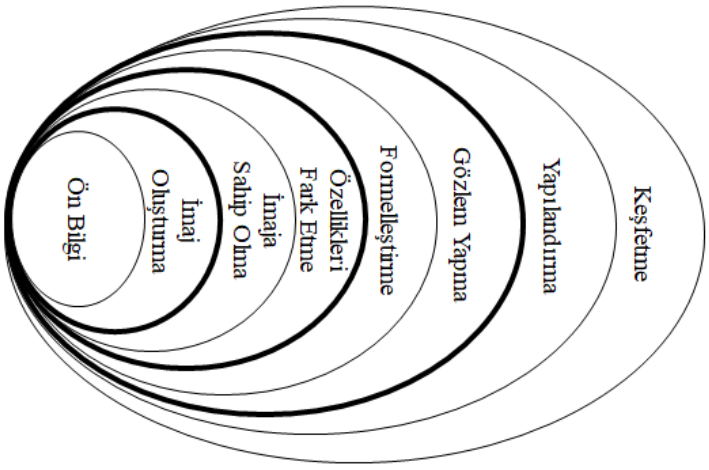
Anlamanın nasıl gerçekleştiği sorusuna yanıt arayan diğer teori de yukarıda bahsedildiği üzere Pirie ve Kieren tarafından geliştirilen matematiksel anlamanın gelişimi teorisidir. Pirie (1988) o zamana kadar yapılandırılmış anlama teorilerini inceleyerek, mevcut anlama teorilerinin daha çok kategorileştirmeler üzerine olması ve kategorileştirmenin

matematik eğitimi açısından bir fayda sağlamayacağı yönünden eleştirmiştir. Ayrıca işlemsel anlama ile ilişkisel anlama arasındaki çizginin her zaman belirli olmadığını belirtmiştir. Ve buna örnek olarak işlemsel anlama gibi görünen bir anlamanın aslında daha derin bir kavrayış barındırdığını kesirlerde bölme işlemi hakkında yapılan mülakatlarla ortaya koymuştur. Buradan hareketle dinamik ve kendini yenileyen bir teoriyi işaret etmiştir.

Pirie ve Kieren (1989) önerilen teorinin genel çerçevesini çizmiştir. Teori ilerleyen aşamalarda örneklerle desteklenmiş bir şekilde ana hatlarıyla ele alınacaktır. Bu teori (ilerleyen bölümlerde detaylarıyla anlatılacağı üzere) matematiksel anlamayı, iç içe geçmiş sekiz adet halka ile açıklamaya çalışmaktadır. Bu halkalar arasında ileri ve geri gidişlerin olması yönüyle de matematiksel anlamayı dinamik bir yapı olarak incelemektedir. Teorinin fikri Pirie (1988) ve Pirie ve Kieren (1989) ile ortaya konulmuş, ilerleyen süreçte birçok araştırmacının yaptığı çalışmalarla da genişlemiştir.

2.1.2. Pirie ve Kieren Teorisine Göre Anlamanın Seviyeleri

Pirie ve Kieren tarafından ortaya konulan ve diğer araştırmacılar tarafından da geliştirilen teorinin temelinde iç içe geçmiş seviyeler bulunmaktadır. Bu başlık altında söz konusu seviyeler ve bu seviyelerin oluşturduğu görsel model tanıtılacaktır. Her ne kadar görsel model (Şekil 2.1) anlamanın kaotik yapısını tam olarak açıklayamasa da anlamanın gelişimi ile ilgili bilgi vermektedir.



Şekil 2.1. Anlamanın Seviyeleri (Pirie ve Kieren, 1989, s.8; Pirie ve Kieren, 1994, s.167)

Pirie ve Kieren (1994) anlamanın seviyeleri, anlama sürecindeki eylem ve söylemleri isimlendirmek için kullanılan terimleri ortaya atarken dikkat edilen noktaları açıklamıştır. Bunları isimlendirirken iki farklı yolla terim seçimi yapılabileceğinden bahsedilmektedir. Bunlardan birincisi literatürde var olan, okurlar tarafından daha önce anlam yüklenmiş olan terimlerin kullanılmasıdır. İkincisi ise literatürde o ana kadar mevcut olmayan ve günlük hayattaki anlamlarıyla çağrışım yaptıracak şekilde terimler seçmektir. İlk durumun avantajı, mevcut yapılar üzerinden teorinin şekillendirilmesinin kolaylığıdır. Ancak bu durumun daha önceden yüklenmiş olan anlamların kuracakları teoride verilen anlamları baskılaması gibi bir de dezavantajı vardır. İkinci durumda yeni terimlerin literatüre kazandırılması söz konusudur ve değerli bir olgudur. Ancak bunun da dezavantajı ihtiyaç duyulan arka plan anlamanın oluşmama riskidir. Bu durumların farkında olarak yeni terimler kullanılmıştır. Bazı terimler arka plan eksikliğinden dolayı yanlış anlaşılıp eleştirilmiştir. Pirie ve Kieren (1994) söz konusu eleştirileri de göz önünde bulundurarak daha detaylı tanımlamalar yapmaya çalışmıştır. Bu çalışmada terimlerin anlamlarının oluşabilmesi kaygısı taşınarak tanımlamalar örneklerle desteklenmiştir.

Pirire ve Kieren (1989, 1994) anlamayı sekiz seviyede ele almaktadır. Bu seviyeler sırasıyla: *Ön Bilgi, İmaj Oluşturma, İmaja Sahip Olma, Özellikleri Fark Etme, Formelleştirme, Gözlem Yapma, Yapılandırma, Keşfetme* seviyeleridir. Seviyeler içten dışa doğru halkalar şeklinde dizilmiştir (bkz. Şekil 2.1). Bu model sadece iki boyutlu bir modellemedir, önerilen "anlama modeli"nin kendisi değildir. İlerde ele alınacak olan haritalama yöntemi için pratik bir zemin sağlaması açısından önem arz etmektedir (Pirie ve Kieren, 1994). Bu model incelenirken dikkat edilmesi gereken üç temel husus vardır.

Birinci husus, anlamanın lineer olduğuna yönelik bir algının oluşması riskidir. Çünkü sunulan model düz ve lineer bir anlama modeli çağrışımı yapabilir. Ancak teorisyenlerin (Pirie ve Kieren, 1989, 1994) de belirttiği üzere anlama özünde dinamik sürekli ileri geri saran ve kendine has bir yolu olan bir süreçtir.

İkinci nokta, anlamanın gelişmesi sürecinde bir önceki seviyenin rolü ile ilgilidir. Bir seviyeden diğer bir seviyeye geçilmesi, önceki seviyenin kullanılmayacağı anlamı taşımamaktadır. Önceki seviyede elde edilen anlamalar yinelenebilir ve hatta ihtiyaç duyulursa geri dönülüp bu seviyede oluşturulan anlama düzenlenebilir. Dolayısıyla

bireyin mevcut anlama seviyesinde geliştirdiği kavramlar, öncekilerden farklı karakterde olsa da kendi içinde benzer durumları da içerebilir. Teorisyenler bunu, ***yineleme (recursion)*** olarak adlandırmaktadırlar. Anlamanın gelişimindeki dinamik süreci ve seviyeler arası ilişkisini anlatmasından dolayı yineleme terimi teorinin önemli kavramlarından biridir (Pirie ve Martin, 2000).

Dikkat edilmesi gereken son konu ise en dış ve en iç katmanın niteliğidir. Şöyle ki ön bilgi seviyesi, en düşük bilgi anlamına gelmez iken keşfetme seviyesi de en yüksek matematik seviyesi anlamı taşımamaktadır. Örneğin kesirler konusunda en dış seviyede anlama gerçekleştiren bireyin sahip olduğu öğrenme, ondalıklı sayılar için ön bilgi seviyesini oluşturabilmektedir (Pirie ve Kieren, 1994). Başka bir örnek vermek gerekirse ikinci dereceden fonksiyonlar konusunda en dış seviyede anlama gerçekleştirebilen bir bireyin mevcut matematiksel alt yapısı, karmaşık sayılar konusunu anlamaya başlamak için ön bilgi mahiyetinde olabilir (Pirie ve Kieren, 1989).

2.1.2.1. Ön Bilgi

Ön bilgi terimi, çeşitli öğrenme teorilerinde altı çizilen ve günlük yaşamda sıkça kullanılan ya da ima edilen önemli bir kavramdır. Öğrenci ya da öğretmen söylemlerinde "temeli sağlam" ya da "temeli zayıf" gibi nitelemeler, genellikle, bu kavramı işaret etmektedir. Ayrıca bu kavramın hazır bulunuşluk ile karıştırılma potansiyeli oldukça yüksektir. Hazır bulunuşluk bireyin yeni bir öğrenme gerçekleştirebilmesi için sahip olduğu psikomotor, duyuşsal ve bilişsel özelliklerin tümünü kapsamaktadır. Ön bilgi ise bilişsel bir kapasiteyi ya da bilişsel yapıları ifade etmektedir (Aydın, 2006).

Süregiden öğrenme aktiviteleri üzerinde ön bilginin önemi, çeşitli araştırmacılar tarafından tartışılmıştır. Bu araştırmacıların tamamını incelemek mümkün olmasa da iki araştırmacının geliştirdiği söylemlere değinmek konuya açıklık getirebilir. Bunlardan biri eğitim felsefesi üzerine büyük etkisi olan John Dewey, bir diğeri ise öğrenme ile ilgili çeşitli perspektiflere ışık tutan Jean Piaget'tir. Dewey (1998) ön bilgileri deneyim perspektifinden ele alıp mevcut deneyimlerin gelecekteki deneyimler üzerine etkisini iki farklı şekilde sınıflandırmaktadır. Bu sınıflamaya göre bazı deneyimler, eksik ya da hatalı bağlantılardan dolayı gelecekteki daha zengin deneyimler yaşamaya engel teşkil edebilir. Deneyimlerin bazıları ise gelecekteki deneyimlere karşı istek geliştirebilir. Dewey (1998) bunu deneyimsel devamlılık olarak ele almaktadır.

Dewey'in (1998) bahsettiği geçmiş deneyimlerin gelecekteki deneyimler üzerine kolaylaştırıcı ya da zorlaştırıcı etkisi, öğrenmenin transferi perspektifiyle örtüşmektedir. Eski öğrenmenin yeni öğrenmeyi kolaylaştırması (ileriye etkin kolaylaştırma) ve yeni öğrenmenin eski öğrenmeyi daha işlevsel hale getirmesi (geriye etkin kolaylaştırma) durumları olumlu transfer olarak değerlendirilmektedir. Diğer taraftan eski öğrenmenin yeni öğrenmeyi zorlaştırması (ileriye ket vurma) ve yeni öğrenmenin eski öğrenmelerin kullanımını zorlaştırması (geriye ket vurma) durumları olumsuz transferi işaret etmektedir (Seven ve Engin, 2008). Öğrenmeler arasındaki trasnfer ilişkisinin incelenebileceği diğer bir perspektif Piaget'in bilişsel yapılandırmacılık kuramıdır.

Piaget'in kuruculuğunu yaptığı bilişsel yapılandırmacılık kuramı, ön bilgilerin öğrenme üzerine etkisini ve öğrenmenin ön bilgiyi nasıl dönüştürdüğünü detaylandırmıştır. Bu kurama göre deneyimler, bilişsel yapılarda dengesizlik meydana getirir. Dengesizliğin nedeni olan deneyimler, mevcut bilişsel yapılar ile iki farklı şekilde etkileşime girebilir. Birinci etkileşim şekli, bireyin mevcut bilişsel yapılarıyla deneyimin üstesinden gelebildiği durumda olur. Bu durumda deneyim mevcut bilişsel yapılar çerçevesinde özümsenir (assimilation). İkinci etkileşim şekli ise bireyin mevcut bilişsel yapıları, deneyimle baş etmekte yetersiz geldiği durumda meydana gelir. Bu durumda bilişsel yapılar, deneyimi uyumlandırabilme (accommodation) çabasıyla değişime uğrar. Öğrenme ise özümsenme ya da uyumlandırma ile denge oluşturma süreci (equilibration) olarak tanımlanmaktadır (Philips ve Soltis, 2005).

Mevcut bilişsel yapılar, ön bilgiyi barındıran ve zihinde oluştuğu iddia edilen yapılardır. Piaget'in öğrenme kuramına göre öğrenme olabilmesi için mevcut bir bilişsel yapı olması ve bu yapının dengesinin bozulması gerekmektedir. Bu noktada "ilk öğrenmeler hangi bilişsel yapılarda dengesizlik oluşturdu?" sorusu akla gelmektedir. Örneğin "matematiğin temelinde sayma ve saymanın temelinde bulunan eşleme ile ilgili öğrenme gerçekleşmesi için mevcut yapı nedir ya da ne olmalıdır?" gibi soruların ortaya çıkması doğaldır. Philips ve Soltis (2005) bu soruya çeşitli araştırmacıların fikirlerinden hareketle kalıtsal olarak gelen bazı bilişsel yapıların olabileceği açıklamasını getirmektedir. Konuyla ilgili yapılan araştırmalar, bebeklerin belirli bir sayıya kadar olan çokluğun sayma işlemi gerektirmeden yapabildiklerini göstermektedir (Antell ve Keating 1983; Lipton ve Spelke 2003). Matematik başarısına katkı sunan bu durum, ülkemiz literatüründe şipşak sayılama becerisi olarak adlandırılmaktadır (Mutlu, Olkun ve Cumhur, 2019; Olkun ve Özdem,

2015). Dolayısıyla kalıtsal olarak bazı bilişsel yapıların mevcut olduğu iddiası destek bulabilmektedir.

Piaget, ön bilginin süregiden öğrenme aktiviteleri üzerine etkisinin önemini vurgulamıştır Bu ise eğitim literatürüne önemli izdüşümler oluşturmuştur. Örneğin kavram yanılgısı, kavram hatası, kavram prototipi gibi terimler eğitim literatürüne kazandırılmıştır. Kavram ile ilgili ilk zihinsel yapı, kavram prototipi olarak değerlendirilmektedir. Mevcut bilişsel yapılardan kaynaklı olsa bile basit müdahalelerle düzeltilebilecek hatalı bilişsel yapılar kavram hatası olarak değerlendirilmektedir. Mevcut bilişsel yapıların yanlış olmasından kaynaklı olarak sistematik hata üreten zihinsel yapılar ise kavram yanılgısı olarak değerlendirilmektedir (Karamustafaoğlu, Karamustafaoğlu ve Yaman, 2005). Kavram hatası ya da kavram yanılgısı barındıran bilişsel yapıların üzerine yeni ve sağlıklı bilişsel yapıların inşası oldukça zordur. Bu nedenle Piaget'in kuramının eğitim açısından bir diğer çıktısı da etkili bir öğretim süreci için öğrenmeye temel teşkil edecek ön bilgilerin kontrolünün yapılması ve hatalılarsa düzeltilmesidir (Aydın, 2007). Pirie ve Kieren (1994) bununla ilgili olarak öğretmenin ön bilgileri tespitinin önemine vurgu yapmaktadırlar. Çünkü Pirie ve Kieren'in işaret ettiği dinamik ve kendini yineleyen anlama sürecinin başlangıç noktası ön bilgidir.

Pirie ve Kieren tarafından ortaya atılan ve diğer araştırmacıların da katkılarıyla gelişen matematiksel anlamanın gelişimi teorisine göre anlama süreci "ön bilgi" ile başlar. Bu seviyedeki eylem, fiziksel nesneleri, grafikleri ve sembolleri içerebilir. Buradaki "ön" kelimesi, düşük seviye matematik anlamına gelmemektedir; herhangi bir matematik konusundaki anlamanın gelişimi için başlangıç noktasını ifade etmektedir (Pirie ve Kieren, 1989, 1994; Pirie ve Martin, 2000). Anlamanın başlangıç noktası olduğu için ön bilginin öğretim ortamında tespitinin önemi teoride vurgulanmıştır. Bu durumda öğretmenin ön bilgiyi nasıl tespit edebileceği bir problem olarak ortaya çıkmaktadır.

Bu seviye ve diğer seviyeler iki örnekle açıklanmaya çalışılacaktır. Birinci örnek Pirie ve Kieren'in (1989) seviyelerin muhtemel seyrine açıklık getirmek için oluşturduğu varsayıma dayalı örnektir. Bu örnek ikinci dereceden denklemler konusunda anlamanın nasıl geliştiği ile ilgilidir. İkinci örnek ise Pirie ve Kieren'in (1994) kesirlerin anlaşılması ile ilgili araştırmasından kesitler sunacaktır. Bu örnekte tüm seviyeleri (yapılandırma ve keşfetme seviyelerini) görmek mümkün olmasa da birçok seviyeye açıklık getirebilir.

Okuyucunun kolay takip edebilmesi için birinci örnek ***Varsayım*** ikinci örnek ise ***Terasa*** alt başlıkları altında incelenecektir.

Varsayım: Pirie ve Kieren'in (1989) anlamanın gelişimini açıklamak için sunmuş olduğu varsayıma dayalı örnekte, ikinci dereceden denklemlerin anlaşılmasına temel teşkil edebilecek ön bilgilere açıklık getirilmemiştir. Ancak Pirie ve Kieren (1994) bu varsayıma dayalı örneğin bir uygulamasını sunmaktadır. Bu uygulamada "çok terimli ifadeleri değerlendirebilme (en az ikinci dereceden), değerlerin tablosunu oluşturabilme ve bu tablolardan noktaların grafiğini çizebilme" yeterlilikleri ön bilgi olarak varsayılmıştır (Pirie ve Kieren, 1994, s.175).

Terasa: Pirie ve Kieren (1994) Teresa isimli bir öğrencinin kesirlerde toplama işlemi üzerine anlamasının gelişimini incelemişlerdir. Ön bilgisinin boyutunu kesin ve tam olarak bilememekle beraber öğretmenin yaptığı ön görüşme, önceki sınıf çalışmaları ve öğretim sürecini dikkate alarak bir kestirim yapmışlardır. Buna göre Terasa'nın kesirlerde toplama işlemi için ön bilgisinin kesir sözcükleri, denk kesir ve parça-bütün mantığı bilgisi olduğu raporlanmıştır. Bu çalışmada dikkat çekilen bir diğer husus ise kesirler konusu ve bu konu ile ilgili geliştirilen anlayışın tamamının ondalıklı sayılar için ön bilgi mahiyetinde olabileceğidir.

Yukarıdaki örnekten de anlaşılacağı üzere ön bilginin tespiti için birden fazla yöntemin aynı anda kullanılması önem arz etmektedir. Bu yöntemlerden ilki, öğrencinin yaptığı yazılı çalışmaların (defter, çalışma kâğıdı ve sınav gibi) incelenmesidir. İkincisi öğretim programında önceden ele alınmış olan konuların incelenmesidir. Ancak her iki yöntem de bireyin zihnindeki yapılar diğer bir deyişle ön bilgiler ile ilgili kesin bir betimleme yapmaya olanak veremeyebilir. Çünkü birey bu çalışmaların dışında da zihinsel aktivite göstermiş olabilir. Dolayısıyla öğrenci ile yapılacak görüşme, araştırmacıya, ön bilgi ile ilgili (kısıtlı da olsa) fikir verebilir.

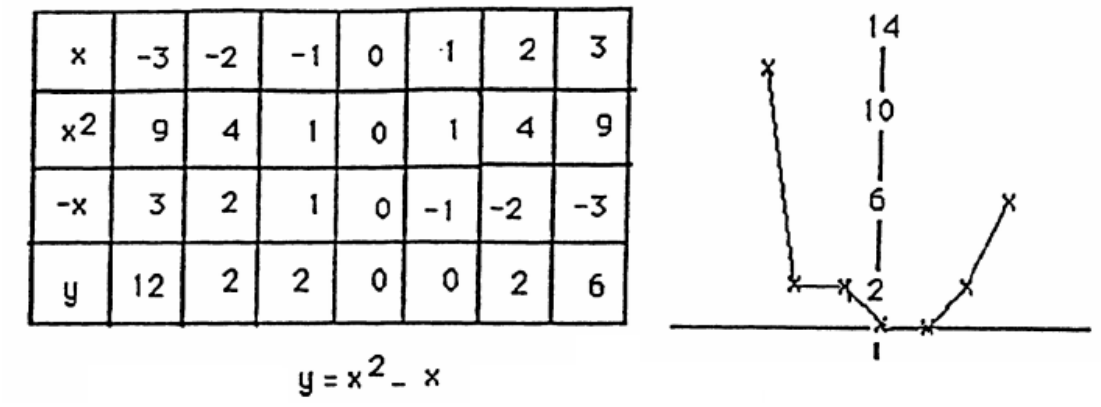
2.1.2.2. İmaj Oluşturma

Anlamanın ikinci seviyesi imaj oluşturmadır. Birey ön bilgilerine bağlı olarak yeni matematiksel anlayışın gelişmesi için eylemlerde bulunur. Buradaki etkili eylemler, "imaj oluşturma"yı içerir (Pirie ve Kieren, 1989, s.8). "İmaj" isimlendirmesi genel olarak resimlerle gerekçelendirme olarak algılansa da aslında öyle değildir. Burada daha çok

zihinsel bir görselleştirme söz konusudur ve bu eylem sonucunda zihinsel bir nesne oluşmaktadır (Pirie ve Kieren, 1994). Bu oluşan nesne ön bilgilere bağlı olduğu için ön bilgilerin bir yinelemesi (yeniden tanımlanması, bağlantı kurulması ya da restorasyonu) söz konusudur (Pirie ve Kieren, 1989).

İmaj oluşturma seviyesi, gelişen anlama sürecinde ortaya çıkan ihtiyaçlara göre sık sık geri dönülmesinden dolayı anlamanın gelişiminde önemli yer tutan bir seviyedir (Argat, 2012; Gülkılık, 2013; Gülkılık, Uğurlu ve Yürük, 2015). Çünkü bireyler, hatalı anlamalarını düzeltmek ve eksik anlamalarını geliştirmek için bu seviyeye ihtiyaç duyarlar (Gülkılık, 2013). Bu seviyedeki eylemleri açıklamak için örnekler aşağıdaki gibidir.

Varsayım: Pirie ve Kieren (1989, s.9) anlamanın seviyelerine ikinci dereceden fonksiyon üzerinden örnek vermektedir. İkinci dereceden bir fonksiyon sunulan imaj oluşturma seviyesindeki bir bireyin değerler vermek suretiyle tablo oluşturması ve bu tablodaki değerleri koordinat düzleminde işaretlemek suretiyle bir eğri çizmeye çalışması ön görülmektedir. Söz konusu makalede (Pirie ve Kieren, 1989) yazarlar Şekil 2.2'ye benzer bir örneğe yer vermişlerdir. Ancak Pirie ve Kieren (1994) bu varsayıma dayalı örneğin bir uygulamasını sunmaktadır. Bu makalede sunulan örnek Şekil 2.2'deki gibidir.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
-x	3	2	1	0	-1	-2	-3
y	12	2	2	0	0	2	6

$y = x^2 - x$

Şekil 2.2. İkinci Dereceden Denklemlerle İlgili İmaj Oluşturma Eylemleri (Pirie ve Kieren, 1994, s.179)

Terasa: Pirie ve Kieren (1994) çalışmasında parça-bütün ve denk kesir kavramlarını bilen Terasa ile kesirlerde toplama üzerinde çalışmışlardır. Terasa verilen kesirleri nasıl toplayacağını bilmemektedir. Bu nedenle bir bütünü belirten katlanabilir sayfalar verilmiştir. Kit diye tanımlanan söz konusu materyal çeşitli kesirleri oluşturmak üzere

tasarlanmış kesir şeritleri gibi düşünülebilir. Terasa'ya bu şeritleri kullanarak toplamları *3/4* olan *1/4 + 3/8 + 2/16 gibi* bir kesir toplam kombinasyonu verilimiş ve bunu kesir şeritleriyle göstermesi istenmiştir. Sonra toplamı 3/4 eden benzer kombinasyonlar oluşturması isteniyor. Burada yapılan eylemler kesirde toplama işlemi ile ilgili bir imaj oluşturma çalışmasıdır.

2.1.2.3. İmaja Sahip Olma

Bir sonraki seviyede, bu eyleme bağlı imajlar, bir forma dönüşür. Matematiksel anlamada buna "imaja sahip olma" denir ve kişiyi, örnekler gibi, belli eylemleri gerçekleştirmekten kurtarır (Pirie ve Kieren, 1989, s.8). Diğer bir deyişle, imaja sahip olma aşamasında, kişi belli faaliyetlerde bulunmadan bir konu hakkında zihinsel bir yapı kullanabilmektedir. Bu soyutlamanın ilk seviyesidir; ancak, bu soyutlamayı, imaja dayalı eylemleri yinelemek suretiyle kişinin kendisinin gerçekleştirdiğini belirtmek gerekir. Anlamanın gelişmesi için, bu imajlar dışarıdan alınamaz (Pirie ve Kieren, 1989, s.8). Bu seviye için örnekler aşağıda sunulmuştur.

Varsayım: Pirie ve Kieren'e (1989, s.9) göre tablo değerlerinden faydalanarak eğri çizmeye çalışan bireylerin bu seviyede "İkinci derece fonksiyonlar mı? Bunlar, U şeklinde eğrilerdir" diyebilecek deneyime sahip olması ön görülmektedir. Eylemler yerini imaja bırakmıştır. Tablodan yararlanarak grafik çizseler de artık buna ihtiyaçları kalmamıştır. Parabol eğrisi şeklinde bir imaja sahiptirler.

Terasa: Pirie ve Kieren (1994) Terasa'ya kitlerle çalışmasını gerektiren bir aktivite sunmuşlar ve bu eylemler sayesinde konuyla ilgili bir imajın oluştuğunu raporlamışlardır. İlerleyen aşamada Terasa çok hızlı bir şekilde bu faaliyeti içselleştirmiş ve kesirlerin miktar belirtmekte kullanılabileceğinin farkına varmıştır. Birçok kesrin toplamının başka bir kesre eşit olabileceğini görmüştür. Detaylı bir şekilde raporlanmasa da yapılan açıklamalardan Terasa'nın "1/3 + 1/6 + 6/12 = 1/3 + (1/6 + 2/12) + 4/12 = 1/3 + 1/3 + 4/12 = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 3/3 = 1" şeklinde kombinasyonlarla toplama işlemini yaptığı söylenebilir. Kesirleri benzeştirmek suretiyle toplama işlemi yapmak, arka plan (back up) strateji olarak görülebilir. Pirie ve Kieren (1994) Terasa'nın artık kitlere başvurmadan toplama işlemini yapabilmesi yönüyle anlamasının imaj oluşturma seviyesini geçtiğini söylemektedirler. Buna gerekçe olarak da zihinsel yapılarını kullanabilmesi ve fiziksel faaliyetlerden (kitlerle çalışmak gibi) kurtulması gösterilmektedir.

2.1.2.4. Özellikleri Fark Etme

Özellikleri fark etme seviyesinde imajlar artık spesifik bir konu için incelenebilir. Bu kapsamda; imajlar arasındaki ayrımlar, kombinasyonlar veya bağlantılar fark edilebilir. "Özellikleri fark etme" olarak isimlendirilen bu seviye, bilinçsiz öğrenmenin en dış seviyesidir. Bilinçsiz öğrenme olmasının sebebi, kısıtlı imajlar ile hatalı ya da iyi yapılandırılmamış genellemelerin ortaya çıkabilmesidir. Burada "dış" kelimesi, anlama seviyelerinin birbirini sardığını ve önceki seviyelere erişim ihtimalini içerdiğini ifade etmek için özellikle seçilmiştir. Daha önce de belirtildiği üzere anlama seviyeleri, daha yüksek veya daha düşük matematik seviyesi anlamına gelmez (Pirie ve Kieren, 1989, s.8-9). Bu seviye ile ilgili örnekler aşağıda sunulmuştur.

Varsayım: Pirie ve Kieren (1989, s.9) ikinci dereceden fonksiyonların U şeklinde bir eğri çizeceği imajına sahip bir bireyin bu seviyeye geldiğinde imajlar arasındaki ortak özellikleri gözlemlemesi ve genellemelerde bulunmasını ön görmektedir. Bu seviyede ikinci dereceden fonksiyonlarla ilgili "yukarı ve aşağı açılırlar, lineer değillerdir, orijin dışında herhangi bir yerde maksimum veya minimum noktaları olabilir..." gibi genel özelliklerden bahsetmesi olasıdır. Birey bu seviyede daha genel bir imaja sahiptir.

Terasa: Pirie ve Kieren (1994) kitlerle çalışmak suretiyle imaj oluşturan ve sonrasında kitlere gerek duymadan kombinasyonlar oluşturarak toplama işlemi yaparak oluşturduğu imaja sahip olan Terasa'nın anlamasının gelişimini şu şekilde devam ettirdiğini raporlamışlardır. Teresa "2/3 ile 5/6'yı toplayabilirsin çünkü paydası 12 olan kesirler ikisine de uyuyor" gibi bir ifade kullanarak aslında payda eşitleme algoritmasını kısmen geliştirdiğini göstermiştir. Burada yapılan şey: Zihinsel imajların (birden fazla toplama işlemi yapılmıştır) ortak yönlerinin gözlemlenmesi sonucu denk kesirler oluşturarak toplama işleminin yapılabileceğinin diğer bir deyişle ortak payda fikrinin edinildiğidir. Araştırmacılar buna dayanarak Terasa'nın özellikleri fark etme aşamasında bir anlayış geliştirdiğini ifade etmektedirler.

Konuya açıklık getirebilmek için bu seviyeye bir örnek daha sunulacaktır. Pirie ve Kieren (1992, s.524) öğrencilere, paylaştırma, kâğıt bölme, grafik temsilleri kullanma, grafik temsillerden faydalanarak denk kesir oluşturma gibi aktiviteler yaptırmışlardır. Böylece ilgili imajlar oluşmuştur. Jose isimli öğrenci denk kesirleri oluştururken "tüm kesirler sonsuza kadar devam edebilir. Örneğin 1/2, 2/4, 3/6, 4/8, 5/10, 6/12, 7/14, 8/16, 9/18,

10/20, 11/22…" şeklinde cevap vermiştir. Bu ifade özellikleri fark etme aşamasına bir örnek olarak sunulmuştur.

2.1.2.5. Formelleştirme

İç içe geçmiş anlama seviyelerinde özellikleri fark etme seviyesinden bir sonraki seviye formelleştirmedir. Bu seviyedeki bir birey, fark edilen özellikleri bilinçli bir şekilde düşünür, ortak özellikleri çıkarır ve zihinsel eyleminin kökenlerinden (her defasında imajlara başvurmaktan) kurtulur. Bu seviyede, kişi, imajların oluşturulması ve özelliklerin çıkarılmasından inşa etiği nesnelerin sınıflarının farkına varır. Böylece tam matematiksel tanımlar meydana gelmeye başlar (Pirie ve Kieren, 1989, s.9). Diğer bir deyişle bu seviyede fark edilen özellikleri karakterize eden önceki imaja dayalı bilgisini kullanarak bir yöntem veya ortak bir özellik bulunması gerçekleşir (Pirie ve Kieren, 1994). Bu seviye ile ilgili iki örnek sunulacaktır.

Varsayım: Pirie ve Kieren'e (1989, s.9) göre ikinci dereceden fonksiyonların "kolları yukarı-aşağı doğrudur" gibi daha genel imajlara sahip bir bireyden formelleştirme seviyesine geldiğinde ikinci dereceden fonksiyonları bir fonksiyon ailesi gibi görmesi ve formülleştirmeye başlaması beklenilmektedir. Diğer bir deyişle $y = ax^2 + bx + c$ şeklinde bir fonksiyon ailesi olarak ikinci dereceden fonksiyonların ifade edilmesi ve tanımlaması ön görülmektedir. Bu seviyede ikinci dereceden fonksiyonlar birer grafikten ziyade matematiksel nesneye dönüşmektedir.

Şayet Pirie ve Kieren'in (1989) yaptığı bu sınıflama matematik eğitimsel açıdan da etkili bir öğrenme sağlayacaksa klasik matematik kitaplarının tekrardan gözden geçirilmesi gerekmektedir. Çünkü etkili bir anlama gelişimi için öğrencilerin kendi eylemleriyle imajlarını oluşturmalarına, eylemlerden bağımsız bir şekilde imajlarıyla hareket etmelerine ve bu imajlar arasındaki benzerlik ve farklılıkları genellemelerine ve sonra kendi matematiksel tanımlarını oluşturmalarına olanak sağlamak önemlidir. Ancak genel olarak klasik matematik kitapları bireyin formelleştirme aşamasında ulaşabileceği tanım ve teoremleri doğrudan vermektedir. Dolayısıyla söz konusu matematik kitapları, eylemlerle başlayıp imaj oluşturma ve bu imajlardan sırasıyla genelleme ve tanımlara ulaşmaya fırsat tanımamaktadır. Anlama süreci aktif bir zihinle film izlemeye ya da kitap okumaya benzetilebilir. Klasik ders kitaplarının yaptığı, aktif bir zihinle bir filmi izleme

ya da bir kitabı okuma imkânı sunulması yerine film ya da kitabın sonunun söylenmesi gibi değerlendirilebilir.

Terasa: Pirie ve Kieren (1994, s.168) kitlerle çalışarak imaj oluşturan, kombinasyonlar aramak suretiyle imaja sahip olan, kombinasyonların payda eşitleme algoritması olduğunu kısmen fark eden Terasa'nın anlamasının gelişiminin şu şekilde devam ettiğini raporlamışlardır. Terasa verilen bir görevde "T*oplama kolay. Paydaları çarparak doğru kesirleri elde ederek daha sonra doğru miktarlarla çarparak doğru payları elde ediyorsun. Örneğin, 6'lık, 3'lük ve 7'lik kesirleriniz varsa, 3'lük ve 6'lıklar birbirine uyar; daha sonra hepsi için 42'likler uygun olur çünkü 6 kere 7, 42 eder. Bu payda olacaktır*" ifadesini kullanmıştır. Tüm kesirlerde çalışmayı sağlaması ve muhtemel kombinasyonlardan bağımsız olması yönüyle diğer faaliyetlerin ötesinde bir anlama geliştirmiştir. Tüm kesirler için geçerli olabilecek bir payda eşitleme yönteminin tam olarak belirginlik kazandığı söylenebilir. Bir yöntem geliştirilmesi açısından Teresa'nın kesirlerde toplama konusunda formelleştirme seviyesinde bir anlama gerçekleştirdiği ifade edilmektedir.

2.1.2.6. Gözlem Yapma

Birey artık kendi düşünce yapılarını gözlemleyecek ve bunları tutarlı olarak organize edecek konumdadır. Birey bilinçli farkındalık düzeyindedir ve düşüncelerinin sonuçlarını görebilmektedir. Bu noktada, bu daha dışardaki anlama seviyesi daha yeni anlamalar içerse de, önceki tüm anlama seviyeleriyle de tutarlı olmalıdır (Pirie ve Kieren, 1989, s.9). Formelleştirme seviyesinden sonra birey, aynı zamanda bu formel faaliyeti derinlemesine düşünebilecek ve koordine edebilecek ve aynı zamanda bu koordinasyonları teorem olarak ifade edebilecek durumdadır. Bu faaliyetler gözlem yapma seviyesinde gerçekleşmektedir (Pirie ve Kieren, 1994, s.171). Bu seviye ile ilgili örnekler aşağıda sunulmuştur.

Varsayım: Pirie ve Kieren'e (1989, s.9) göre ikinci dereceden fonksiyonları $y = ax^2 + bx + c$ şeklinde bir aile olarak tanımlayan bireyden gözlem yapma aşamasında "Tüm ikinci derece fonksiyonlar için doğru olan nedir?" gibi sorgulamalar yapıp cevaplar bulması beklenilmektedir. Önceki seviyelerdeki basit hesaplama tekniklerinin ötesinde diskriminant formülü, kareye tamamlama gibi teoremlerin oluşturulması pek muhtemeldir. Bu sorgulama sonucunda tepe noktası, grafiğin x eksenini kesme durumu

ve noktaları gibi teorik sonuçların oluşturulması bu seviyenin örnekleri arasında gösterilebilir.

Terasa: Pirie ve Kieren (1994, s.171) kesirlerde toplama işlemi için bir süre kombinasyon arayan sonra payda eşitleme yöntemini geliştiren Terasa'nın gözlem yapma seviyesindeki anlamasını şu şekilde açıklamaktadır. Terasa kesirleri birleştirmek için tablolar ve formal modeller aramaktadır. Terasa'nın "*herhangi bir toplananı eşdeğer parçalarla değiştirerek iki bölü üç için başka kombinasyonlar elde edebilirim*" ifadesi içsel bir anlama faaliyeti olarak değerlendirilmiştir. Araştırmacılar bu ifadeyle Terasa'nın bir formül ya da teorem üretebilme seviyesine geldiğini düşündükleri için bu faaliyeti gözlem yapma seviyesi olarak değerlendirmişlerdir. Araştırmada Terasa'nın arkadaşlarıyla yürüttüğü tartışma kesirler konusunda bir sonraki anlama seviyesinin alt yapısını oluşturacak şekilde olsa da gerekçe üretme yönüyle zayıf olmasından ötürü bir sonraki seviyeye geçiş o an gerçekleşmemiştir.

2.1.2.7. Yapılandırma

Yapılandırma seviyesinde, kişi artık anlamaların sonuçlarının *neden* doğru olması gerektiğine yanıt verebiliyor olmalıdır. Bu da, kişinin önceki düşünceleri arasında sıralama ve ilişkilendirme gerektirir. Matematik terimleriyle ifade etmek gerekirse, kişinin aksiyomatik bir yapı içinde düşünmesini sağlar (Pirie ve Kieren, 1989, s.9). Kişi formal gözlemlerini bir teori olarak düşünmeye başladığında *yapılandırma* meydana gelir. Bu şu anlama gelir; kişi bir araya gelen teoremlerin birbiriyle ilişkili olduğunun farkındadır ve mantıksal veya meta matematiksel argümanlar yoluyla bunları gerekçelendirmeye veya doğrulamaya çalışmaktadır (Pirie ve Kieren, 1994, s.171).

Varsayım: Pirie ve Kieren'e (1989, s.9) göre gözlem yapma seviyesinde diskriminant formülü, kareye tamamlama gibi teoremleri fark eden bireyden bu aşamada ulaştığı bu sonuçları açıklaması beklenmektedir. Diğer bir deyişle bir önceki seviyede ulaşılan mantıksal sonuçlar bu aşamada mantıksal olarak konumlandırılmaya çalışılır. Örnek olarak, iki ya da tek kök varsa bunun nedeninin açıklanması beklenmektedir. Bu seviye, aksiyomatik ispat yapma seviyesi veya ikinci derece fonksiyonların, polinom fonksiyonlar sistemi içinde örnek bir sistem olarak konumlandırıldığı seviye olarak düşünülebilir.

2.1.2.8. Keşfetme

Anlama seviyeleri, önceki seviyeler ile doğrudan bağlantılıdır. Yeni seviyeler önceki seviyelerden üstün olsa da veya "daha iç" seviyelerdeki eylemlerden kişiyi kurtarsa da, bir şekilde önceki seviyelerdeki bu eylemler, kişinin anlamasını içeren başlatıcı koşullar haline gelir. Anlamanın en üst seviyesinde ise durum biraz farklıdır. Bu seviyedeki birey, önceki bilişsel yapılarından farklı, yeni bir düşünce yapısı oluşturmaya başlayabilir. Bunu yaparken önceki zihinsel deneyimlerinden elde ettiği anlayış, oluşturacağı yeni bilişsel yapı için temel oluşturur. Dolayısıyla ön bilgi konumuna gelir. Her ne kadar yapılandırma seviyesine ulaştığında önceki kavramsal yapıdan farklı bir zihinsel yapı inşa edecek olsa da inşa edilecek yapı mevcut yapı ile uyumlu olacaktır (Pirie ve Kieren, 1989).

Örneğin, Lobachewski, Bolyai ve Gauss gibi matematikçiler, paralel postulatını Öklitçi geometrinin gerekli bir sonucu olarak açıklamak yerine, Öklitçi olmayan geometriyi keşfetmiştir (Pirie ve Kieren, 1989, s.9). Birey bu seviyeye varmadan önce konuyla ilgili tam yapılandırılmış bir anlamaya sahiptir. Mevcut anlaması ile ilgili kısıtlayıcı düşüncelerinden sıyrılarak yeni bir düzen ya da kavram oluşturmanın önünü açacak sorular sorabilir. Örneğin yapılandırma seviyesinde a/b gibi rasyonel sayılarla çalışan bir birey, "a/b/c/d formunda sayılar nasıl olurdu?" gibi bir soruyla mevcut düzenlerin ötesinde bir düzen geliştirebilir (Pirie ve Kieren, 1994).

Varsayım: Pirie ve Kieren (1989, s.9) anlamanın seviyelerini varsayıma dayalı olarak ikinci dereceden fonksiyonlar üzerinden anlatmıştır. Tekrar etmek gerekirse değer deneyip tablo ve grafik oluşturma eylemiyle imaj oluşturulur. Grafik bir imaj iken grafiğin "U şeklinde" olduğu gibi temel özellikler fark edilir ve imaja bireyin zihninde iyice yer eder ki bu seviye imaja sahip olmadır. Grafiklerin kollarının aşağı ya da yukarı doğru gitmesi gibi özellikler fark edilir. İkinci dereceden fonksiyonların tanımına ulaşmakla anlama formelleşme seviyesine ulaşır. Kökler ve tepe noktası gibi konular araştırılır ve diskriminant formülü, kareye tamamlama gibi teoremleri fark edilerek gözlem yapma aşamasına ulaşılmış olur. Bu formüller aksiyomatik bir şekilde ispatlandığında yapılandırma aşamasıdır. Keşfetme aşaması ise ikinci derecen fonksiyonların standart işlemlerini aşmayı gerektirir. Birey bilinçli olarak ikinci derece fonksiyonları tamamıyla yeni bir şekilde düşünecektir; örneğin $z = kz^2 + c$ formunun tüm kompleks fonksiyonlarında çalışılması, kişiyi tamamen yeni düşünce yapılarına

yönlendirecektir. Böylece yeni yapılar ortaya çıkacaktır. Teoriye göre yeni yapı ortaya çıkarken önceki bilgiler yeni yapının ortaya çıkmasında temel teşkil edecektir. Diğer bir deyişle anlamanın üzerinde şekilleneceği ön bilgiyi oluşturacaktır.

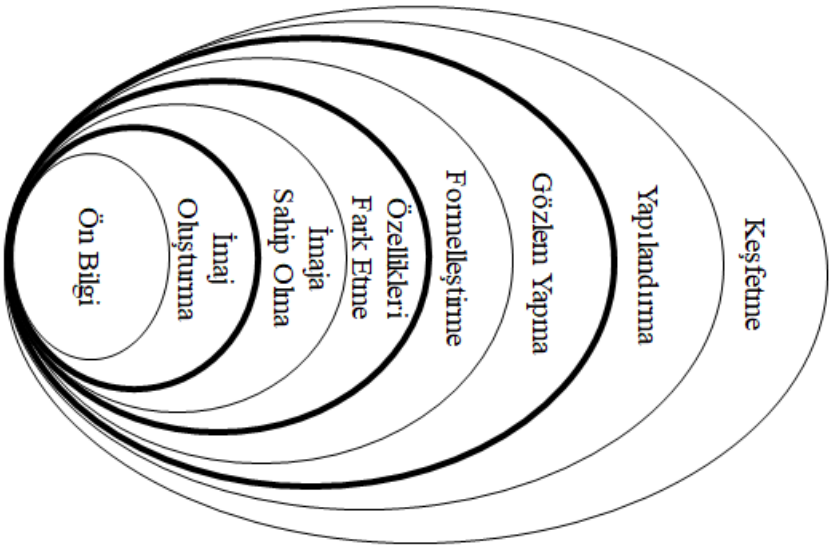
En dıştaki seviyeye keşfetme denilmesinin isimlendirmeden kaynaklı bazı eleştiriler getirdiği raporlanmıştır (Pirie ve Kieren, 1994). Pirie ve Kieren (1989) "sanki sadece bu seviyede öğrenen birey için yeni fikirler keşfediliyor" algısı oluşmaması için tüm seviyelerde bireyin kendisi için değerli fikirler keşfettiğinin altını çizmişlerdir. Ancak söz konusu yanlış algılamalara dayalı eleştiriler devam ettiği için Pirie ve Kieren (1994, s.166) konuya "…yeni bir faaliyete başlamak…" diyerek bir daha açıklık getirmiştir. Burada bahsedilen keşfetme konu bağlamının dışında bir matematiksel yapı ya da konunun temelini atma fikrinin oluşturulmasıdır. Burada daha önemli bir nokta vardır: Felsefi tartışma. İsimlendirmeler üzerine bir tartışma yürütülecekse eğer yanlış anlamalardan ziyade isimlendirmelerin felsefi temelleri üzerinden yapılabilir.

Şüphesiz ki isimlendirmeler teorisyenlerin felsefi görüşlerinden izler taşımaktadır. Şöyle ki keşif sözcüğü matematiksel bilginin doğada var olduğu ve insanların bu bilgiyi bulduğu çağrışımını yaptığı için mutlakçı felsefi akımları anımsatmaktadır. Baki (2014) matematik felsefesi akımlarını iki ana çatı altında toplamaktadır. Bunlar mutlakçı ve yarı deneyselci akımlardır. Mutlakçı bakış açısı yukarıda da bahsedildiği üzere matematiksel bilgiyi kesin, net, değişmez olarak değerlendirir. Yarı deneyselciler ise matematiği insan zekâsının bir ürünü olarak görüp kesinlik konusunun tartışmalı olduğunu öne sürerler. Bu noktada anlamanın dış katmanını keşif olarak isimlendirmeleri, teorisyenlerin mutlakçı bakış açılarından birine sahip olduğu fikrini uyandırabilir.

Pirie ve Kieren'in (1994) kullanılan terimleri seçme sürecindeki kaygılarını açıkladığı çalışma ve isimlendirme ile ilgili yürütülecek felsefi tartışmanın birlikte değerlendirilmesi konuyu daha anlaşılır kılabilir. Daha önce de bahsedildiği üzere literatürde kullanılan terimleri kullanmış olmanın dezavantajı burada ortaya çıkmaktadır. Çünkü yukarıda yürütülen kısa felsefi tartışma, terimlere daha önce yüklenilen anlamların teoride kastedilen anlamları baskılaması olarak değerlendirilebilir. Sonuç olarak bu seviyedeki keşfetme kavramı, sağlamlaştırılmış olan anlamayı kullanarak yeni bir faaliyete başlama eylemidir.

2.1.3. Geri Dönmeye Gereksinim Duymama Sınırları

Pirie ve Kieren (1989) anlamayı sekiz seviyede ele alan bir anlama teorisinin genel çerçevesini çizmiştir. Pirie ve Kieren (1994) Şekil 2.3.'teki kalın çizgilerin ne anlama geldiğini açıklamıştır. Geri dönmeye gereksinim duymama sınırları (Don't Need Boundaries) olarak adlandırılan bu kalın çizgiler şunu ifade eder: Birey bu sınırdan sonraki anlama seviyesine geçebilirse eğer bir önceki seviyede gerçekleştirdiği duruma özel eylemlere ihtiyaç duymayacaktır. Çünkü daha genel ve soyut bir seviyede çalışabilecek bir matematiksel anlayış geliştirecektir. Geri dönmeye gereksinim duymama sınırları derken kesin bir şekilde önceki seviyelere geri dönülmeyeceği anlamına gelmemektedir. Önceki seviyelerdeki anlayışta oluşturulan zihinsel formlar yeni seviyedeki formlara eklenir ve gerektiğinde önceki formlara geri dönülebilir.



Şekil 2.3. Anlamanın Seviyeleri (Pirie ve Kieren, 1989, s.8; Pirie ve Kieren, 1994, s.167)

Şimdi geri dönmeye gereksinim duymama sınırları için örnekleri inceleyelim. İlk geri dönmeye gereksinim duymama sınırı, imaj oluşturma seviyesi ile imaja sahip olma seviyesi arasında bulunmaktadır. Pirie ve Kieren (1989) daha önce de bahsedildiği üzere ikinci dereceden fonksiyonlar üzerinden varsayımsal bir örnek vermiştir. İkinci dereceden fonksiyonlar ile karşılaşan bir bireyden tablo değerleri oluşturması ve bunları koordinat düzleminde işaretlemesi beklenmektedir. Bu deneyimleri çoğaldıkça ikinci derecen fonksiyonların grafikleriyle ilgili bir imaj oluşturması beklenmektedir. Daha sonra imaja sahip olma seviyesine gelindiğinde artık (tablo oluşturmaya ihtiyaç duyulsa bile tablo

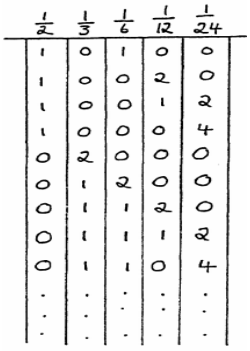
çizmeden de) ikinci dereceden fonksiyonların U şeklinde eğriler oluşturduğunu söyleyebilecek bir anlayış oluşturacaktır. Bu nedenle tablo oluşturma eylemi artık yerini imaja bırakacaktır.

İlk geri dönmeye gereksinim duymama sınırı için bir diğer örnek ise Pirie ve Kieren (1994) tarafından yürütülen çalışmada ortaya çıkmaktadır. Anlamanın seviyelerine örnekler verilirken de bahsedildiği üzere Terasa isimli öğrenci kesirler üzerinde çalışmaktadır. Terasa kesirlerde toplama işlemini kesir şeridi olarak düşünülebilecek katlanabilen sayfalar üzerinde denemeler yaparak toplamları *3/4* olan *1/4 + 3/8 + 2/16 gibi* bir kesir kombinasyonunu kitle göstermesi ve buna benzer aktiviteler yapması suretiyle imaj oluşturuyor. Terasa bu aktiviteyi içselleştirmiş ve *1/3 + 1/6 + 6/12 = 1/3 + (1/6 + 2/12) + 4/12 = 1/3 + 1/3 + 4/12 = 1/3 + 1/3 + 1/3 = 3/3 = 1* gibi birçok toplamın aynı kesre eşit olacağını göstermiş ve bunları yaparken artık kitleri kullanma eylemine başvurmamamıştır. Diğer bir deyişle imaj oluşturma seviyesinde başvurduğu eyleme artık ihtiyaç duymadan daha genel ve daha soyut bir zihinsel yapı oluşturmuştur.

Bir sonraki geri dönmeye gereksinim duymama sınırı Şekil 2.3'te de görüldüğü üzere özellikleri fark etme seviyesi ile formelleştirme seviyesi arasında bulunmaktadır. Bu seviyede anlayış geliştiren birey (önce sahip olacağı sonra özelliklerini fark edeceği) imajlara artık ihtiyaç duymayacaktır. Pirie ve Kieren'in (1989) varsayıma dayalı örneğinde bu sınır şöyle gerçekleşmektedir. Birey, "yukarı ve aşağı açılırlar, lineer değillerdir..." gibi özellikleri fark eder. Bunlar genel imajlardır. Formelleştirme seviyesine gelindiğinde ise ikinci dereceden fonksiyonları, $y = ax^2 + bx + c$ gibi bir fonksiyon ailesi olarak görmesi ve formülleştirmesi beklenmektedir. İhtiyaç duyulmayan sınır noktası ise bu seviyede artık ikinci dereceden fonksiyonlar birer grafikten ziyade birer matematiksel formal nesne olarak ele alınmasıdır.

İkinci geri dönmeye gereksinim duymama sınıra Pirie ve Kieren'den (1994) örnek şu şekilde verilebilir. Terasa denk kesir kombinasyonları ile payda eşitleme algoritmasını kısmen özellikleri fark etme seviyesinde edinmiştir. Formelleştirme seviyesine gelindiğinde Terasa'nın artık denk kesir kombinasyonlarına ihtiyaç duymadan payda eşitleme algoritmasını formelleştirdiği söylenebilir. Diğer bir ifade ile formel payda eşitleme algoritmasının oluşturulması, muhtemel kombinasyonlar arama ihtiyacını ortadan kaldırmıştır. Aynı çalışmada başka bir örnek ise Terasa'nın denk kesir üretirken

kesir kiti gibi imaj oluşturma seviyesinde kullandığı veya standart kesir toplama algoritmalarını bir kenara bırakarak Şekil 2.4'teki tabloyu oluşturmasıdır.



Şekil 2.4. Terasa'nın Denk Kesir Kombinasyonlarını Oluşturduğu Tablo (Pirie ve Kieren, 1994, s.169)

Üçüncü geri dönmeye gereksinim duymama sınırı, gözlem yapma seviyesi ile yapılandırma seviyesi arasında bulunmaktadır. Pirie ve Kieren (1989) gözlem yapma aşamasında, ikinci dereceden fonksiyonlarla ilgili, diskriminant formülü, kareye tamamlama gibi teoremlerin oluşmasını beklemektedir. Yapılandırma aşamasında ise bu teoremleri aksiyomatik olarak ispat etmesi beklenmektedir. Yapılandırma seviyesinde ispatları yapmak için tekrardan bu teoremleri oluşturma (diğer bir deyişle gözlem yapma) seviyesine geri dönmesine ihtiyaç yoktur. Sadece bu teoremleri ispatlar. Benzer şekilde Pirie ve Kieren'in (1994, s.171) çalışmasına konu olan Terasa isimli öğrenci gözlem yapma seviyesinde, "herhangi bir toplananı eşdeğer parçalarla değiştirerek iki bölü üç için başka kombinasyonlar elde edebilirim" gibi teoremler üretebilecek durumdadır. Ancak bu teoremleri ispatlayabilecek gerekli gerekçelendirmeleri yapabilecek durumda değildir. Şayet gerekçeler üretip bu teoremleri ispatlayabilseydi yapılandırma seviyesine geçiş yapabilecekti. Yapılandırma seviyesinde ispat yaparken de tekrardan bu teoremleri üretme ihtiyacını duymaması beklenilmektedir.

2.1.4. Geri Katlama

Anlamanın lineer olmayan bir süreci vardır. Martin'e (2008) göre anlama sürecinde birey aktiftir ve dinamik bir gelişim süreci söz konusudur. Bu süreç, anlamanın seviyeleri veya yolları arasında doğrusal olmayan sürekli bir hareket bulundurur. Bu başlık altında anlamanın dinamik sürecini belirleyen geri katlama ele alınacaktır. Önce geri katlama

tanımlanacak ve sonrasında bunun önemi üzerinde durulacaktır. Geri katlamanın türleri, müdahale ve geri katlama kategorileri başlığı altında detaylandırılacaktır.

Birey, anlama seviyelerinde ilerledikçe önüne mevcut anlama seviyesiyle çözemeyeceği problemler çıkması olasıdır. Bu durumda birey, mevcut yetersiz anlamasını genişletmek için daha iç (alt) seviyelere geri dönme ihtiyacı hissedecektir. Bu zihinsel işleme ***geri katlama*** (folding back) denilmektedir. Birey, daha iç seviyelere geri döndüğünde, o an gerçekleşen anlaması ile daha iç seviyelerde geliştirdiği anlamasını üst üste koyar ve böylece anlamasını pekiştirir (Pirie ve Kieren, 1994; Pirie ve Martin, 2000). Martin (2008, s.64) geri katlamayı "*Matematiksel bir kavrama ilişkin var olan anlama ve fikirlerin yeniden değerlendirilmesi ve bunlar üzerine yeniden çalışılmasını kapsayan bir iç katmana dönüş eylemi*" şeklinde tanımlamaktadır.

Martin (2008) geri katlama eylemini açıklamak için kâğıt katlama metaforunu kullanmaktadır. Kâğıdın her katlandığında daha da sağlamlaşmasını, derinleşen anlama olarak yorumlamaktadır. Bu durumu Pirie ve Martin (2000, s.131) ise "daha iyi yapılandırılmış (sağlamlaşmış) bir anlama inşa etme" ifadeleriyle açıklamaktadır.

Pirie ve Kieren (1994) geri katlamanın çok değerli olduğunu ifade eder. Çünkü birey bunu yaparak, iç seviyelerdeki anlamalarını yeniden inşa eder, zenginleştirir ve sağlamlaştırır. Böylece dış seviyedeki anlaması da desteklenir, güçlenir, sağlamlaşır ve zenginleşir.

Birey geri katlama yaptığında iç seviyede yapacağı eylemler daha önce o seviyede yapacağı eylemlerden farklı olacaktır. Bunun sebebi, o an için, alt seviyede bulunma sebebi daha üst seviyede bir anlama tarafından uyarılmış olunmasıdır (Pirie ve Kieren, 1994). Bu uyarılmışlık yetişkinlerin çocukluk yıllarında kendilerine karmaşık gelen problemlere "şimdiki aklım olsaydı" perspektifinden bakması gibi düşünülebilir. Üst seviyede bir anlama ile uyarılması ve bu bilişsel düzeyle eylemde bulunulması açısından yeniden inşa edilecek yapıların daha önceki yapılardan çok daha farklı olması muhtemeldir (Pirie ve Kieren, 1989).

Pirie ve Kieren (1989) anlamanın seviyelerini ikinci dereceden fonksiyonlar üzerinden örneklendirmektedir. Verilen varsayıma dayalı örnek şu şekildedir. Öğrenci değerleri deneyip tablo oluşturmak suretiyle imaj oluşturma seviyesindeki eylemlerini tamamlar, böylece imaj oluşturur. Bu imajların "U gibi eğriler çizer" gibi temel özellikleri fark ederek oluşturduğu imaja sahip olur. Grafiklerin kollarının olduğu ve bu kolların aşağı-

yukarı doğru gittiği gibi özellikleri fark eder. İkinci dereceden fonksiyonların $y = ax^2 + bx + c$ şeklinde bir fonksiyon ailesi olduğu tanımını yapmak suretiyle anlamasını formelleşme seviyesine ulaştırır. Gözlem yapma aşamasında ise kökler, tepe noktası ve diskriminant yöntemi gibi teorik çıkarımlarda bulunur. İkinci dereceden fonksiyonlar üzerinden verilen anlama seviyeleri örnekleri lineer ve sıralı gibi görünse de bireyin "ikinci dereceden denklemlerin tek bir çözümü olabilir mi?" gibi bir sorgulamayla imaj oluşturma seviyesine geri katlama yapması ve böylece grafik ve tablo yapması mümkündür. Ancak bu geri katlamada oluşturulacak olan imajlar ilk imajlardan oldukça farklı ve üst seviyede olması söz konusudur. Geri dönüş ile imaj oluşturma eylemi keşif yapmayı sağlayacak bir düzeydedir. Bu geri katlama eylemi, bu seviyeye kadar ikinci dereceden fonksiyonlar için tüm öğrenme seviyelerinin doğrulanmasını veya tutarlı bir şekilde görülmesini sağlar ve aynı zamanda yeni zorluklar karşısında ikinci dereceden fonksiyon bilgisinin yineleyen şekilde yeniden yapılandırılmasına izin verir.

Pirie ve Kieren (1994) on yaşındaki Katia isimli öğrencinin kesirlerde toplama konusunda anlamasının gelişimini incelemiştir. Katia paydaları ikinin katı olan kesirlerle çalışıp kesirlerde toplama işleminde formelleştirme seviyesine kadar ilerleme sergilemiştir. Sonra paydası ikinin katı olmayan kesirlerle çalışması istenilmiştir. Bu noktada öğretmen payda eşitleme algoritması önerebilirdi. Ancak bu, Katia'nın kendisinin başarması gereken anlama sürecinin gerçekleşmesini garantileyemeyebilirdi. Bu noktada öğretmen kesirlerin anlamını sormak suretiyle Katia'nın tekrardan imaj oluşturma seviyesine inmesini ve yeni bir imaj oluşturmasını sağlamıştır. İmaj oluşturma seviyesinde yeni bir takım eylemlerden sonra Katia "altları çarpıyorsun, üstleri topluyorsun" demiştir. Bu durum öğretmen müdahalesiyle gerçekleşen geri katlamanın anlamaya katkı sağladığını gösterir niteliktedir.

Martin (2008) geri katlamanın önemini Graham ve Don isimli iki öğrencinin ikinci dereceden denklemlerle ilgili çalışmalarından bir kesit sunarak örneklemektedir. Öğrenciler, baş katsayısı bir olan ($y = ax^2 + bx + c$ için $a = 1$) $y = x^2 + bx + c$ formundaki ikinci dereceden denklemler ile çalışmışlardır. Bilgisayar programı aracılığıyla bu tarz fonksiyonların y eksenini ($x=0$ için $y=c$ olduğundan) c noktasında kestiğini fark etmişlerdir ve fonksiyonun x eksenini kestiği noktalar için matematiksel olarak ispatlamasalar da ($y=0$ için $0 = x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$) b kaysayısının $-(x_1 + x_2)$'e eşit olduğunu ve $c = x_1x_2$eşitliğini fark

etmişlerdir. Böylece özellikleri fark etme seviyesine ulaşmışlardır. Baş katsayısı iki olan (a=2 ve $y = ax^2 + bx + c$) ikinci dereceden fonksiyonlarla çalıştıklarında tekrar bilgisayar aracılığıyla grafikler çizmiş ve incelemeye başlamışlardır. Böylece imaj oluşturma seviyesine geri dönüş söz konusu olmuştur. Bu örnekte dikkat edilmesi gereken iki husus vardır. Birincisi tekrar geri katlama yaptıklarında belirli bir bilinçle imaj oluşturma seviyesine geri dönüş söz konusudur. İlk imaj oluşturdukları zamana göre daha bilgili ve deneyimlidirler. İkinci husus ise geri katlamanın önemidir. Şayet öğrenciler kendi kendilerine "baş katsayısı 2 olan denklemler için de çalışalım" demeselerdi ve böylece geri katlama yapmamış olsalardı ($a = 1$ durumuyla) sınırlı, ($a \neq 1$ durumları için) kısıtlı ve hatalı bir çıkarımda bulunmaları söz konusu olacaktı.

2.1.5. Müdahale

Bir önceki başlık altında geri katlama tanımlanmaya çalışılmıştır. Bu başlık altında geri katlamanın tetikleyicisi olan müdahale kısaca ele alınacaktır. Müdahale türlerinin derinlemesine incelenmesi müdahale ve geri katlama kategorileri başlığı altında yapılacaktır.

Pirie ve Kieren (1992) müdahale türleri için bir açıklama getirmiştir. Bu çalışmada kesirlerin grafik temsili ele alındıktan sonra küme temsilini ele almak istenmiştir. Bunun için on iki yumurtayı dört kişi arasında eşit paylaşılması gibi bir problem durumu sunmuşlardır. June üç derken Shiela isimli öğrenci 1/4 demiştir. June ve Shiela anlaşmakta zorluk yaşamışlardır. Shiela, arkadaşına yardımcı olmak için görsel modelleme yapmıştır. 2 hafta sonra mülakat yapılmış ve on altı yumurtanın dört kişi arasında paylaştırılması istenmiştir. Her iki öğrenci de 4x4 lük bir tablo çizmiştir. Shiela dört yumurtayı yan yana olan hücrelere yerleştirirken June çapraz olarak yerleştirmiştir. Shiela bu gösterime önce itiraz etmiş sonra gösterimin doğru olduğu kanaatine varmıştır. Bu örnekte iki farklı nokta dikkat çekmektedir. Birincisi: Shiela problem durumuyla ilk karşılaştığında imaja gerek duymadan 1/4 demiştir. June standart yol ve yöntemlere sadık kalmış ve imaj oluşturmamayı tercih etmiştir. Shiela yardımıyla June imaj oluşturmuştur. İki kişilik bir tartışma grubunda bu denli bir farklılık oluyorken sınıf ortamında daha geniş bir yelpazede bir farklılık olması söz konusudur. İkincisi: (10 gün sonra) yapılan mülakat sonucuna göre Shiela zihnindeki imaja sıkı sıkıya bağlıyken June farklı ve orijinal bir

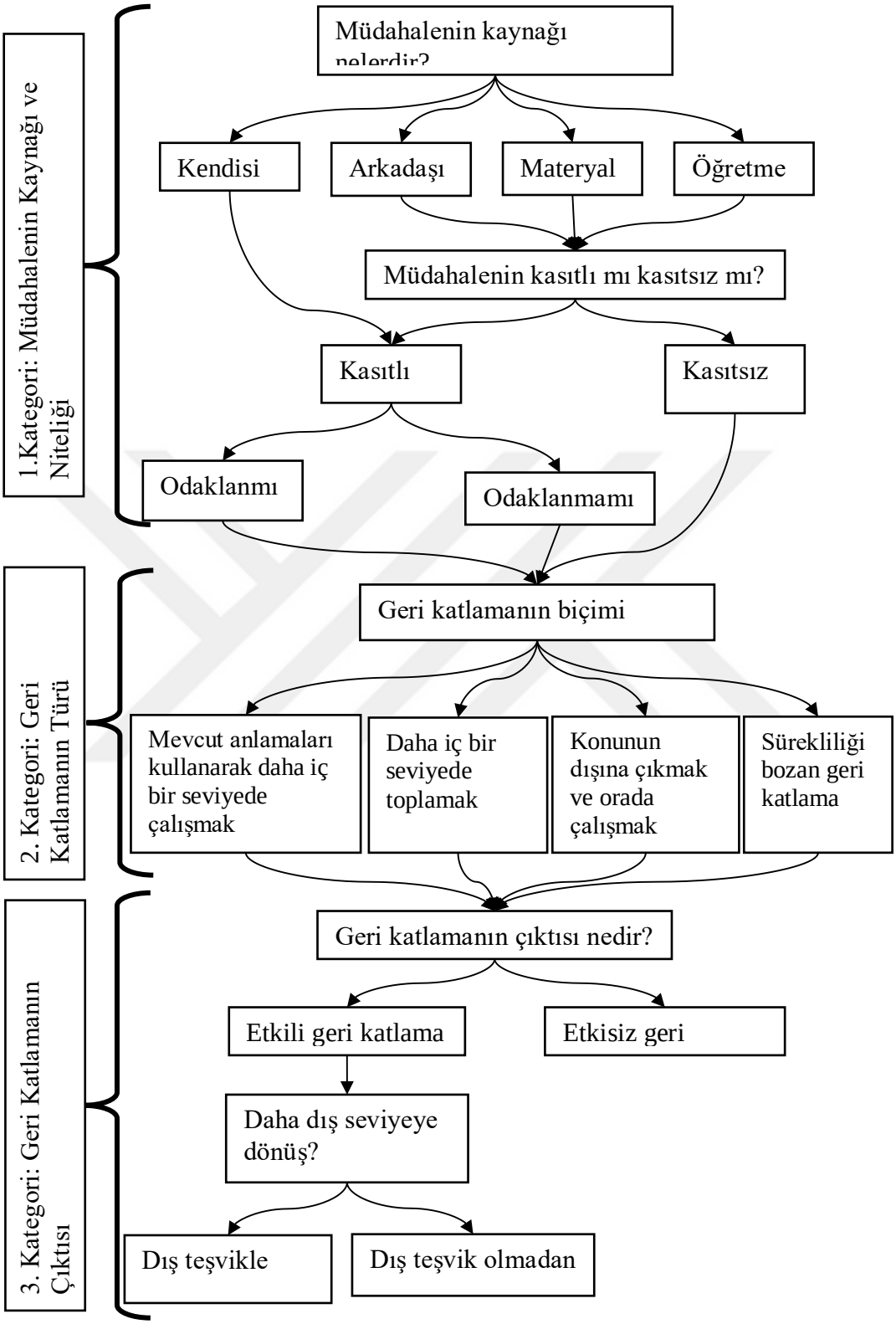
imaj oluşturmayı başarmıştır. Buradan hareketle bireylerin imajları ve imaj oluşturma şekilleri kendilerine özgüdür denilebilir.

Yukarıda dikkat çekilen noktalara ek olarak Pirie ve Kieren (1992) müdahaleler ile ilgili bir özelliği daha vurgulamaktadır. ***Provokatif*** (***provocative***, öğrencileri daha dış anlama seviyelerine iten) eylemler veya ***invokatif*** (***invocative*** öğrencilerin daha az gelişmiş anlama seviyelerine geri dönmelerini tetikleyen) eylemler, öğrenen bireye göre değişir. Diğer bir deyişle öğretmen bir müdahalede bulunduğunda öğrencilerden biri daha dış bir anlama seviyesine ulaşabilirken diğer bir öğrencinin geri katlama yapıp daha iç bir seviyeye dönmesi pek muhtemeldir. Sonuç olarak müdahalenin türü, öğrencinin tepkisine göre belirlenir.

Martin (2008) göre geri katlama, bireylerin mevcut bilgilerle çalışmasını, bu bilgileri kullanmasını ve bu bilgiler üzerine eklemeler yapmasını sağlar. Bunun da tek bir yolu yoktur. Yukarıda ele alınan örnekteki müdahale türlerinden (Pirie ve Kieren, 1992) fazlası da mümkündür. Bu nedenle geri katlama ve müdahale süreçlerinin kategorileştirilip türlere ayrılması, araştırmacılara ve öğretmenlere matematiksel anlamanın ortaya çıktığı ve geliştiği gözlemleme ve sınıflandırmada kullanabilecekleri güçlü bir araç sunabilir.

2.1.6. Müdahale ve Geri Katlama Kategorileri

Martin (2008) matematiksel anlamanın gelişimiyle ilgili Pirie ve Kieren tarafından çizilen teorik çerçeveyi geri katlamalar ve müdahaleleri kategorize ederek genişletmiştir. Yapılan incelemede; 1) müdahalenin kaynağı ve niteliği, 2) müdahale neticesinde yapılan geri katlamanın türü ve 3) geri katlamanın sonucu olmak üzere üç ana kategori oluşturulmuştur. Bu ana kategorilerin de alt türleri bulunmaktadır. Konuyla ilgili şema aşağıda sunulmaktadır.



Şekil 2.5. Müdahale ve Geri Katlama Mekanizması (Martin, 2008, s.72)

2.1.6.1 Müdahale Türleri

Birinci kategorinin (müdahalenin kaynağı ve türleri) ilk alt kategorisi müdahalenin kaynağıdır. Bu alt kategorideki türlerin oluşmasındaki soru: "Müdahale ne-kim tarafından yapıldı" dır. Gelişen anlama sürecinde bireye arkadaşı, öğretmeni ve öğretimsel materyal müdahale edilebilir ya da bireyin kendi iç dinamikleri bu anlama sürecine tetikleyici olabilir. Dolayısıyla müdahalenin kaynağı; a) kişinin kendisi, b) arkadaşı, c) materyal ve d) öğretmen olmak üzere dört türlüdür (Martin, 2008).

Müdahaleler kaynağın dışında geri katlamayı amaçlama durumuna göre de kategorileştirilebilir. Müdahale, bireyin geri katlama yapmasını amaçlıyorsa kasıtlıdır. Bu amaç, gözlemci tarafından beyan edilir. Bireyin geri katlama yapması amaçlanmadığı halde yapılan müdahale, bireyin geri katlamasına sebep oluyorsa buna kasıtsız müdahale denir. Dikkat edilmesi gereken önemli hususlardan biri, birey kendi düşünceleri neticesinde çözmeye çalıştığı probleme yanıt aramak için geri katlama yaptığında, birey neden bu eylemde bulunduğunun bilincinde olduğu için, kasıtlı müdahale söz konusudur (Martin, 2008).

Şayet müdahaleyi yapan kaynak tarafından bireye hangi anlama seviyesine geri dönülmesini öneriliyor ya da söyleniyorsa bu müdahale odaklanmış kasıtlı müdahaledir. Müdahale açık ve net bir şekilde (eksik de olsa) geride bırakılmış bir anlama seviyesine dönmeyi teşvik etmektedir. Aksine müdahalenin kaynağı net bir şekilde geride kalan hangi seviyeye, matematiksel fikir ya da anlayışa geri dönüleceğini net olarak söylemeden sadece geri katlamayı teşvik ediyorsa odaklanılmamış kasıtlı müdahale söz konusudur. Odaklanılmamış müdahale türünde kullanılan ifadeler genel olarak "emin misin?", "başka bir yolu daha olabilir mi?", "peki ya öyle değil de böyle olsaydı" gibidir. Bu tür yorum ve sorular çeşitli yanıtlara olanak tanır ve öğrencinin tek bir belirli yanıt vermek veya belirli bir eylemi gerçekleştirmesinden ziyade kendi düşüncesini keşfetmesini sağlar. Kasıtsız müdahaleler net bir şekilde hangi anlayışa geri dönülmesi gerektiğini önermediğinden odaklanılmamış müdahale türüne bir örnek teşkil eder (Martin,2008).

Odaklanmış Kasıtlı Öğretmen Müdahalesi

Martin'in (2008) çalışmasında odaklanmış kasıtlı ve odaklanmış öğretmen müdahalesi, dairenin içindeki üçgenin alanını bulmaya çalışan iki öğrenci ve öğretmenin diyaloğuyla örneklenmektedir. Öğretmen öğrencilerden dairenin içindeki üçgeni başka yere çizmelerini ve "bu üçgen hakkında bildiğiniz her şeyi yazın" diyerek imaj oluşturma katmanından ön bilgi katmanına geri katlama yapmalarını sağlamıştır. Sonra "üçgenin alanını nasıl bulabiliriz" sorusuyla keşif yapmalarını ya da yapabilecekleri bir takım eylemleri teşvik etmektedir. Mevcut anlamalarından bir formül hatırlamalarını ve bunu kullanmalarını istemektedir. Dolayısıyla ön bilgi katmanına geri katlamayı amaçlayan kasıtlı ve odaklanmış bir müdahale de bu aşamada gerçekleşmiştir.

Odaklanmış Kasıtlı Akran Müdahalesi

Martin'in (2008) çalışmasında odaklanmış kasıtlı akran müdahalesine üçgenin alanını bulmaya çalışan iki öğrenci arasındaki diyalog örnek olarak verilmektedir. Üçgenin alanını bulmak için çalışan iki arkadaştan biri trigonometri aracılığıyla alan hesaplamayı bilmiyorken diğeri bu bilgiden faydalanabileceğini bilmektedir. Ancak ne yapması gerektiğini hatırlamamaktadır. Öğrencilerden biri "hatırlarsak iyi olur" deyip daha önceki bir çalışmayı bulmak için alıştırma kitabına bakarak "bak burada nasıl yaptık, görüyor musun" der. Üçgenin alanını bulma çalışması imaj oluşturma seviyesinde bir eylemdir. Daha önceki çalışmayı hatırlama çalışması açık bir şekilde odaklanmış kasıtlı bir akran müdahalesidir.

Odaklanmış Kasıtlı Kendine Müdahale

Daha önce de bahsedildiği üzere kişinin kendisine yaptığı müdahaleler kasıtlıdır. Kendine yapılmış odaklı müdahaleye örnek olarak Martin'in (2008) yaptığı çalışmada raporlanan durum verilebilir. Bu örnekte iki arkadaş, baş katsayısı bir olan ikinci dereceden fonksiyonların grafiklerini (eksenleri kesen noktaları) incelemektedir. Bu iki öğrenci, çalışmaları sonucunda kökler toplamının katsayılarla ilgisine yönelik soyutlama düzeyinde bir anlayış geliştirmişlerdir. Ancak öğrencilerden biri "şimdi $a \neq 1$ gibi durumlar üzerinde çalışmamız gerekiyor. O yüzden şimdi a'yı *2* yapmamız gerekiyor. O zaman $2x^2 - 7x - 44$ koyalım. Bir sonraki adımda bunu deneyelim. Bakalım nasıl oluyor. Henüz bulamıyorum, çünkü şu an yeni bir şeye geçiyoruz" diyerek kendine bir

müdahalede bulunmaktadır. Baş katsayının bir olmaması durumunu inceleyebilmek için bilgisayardan tekrar grafik çizdirmesi gerektiğinin farkında olması imaj oluşturma seviyesine dönmesi gerektiğini bildiği anlamına gelmektedir. Bu nedenle odaklanmış bir müdahale söz konusudur. Kişinin kendisine yaptığı müdahale kasıtlı olacağından buradaki müdahale odaklanmış kasıtlı kendine müdahale türüne bir örnek teşkil etmektedir.

Odaklanmamış Kasıtlı Öğretmen Müdahalesi

Odaklanmamış kasıtlı öğretmen müdahalesine Martin (2008) şöyle bir örnek vermektedir. İki öğrenci daire diliminin alanını bulmaya çalışmaktadır. Çeyrek daire diliminin alanını dörde bölmek suretiyle alanını hesaplamayı bilmektedirler. Dolayısıyla bununla ilgili imaj oluşturma seviyesinde bir anlayış geliştirmişlerdir. Ancak çeyrekten daha küçük bir daire dilimi için ne yapmaları gerektiğini bilmemektedirler ve öğretmenden yardım istemişlerdir. Öğretmen "Peki ya bunun çeyrek olup olmadığını bilmiyorsanız?" sorusunu sorarak tekrar imaj oluşturma seviyesine geri dönmelerini ve daire diliminin açısı ile alanı arasındaki ilişkiyi elde ederek bir imaj oluşturmalarını sağlamayı amaçlamaktadır. Bu yönüyle kasıtlı bir öğretmen müdahalesi söz konusudur. Öğretmenin sorusu herhangi bir fikir ya da anlayışa dönmeyi net bir şekilde işaret etmediğinden çeşitli muhtemel yanıtları teşvik eden bir sorudur. Bu yönüyle öğretmenin müdahalesi odaklanmamıştır.

Odaklanmamış Kasıtlı Akran Müdahalesi

Martin (2008) odaklanmamış kasıtlı akran müdahalesine örnek olarak ikinci dereceden denklemlerin grafiklerini bilgisayarda çizip inceleyen iki öğrenciyi vermiştir. Öğrenciler, daha önce ikinci dereceden fonksiyonların cebirsel temsilleriyle çalışmış ve belirli bir anlayışa sahiptirler. Ancak geri katlama yapıp grafiklerle ilgili anlayışlarını geliştirmeleri gerekmektedir. Bunun için öğrencilerden biri "bunları biraz daha irdelersek daha iyi anlayabiliriz." demektedir. Bu cümledeki "daha iyi anlama" ve "biraz daha irdeleme" ifadeleri ile öğrenci, arkadaşının kendisiyle birlikte imaj oluşturma katmanına geri katlama yapmasını istemektedir. Bu yönüyle kasıtlı bir müdahaledir. Ancak öğrenci "biraz daha irdeleme" ifadesinden öğrencinin tam olarak hangi anlayış ya da fikre geri dönüleceğini ve ortaya ne çıkacağını kestiremediği sonucuna ulaşılabilir. Bu yönüyle de odaklanmamış bir müdahaledir.

Odaklanmamış Kasıtlı Kendine Müdahale

Martin (2008) odaklanılmamış kasıtlı kendi kendine müdahaleye örnek olarak daire diliminin alanını hesaplamaya çalışan iki öğrenciyi vermektedir. Öğrencilerden biri çalışmanın başında alan ile ilgili ön bilgisine geri katlama yapmak istemiştir. "Burada bununla ilgili bir şey olmalı. Bilmiyorum, alan bölümünü arıyorum." demiştir. Daha önce de bahsedildiği üzere kişinin kendisine yaptığı müdahale, doğası gereği kasıtlıdır. Açık ve net olarak bir fikir ya da anlayışa geri dönmek yerine "bir şeyler olmalı" demesi, geri katlamayı tam olarak nereye yapacağı konusunda fikir sahibi olmadığını dolayısıyla yapacağı geri katlamanın odaklanmamış olduğunu göstermektedir.

Kasıtsız Öğretmen Müdahalesi

Kasıtsız müdahaleler; geri katlamayı hedeflemediği halde kişiyi önceki anlama seviyelerine götüren müdahale çeşitleridir. Geri katlamayı amaçlamayan bir müdahale, bir fikir ya da anlayışa geri dönülmesini de amaçlamadığından odaklanmamıştır. Martin (2008) kasıtsız öğrenmen müdahalesine türev konusunda çalışan iki öğrenci ve öğretmenin diyaloğundan alıntı yaparak örnek vermektedir. Öğretmen, mevcut durumun daha iyi anlaşılabilmesi için $[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}]$ ifadesinin nereden geldiğini sormuştur. Öğrencilerden biri hemen imaj oluşturma katmanına geri dönerek *h*'nin sıfıra gitmesi üzerine daha önceden oluşturmuş olduğu düşüncelerini açıklamaya başlar. Bu örnekte öğretmen geri katlamayı amaçlamasa da öğrenci geri katlama yapmıştır. Geri katlama yapılması beklenmediği halde geri katlama yapıldığı için kasıtsız öğretmen müdahalesi söz konusudur.

Kasıtsız Akran Müdahalesi

Kasıtsız akran müdahalesine örnek olarak Martin (2008) dört lisans öğrencisi arasında geçen diyaloğu sunar. Geometrik şekillerle uğraşan bu öğrencilerden biri, problemi çözmeye çalışırken alışık olmadığı bir geometrik şekil ortaya çıkar. Belki de şekil ona anlamsız geldiği için "Bu nedir, Allah aşkına?" der. Bu ifadesinde öğrenci arkadaşlarının geri katlama yapmasını amaçlamamasına rağmen başka bir arkadaşı, ön bilgilerinde mevcut bir fizik kavramına vurgu yaparak şekli açıklamaya çalışır ve böylece ön bilgi seviyesine geri katlama yapar. Bu durum, geri katlama amaçlanmamış olmasına rağmen

arkadaşının geri katlama yapmasına sebep olması yönüyle kasıtsız akran müdahalesine örnek olarak verilmektedir.

Kasıtsız Materyal Müdahalesi

Kasıtsız materyal müdahalesine Martin (2008) limit üzerine çalışan iki öğrencinin $\lim_{h\to 0} \frac{h}{3h}$ durumunda yaşadıkları karmaşayla örnek verir. Öğrenciler bir dizi limit sorusu çözdükten sonra $\lim_{h\to 0} \frac{h}{3h}$ durumuyla karşılaşırlar. Sıfırın sıfıra bölünmesi anlamsız geldiği için "hiçbir şeyi hiçbir şeye bölmek" gibi bir sorgulamaya girerler. Sıfıra "hiçbir şey" anlamını vermeleri, sayılarla ilgili ön bilgilerine geri döndüklerinin göstergesidir. Bu problemde limitle ilgili anlayışın geliştirilmesi amaçlansa da aritmetikle ilgili ön bilgilere kasıtsız bir geri katlamaya sebep olmuştur. Dolayısıyla kasıtsız materyal müdahalesi söz konusudur.

Odaklanmış/Odaklanmamış Kasıtlı Materyal Müdahalesi

Materyal tarafından yapılan odaklanmış ve kasıtlı müdahaleye varsayıma dayalı bir örnek verilebilir. Çünkü Martin'in (2008) oluşturduğu teorik çerçevede buna örnek teşkil eden durum ortaya çıkmamıştır. Ancak araştırmacı bunun mümkün olabileceğini ifade etmiştir. İyi tasarlanmış öğretim materyalleri (bilgisayar programı, ders materyali ya da kitaplar) odaklanmış kasıtlı müdahaleler yapabilir. Örneğin çevresi sabit bir üçgenin alanının alabileceği değerlerin aralığını bulmak isteyen bir öğrenci grubu ele alınsın. Bu öğrencilere iki ucu bağlı bir ip verilsin ve üçgenin bir kenarının sabit olması durumunda üçgenin tepe noktasının nasıl değişebileceği sorulsun. Bu durumda öğrenciler, tepe noktasının geometrik yerinin bir elips oluşturduğunu fark edeceklerdir. Dolayısıyla elips ile ilgili ön bilgilerine muhtemel bir geri katlama yaşayabileceklerdir.

2.1.6.2. Geri Katlamanın Türleri

Martin'in (2008) müdahale ve geri katlama süreciyle ilgili ortaya koyduğu teorik çerçevenin ikinci kategorisi geri katlamanın biçimidir. Daha önce de bahsedildiği üzere müdahale kavramının söz konusu olabilmesi için (kasıtlı ya da kasıtsız yapılsın fark etmez) anlama sürecini geliştiren bireyin geri katlama yapması gerekir. Bu kategoride dikkat edilmesi gereken husus, bireyin yaptığı geri katlamanın niteliğidir. Bu niteliğe bağlı olarak geri katlama türleri şekillenmektedir. Martin'in (2008) yaptığı sınıflamaya

göre dört tür geri katlama söz konusudur. Bunlar: 1) Mevcut Anlamaları Kullanarak Daha İç Bir Seviyede Çalışmak, 2) Daha İç Bir Seviyede Toplamak, 3) Konunun Dışına Çıkmak ve Orada Çalışmak ve 4) Sürekliliği Bozan Geri Katlama'dır.

Mevcut Anlamaları Kullanarak Daha İç Bir Seviyede Çalışmak

Geri katlama türlerinin ilki, mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir katmanda çalışmadır. Bu geri katlama türünün özelliklerini açıklamadan önce bu türe Martin (2008) tarafından gösterilen örnek üzerinde durmak açıklayıcı olacaktır. Bu örneği anlaşılır kılmak için de taksi geometrisinden kısaca bahsetmek gerekmektedir. Sokak ve caddelerden örülü bir şehir sisteminde doğrusal ya da çember yayı gibi bir yol izlemek (binaların içinden geçilemediği için) mümkün değildir. Bunun yerine sokakların ve caddelerin kesişim noktalarından optimal güzergâh belirleme durumu söz konusudur. Bu tarz problemler taksi geometrisi adı altında ele alınmaktadır.

Martin'in (2008) sunduğu örnekte dört ilköğretim matematik öğretmen adayı, taksi geometrisini geliştirmeye çalışmaktadır. Öğretmen adayları bazı denemeler yaparak imaj oluşturmuş, sonra bu eylemleri neticesinde imaja sahip olma seviyesine ulaşmışlardır. İmajların özelliklerini fark ederek özellikleri fark etme seviyesinde bir anlayış geliştirmişler. Bu özellikleri tam da formülleştirecekken öğretmen adaylarından biri "Bence biz, şimdi bunu kanıtlamak için vakit harcamamalıyız. Çalışmaya devam edip başka şekilleri incelemeli ve cebirsel olarak kanıtlamak üzere buna en son geri dönmeliyiz…" demiştir. Bu müdahale ile imaj oluşturma seviyesine geri dönüşü önermiştir. Dolayısıyla burada yapılan müdahale, odaklanmış akran müdahalesidir. Öğretmen adayının bu müdahalesindeki amacı daha fazla şekil için örüntü oluşturmaktır. Yeterli miktarda imaj oluşturulduğunda ise bunlar arasındaki ilişkiler daha da netlik kazanacaktır. Daha önce fark ettikleri özellikler (mevcut anlayış) ile (daha iç katmanda) yeniden oluşturacakları imajlar daha bilinçli bir şekilde biçimlendirilecektir. Böylece daha sağlam bir anlayış geliştirmeleri mümkün olacaktır.

Yukarıda sunulan örnekte de görüldüğü üzere mevcut bilgilerle daha iç katmana geri katlama yapıldığında ileri seviyedeki anlayış ve bilinçle iç seviyede çalışılması söz konusudur. Dolayısıyla iç katmanda ileri bir bilinç düzeyi ile çalışılması muhtemeldir. Birey bu katlama sonucunda ya mevcut anlayış yapısını değiştirir ya da mevcut anlayışına yeni yapılar ekleyerek bu yapıyı geliştirir. Her iki durumda da mevcut anlayış daha

sağlam temellere kavuşur, sadeleşir ve estetik bir hal alır. Burada dikkat edilmesi gereken husus, geri katlama sürecinde mevcut anlamaların kullanılması ve yüksek bir bilinçle alt seviyelerde çalışılmasıdır (Martin, 2008).

Daha İç Bir Seviyede Toplamak

Geri katlama türlerinin ikincisini Martin (2008) "daha iç seviyede toplamak" olarak isimlendirmiştir. Buna Pirie ve Martin (2000) "*toplama (collecting)"* ismini vermiştir. Bu geri katlama, bireyin bulunduğu seviyede ilerleme kat etmesi için neye ihtiyacının olduğunu bilmesi, bunu daha önce öğrendiğinin de farkında olması, fakat bunu otomatik olarak geri çağıramaması durumunda ortaya çıkar. Dolayısıyla önceki bilgi ya da anlayış geri çağrılır (hatırlanır), ihtiyaçlar doğrultusunda izlenir ve eğer işe yarıyorsa o an çalışılan problem durumuyla ilişkilendirmek suretiyle sağlamlaştırılabilir. Bu açıdan bakıldığında standart bir hatırlamadan daha yüksek bir öz denetim söz konusudur (Martin, 2008). İhtiyaca binaen oluşmuş ve hatırlanamayan mevcut bilgiyi izleme ya da duruma uyarlamayı ve sonuç olarak daha da sağlamlaştırmayı gerektiren bir geri katlama durumu söz konusudur. Dolayısıyla standart bir hatırlama eylemi değildir (Martin, 2008; Pirie ve Martin, 2000).

Bu geri katlama türünde dikkat edilmesi gereken iki şey vardır. Birincisi birey bu zihinsel eylemi yaptığında ilk anlayışını yeniden inşa etmez. Sadece bulur ve mevcut problem türüne adapte etmeye çalışır (Martin, 20008; Pirie ve Martin, 2000). İkincisi ise birey, hatırlama eylemi için defter ya da kitabına başvurabilir. Fiziksel bir eylem gibi görünse de kişinin ihtiyaç duyduğu anlayışı ne zaman edindiğini bilmesi ve bunu nereden edinebileceğini bilmesi yönüyle zihinsel bir eylem söz konusudur (Pirie ve Martin, 2000).

Martin (2008) daire diliminin alanını bulmaya çalışan iki öğrenci arasındaki diyalog ile bu geri katlama türünü örneklendirmektedir. Müdahaleler açıklanırken (odaklanılmamış kasıtlı kendi kendine müdahale) verilen örneğin sonucunda bu geri katlama türü örneklenmiştir. Hatırlatmak gerekirse daire diliminin alanını hesaplamaya çalışan bir öğrenci alan ile ilgili ön bilgilere geri dönülmesi gerektiğini ifade etmiştir. Bu örnekte öğrenci neyi (alan hesaplama ile ilgili formülleri) bilmediğinin farkındadır. Dolayısıyla imaj oluşturma seviyesinden ön bilgi seviyesine bir geri katlama yapması söz konusudur. Öğrenci daha önceden bildiği ancak hali hazırda kullanamadığı bilgiyi (çemberin alanını hesaplama) ön bilgi seviyesine giderek bulur (toplar) ve imaj oluşturma seviyesine geri

dönerek bu bilgiyle çalışmaya devam eder. Bu örnek durum Pirie ve Martin'in (2000) çalışmasında da benzer şekilde yorumlanmıştır.

Pirie ve Martin'in (2000) çalışması büyük oranda bu geri katlama türüne odaklanmaktadır. Bu makalede sunulan örneklerden biri "93-47=?" sorusu üzerinde çalışan öğrencilerin yaşadıkları zihinsel deneyimdir. Paulo adlı öğrenci bu problemle uğraşırken 3'ten 7'yi çıkarmaya çalışırken onlar basamağındaki 9'dan bir onluk almayı ve 13'ten 7'yi çıkarmayı doğrudan yapamamıştır. Böyle bir şey yapabileceğini anımsayıp teyit etmek için kitabına bakmıştır ve böylece probleme çözüm üretebilmiştir. Bu örnekte öğrenci önceki anlamalarında bir değişim yapmamıştır. İşe yarayacak bir bilgisinin olduğunun farkındadır ve bunu anımsayarak amacına uygun kullanmıştır.

Pirie ve Martin'in (2000) çalışmasında ilk bakışta "daha iç seviyede toplamak" olarak nitelendirilmesi muhtemel ancak durumun tam da böyle olmadığı örnekler de sunulmaktadır. Bu örneklerden biri $\lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h+2h^2} = ?$ Problemini çözmeye çalışan öğrenciler üzerinde verilmektedir. Bu örnekte ismi Ann olarak kodlanan öğrenci sıfıra "hiç" demekte ve sıfıra bölünebilecek bir sayı olarak bakmaktadır. Sıfır ile ilgili bilgilerine geri katlama yapmasına rağmen problemi çözmesine yardım edebilecek yeterli bir bilgiye sahip olmadığı için probleme çözüm üretememektedir.

Daha iç bir seviyede toplama yapma şekli bireylere göre farklılık göstermektedir. Örneğin bazı bireyler otomatik olarak daha iç katmandaki anlamaya hemen erişebilir ve bunu kullanabilir. Diğer taraftan bazı bireylerde ise durum bu kadar hızlı olamayabilir (Pirie ve Martin, 2000). Çünkü matematiksel anlamanın gelişimi bireysel bir olgudur. Ancak farklı bireylerin ortak yönlerini tespit etmek, öğretmene, etkili müdahaleler yapma olanağı sunar. Bunun yanında öğrencilerinin problem çözme ve üstbilişsel düşünme gibi becerilerini geliştirme fırsatı sunabilir.

Daha iç bir seviyede toplamanın faydası, toplanan şeyin niteliğine ve yeni durumda nasıl kullanılacağına bağlıdır. "Daha önce böyle bir problemle karşılaştım mı?" ya da "Bu problemi çözmeme yardımcı olabilecek fikirlere sahip miyim?" gibi sorular hem problem çözmede hem üstbilişsel düşünmenin gelişiminde (Lan, 2007) hem de anlamanın gelişiminde önemli rol oynamaktadır. Bu sorular, öğrenme ortamlarında öğrencilerin içteki bir katmandan bilgi toplamasını sağlar ki bu zihinsel eylem anlamanın gelişimi için hayati bir öneme sahiptir. Bu nedenle Pirie ve Martin (2000) öğrencilere toplama

kabiliyetlerinin geliştirilmesi için uygun ortamlar sunulmasının önemini vurgulamaktadır.

Bireylerin anlamasının gelişimi sürecinde öğretmenin ne kadar spesifik müdahalede bulunacağı, hangi koşullarda müdahale edeceği gibi soruların genel bir yanıtı yoktur. Çünkü her bir anlamanın gelişim durumu, bağlamına özgü değerlendirilmelidir (Pirie ve Martin, 2000). Bazı durumlarda öğrenciye, ihtiyaç duyduğu bilgiyi, öğretmeninin ya da bir arkadaşının vermesi, öğrencinin hesap makinası kullanmasına ya da internetten takıldığı noktayı araştırmasına benzer. Burada önemli olan şey, öğrencinin gerekli ön bilgiye sahip olduğu fikridir. Ancak bu kısa vadede problemin çözümünü sağlasa da uzun vadede öğrencinin daha iç bir seviyede toplama türünde geri katlama yapabilmesi için strateji geliştirmesine katkı sunmaz. Önemli olan bireylerin toplama yapmaları için kişisel stratejiler geliştirmesidir. Öğrencilerin kendi başlarına iyi bir problem çözücü olmaları isteniyorsa eğer öğrencilerin geri katlama ve toplama becerilerinin geliştirilmesi önemlidir.

Bireylerin anlama için gerekli ön bilgiye sahip olmaması ya da buna otomatik olarak ulaşamamaları, öğretmenler açısından hem bir zorluktur hem de anlamanın gelişimi için bir fırsattır. Bu durumu, Pirie ve Martin (2000, s.144) "*Anlamanın gelişiminde toplamanın öneminin farkında olan ve aynı zamanda öğrencilerin eski bilgilerini bulma, toplama ve kullanma konusunda farklı beceri ve stratejilerinin olduğunu kabul eden bir öğretmen; bu sürecin gerçekleşmesi için en iyi uygulamaları tayin edebilecek konumdadır…"* şeklinde açıklamaktadır.

Konunun Dışına Çıkmak ve Orada Çalışmak

Martin'in (2008) ortaya koyduğu üçüncü geri katlama türü, konunun dışına çıkmak ve orada çalışmaktır. Bu tür geri katlama türünde, belirli bir konu ya da kavramla ilgili anlayış seviyelerinin herhangi birinde takılan bir bireyin önceki anlama seviyelerinden birine (çoğunlukla ön bilgi seviyesine) geri dönmesi söz konusudur. Önceki geri katlama türlerinden farkı, bireyin takılmasının sebebinin ön bilgi seviyesinde başka bir konu ya da kavramla ilişkili olmasıdır. Dolayısıyla birey, bu başka konu ya da kavramla ilgili çalışınca bariz bir şekilde konunun dışına çıkmış olur. Bu tür geri katlamada da yüksek bilinçle geri dönme ve mevcut bilgilerin sağlamlaştırılması söz konusudur. Bu yönüyle mevcut bilgileri kullanarak daha iç bir katmanda çalışma türündeki geri katlamaya

benzemektedir. Ancak ana konuyla ilgili anlayış gelişiminde takılmaya sebep olan başka bir konu ya da kavrama ilişkin eksik bilgilerin giderilmesi için ana konudan uzaklaşılması yönüyle farklılaşır.

Konunun dışına çıkmak ve orada çalışmakla ilgili varsayıma dayalı şöyle bir örnek verilebilir. Diferensiyel denklemler üzerine çalışan bir kişi ele alınsın. Bu kişi integral alma konusunda oldukça zayıf bir ön bilgiye sahip olsun. Bu durumda bir iki denemeden sonra integral alma kurallarını bilmeden diferensiyel denklem çözemeyeceğini anlayabilir. Sonra ön bilgi olan integral konusuna geri katlama yapıp oldukça uzun bir süre diferensiyel denklemlerin dışında bir konu olan integral konusunda çalışma yapması gerekebilir. Martin (2008) bu geri katlama şekline daire diliminin alanını bulmaya çalışırken trigonometri ön bilgisine ihtiyaç duyan iki öğrenciyle örneklendirir. Bu örnekte öğrenciler daire diliminin alanını hesaplamayı bırakarak (konunun dışına çıkarak) trigonometri konusundaki eksikliklerini tamamlaya yönelik (ve orada) çalışma yapmışlardır.

Sürekliliği Bozan Geri Katlama

Martin'in (2008) tanımladığı son geri katlama biçimi sürekliliği bozan geri katlamadır. Bu katlama türünde ihtiyaca istinaden oluşan bir müdahale ve müdahale sonucunda önceki katmanlardan birine dönüş söz konusudur. Geri dönen birey, önceki anlayışıyla ilgisiz muhtemelen yeni bir imaj oluşturması söz konusudur. Buradaki kilit nokta bireyin mevcut anlamalarıyla geri katlayıp üzerinde çalıştığı yeni fikir arasındaki bağlantıyı kuramamasıdır. Bağlantı kurulamadığından dolayı bilginin daha iyi yapılandırıldığı söylenemez. Bu nedenle geri katlamanın tanımına uygun bir geri dönüş söz konusu değildir. Bu nedenle tam anlamıyla geri katlama olmasa da geri dönme ve geri katlama eylemlerinin benzerliği nedeniyle Martin (2008) bunu bir geri katlama biçimi olarak değerlendirmiştir.

2.1.6.3. Geri Katlamanın Çıktısı

Martin'in (2008) müdahale ve geri katlama süreciyle ilgili ortaya koyduğu teorik çerçevenin son kategorisi geri katlamanın çıktısıdır. Bu kategori, geri katlama gerçekleştikten sonra olanlarla, diğer bir deyişle eylemin sonucuyla, ilgilidir. Bu kategoride dikkat edilmesi gereken husus, geri katlamanın anlamanın sürekli gelişimini

teşvik etmekte etkili olup olmadığıdır. Dolayısıyla ilk iki tür: 1) Etkili Geri Katlama ve 2) Etkisiz Geri Katlamadır.

Etkili Geri Katlama

Geri katlama bireyin yeni karşılaştığı bir problemle baş etmekte yetersiz olan anlamasını genişletmeyi amaçlamaktadır. Birey problem çözme sürecinde karşılaştığı engeli aşmak için mevcut yapıyı değiştirebilir, genişletebilir böylece sağlamlaştırabilir ya da yeni yapılar inşa edebilir. Bu sürecin sonucunda probleme geri döndüğünde kusursuz bir çözüm geliştiremeyebilir. Bunun için ek geri katlamalar yapması da gerekebilir. Sürecin sonucunda önemli olan geri katlamaya sebep olan problem durumuna geri katlama ile anlayışını sağlamlaştırarak geri dönmesi ve bu problem durumuna bu sağlamlaştırdığı anlayışı uygulayabilmesidir. Böylece etkili bir geri katlama yapıldığı söylenebilir (Martin, 2008).

Martin (2008) etkili geri katlamayı, dış seviyeye dönüşün dış teşvik olma ve olmama durumuna göre iki alt türe ayırmaktadır. Geri katlama yapan birey, iç katmanda çalışırken çevresindeki herhangi bir şeyle (akran, öğretmen veya materyal olabilir) etkileşimde bulunarak dış katmana (esas probleme) dönerse dış teşvik söz konusudur. Bu tanıma göre dış teşvikle etkili geri katlama Pirie ve Kieren'in (1992) tanımladığı provokatif diğer bir deyişle bireyi dış anlama seviyesine iten müdahale olarak da değerlendirilebilir.

Dış Teşvikle Etkili Geri Katlama

Martin (2008) dış teşvikle etkili geri katlamayı, daire diliminin alanını hesaplamaya çalışan öğrenciler arasındaki diyalogla örnekler. Öğrenciler bir şekil çizerler. Sonra öğretmen "Peki burada ne öğrendik? Tabanı biliyor muyuz?" sorularıyla öğrencilerin alan hesabını tamamlaması yönünde etkili bir provakatif müdahalede bulunur. Böylece öğrenciler takıldıkları esas probleme geri dönerek problemi çözerler.

Dış Teşvik Olmadan Etkili Geri Katlama

Martin'e (2008) göre birey, bazı durumlarda geri katlama yaparak döndüğü iç seviyede yaptığı eylemlerin niteliğinin ve amacının bilincinde olur. Böylece sağlamlaştırdığı anlayışı sayesinde dış seviyeye geri döner ve anlamanın gelişimine engel teşkil eden problemi çözerek devam edebilir. Bu durumda dış teşvik söz konusu değildir. İçsel

dinamikler devreye girmiştir. Dolayısıyla dış teşvik olmadan etkili geri katlama yapılır. Martin (2008) türevin genel denklemiyle çalışan iki öğrencinin $(x+h)^2$ gibi bir ifadeyle karşılaştığında çarpanlara ayırma ön bilgilerine hemen gidip burada bulunan ön bilgiyi hızla çağıran ve türev problemine başarılı bir şekilde uygulayan iki öğrencinin diyaloğunu bu türe örnek olarak vermektedir.

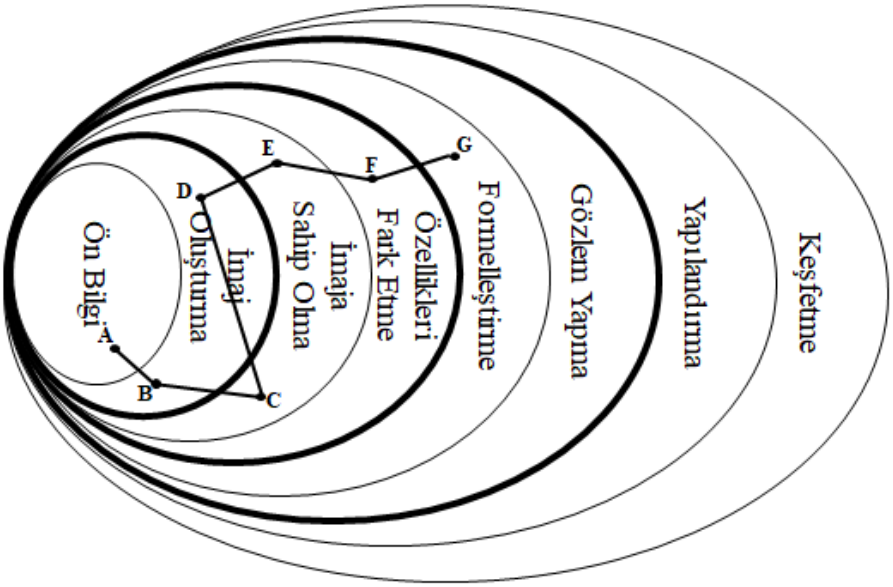
Etkisiz Geri Katlama

Martin'in (2008) yaptığı sınıflandırmaya göre etkisiz geri katlama durumunda birey daha önce ele alınan dört geri katlama türünden birini yapmış olabilir. Mevcut anlayışını sağlamlaştırmış da olabilir. Ancak geri katlamaya neden olan esas problem durumuna bu sağlamlaştırdığı anlayışı uygulayamaması söz konusudur. Martin (2008) bunu genel türev denklemiyle çalışan iki öğrenci arasındaki diyalogla örnekler. Bu örnekte, limit durumunda sayıyı sıfıra bölmek ya da sıfırı sıfıra bölmek üzerine çalışan öğrenciler, her ne kadar "hiçbir şeyi hiçbir şeye bölmek" gibi sorgulamalarla sayılar ve limit gibi konulardaki ön bilgilerine geri katlama yapmışlarsa da esas probleme çözüm üretememişlerdir.

2.1.7. Haritalandırma

Teorinin özelliklerinden biri de anlamlandırma sürecinin haritalanmasıdır. Anlama sürecinin görselleştirilmesinin pratik bir uygulaması olmasına rağmen bu sadece iki boyutlu bir modeldir. Sözel olarak yapılan analizi görselleştirmesi açısından uygulamada kolaylık sağlamaktadır. Pirie ve Kieren (1994, s.182) haritalandırma ile ilgili olarak "öğrencilerin anlamalarının, *gözlendiği kadarıyla,* diyagramatik bir formda bir 'haritasını' oluşturmayı amaçlamaktayız. Burada 'gözlendiği kadarıyla' ifadesi önemlidir; çünkü 'öğrencilerin kafalarında' neler olup bittiğini bildiğimize dair bir iddiamız yoktur" ifadesini kullanmaktadır.

Yukarıda anlamanın seviyeleri ve geri katlama tanıtılırken farklı bireylerin anlamalarının izlediği seyir ele alınmıştır. Bireylerin ileri anlama seviyelerine geçmesi ve gerek olduğunda geri katlama yapıp iç bir katmana gelmesi gibi aktivitelerin hepsi iç içe geçmiş halka modelinde işaretlenir. Noktalar ise çizgilerle birleştirilerek haritalandırma yapılır. Bir örnek Şekil 2.6'da sunulmuştur.



Şekil 2.6. Haritalandırma Örneği

Literatürdeki çalışmalarda farklı haritalandırma örnekleri görmek mümkündür. Bu örneklerden birisini kullanmak yerine yukarıdaki varsayımsal örneğin açıklayıcı olacağı düşünülmektedir. Bu örnekteki hayali bireyin anlaması şu şekilde bir yol izlemiştir: Ön bilgilerini kontrol edip (A noktasından) imaj oluşturma faaliyetleri göstererek ve bu imajları kontrol ederek B noktasına gelmiştir. Sonra imajlara oluştururken yaptığı eylemlere ihtiyaç duymadan konu hakkındaki zihinsel yapısını kullanabilecek böylece zihinsel eylemleri yineleyerek soyutlama yolundaki ilk aşamayı gerçekleştirmiş olacaktır. Bu durum haritada C noktası diğer bir deyişle imaja sahip olma seviyesi olarak işaretlenmiştir. Bu aşamada, muhtemelen, mevcut imajları gelişen anlama sürecindeki ihtiyaçları karşılamadığı için bir geri katlama yapmıştır. Böylece daha fazla imaj oluşturmak için imaj oluşturma seviyesine (D noktasına) geri katlama yapmıştır. Mevcut imajlarını zenginleştirip olgunlaştırdıktan sonra oluşan imajları tekrardan gözlemleyip artık imaj oluşturma seviyesindeki eylemlere ihtiyaç duymayacağı kadar yeterlilik kazanarak imaja sahip olma seviyesine, daha zengin bir anlayışla ilerlemiştir. Bu durum haritada E olarak işaretlenmiştir. Birey bu aşamada sahip olduğu imajların ortak ve farklı özelliklerini belirleme, bu imajlar arasındaki bağlantıları fark etme yeterliliğine kavuştuğunda özellikleri fark etme seviyesine ilerleme kaydetmiş olacaktır. Bu durum ise haritada F noktası olarak işaretlenmiştir. Birey fark ettiği özellikler üzerine düşünme sürecine girip matematiksel tanımlar oluşturmaya, yöntemler geliştirmeye ya da ortak

özellikler bulmaya başlar. Böylece harita üzerinde G olarak işaretlenmiş olan formelleştirme seviyesine ulaşmış olur.

Haritalandırma ile ilgili altının çizilmesi gereken hususlar bulunmaktadır. Her bireyin anlaması kendine özgü olduğu için aynı konuda farklı bireylerin haritaları farklı olabilir. Benzer şekilde aynı bireyin farklı konulardaki haritaları da farklı olması muhtemeldir. Haritalardaki farklılaşma yaş ile de ilgili değildir. Geri katlamaların farklı seviyeler arasında yaşanması da pek muhtemeldir (Pirie ve Kieren, 1994). Dolayısıyla haritalandırma her bireyin anlamasının eşsiz olduğuna yönelik kanıtlar sunmaktadır. Tekrar belirtmekte fayda olan bir başka konu ise bu haritalar gözlemcinin olduğunu düşündüğü şeydir. Gerçekte olan şey olmayabilir (Pirie ve Kieren, 1994).

2.1.8. Matematiksel Anlamanın Gelişiminde Öğrenme Ortamlarının Yeri

Bu başlık altında ilk olarak "geleneksel öğrenme ortamlarında anlamanın gelişimi mümkün müdür?" sorusuna, kısaca, yanıt aranacaktır. Sonra yapılandırmacı öğrenme ortamları ile teorinin ilişkisi ele alınacaktır. Son olarak da enaktivizm ile teorinin ortak paydaları incelenecektir.

2.1.8.1. Geleneksel Öğrenme Ortamları ve Anlama

Geleneksel sınıf ortamlarında, öğretmen, bilgiyi doğrudan verir. Bu tarz ortamlar, bireylerin imaj oluşturmasına fırsat tanınmayabilir. Pirie ve Kieren (1994) bu tarz öğretim ortamlarında edinilen bilgiyi ***bağlantısız bilgi*** olarak adlandırmaktadır. Bağlantısız bilgiye sahip birey kendisine sunulan eylemi yapabilir. Ancak kendi yapılandırdığı bilgiyi zemin almayan bu bilgi, ileriki süreçlerde öğrenen bireyin geri katlama yapmasına ve anlayışını sağlamlaştırmasına olanak tanımamaktadır. Bu nedenle araştırmacılar, bağlantısız bilgi ile başarılı bir anlama gerçekleştirilemeyeceğini ifade etmektedirler.

Geleneksel öğretim yöntemlerinin kullanılmasında farklı gerekçeler üretilebilir: öğretmenin bu öğrenme ortamlarına negatif bakış açısı, konuları zamanında yetiştirme kaygısı gibi… Bu tarz gerekçelerin test edildiği araştırmalar, konuyla ilgili yürütülecek tartışmaya ışık tutabilir.

Geleneksel öğretim yaklaşımlarının aksine yapılandırmacı öğrenme ortamları (Pirie ve Kieren, 1992) ya da enaktivist bakış açısıyla düzenlenmiş öğrenme ortamları (Pirie ve

Martin, 2000) öğrencilerin imaj oluşturmasına ve dinamik anlama süreçlerini yaşamalarına fırsat sunabilir. Ancak gelenekselin dışında bir öğretim ortamı oluşturmak öğretmenin isteği, imkânlar ve öğretmenin yeterliliğine bağlıdır. Konuyla ilgili araştırmaların hayli ilginç sonuçları vardır. Akpınar ve Aydın (2007) öğretmenlerin yapılandırmacı öğrenme ortamlarına sıcak baktığını ortaya çıkarmıştır. Buna rağmen geleneksel öğretim yöntemlerinin kullanılmasının sebebini araştıran Temizöz ve Özgün Koca (2008) öğretmenlerin buna gerekçe olarak zamanın yetersizliğini gösterdiğini raporlamıştır. Duatepe Paksu ve Akkuş (2007) ise yaptıkları sınıf gözlemlerinde öğretmenlerin standart bir ders saatini ancak %60 verimle kullandığını tespit etmiştir. Bu durumda öğretmenlerin öğrencilerine imaj oluşturmaları için yeterince aktivite yaptırmamalarının farklı sebepleri bulunmaktadır denilebilir.

Geleneksel öğrenme ortamlarının ayrılmaz bir parçası da klasik matematik kitaplarıdır. Daha önce de belirtildiği üzere klasik matematik kitapları, formülleri (formelleştirme seviyesinde edinilebilecek bilgileri) doğrudan vermektedir. Bu durumda bireylerin kendi zihinsel faliyetlerinden doğan ve ihtiyaç duyulduğunda geri katlama yapmak suretiyle anlamanın sağlamlaştırılabileceği bir anlamanın oluşmasına fırsat verilmemektedir.

2.1.8.2. Matematiksel Anlamanın Gelişimi ve Yapılandırmacılık

Pirie ve Kieren'nin sunmuş olduğu matematiksel anlama teorisi yapılandırmacı yaklaşımla uyum içindedir. Yapılandırmacı yaklaşıma göre bireyin kavramsal yapılar kurabilmesi için kendi yapıları üzerine tefekkür etmesi ve bu yapıları yeniden organize etmesi gerekmektedir (Pirie ve Martin, 2000, s.127). Teoriye göre matematiksel anlama, statik düşüncelerin alınıp, uygulanıp içselleştirildiği bir süreç veya bu sürecin sonunda varılacak bir hedef değildir. Matematiksel anlama, bireyin hem kendi iç dinamikleri hem de çevresiyle etkileşimi sonucunda ortaya çıkar (Pirie ve Martin, 2000).

Öğrenme ortamlarında yapılandırmacılık akımının ilham kaynağı olan bilişsel yapılandırmacılık, bilişsel yapıların inşası fikrini vurgular (Philips ve Soltis, 2005). Bilişsel yapıların kişiye özgülüğü de öğrenmenin ve bilginin öznel bir süreç olduğu sonucunu ortaya çıkarır. Bu durumda "Yapılandırmacı öğrenme ortamı nasıl olmalıdır?" sorusuna cevap bulmak oldukça zorlaşmaktadır. Yapılandırmacılığın popülerleşmesi ile özünden uzaklaşıldığı fikrini savunan Pirie ve Kieren (1992) yapılandırmacı öğrenme ortamı oluşturmanın bir reçetesinin olmadığı ifade etmektedir. Çünkü Von Glasersfeld

gibi araştırmacılar dışsal gerçekliğin bilince olduğu gibi yerleştirmesinin imkânsız olduğunu ve hatta bilinçten bağımsız bir gerçekliğin olmadığı fikrini savunur (Aydın, 2007). Bu tartışma biraz daha ilerlerse eğer "biliş varsa çevre vardır, biliş yoksa çevre de yoktur" ya da "bu masayı ben algıladığım için bu masa vardır, ben algılamasam bu masa yoktur" söylemine ulaşılması pek mümkündür. Bu görüş, Ömer Hayyam'ın

Ben olmayınca bu güller bu selviler yok,

Kızıl dudaklar mis kokulu şaraplar yok,

Sabahlar, akşamlar, sevinçler, tasalar yok,

Ben düşündükçe var dünya, ben yok o da yok.

(https://www.antoloji.com/rubailer-1-siiri/ adresinden 21Aralık 2019 tarihinde ulaşılmıştır) rubaisini anımsatmaktadır. Bu tartışmanın sonucu olarak da Von Glasersfeld yapılandırmacı öğrenme ortamı oluşturmanın tekliğini reddeder (Philips ve Soltis, 2005).

Pirie ve Kieren'e (1992) göre yapılandırmacı öğrenme ortamları, sınıf etkinliklerine, kullanılan materyallere, uğraşılan problemlere ya da alıştırmaların özelliklerine bağlı değildir. Öğrenme ortamlarında öğrencilerin kendilerine verilen yönergeleri eksiksiz bir şekilde takip etmesi ve fiziksel (dolayısıyla gözlenebilen) bir hedefe ulaşabilmesi, öğrenme ortamının yapılandırmacı olduğu anlamına gelmemektedir. Benzer şekilde çoğu kişiye göre tartışma ortamları yapılandırmacı öğrenme ortamı iken Pirie ve Kieren (1992) bu görüşe tam olarak katılmamaktadır. Çünkü onlara göre yapılandırmacı öğrenme ortamları, anlamanın gelişiminin temel prensipleri dikkate alıp spontane olarak oluşturulabilir. Sözlü iletişim olmadan da anlama gelişebilmesi ve anlama için zihinsel nesnelerle çalışmak gerekliliği noktalarından hareketle her tartışmanın yapılandırmacı öğrenme ortamı olmayacağını düşünmektedirler. Sonuç olarak yapılandırmacı öğrenme ortamı, yapılması ya da yapılmaması gereken belirli faaliyetlerden ibaret değildir. Yapılandırmacı öğrenme ortamının öğrenci eylemleriyle ilgili olduğu bilinmeli, bu doğrultuda kasti ve amaca uygun davranışlarda bulunulmalı ve öğrencilerin kişisel yorumlama yapmalarına fırsat verilmelidir. Nitekim tamamen klasik bir öğretim ortamı olarak nitelendirilebilecek bir model (bireylerin zihinsel eylem oluşturmasına izin verdiği için) yapılandırmacı öğrenme ortamı özellikleri sergileyebilir.

Pirie ve Kieren (1992) yapılandırmacı öğrenme ortamı oluşturmak için 4 temel prensipten söz etmektedirler. Birinci prensip: öğrencilerin bazıları öğrenebilirken bazılarının o an öğrenemeyeceğinin farkında olmaktır. Bu nedenle sınıfın anlık kalibrasyonun yapılarak bağlama özgü geri bildirimler verilebilir ve müdahaleler yapılabilir. İkinci prensip: bir konu ya da kavramı anlamanın farklı yolları olabileceğini ve anlamanın kişiye özgü bir süreç olduğunu bilmektir. Dolayısıyla herkes için geçerli bir reçete mümkün değildir. Üçüncü prensip: farklı kişiler farklı anlamalara sahip olabilir. Öğretmenin anlaması ile öğrencinin anlaması, bir öğrencinin anlaması ile başka bir öğrencinin anlaması farklı olabilir. Hem seviye bazında hem de oluşum itibariyle farklılaşmalar mümkündür ve anlama süregiden bir şeydir. Dolayısıyla öğretmenin farklılıkların farkında olması ve bunları hoş görüp farklılıklara özgü yollar belirlemesi gerekmektedir. Dördüncü prensip: bir konuda farklı anlama seviyelerini gözlemlemek mümkündür ve bu seviyeler de kesin değildir. Anlama dinamik bir süreç olduğu için öğretmenin (bunun farkında olarak kesin hüküm vermeden) öğrencilerinin farklı seviyelerde olabileceğini göz önünde bulundurması gerekir.

Pirie ve Kieren'in (1992) yapılandırmacı öğrenme ortamı ile ilgili ortaya koyduğu prensipler, dinamik ve esnek bir yaklaşımın çerçevesini çizmektedir. Yol ve araba metaforu üzerinden bu çerçeveyi inceleyelim. Kalkış ve varış noktası belli olan bir aracın yol boyunca sabit bir hız ve yönde gitmesi mümkün değildir. Yoldaki viraj, çukur, tepe inişi-çıkışı, araç ve yaya trafiği, hava durumu, trafik kural ve işaretleri gibi birçok faktörün anlık olarak değerlendirilip öylece hareket edilmesi gerekmektedir. Yol örneğinde olduğu gibi, sabit bir yönerge, yöntem, problem ya da araştırma ile yapılandırmacı öğrenme ortamı oluşturmak pek de mümkün değildir. Süreçte her bir öğrencinin anlık olarak değerlendirilmesi, farklılıklar ve aynılıkların tespit edilmesi, amaca uygun ve kasti müdahalelerin yapılması gerekmektedir.

İnsanlar bilgisayarların aksine, tek seferde farklı seviyelerde anlama gösterebilirler. Çünkü geri katlamalar ile seviyeler arasında ileri-geri gidişler mümkündür. Yapılandırmacı öğrenme ortamı oluşturmak isteyen bir öğretmen geri katlamayı kasten teşvik edebilir. Bununla ilgili olarak Pirie ve Kieren'in (1992) çalışmasında sunulan örnek verilebilir. Araştırmacılar, öğrencilerden 3/4 kesrini oluşturmalarını istemiştir. Öğrenciler yarım ve çeyrekleri temsil eden grafiklerle (imajlarla) çalışmıştır. Kendisinden benzer bir faaliyet yapması istenen Sandy isimli öğrenci öğretmenin önerisini reddetmiştir. Sandy

sütunları 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 dan oluşan bir tablo yapmıştır. Satırlara, sütundaki kesirleri birkaç kere kullanarak ve farklı kombinasyonlarla 3/4 kesrini oluşturmuştur. Kesirler konusundaki anlamasını formelleşmiş bir şekilde ifade etmiştir, ancak aynı zamanda sahip olduğu imajın özelliklerini fark ettiği bir seviyede de çalışmıştır ve fiziksel imajını basitçe gözlemleyip onun üzerinde oynadığı bir seviye de görülmüştür. Özetle tek bir aktivitede farklı seviyelerde anlama göstermiştir. Bu örnekten iki farklı sonuca ulaşılabilir. Birincisi: Yapılandırmacı öğrenme ortamı oluşturmak isteyen öğretmenlerin imaja dayalı düşünme ile formelleşmiş matematiksel düşünme arasındaki "ihtiyaç duyulmayan sınırlar" arasında geri katlamaya fırsat sunmaları ve ikincisi: anlama gelişimini sağlayan bu seviyeler arası hareketi teşvik edip destekleyebilmeleri gerekir.

2.1.8.3. Matematiksel Anlamanın Gelişimi Teorisi ve Enaktivizm

Pirie ve Kieren'in ileri sürdüğü teori, anlamayı sadece bireyin sınırları içinde değil, bireyin bulunduğu ortamla birlikte değerlendirir. Anlama gelişirken ortam (arkadaş, öğretmen ve materyal gibi) ile bireyin etkileşimini de göz önünde bulundurur. Teori bu yönüyle Davis'in ileri sürdüğü enaktivizm ile benzerlik gösterir (Pirie ve Martin, 2000).

Enaktivizm, bilişsel ve radikal yapılandırmacılıkla ortak bazı temellere sahiptir. Ancak bu akıma göre anlama bireyin zihni ile sınırlı değildir. Çünkü anlama, bulunulan bağlam ile etkileşim halinde gelişebilir ve paylaşılabilir (Pirie ve Martin, 2000). Söz konusu etkileşimden sadece öğrencinin sınıf ortamında öğretmeniyle ya da arkadaşlarıyla iletişimi anlaşılmamalıdır. Örneğin öğrenci, bilgisayar programının arayüzü ile etkileşime girerek anlama gerçekleştirebilir (Francis, Khan ve Davis, 2015). Bu açıdan bakıldığında bilgisayar programının arayüzü Martin'in (2008) tanımladığı materyal müdahalesi olarak değerlendirilebilir. Bağlam ile bireyin etkileşimi daha geniş bir çerçeveden değerlendirilirse bireyin gruplar, okullar, kültürler, insanlık ve hatta biyosfer gibi giderek karmaşıklaşan sistemlerle etkileşimi, bilgi ya da anlamayı şekillendirir (Begg, 1999).Bu açıdan bakıldığında birey, bu bağlamın dışına çıkması durumunda konuyla ilgili anlamaları ciddi bir şekilde değişebilir (Pirie ve Martin, 2000). Diğer bir deyişle bilgi ya da anlama dünyadan ayrı değildir (Begg, 1999, s.73).

Enaktivizmi yapılandırmacı yaklaşımdan ayıran bir diğer özellik de anlamanın gelişiminde sadece söylemleri değil, eylemleri de değerlendirmesidir. Zira birey, konuyla ilgili anlamalarını dile getirmese dahi eylemleri ile bir anlama geliştirdiğini gösterebilir.

Dolayısıyla anlama gelişimin göstergeleri olarak hem eylemler hem de söylemler dikkate alınmalıdır. Pirie ve Kieren'in teorisi bu yönüyle de enaktivizme benzemektedir (Pirie ve Martin, 2000). Francis, Khan ve Davis'in (2015) bilgisayar-öğrenci etkileşimi açıklamasında, birey (her ne kadar söyleme dönüştürmese de) arayüzü kullanarak yaptığı eylemler neticesinde bir anlama geliştirebilir.

Pirie ve Kieren'in ileri sürdüğü teori sayesinde gözlemci (öğretmen ya da araştırmacı) anlamayı, statik bir edinim (bilgi) olarak değil devam eden bir süreç olarak gözlemleyebilir (Pirie ve Martin, 2000). Teori bu açıdan değerlendirildiğinde mevcut eğitim sistemimizde ve ölçme-değerlendirme yaklaşımımızda anlamadan çok statik edinim olarak nitelendirilen bilginin üzerinde durulduğu sonucu ortaya çıkmaktadır. Bu değerlendirmenin sonucu olarak da klasik eğitim anlayışının (öğretmenin bilgiyi sunması, öğrencinin olduğu haliyle kaydetmesi ve istenildiğinde geri çağırılması) anlamayı göz ardı ettiği söylenebilir. Pirie ve Kieren (1989, 1994) tarafından geliştirilen matematiksel anlamanın gelişimi teorisi, bu noktada eğitimci ve gözlemcilere bireylerin anlama süreçlerini inceleme ve yönlendirme için teorik bir araç sunmaktadır (Pirie ve Martin, 2000).

2.1.9. Pirie ve Kieren'in Teorisi'nin Genel Bir Değerlendirilmesi

Yukarıda "anlama" kavramının yaygın kullanımdaki manası ve matematik eğitimi açısından ne ifade ettiği ana hatlarıyla ele alınmıştır. Sonra matematiksel anlamanın türlerine odaklanan teoriler incelenmiş ve anlamayı kategorilere ayırmanın pratikte çok da faydalı olmayacağı üzerine tartışma yürütülmüştür. Bu noktada matematiksel anlamanın nasıl geliştiğini incelemenin değerli olduğunu öne süren iki teoriden bahsedilmiştir. Bunlardan ilki olan APOS teori özet şeklinde incelenmiştir. Pirie ve Kieren tarafından geliştirilen matematiksel anlamanın gelişimi teorisi detaylı bir şekilde irdelenmiştir.

Matematiksel anlamanın gelişimi teorisi için aşağıdaki çıkarımlar yapılabilir.

- "Anlama bireye özgü dinamik bir süreçtir (Pirie ve Kieren, 1989; Pirie, 1988).
- Müdahalelere bağlı olarak ileri geri sarmalar diğer bir deyişle geri katlamalar yapılması muhtemeldir (Martin, 2008; Pirie ve Kieren, 1992; Pirie ve Martin, 2000).

- Anlama sürecinde ne kadar spesifik müdahalede bulunulabileceğinin ya da hangi koşullarda müdahale edilebileceğinin genel bir yanıtı yoktur (Martin, 2008).
- Sonuç olarak yapılandırmacı öğrenme ortamının bir reçetesi nasıl ki mevcut değilse (Pirie ve Kieren, 1992) anlamanın gelişimi için de kesin bir yol ya da yöntem yoktur" gibi önermelerine ulaşılabilir. Bu önermelerin "teori, kesin bir yol ya da yöntem söyleyemiyor ise matematik eğitimi açısından nasıl bir katma değer yaratabilir?" eleştirisini de beraberinde getirmesi pek muhtemeldir. Bu eleştiriye üç kısa cevap verilebilir.

Birincisi: teori her ne kadar kesin bir yol ya da yöntem önermiyorsa da her anlama gelişimi için dikkate alınması gereken bir şeyden bahsediyor. Bahsedilen şey, ön bilginin önemidir. Bunun önemi ilgili başlık altında detaylandırıldığı için burada sadece ön bilginin dikkate alınmasının anlamanın gelişimi için önemli olduğu söylemekle yetinilecektir.

İkincisi: teori, matematiksel anlamanın gelişmesi sürecindeki seviyelerden bahsetmektedir. Bu seviyelerin yaşanmasının temellendirilmiş bir anlayış için önem arz ettiğinin altını çizmektedir (Pirie ve Kieren, 1989, 1994). Klasik matematik kitapları ya da öğretileri "tanım, teorem, ispat, uygulama" sıralamasına göre gitmektedir. Diğer bir deyişle bireyin formelleştirme (tanım yapma), gözlem yapma (teorem olarak ifade etme) ve yapılandırma (ispat yapma) seviyelerinde gerçekleşmesi muhtemel eylemler (Pirie ve Kieren, 1989), bireyin konuyla ilgili anlayış geliştirmesine izin vermeden bireye sunulmaktadır. Bu durum kitap okuyan birisine kitabın sonunu söylemek ya da film izleyen birine filmin sonunu söylemek gibi bir şeydir. Her ne kadar anlama bireye özgüyse (Pirie ve Kieren, 1989; Pirie, 1988) ve kesin bir yol yöntem önermek mümkün değilse (Pirie ve Kieren, 1992) bile bireylerin bu seviyeleri yaşamasına (örneğin imaj oluşturmasına) izin verecek şekilde öğrenme ortamları tasarlamak, bu teorinin en önemli önermesidir denilebilir.

Üçüncüsü: teori öğretmenlere nerede nasıl müdahalede bulunabileceği ile ilgili bir reçete sunmamaktadır (Martin, 2008). Ancak teoriyi temel alan çalışmalardaki örnek müdahaleler, öğretmenler için yol gösterici niteliktedir. Öğretmenler bu örnekleri inceleyerek müdahale repertuvarlarını genişletebilir. Kendi deneyimleriyle müdahale

etme becerisi kazanabilir. Ve müdahaleye verilmesi muhtemel tepkilere yönelik esneklik geliştirebilir.

2.1.10. APOS Teori ve Bunun Pirie ve Kieren'in Teorisi ile Karşılaştırılması

APOS teori oluşturulurken Piaget'in çocukların öğrenme sürecini açıklarken kullandığı yansıtıcı soyutlama (reflective abstraction) kavramı kullanılmıştır. Dubinsky, üniversite düzeyindeki matematiksel öğrenmeyi açıklamak için Piaget'in yansıtıcı soyutlama kavramını genişleterek APOS (Eylem-Action, Süreç-Processes, Nesne-Objects, Şema-Schema) teoriyi oluşturmuştur (Dubinsky, 1991). Buna göre APOS teori ile Pirie ve Kieren (1989, 1994) tarafından geliştirilen matematiksel anlamanın gelişimi teorisi arasında iki fark ortaya çıkmaktadır.

İki teori arasındaki birinci fark, odak noktası ve teorinin içeriğidir. APOS teori anlamada Piaget'in yaklaşımını geliştirerek (Dubinsky, 1991) daha çok bilişsel süreçlere odaklanmaktadır. Pirie ve Kieren'in teorisi, bireyi sadece bireyin sınırları içinde değil, bireyin bulunduğu ortamla birlikte değerlendirir (Pirie ve Martin, 2000). Bu noktada Martin (2008) tarafından ana hatları çizilen müdahale ve geri katlama şeması, matematik eğitiminin aynı zamanda bir sosyal olgu olasından (Durmaz, 2012) dolayı matematik eğitimcilerine büyük kolaylık sağlamaktadır.

İkinci fark ise anlama süreci ele alınan matematik konularıdır. APOS teori, üniversite düzeyindeki matematiksel öğrenmeyi açıklamak için (Dubinsky, 1991) geliştirilmiştir. Yapılan çalışmalar da genel olarak yüksek matematiğin anlaşılmasını konu edinmiştir. Bunun sebebi RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community, Lisans Matematik Eğitimi Araştırması) topluluğunun bu teoriyi benimsemesidir (Dubinsky ve McDonald, 2001). Dolayısıyla konuyla ilgili çalışmaların büyük çoğunluğu lisans matematik eğitimine yönelik olarak yapılmıştır. Buna karşılık olarak Dubinsky ve McDonald (2001) teorinin kesirlerin anlaşılması gibi konulara da uygulanabileceğini ifade etmektedir. Pirie ve Kieren'in teorisi ise daha geniş bir çerçeveden matematiksel anlamayı ele almaktadır. Her ne kadar Pirie ve Kieren'in teorilerini tanıttığı başlangıç makaleleri (Pirie ve Kieren, 1989; Pirie ve Kieren, 1994), lise müfredatına kadar olan çeşitli matematiksel kavramların anlaşılması üzerine örnekler sunsa da verilen örneklerden ve sunulan teorik çerçeveden ileri matematik konularının anlaşılması da incelenebilir. Örneğin bu teoriyi kullanarak Codes, Astudillo, Martin ve Pérez (2013)

mühendislik fakültesi öğrencilerinin seriler konusundaki Nillas (2010) ise öğretmen adaylarının cebir konusundaki anlamalarının gelişimini bu incelemiştir. Daha uç bir örnek vermek gerekirse Martin ve LaCorix (2008) staj eğitimi sürecindeki anlamaları bu teoriyle değerlendirmiştir. Bu örnekler çoğaltılabilir.

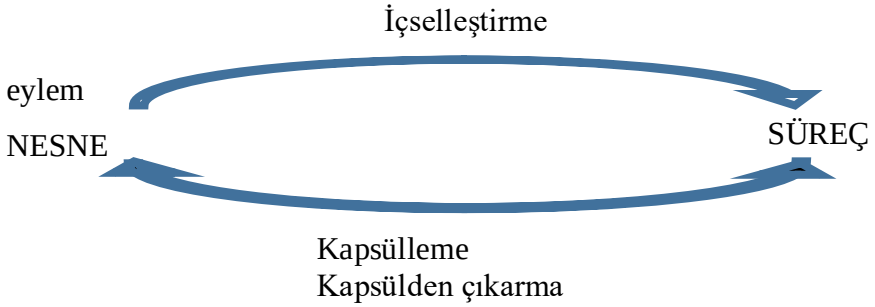
Başlangıç ve odak noktalarına göre iki teoriyi karşılaştırdıktan sonra anlama sürecini açıklamalarındaki farklılıklar ele alınabilir. Bunun için APOS teorinin anlama sürecini nasıl açıkladığını ele almak gerekir. APOS teoriye göre bireyin matematiksel bir kavramı anlamlandırma sürecinde iki aktivite (içselleştirme ve kapsülleme) ve dört bilişsel yapı (eylem, süreç, nesne ve şema) kullanılır. Aşağıda bu yapı ve eylemler tanıtılarak Pirie ve Kieren'in teorisi ile örtüşen yönleri verilecektir.

APOS teoriye göre birey herhangi bir matematiksel içerik ile karşılaştığında önce bunun ile ilgili mekanik (fonksiyonda x değişkenine değer verip y değerini bulmak gibi) ***eylemlerde (action)*** bulunur (Dubinsky, Weller, Mcdonald ve Brown; 2005). Zihinsel yapıyı işaret eden kavramın adı olan eylem aktiviteyi çağrıştırsa da bundan kastedilen şey, teorinin ilk bilişsel yapısıdır. Bu yapı Pirie ve Kieren'in teorisinde imaj oluşturma seviyesine denk gelmektedir. Çünkü birey, bu seviyede yeni matematiksel anlayışın gelişmesi için ön bilgilere bağlı olarak eylemlerde bulunur ve bu eylemler ile imaj oluşturmaya çalışır (Pirie ve Kieren, 1989).

Eylemler tekrar edilip üzerine derin düşünüldüğünde (tefekkür edildiğinde, zihin perdesine yansıtıldığında) ***içselleştirilir*** (Dubinsky, Weller, Mcdonald ve Brown; 2005). İçselleştirme bu teorinin ilk aktivitesidir. Eylem içselleştirildiği zaman teorinin ikinci zihinsel yapısı olan ***süreç (process)*** oluşur. Bu durumda birey süreç yapısına uygun problem durumlarını her adımı açıkça yürütmek zorunda kalmadan çözebilir (Dubinsky, Weller, Mcdonald ve Brown; 2005). APOS teorideki süreç yapısı, Pirie ve Kieren'in teorisinde imaja sahip olma seviyesine denk geldiği söylenebilir. Çünkü imaja sahip olma seviyesindeki bir birey, örnekler gibi, belli eylemleri gerçekleştirmekten kurtulur (Pirie ve Kieren, 1989) ve bu seviye ile bir önceki seviye arasında geri dönülmeye ihtiyaç duyulmayan sınır vardır. Bu sınır, bireyin bir önceki seviyenin eylemlerine ihtiyaç duymayacağı anlamına gelmektedir.

Birey, (zihinsel yapı olan) sürecin bir bütün olarak farkına vardığında süreç ***kapsülleme (encapsulate)*** olarak isimlendirilen aktivite gerçekleşir. Bu aktivite gerçekleştiğinde

süreç formundaki zihinsel yapı, ***nesne (object)*** halini alır (Dubinsky, Weller, Mcdonald ve Brown; 2005). Kapsülleme ya da kapsüle etmek, teoride kavramsal olarak kullanılan ikinci zihinsel aktivitesidir. Kapsüle etme, zihinsel yapının korunması için sağlamlaştırılması gibi bir anlam ifade etmektedir. Bu aktivite, sürecin özelliğinin bir bütün olarak algılanması durumunda oluşur. Bu yönüyle APOS teoride kapsülleme olarak isimlendirilen aktivite, Pirie ve Kieren'in teorisindeki özellikleri fark etme seviyesinde gerçekleştirilen zihinsel aktiviteler ile benzerlik göstermektedir. Çünkü Pirie ve Kieren'e (1989) göre bu seviyede birey, sahip olduğu imajların arasındaki ayımlar, ortak noktalar ve bağlantıları ortaya çıkarır. APOS teoride kullanılan nesne kavramı ise üçüncü zihinsel yapıdır. APOS teoriye göre zihinsel nesne yapısının oluşması, Pirie ve Kieren'in teorisine göre özelliklerin fark edilmesi eyleminden sonra geliştiği için bu da formelleştirme seviyesinde vuku bulmaktadır. Çünkü Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews ve Thomas'a (1996) göre nesne sürece uygulanan operasyonlar üzerine düşünürse gelişir. Nesne geliştiğinde birey, süreç ve eylemlerden oluşan dönüşümleri, bir bütün olarak fark edebilir. Bu dönüşümler üzerinde hareket edebilir. Diğer bir deyişle yöntem geliştirebilir. Pirie ve Kieren'in teorisinde yöntem ve tanımların geliştirildiği seviye formelleştirme'dir (Pirie ve Kieren, 1994). APOS teoride ele alınan eylem, süreç ve nesne yapıları ve bu yapılar arasında geçişi sağlayan içselleştirme ve kapsülleme aktivitelerinin döngüsel şeması Şekil 2.7.'de gösterildiği gibidir.



Şekil 2.7. APOS Teoriye Göre Matematiksel Bilginin Yapılandırılması (Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews ve Thomas, 1996, s.9)

APOS teorinin zihinsel yapı olarak nitelendirdiği son kavram ise şemadır. ***Şema (schema)*** Şekil 2.7.'de gösterilen zihinsel yapıları (eylem, süreç ve nesne) içeren ve bu yapılar arasındaki zihinsel aktiviteleri (içselleştirme ve kapsülleme) birbiriyle tutarlı bir çerçeveye oturtan yapıdır (Dubinsky, Weller, Mcdonald ve Brown; 2005). Bu çerçeve, altında zihinsel yapı ve aktiviteleri bulunduran bir çatı ya da üstünde zihinsel aktivitelerin yapılıp zihinsel yapıların inşa edildiği bir zemin olarak düşünülebilir. Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews ve Thomas (1996) bu durumu izah edebilmek için eylem, süreç ve nesneleri birer hücreye, bu hücrelerin bir araya gelip şema oluşturmasını da bir organa benzetmektedirler. APOS teoriye göre şemanın oluşum, gelişim veya kullanım sürecinde izlenecek yollar, genetik çözümleme (genetic decomposition) olarak tanımlanmaktadır.

Şekil 2.7.'de gösterilen ters ok nesne ile süreç arasında geri dönüşleri ifade etmektedir. Asiala, Brown, Devries, Dubinsky, Mathews ve Thomas (1996) bunu kapsülden çıkarmak (de-encapsulation) olarak isimlendirmektedir. Bu durum ise Pirie ve Kieren'in teorisinde geri katlamaya denk gelmektedir. Daha önce de bahsedildiği üzere geri katlama, bireyin (yetersiz olan anlamasını geliştirmek için) o an gerçekleşen anlamasının bilinci ile daha iç seviyelere dönüp daha sağlam bilişsel yapılar oluşturması ve böylece anlamasını pekiştirmesi anlamında kullanılmaktadır (Pirie ve Kieren, 1994; Pirie ve Martin, 2000). Bu açıdan iki teori arasında bir fark çıkmaktadır. APOS teoride geri katlama olarak nitelendirilebilecek kapsülden çıkarma eylemi, sadece nesne yapısından süreç yapısına doğru olabilir. Ancak Pirie ve Kieren'in teorisine göre geri katlama, tüm seviyeler arasında olabilir.

APOS teorinin genel özeti ve Pirie ve Kieren'in teorisiyle karşılaştırılması yukarıda sunulmuştur. İlerleyen kısımlarda, bu iki teori arasındaki diğer farklar ele alınacaktır. Bu farklardan kaynaklanan avantaj ve dezavantajlar kısaca sunulmaya çalışılacaktır.

Meel (2003) her iki teoriyi Scheofeld'in kriterlerine göre karşılaştırmıştır. Bu kriterler: a) betimleme gücü, b) açıklama gücü, c) kapsam, d) tahmin gücü, e) çoklu kanıt kaynakları, f) kesinlik ve özgünlük, g) yanlışlanabilirlik ve h) tekrarlanabilirlik (güvenirlik) şeklinde sıralanmaktadır. Bu kıyaslama Tablo 2.1.'de özet olarak sunulmaktadır.

Tablo 2.1. APOS Teori ile Pirie ve Kieren'in Teorisinin Karşılaştırılması

Kriter ve Kriterin Açıklaması	APOS Teori	Pirie ve Kieren'in Matematiksel Anlamanın Gelişimi Teorisi
a) Betimleme Gücü Ele alınan olgunun uygun bir şekilde incelenmesine izin veren yolları var mı?	Hem yazılı hem de sözlü veri toplama teknikleri ile anlama süreci incelenmektedir.	Görüşme çıktıları ve anlama ile ilgili model ile anlama süreci incelenmektedir.
b) Açıklama Gücü Ele alınan olguyu açıklayabiliyor mu?	Eylem, süreç, nesne ve şema gibi yapılar ve bu yapılar arasındaki eylemler ile açıklayabiliyor.	Seviyelere has eylem ve söylemler ile seviyeleri belirleyerek açıklayabiliyor.
c) Kapsam Lokal bir kavram yerine kapsamlı bir dizi fenomene uygun mu?	Dubinsky ve RUMEC tarafından; fonksiyon, soyut cebir, analiz, istatistik ve kesirler konusundaki anlamanın gelişimini açıklamakta kullanılmış. Küçük yaş gruplarına yönelik çeşitli araştırmalar da var.	Kesirler, paraboller, ortaokul matematiği, geometri, analiz, soyut cebir gibi konulardaki anlamanın gelişimini açıklamakta kullanılmış. Ayrıca öğretmen müdahaleleri gibi fenomenleri de açıklamaya uygun.
d) Tahmin Gücü Geçmiş bilgilere dayanarak, katılımcı yanıt vermeden cevabını tahmin edebiliyor muyuz?	"Eylem, süreç, nesne ve şema yapılandırılmış ise başarılı olma ihtimali vardır" gibi hipotezler test edilebilir.	Seviyenin eylem ve söylemlerine yönelik tahmin yapma fırsatı veriyor. Benzer şekilde "müdahale etkili bir geri katlama yapar" hipotezini test etmeye imkan tanır.
e) Çoklu Kanıt Kaynakları Kısıtlı deneyim kümesinden ziyade farklı ortamlardan toplanan veriler (odak grup görüşmesi, sınıf mülakatları, klinik mülakat gibi) kullanılabiliyor mu?	Hem yazılı hem mülakat verilerini kullanarak bir öğrencinin bilişsel yapılarını inceleyebilir.	Klinik mülakat, grup çalışması veya sınıf ortamı gibi bağlamlardan toplanan veriler ile anlama süreci incelenebiliyor. Bu süreçte öğrenci ile kendisi, arkadaşı, materyal, öğretmenin etkileşimini (müdahale ve geri katlama mekanizması) de inceleyebiliyor.
f) Kesinlik ve Özgünlük Bireyin anlama sürecinde nerede olduğunu net bir şekilde belirleyebilir mi?	Her iki teoride de yapılar ve ilişkiler tanımlanmış. Bu tanımlamalar ile çeşitli konularda anlamanın gelişimi incelenmiştir. Çalışmalarda iddiaları destekler nitelikte veriler de sunulmuştur.	
g) Yanlışlanabilirlik Yapılan tahmin ve tanımlanan yapılar, deneysel incelemeye ya da eleştiriye açık mı?	Her iki teori de anlama sürecini açıklamaya yönelik birer model geliştirmiştir. Bu modellerin ikisi de "bireyin zihninde gerçekte olan şey budur" gibi bir iddiada bulunmuyor.	
h) Tekrarlanabilirlik (Güvenirlik) Şartlar tekrarlandığında aynı şey olacak mı?	Bu kriter aslında farklı araştırmacıların aynı veri setini aynı teoriyle incelemesi sonucu benzer sonuçların ortaya çıkıp çıkmayacağı ile ilgilidir. Her iki teoriye göre yapılan araştırmalarda veri toplama yöntemleri, kullanılan teorik yapılar, analiz biçimi ve genel sonuçlar açıkça sunulmaktadır.	

İki teorinin karşılaştırılabileceği bir diğer konu ise tanımlanan kavramlardır. APOS teorinin anlamayı açıklamak için tanımladığı kavram sayısı ile Pirie ve Kieren'in teorisindeki kavram sayısı karşılaştırıldığında APOS teori daha kullanışlı gibi görünmektedir. Çünkü APOS teoride dört yapı ve iki ana aktivite ile anlama incelenebilir. Pirie ve Kieren'in teorisinde ise sekiz seviye, ön bilgi hariç her bir seviye için tanımlanan eylem ve söylemler (çalışmanın sınırlılıklarından dolayı ele alınmamıştır), müdahale ve geri katlama sürecini anlatırken tanımlanan on altı kavram ve bunların yüz civarındaki kombinasyonu araştırmacının teoriyi anlamlandırmasını zorlaştırabilir. Diğer taraftan anlamanın kaotik yapısını açıklamak için bu kadar tanımlama ihtiyacı da hissedilebilir.

APOS teori, anlama sürecini açıklarken zihinsel aktiviteleri ayrı ve bu aktivitelerin gerçekleşmesiyle ortaya çıkan yapıları ayrı olarak ele almaktadır. Pirie ve Kieren'in teorisi ise anlamayı seviyeler ile açıklamaktadır. Bu seviyelerin kendine has eylemleri ve söylemleri bulunmaktadır. Bu eylemler ya da söylemler gerçekleştiğinde, bireyin söz konusu seviyede olduğu anlaşılmaktadır. Eylemin sonucunda gelişen yapıyı (APOS teori) incelemek ile eylemleri inceleyip anlama seviyelerini belirlemek (Pirie ve Kieren'in teorisi) araştırmacıların anlamayı açıklarken izleyebileceği iki yol olarak sunulabilir.

Sonuç olarak her iki teori de matematiksel anlamayı açıklamaya çalışmaktadır. İki teoriden hangisini kullanacağına araştırmacının kendisi karar verebilir. Karar verirken araştırmacının ilgisi ve istidatları ile araştırmanın amacı ve araştırma problemi yol gösterici olacaktır. Örneğin bu çalışma "öğretmen adaylarının alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini anlamlandırma sürecinin Pirie ve Kieren'in teorisine göre incelenmesi" amacıyla yürütülmektedir. Dolayısıyla araştırmanın amacı, bu teoriyi kullanma sebebidir.

2.2. Çevre ve Alan Arasındaki Türev İlişkisi

Bu ana başlık altında önce çevre, alan ve türev kavramlarına yer verilecektir. Her bir kavramın ne anlama geldiği, bu kavramların öğretiminde karşılaşılan zorluklar ve çözüm önerileri literatür ışığında tartışılacaktır. Sonra çevre ile alan arasındaki türev ilişkisi incelenecektir.

2.2.1. Çevre ve Alan

Bu kısımda ilk olarak, çevre ve alan kavramları "ölçme öğrenme alanı" kapsamında değerlendirilerek bu kavramların anlamları üzerinde durulacaktır. Bunun yanı sıra belirtilen kavramlarla ilgili karşılaşılan zorluklar ve bu zorlukların sebepleri incelecektir. Daha sonra ise karşılaşılan zorlukları aşmak için daha önce yapılan çalışmalardaki önerilere değinilecektir.

Uzunluk, alan, hacim, sıcaklık ve zaman gibi olguların niceliğini belirleme, matematikte ölçme alanının altında toplanmaktadır (Altun, 2010; Pesen, 2008). Ölçme, hayatımızın birçok alanında karşımıza çıkmasından dolayı, matematiğin önemli öğrenme alanlarından (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013) olup birçok meslek grubuna ve bilimsel gelişmelere de destek vermektedir (Altun, 2010). Özellikle, günlük hayat aktivitelerinin çoğunda önemli yer tutan (Altun, 2010; Pesen, 2008; Zembat, 2010, 2013) ölçme kavramı, matematiğin günlük hayata açılan önemli pencerelerinden biridir (Altun, 2010; Tan Şişman ve Aksu, 2009; Zembat, 2010). Pesen'e (2008) göre ölçme, matematiğin günlük hayatla ilişkisini kurmakta önemli bir araçtır. Örneğin; ölçmenin eve alınacak bir halının ya da perdenin ölçülerinin hesaplanmasından (Zembat, 2010) nakliye uçağına yapılacak dengeli bir yüklemeye kadar birçok alanda hayati bir işlevi olduğu söylenebilir.

Bu durumda "Ölçme nedir? Bu kavramı araştırmacılar nasıl tanımlamaktadır?" soruları göz önüne alınırsa; Van de Walle, Karp ve Bay-Williams (2013, s.370) ölçmeyi, "bir nesnenin (ya da durumun veya olayın) bir özelliğini aynı özelliğe sahip bir birim ile karşılaştırılması" şeklinde tanımlamaktadır. Pesen (2008, s.330) ölçmeyi "bir nitelikte, birim kabul edilen bir miktardan kaç tane olduğunun saptanması işi" olarak açıklarken, Bright 1976'da "fiziksel bir nesnenin bir niteliğinin, bu niteliğin miktarını belirlemeye yarayan seçilmiş bir birim ile mukayesesi" şeklinde değerlendirmektedir (Aktaran: Zembat, 2013, s.139).

Ölçme, matematikte "geometri öğrenme alanı" için de önemli kavramlardan biridir. Örneğin; bir açının ölçüsünün hesaplanması, çevre ve alan ölçümleri ile bu ölçümleri formülleştirme eylemleri, geometrik şekilleri ve ilişkilerini daha anlaşılır hale getirmektedir (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013). Ayrıca, bir geometrik şeklin

çevresinin ve alanının ölçülmesi problemleri uzunluk kavramı ile yakından ilişkilidir. Zembat (2013, s.141) ***uzunluğu***, bir nesnenin "tek bir eksen (veya boyut) boyunca (mesafe anlamında) kapladığı yerdir" şeklinde tanımlamaktadır. Van de Walle, Karp ve Bay-Williams (2013, s.380) ***çevre***yi, "bir alanın etrafındaki uzaklık" olarak tanımlamaktadır. ***Alan*** ise Hirstein [1981] tarafından "bir düzlem parçasının uzayda kapladığı yer"in ölçüsü şeklinde açıklanmaktadır (Aktaran: Zembat, 2013, s.142).

Tarihsel süreç incelendiğinde insanların tarla ve bahçe ölçme gibi ihtiyaçları, matematiksel ölçme işleminde sistematik yaklaşımın geliştirilmesini sağlamıştır (Zembat, 2013). Örneğin; alan ve uzunluk ölçümlerinde daha önceden belirlenen birimlerle kaplama (eşleştirme) eylemi söz konusu olup (Altun, 2010; Pesen, 2008; Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013; Zembat, 2013), eşleştirme ya da kaplama eyleminin tekrar sayısı da ölçü olarak tanımlanmaktadır (Pesen, 2008; Zembat, 2013). Tekrarlı saymalar belirli bir sistematiğe oturduğunda "formül" diye isimlendirilen matematiksel modeller ortaya çıkmaktadır. Bu ise beraberinde "matematikte bir kavramın öğretilmesinde doğrudan formüllerin kullanılmasının, kavramların anlamlandırmasında etkili olabilir mi?" sorusunu akla getirmektedir.

Tan Şişman ve Aksu' ya (2009) göre de ölçme konusundaki işlemlerin altında yatan kavramsal temellerin oluşturulmadan, formül ve kuralların ezberletilmesi öğretimsel problemleri beraberinde getirmektedir. Örneğin; ölçmenin bileşenlerinden olan çevre ve alan kavramlarının formüllere dayalı ezberletilerek öğretilmesi, öğrenen bireylerin kavramları anlamasında zorluk yaşamasına, kavramları birbirine karıştırmasına sebep olabilmektedir (Hacıömeroğlu ve Apaydın, 2009). İlgili literatürde de formülleri, kavramsal olarak anlamlandıramamış bireylerin yanlış genellemeler yaptığı ile ilgili bulgular yer almaktadır (Battista ve Clements, 1996; Esen ve Çakıroğlu, 2012; Zembat, 2010).

Battista ve Clements (1996) hacim kavramını (ne anlama geldiğini bilmeden) sadece "$en\ x\ boy\ x\ y\ddot{u}kseklik$" formülüyle öğrenen öğrencilerin birim küplerden oluşan (dikdörtgenler prizması dışında) farklı yapıların hacimlerini hesaplarken zorluklar yaşadıklarını belirtmektedirler. Bu bulguya paralel bir çalışma da Esen ve Çakıroğlu (2012) tarafından yürütülmüştür. Araştırmada, ilköğretim matematik öğretmen adaylarına standart olmayan bir ölçü birimi ile hacim hesabı gerektiren bir senaryo

sunulmuştur. Sunulan senaryoda $1x1x2$ santimetrelik dikdörtgenler prizması birim olarak kullanılmıştır. Bu birim aracılığıyla daha büyük bir prizmanın hacminin hesaplanması söz konusudur. Ancak senaryoda küçük prizmaların büyük prizma içine yerleştirilmesinde tutarsızlık söz konusudur. 24 öğretmen adayından sadece yedisi dizilim hatasını fark edebilmiş ve bunlardan da sadece ikisi hatanın kaynağını doğru bir şekilde açıklayabilmiştir.

Zembat (2010, 2013) ise "$taban\ alanı\ x\ yükseklik$" gibi bir formülleştirmenin kavramsal açıdan zorluk çıkarabileceğine ifade etmektedir. Bu formülde taban alanı olarak yorumlanan değer ($en\ x\ boy$) aslında taban kısmındaki birim küp sayısıdır. Yükseklik ise kaç tabakanın olduğunu göstermektedir. Hacim formülündeki karmaşaya benzer durum düzlemsel şekillerin alanlarının hesaplanmasında da yaşanmaktadır. Bununla ilgili olarak Van de Walle, Karp ve Bay-Williams (2013) "$en\ x\ boy$" ifadesine dikkat çekmişlerdir. Bu ifadedeki en kavramı, o kenara sığabilecek birim kare ve boy ise kare dizisinden (sırasından) dikdörtgen içine kaç tane sığacağı anlamına gelmektedir (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013).

Standart yol ve yöntemler diğer bir deyişle formüller, ***kavram prototipleri*** olarak değerlendirilebilir. Kavram prototipi, bireyin zihninde kavrama ait oluşan ilk görüntüdür (Karamustafaoğlu, Karamustafaoğlu ve Yaman, 2005). Dolayısıyla kuvvetli yapılardır. Örneğin Küçük ve Demir (2009) öğrencilere görünüşleri dikdörtgen, paralelkenar ve kareye benzeyen çizimler sunmuşlar ve öğrencilere hangilerinin paralelkenar olduğunu sormuşlardır. Şekil olarak paralelkenara benzeyen seçenek büyük oranda işaretlenmiştir. Şıkların hiçbirinde çizimin bir paralelkenar olacağına işaret eden paralellik, açı, kenar veya köşegen gibi özellikler verilmemiştir. Bu özellikler olmadan sadece görsel olarak benzemesi, bir çizimi paralelkenar modeli yapmaz. Ancak katılımcıların çoğu, görseli paralelkenara benzeyen seçeneği işaretlemişlerdir. Bu durum, kavram prototiplerinin ne kadar güçlü davranış kalıpları oluşturduğunun örnek olarak sunulabilir.

Formüllerle ilgili kavram prototipleri, problem durumlarında belirleyici rol oynayabilir. Dağlı ve Peker (2012) beşinci sınıf öğrencilerinin çevre hesaplamaya ilişkin rutin yol ve yöntemle çözülebilecek problemleri kolaylıkla çözebildiğini ancak rutin olmayan durumlarda problemleri cevaplayamadıklarını tespit etmişlerdir. Bu araştırmadaki rutin

durumlar, formüllerle ilgili kavram prototipleriyle ($alan = en\ x\ boy$ ya da *"tüm kenarların toplamına çevre denir"* gibi) örtüşen problemler olarak değerlendirilebilir.

Köşe ve Tanışlı (2014) sınıf öğretmen adaylarının çevre ve alan konusundaki zihin alışkanlıklarını incelemiştir. Araştırmacılar zihin alışkanlıklarını, düşünme yolu (örüntü arama, düşünce deneyleri yapmak gibi muhakeme ile ilgili zihinsel eylemler) olarak tanımlamışlardır. Katılımcıların farklı düşünme yollarına sahip olmadıkları, problemleri uygun şekilde analiz edemedikleri, akla gelen ilk fikre göre hareket ettikleri gibi sonuçlar çıkmıştır. Örneğin katılımcılardan bazıları, çemberin (kabul gören) çevre ve alan formüllerine ($2\pi r$ ve πr^2 gibi) dayalı düşündükleri ve kendilerine sunulan problemlerle ilgili yeterli muhakemeyi göstermedikleri tespit edilmiştir. Bu nedenle mevcut formülleri verilen problem durumlarına da tam anlamıyla uygulayamadıkları gözlemlenmiştir. Araştırmacılar, formüllere dayalı düşünme alışkanlığının öğretmen adaylarının çoktan seçmeli sınav kültüründe yetişmelerine bağlamışlardır. Araştırmada elde edilen bulgunun nedeni formüllerin ezbere öğretilmesinden kaynaklı anlamlandırılamamış kavram prototipleri olarak da yorumlanabilir. Daha önce de belirtildiği üzere kavram prototipleri, bireyin zihninde kavramla ilgili oluşan ilk görüntüdür (Karamustafaoğlu, Karamustafaoğlu ve Yaman, 2005). Söz konusu araştırmada (Köşe ve Tanışlı, 2014) da öğretmen adaylarının akla gelen ilk fikre göre hareket ettikleri raporlanmıştır.

Yukarıda kavram prototipleri ile ilgili yürütülen tartışmadan "kavram prototipleri kötü gibi bir sonuç çıkarılması pek muhtemeldir. Ancak durum her zaman böyle değildir. Öğrenen bireyler, kavram prototipleri olarak değerlendirilebilecek yöntemleri, kendi çabaları sonucunda oluşturursa bu zihinsel görüntüye temel teşkil eden matematiksel fikri edinir. Böylece farklı durumlarda bu fikirden faydalanarak çözümler üretebilir. Bu durum Pirie ve Kieren'in teorisi açısından değerlendirilecek olursa bireyin anlama seviyelerini kendilerinin oluşturmasının önemi ortaya çıkar. Çünkü bir duruma özgü yöntem oluşturma, anlamanın beşinci seviyesi olan formelleştirme seviyesinde ortaya çıkmaktadır (Pirie ve Kieren, 1994). Bu yöntemlerin koordine edilip teorem olarak ifade edilmesi altıncı seviye olan gözlem yapma ve ispatı ise bir sonraki seviye olan yapılandırma seviyesinde gerçekleşmektedir (Pirie ve Kieren, 1994).

Birey anlama seviyelerini kendi çabasıyla tamamlayıp formül olarak değerlendirilebilecek yöntemler geliştirebilirse, geldiği anlayış seviyesinde

çözemeyeceği bir durum ile karşılaştığında geri katlama yapabilir ve böylece kendisi için rutin olmayan problem durumuna çözüm üretebilir. Böylece anlayışını sağlamlaştırabilir (Martin, 2008). Ancak formüllerin doğrudan verildiği ve iyi ihtimalle ispatlarının yapıldığı bir öğrenme ortamında yetişen bir birey, geri katlama yapması gereken bir durumda, geri katlama yapabileceği bir yaşantısı (anlama seviyesi) olmayacaktır. Bu açıdan söz konusu öğrenme ortamı (daha önce de değinildiği üzere) filmin sonunun söylenmesi gibi bir durumdur. Bu nedenle Akkuş, Akkaş ve Yıldırım'ın (2018) da dediği gibi öğrencilere, öğrenme konusunda fırsatlar sunulması önem arz etmektedir. Bu noktada da öğretmenin öğrenme ortamında ortaya çıkan fikirleri organize etmesi gibi bir rolü ortaya çıkmaktadır. Çünkü öğrenciler, ortaya çıkan fikirlerin yapısını, farklılıklarını ve ortak yönlerini fark edemeyebilirler.

Battista ve Clements'in (1996) yukarıda bahsedilen araştırmasında şayet katılımcılar, ezberden uzak bir şekilde, hacim formülünün altında yatan "birimlerle kaplama ve kullanılan birimleri sayma" fikriyle beraber hacim formülünü geliştirmiş olsalardı durum farklı olabilirdi. Bu durumda birim küplerden oluşan ancak prizma teşkil etmeyen yapıların hacimlerini hesaplarken (muhtemelen imaja sahip olma seviyesine denk gelen) birim küpleri sayma stratejisine geri katlama yaparak problem durumunu çözebilirlerdi. Bu iddiayı destekleyebilecek bir durum, Akkuş, Akkaş ve Yıldırım'ın (2018) yaptığı çalışmada raporlanmıştır. Bu araştırmada öğrenme ortamında ortaya çıkan uzunluk ölçme ile ilgili tartışma kesirler konusuyla ilişkilendirilerek (ön bilgi seviyesine geri katlama yaparak) problem durumu çözülmeye çalışılmıştır. Sonuç olarak etkili bir alan ve uzunluk öğretimi için formüllerin ezberletilmesinden ziyade bireylerin bu formülleri çıkarabileceği ortamların oluşturulması önem arz etmektedir (Altun, 2010; Akkuş, Akkaş ve Yıldırım, 2018; Küçük ve Demir, 2009; Pesen, 2008; Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013). Böylece bireyin ilerleyen süreçte ihtiyaç duyması halinde eski anlayışlarına geri katlama yaparak Martin'in (2008) deyimiyle anlayışını sağlamlaştırması sağlanabilir.

Martin'e (2008) göre geri katlamanın anlamanın gelişiminde etkili olması ve anlamayı sağlamlaştırabilmesi için iki önemli nokta vardır. Birincisi, bireyin gelişmekte olan anlama sürecinde karşılaştığı problemin ne olduğunun farkında olması ve bunu aşabilmek için geri katlama yaptığında ne tür iç seviye faaliyetleri gerçekleştireceğinin bilincinde olması gerekmektedir. Birey bunun bilincinde olmasa bile bu yönde bir yardım önem arz

etmektedir. Bu noktada da çevresel uyaran (öğretmen, materyal veya akran) etkisi ortaya çıkmaktadır. Martin'in (2008) işaret ettiği ikinci husus ise birey geri katlama yaptığında problem durumunda ilerlemesini engelleyen durumdaki eksikliği tam olarak giderebilmesi ve bu eksikliği giderdiğinden emin olmasıdır. Özetle bireyin neyi bildiğinin ve bilmediğinin farkında olması, geri katlayıp neyi öğrenmesi gerektiğinin bilincinde olması ve bu eksikliği giderip gidermediğine de karar verebilmesi önemlidir.

Yukarıda bahsedilen farkındalık durumu her bireyde mümkün olmayabilir. Bireyin bilgisini oluştururken süreçlerini takip edebilmesi, üst bilişsel beceri gerekmektedir. Schoenfeld [1985] üstbilişi "kişinin düşünce işlemlerini kontrol edebilme ve izleyebilme kabiliyeti" olarak tanımlamaktadır (Aktaran: Lan, 2007, s.60). Benzer bir tanım Schoenfeld tarafından "bir bireyin bir şeyi nasıl ve neden yaptığının farkında olması ve düşüncelerinde bilinçli düzenlemeler (bir şeyi yapmayı seçmesi ya da değişiklik yapmaya karar vermesi) yapabilmesi" şeklinde yapılmaktadır. Bu beceriye sahip olan bireyler, bir problem ile karşılaştıklarında, problemin farkına varırlar ve problemi çözebilmek için bilinçli karar verebilir, yöntemlerini kontrol edip değiştirebilir, problemi kontrol edebilir ve gerekli konu bilgisine bakabilirler (Aktaran: Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013, s.46). Üstbilişin tanımı Martin'in (2008) anlamanın gelişimi için önemine dikkat çektiği hususlar (neyi bildiğini-bilmediğini bilme, hangi bilgiye ihtiyacın olduğunun farkında olma ve bu bilgiyi geri katlama ile elde ettiğinden emin olmak) ile örtüşmektedir. Üst bilişsel becerileri gelişmemiş bireylerin matematiksel anlama geliştirirken konunun dışına çıkıp orada çalışmak, daha iç bir seviyede toplamak gibi geri katlamalar yapması muhtemeldir. Martin (2008) bu gibi durumlarda öğretmenin provokatif müdahalelerle öğrenen bireylerin anlama sürecine katkıda bulunmasının önemli olduğunu ifade eder. Bu durumda da öğretmenin rolü ortaya çıkmaktadır. Öğretmen, bu noktada hem bireyin anlamasını gözlemleyen hem de gözlem yapabilmek için bireye kendi zihinsel eylemlerini söyleme dökecek ortam sağlayan rolüne bürünür. Böylece bireyin takıldığı noktalarda etkili geri katlama yapabilmesini sağlamak için kasıtlı müdahale yapabilecek bir duruma gelir. Bunun için Yao ve Manounchehri'in (2022) de işaret ettiği üzere öğretmenin öğrenci düşünme süreçleri hakkında bilgisinin olması gerekmektedir. Aksi halde Martin'in (2008) çalışmasında raporladığı gibi öğretmen odaklanmış (net bir şekilde hangi anlayışa geri dönülmesi gerektiğini öneren) müdahalede bulunsa bile

sürekliliği bozan geri katlamaların meydana gelmesi pek muhtemeldir. Çünkü öğrenciler öğretmenin söylediğini yaparken bunu ne için yaptıklarının farkında olmayabilirler.

Başarılı geri katlamaları sağlayabilecek müdahalelerde bulunabilmek için öğretmenin eğitim almasının yanında işlevsel bir felsefi yaklaşıma da sahip olması gerekebilir. Akkuş'un (2013) yaptığı araştırma bu durumu ortaya koymaktadır. Araştırmacı, argüman-tabanlı yaklaşım uygulamalarını içeren bir hizmet içi eğitim almış ve deneyimli bir öğretmenin derslerini gözlemlemiştir. Gözlemler sonucunda öğretmenin matematiğe yönelik felsefi bakış açısı (matematiği algoritma olarak görme) ve süregelen alışkanlıkları devam ettirme (geleneksel öğretim yöntemindeki güvenli bölge) gibi faktörler tespit edilmiştir. Bu faktörler, öğrencilerin problemleri kendilerinin çözmesini ve anlamalarını açıklamalarını engellemiştir.

Sonuç olarak anlama, ön bilgiler ile başlar ve bu bilgiler ile ilişkilendirilerek gelişir (Pirie ve Kieren, 1994). Bu nedenle öğretmenlerin kavramsal bilgiye sahip olması (Akkuş, Akkaş ve Yıldırım, 2018) önemlidir. Ayrıca öğretmenin nerede ve nasıl müdahale edebileceğini bilmesi ve müdahaleye verilen tepkiye göre esneklik gösterebilmesi önem arz etmektedir. Çünkü anlamanın gelişiminde müdahale ve geri katlama büyük bir öneme sahiptir (Martin, 2008). Aksi takdirde çevre ve alan hesaplamaları ölçmenin ilk karşılaşılan kavramları (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013) ve matematiğin günlük hayata bakan pencereleri (Tan Şişman ve Aksu, 2009; Zembat, 2010) olmasına rağmen bu konuların anlaşılmasında zorlukların ortaya çıkması muhtemeldir. Yapılan araştırmalar (Dağlı ve Peker, 2012; Hacıömeroğlu ve Apaydın, 2009; Küçük ve Demir, 2009) bu zorlukları raporlamıştır.

Dağlı ve Peker (2012) beşinci sınıf öğrencilerine kenar uzunluklarından hareketle çevre uzunluğunu hesaplamayı gerektiren farklı problem durumları sunmuşlardır. Öğrenciler tüm kenarları verilen dörtgenlerin çevre uzunluğunu hesaplayabilmişlerdir. Ancak paralelkenar özelliği taşıyan özel dörtgenlerin karşılıklı kenar uzunluklarının birbirine eşit olduğunu kestiremedikleri için iki kenar uzunluğu verilen paralelkenarın çevre uzunluğunu hesaplamakta güçlük yaşamışlardır. Farklı şekillerin birer kombinasyonu olarak sunulan problem durumlarında ise kayda değer bir başarı düşüşü raporlanmıştır. Problemler tersten sorulduğunda (çevre uzunluğunu verip kenar uzunluğunun bulunmasını istemek gibi) doğru cevap oranı dikkate değer bir düşüş yaşamıştır.

Küçük ve Demir'in (2009) yaptıkları araştırmada ise öğretmenlere, öğrencilerin anlamada ve uygulamada zorlandıkları konular sorulmuştur. Bu konular arasında geometrik kavramlar ve geometrik cisimler de sıralanmıştır. Yaşanılan zorluğun çevre ve alan gibi kavramların yapılandırılmamasından kaynaklanması pek muhtemeldir. Çünkü daha önce de bahsedildiği üzere ölçme (alan, çevre, açı gibi) geometrik şekil ve cisimlerin anlaşılmasını sağlar (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013).

Çevre ve alan kavramlarının doğasından ya da öğretiminden kaynaklı olarak yaşanılan zorluklardan bir tanesi de bu kavramların karıştırılmasıdır. Örneğin Dağlı ve Peker'in (2012) 5. sınıf öğrencileriyle yürüttüğü çalışmada, özel dörtgenlerin kombinasyonlarından oluşan şekillerin çevresini hesaplama aktiviteleriyle ilgilenen öğrencilerin bazılarının alan ve çevre kavramlarını karıştırdıkları raporlanmıştır. İlgili literatürde benzer çalışmalara (Fırat, Gürbüz ve Doğan, 2016; Tan Aksu ve Şişman, 2009) rastlamak mümkündür.

Tan Aksu ve Şişman (2009) yaptıkları araştırmada ilköğretim 7. sınıf öğrencilerine çevre ve alan ile ilgili problem durumları sunmuşlardır. Sunulan problem durumlarından birinde bir karenin (önce ikiye bölme sonra köşegenden bölüp bu parçaları ayırma gibi) kesilip farklı parçalara ayrılması durumunda çevresinin değişip değişmediği sorulmuştur. Katılımcıların %80'ine yakını alan değişmediği için çevrenin de değişmeyeceğini ifade etmiştir. Araştırmada alan korunumu ile çevre hesaplamanın karıştığı raporlanmıştır. Aynı çalışmada katılımcıların %50'sine yakınında alan korunumu fikrinin gelişmediği tespit edilmiştir. Bu çalışmada her bir problem durumu için ayrıca gerekçeler de istenilmiştir. Sunulan gerekçelerin basit ve yüzeysel olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca alan ve çevre formüllerinin de karıştırıldığı raporlanmıştır.

Fırat, Gürbüz ve Doğan (2016) dairesel dart modeli üzerinden öğrencilerin olasılık tahminlerini incelemişlerdir. Bilindiği üzere dairenin çevresi, yarıçap ile doğru orantılı iken dairenin alanı yarıçapın karesiyle doğru orantılıdır. Dolayısıyla olasılık değerleri de halkaların alanlarıyla orantılı olması gerekir. Ancak ortaokul öğrencilerinden bir kısmı, sadece çap uzunluğuna bakarak tahminde bulunması, öğrencilerin alan ve çevre hesaplamalarını karıştırdığı şeklinde yorumlanabilir.

Sonuç olarak çevre ve alan kavramlarıyla ilgili çalışmaların büyük çoğunluğu (Dağlı ve Peker, 2012; Fırat, Gürbüz ve Doğan, 2016; Küçük ve Demir, 2009; Tan Aksu ve Şişman,

2009) durum tespitine yöneliktir. Bu çalışmalarda da genel olarak bireylerin bu kavramları yapılandırırken zorlandıkları raporlanmıştır. Bu çalışmaların yanında çevre ve alan konusundaki zorlukları aşmak için yapılan farklı çalışmalara da rastlamak mümkündür. Örneğin Delice ve Karaaslan'nın (2015) dokuzuncu sınıf öğrencileriyle yürüttüğü çalışmada dinamik geometri programları aracılığıyla eşkenar dörtgenin alan bağıntısını oluşturma gibi konularda öğrencilerin performansının arttığını tespit etmişlerdir. Akkuş, Akkaş ve Yıldırım (2018) öğretmenlerin gerekli donanıma sahip olarak uygun yerlerde müdahalelerde bulunması (giriş-çıkış yapması) ile öğrencilere alan ve çevre konusunda öğrenme fırsatları verilebileceğini raporlamışlardır. Böylece öğrencilerin ön bilgi sayılabilecek kesir kavramını devreye koyarak karşılaştıkları problemi çözebildikleri ifade edilmiştir. Hacıömeroğlu ve Apaydın (2009) ise öğrencilerin alan ve çevre konularında yaşadıkları zorlukları aşmalarında tangram etkinliklerinin yardımcı olabileceğini ifade etmişlerdir. Ancak bu çalışma sadece etkinlik planının sunulmasından ibarettir.

Çevre ve alan kavramlarını ele alan çalışmalarda getirilen öneriler genel olarak iki başlık altında toplanabilir. Bunlardan birincisi, ilgili formüllerin öğrenen bireyler tarafından yapılandırıldığı öğrenme ortamları oluşturmanın önemine vurgu yapmaktadır (Akkuş, Akkaş ve Yıldırım, 2018; Altun, 2010; Küçük ve Demir, 2009; Pesen, 2008; Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013; Zembat, 2013). İkinci öneri ise çevre ve alan kavramlarının kendi arasındaki ve diğer kavramlarla olan ilişkilerinin üzerinde durmaktır (Akkuş, Akkaş ve Yıldırım, 2018; Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013).

Matematikteki kavramlar, büyük oranda bir birleriyle ilişkilidirler. Etkili bir öğrenme sağlanabilmesi için bu ilişki ve bağlantıların oluşturulması önem arz etmektedir (Küçük ve Demir, 2009). Olkun ve Toluk Uçar (2014) merkezi sınavlarda, katılımcıların iki farklı davranış eğilimi sergilediğini işaret etmişlerdir. Birinci eğilimi sergileyen bireyler, geometri sorularının tamamı ya da tamamına yakınını cevaplayabilirken ikinci eğilimi sergileyen bireyler ise geometri sorularının hiçbirini cevaplayamamaktadır (ya da sadece 1-2 tanesini ancak cevaplayabilmektedir). Bu iki eğilimin sebebi, geometri konularının birbiriyle bağlantılı olmasından olabilir. Dolayısıyla geometrik düşünmenin gelişmesi için kavramlar arasındaki ilişkilerin iyi yapılandırılması gerekmektedir (Dağlı ve Peker, 2012). Olkun ve Toluk Uçar (2014) matematik kavramlarını, gerçek araç ve modellerle ilişkilendirmenin, matematiği anlaşılabilir ve ulaşılabilir kılacağını söylemektedirler.

Araştırmacılara göre geometri de (cisim ve şekillerle uğraşması yönüyle) matematiği anlaşılabilir kılan araçlardan biridir. Dolayısıyla matematik ve geometriyi ayrı ders olarak ele almak yerine birlikle ele almayı tavsiye etmektedirler.

Akkuş, Akkaş ve Yıldırım (2018) günlük hayatta alan belirleme işleminin çoğunlukla uzunluk ölçümüyle olduğunun ve bu gibi durumların öğretim ortamına taşınmasının önemine vurgu yapmaktadırlar. Bu durum çevre (uzunluk) ile alan arasındaki ilişkinin önemine örnek olarak verilebilir. Benzer şekilde Van de Walle, Karp ve Bay-Williams (2013) çevre uzunluğuna bağlı olarak alanın değişeceğini, alan değiştikçe de hacmin değişeceğini ifade ederek ilişkinin başka bir yönünü ele almışlardır. Yazarlar (2013, s.380) çevreyi "bir alanın etrafındaki uzaklık" şeklinde tanımlayarak ilişkiyi sağlamlaştırmaya çalışmışlardır. Kavramların ne anlama geldiğinin ve kavramlar arasındaki ilişkinin kavranmasında öğrencilerin zorlandığını belirten yazarlar, iki farklı etkinlik önermişlerdir. Birinci etkinlikte sabit uzunlukta bir tel ile dikdörtgen oluşturma ve bu dikdörtgenin alanını hesaplama bulunmaktadır. İkinci etkinlikte ise belirli sayıda birim kare verilerek bu karelerden (hepsi kullanılarak) farklı dikdörtgenler oluşturulması ve oluşan dikdörtgenlerin çevrelerinin hesaplanması vardır.

Özetle matematiksel fikirler ilişkilidir. Bu fikirler günlük hayattan bağımsız da değildir. Dolayısıyla matematiksel fikirlerin (formüllerin) oluşturulmasında kavramsal yaklaşım sergilenmesi, formüllerin anlamlı hale gelmesini sağlayabilir. Formüller anlamlı hale gelirse, unutulsa dahi, mevcut bilgilerle yeniden oluşturulabilir. Benzer şekilde rutin olmayan durumlarda geri katlama yaparak matematiksel anlayış sağlamlaştırılabilir (Martin, 2008). Böylece birbirinden kopuk ve ezberlenmesi gereken bilgi parçaları olarak görünmezler (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013). Çevre ve alan kavramları arasındaki önemli ilişkilerden birisi de türevdir. İlerleyen bölümlerde türev kavramı ele alınacak sonra bu ilişki üzerinde durulacaktır.

2.2.2. Türev

Bu başlık altında önce türev kavramının tarihsel gelişimi ele alınacaktır. Sonra türev konusunda bireylerin karşılaştıkları zorluklar ve bu zorluklara getirilen çözüm önerileri literatürdeki bilgiler ışığında tartışılacaktır. Son olarak bu çalışmaya temel teşkil eden çevre ve alan arasındaki türev ilişkisi ele alınacaktır.

Türev fikrinin gelişmesinde, sırasıyla, Fermat, Newton, Leibniz, Lagrange, Cauchy ve Weierstrass gibi matematikçilerin katkıları olmuştur. Ancak türevin altında yatan fikir, çok daha öncesinden kullanılmaya başlanmıştır (Çetinkaya, Erbaş ve Alaca, 2013). Fermat (1601-1665) polinom fonksiyonların teğetlerinin eğimi (bundan hareketle maksimum ve minimum noktalarını) inceleyerek türeve temel oluşturmuştur (Baki, 2014). Yaklaşık olarak aynı zamanlarda Newton ve Leibniz birbirinden habersiz bir şekilde türev fikrini geliştirmiştir. Newton türev fikrini, hareketi ve hızı anlamak için ortaya çıkarmıştır. Newton $\dot{y}, y', f'(x)$ gibi notasyonlar kullanmıştır. Leibniz ise bir eğriyi sonsuz köşeli bir çokgen olarak değerlendirmiştir. Bağımsız değişken olan *x* değerleri arasındaki değişimi *dx* olarak isimlendirmiştir. Bağımsız değişkendeki *dx* kadarlık değişime karşılık gelen bağımsız değişken değişimine de *dy* demiştir. Burada *dx* ve *dy* diferensiyel olarak ele alınmaktadır. Leibniz'e göre türev, bu diferensiyellerin oranı (*dy/dx)* diğer bir deyişle fonksiyona çizilen teğetin eğimidir. Bu tanımlamalarda sonsuz küçüklük fikri kavram karmaşasına sebep olmuş ve Cauchy (1789-1855) limit yardımıyla bu karmaşayı gidermiştir. Cauchy $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tanımlamasını yapmıştır. 1870 yıllarında Weierstrass, delta-epsilon $(\delta - \varepsilon)$ tanımı aracılığıyla türeve netlik kazandırmıştır (Çetinkaya, Erbaş ve Alaca, 2013).

Türev kavramının tarihsel gelişimi yukarıdaki gibi özetlenebilir. Türev başlığı altında sırasıyla türev fikrini oluşturabilmek için matematik tarihinden faydalanılarak tasarlanmış bir problem durumu ve çözümü verilecektir. Böylece türev kavramının ne anlamlara geldiği ortaya çıkarılmaya çalışılacaktır.

2.2.2.1. Türev Öğretimi İçin Problem Durumu

MÖ 300'lü yıllarda Aristo, cisimlerin boşlukta aldığı yol-zaman ilişkisi üzerine "Belirli bir ağırlık, belirli bir yükseklikten belirli bir zamanda düşer; daha büyük bir ağırlık aynı yükseklikten daha az bir sürede düşer; geçen zaman ağırlıklarla ters orantılıdır." önermesini kurmuştur. Yaklaşık olarak 1800 yıl boyunca; insanlar, serbest düşme hareketi yapan cisimleri görseler de Aristo'nun kurduğu önerme genel inanış olmuştur. Rönesans Avrupa'sında dünyaya gelen bir çift dikkatli göz, gerçekte bu önermenin geçerli olmadığını fark etmiştir. Bu gözler Galileo'ya aittir…

Galileo (1564 – 1642) çoğu kişinin pek de dikkat etmediği şeylere dikkat eden ve ilginç sonuçlara ulaşan bir karaktere sahipti. Biraz merak biraz da takıntı olarak adlandırılabilecek bu ruh haliyle Galileo, birçok buluş ve icadın altına imzasını atmıştır. Serbest düşme hareketinin "nasıl" olduğunu gözlemleyen ve bilim dünyasında araştırmaya değer bir konu haline getiren Galileo'dur (Naylor, 1974). Ancak "matematiksel model"ini kurmak ve "neden"ini açıklamak Newton'a (1642 – 1727) nasip olmuştur (Topdemir, 2010).

Galileo, farklı kütlelere sahip taşların serbest düşme hareketlerini incelemiştir. Serbest düşme hareketi, yüksek bir binadan bırakılan cismin yapacağı hareket olarak düşünülebilir. Galileo'nun yaptığı ölçümlerde taşların kütleleri ve büyüklükleri farklı olsa da hemen hemen aynı anda yere düşmektedir. Galileo, düşme sürelerindeki ufak farklılıkların hava ile taşların arasında oluşan sürtünme kuvvetinden kaynaklandığını ifade etmiştir. Havanın olmadığı bir ortam (vakum ortamı) oluşturmanın mümkün olması durumunda, vakum ortamında düşen iki cismin aynı yükseklikten aynı sürede yere ulaşacağını belirtmiştir. Düşen bir cismin ivmesini ölçmeye çalışan ilk kişi olan Galileo'nun bu başarılı gözlemi, doğa yasalarının gizemini çözmekte bir başlangıç noktasıdır.

Galileo'nun önündeki en büyük engel, zamanı küçük aralıklarda ölçmektir. Çünkü o zamanlar hassas saatler bulunmamaktadır. Bunun yerine hareketi yavaşlatma fikrini geliştirmiştir. Eğik düzlemde bir kürenin yapacağı hareket, serbest düşmede yapacağı harekete benzer sonuçlar doğuracaktır. Bu ve bunun gibi deneylerinin sonucunda Galileo: "*serbest düşmeye bırakılan bir cisim, zamanın karesi oranında yol almaktadır*" sonucuna ulaşmıştır.

İlerleyen yıllarda Galileo'dan aldığı ilhamla yer çekimi ivmesi ve yer çekimi kuvvetini, ivme ile yol ve ivme ile hız arasındaki ilişkiyi kuran kişi Newton olmuştur. Newton bunu düşünce deneyleri ile yapmıştır (Topdemir, 2010). Newton'un bu ilişkileri kurabilmesini sağlayan şey, sonsuz küçüklük fikridir. Sonsuz küçüklük fikri (araç olarak) modern matematiğin ve Newton mekaniği denilen fiziğin temellerini oluşturmaktadır. Newton'un yaptığı şey, doğa olaylarını matematiksel olarak ***modelleme***dir. Çoğu kişinin formül dediği bu modellerden bazıları aşağıda verilmiştir.

$F=m.a$ $G=m.g$

Şimdi kendinizi önce Galileo sonra Newton yerine koyun. Serbest düşme hareketinde cismin aldığı yolun (x) saniye cinsinden zamanın (t) karesinin 5 katı ile doğru orantılı olduğunu gözlemliyorsunuz. Bu durumda aşağıdaki problemlere cevap vermeye çalışınız.

a) Yol ile zaman ilişkisinin matematiksel ifadesini oluşturunuz. Bu bağıntıdaki bağımlı ve bağımsız değişkenleri tespit ediniz.
b) 3 saniyede yere ulaşan bir cismin ortalama hızını hesaplayınız. (Grafik çizip belirtiniz.)
c) Bu cismin $t_1 = 1$ ve $t_2 = 2$ saniyeleri arasındaki ortalama hızını bulunuz. (Grafik çizip açıklayınız.)
d) Bu cismin $t_2 = 2$ ve $t_3 = 3$ saniyeleri arasındaki ortalama hızını bulunuz. (Grafik çizip açıklayınız.)
e) Çok küçük aralıklarla ölçüm yapan radar benzeri bir cihazınız olsun. Elinizdeki cihazla cismin $t_0 = 2$ saniyesindeki hızını yaklaşık olarak ölçtüğünüzü düşünün. Cihaz aracılığıyla yapacağınız ölçüm hangi değere yakın olur? (Grafik çizerek açıklayınız.)
f) Bu cismin $t_0 = 2$ saniyedeki anlık hızı kaçtır? (Grafik çizerek açıklayınız.)

Çözüm:

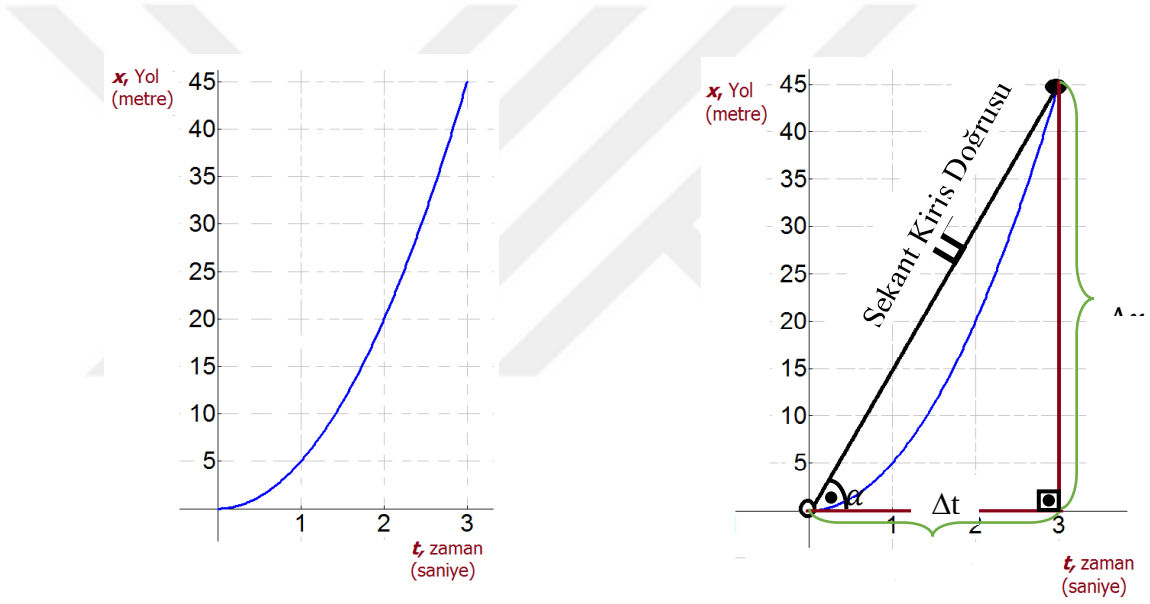
a) Problemde yol ile zaman arasındaki matematiksel ilişki (fonksiyon) istenilmektedir. Son paragrafta "Serbest düşme hareketinde cismin aldığı yolun (x) saniye cinsinden zamanın (t) karesinin 5 katı ile doğru orantılı olduğunu gözlemliyorsunuz" ifadesi geçmektedir. Bu durumda oluşturulacak fonksiyonda yol (x) zamana (t) bağlı olarak değişmektedir. Dolayısıyla zaman (t) bağımsız değişken iken yol (x) bağımlı değişken olacaktır. Yol ve zaman arasındaki ilişkiyi ortaya koyan fonksiyon ise aşağıdaki gibidir.

$X: R^+ \rightarrow R^+$ bir fonksiyon olmak üzere $X(t) = 5t^2$ dir.

b) Serbest düşmeye bırakılan cisim 3 saniyede yere düşmüş ise $X(t) = 5t^2$ olduğu için $X(3) = 5.3^2 = 45$ metrelik bir mesafe kat etmiştir. Dolayısıyla 45 metre yükseklikten bırakılmıştır. Yol-zaman ilişkisini veren grafik aşağıda sunulan grafiklerden soldaki gibi olacaktır. Problemde istenilen cismin hareketi boyunca ortalama hızının bulunmasıdır. Ortalama hız, yoldaki değişimin zamandaki değişime oranıdır. Dolayısıyla ortalama hız, aşağıdaki gibi olacaktır.

$$v_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{X(t_1) - X(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{X(3) - X(0)}{3 - 0} = \frac{5.3^2 - 5.0^2}{3 - 0} = \frac{45}{3} = 15\ m/sn$$

Şekil 2.8.'e dikkat edilecek olursa $v_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ifadesindeki Δx ve Δt ifadeleri bir dik üçgenin dik kenarlarını oluşturmaktadır. Bu dik üçgenin hipotenüsü, sekant kiriş doğrusu olarak adlandırılır. Kiriş denilmesinin sebebi, fonksiyonu iki noktadan kesmesidir. Bu durumda $v_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ değeri sekant kiriş doğrusunun eğimine (bağımsız değişken olan t ekseni ile yapılan açının tanjantına) denk gelmektedir. Diğer bir deyişle $\tan(\alpha) = v_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ olur.



Şekil 2.8. Ortalama Hız ve Sekant Kiriş Doğrusu

c) Cismin $t_1 = 1$ ve $t_2 = 2$ saniyeleri arasındaki ortalama hızı istenilmektedir. Bir önceki şıkta serbest düşme hareketi yapan cismin yol-zaman grafiğindeki değerlerden ve matematiksel modelden faydalanılabilir. Ortalama hız aşağıdaki gibi olur.

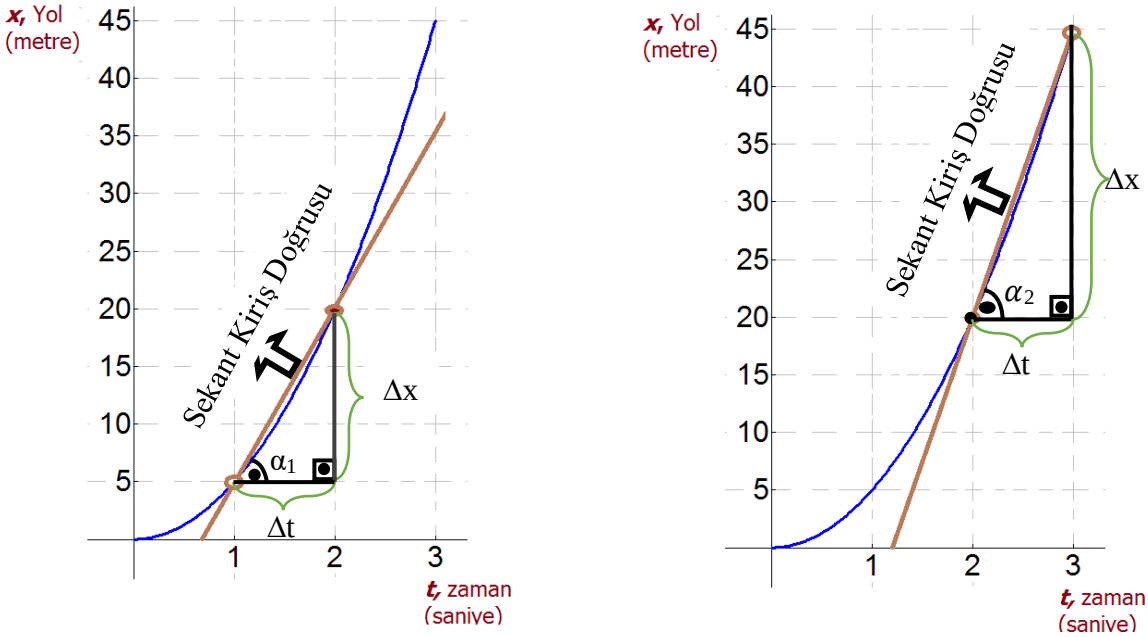
$$v_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{X(t_2) - X(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{X(2) - X(1)}{2 - 1} = \frac{5.2^2 - 5.1^2}{2 - 1} = \frac{20 - 5}{1} = 15\ m/sn$$

Bir önceki şıktakine benzer olarak yine bulunan $v_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ifadesindeki (sol-aşağıdaki grafikte) Δx ve Δt ifadeleri bir dik üçgenin dik kenarlarını oluşturmaktadır. Bu durumda

$v_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ değeri sekant kiriş doğrusunun eğimine (bağımsız değişken olan t ekseni ile yapılan açının tanjantına) denk gelmektedir. Diğer bir deyişle $\tan(\alpha_1) = v_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ olur.

d) Cismin $t_2 = 2$ ve $t_3 = 3$ saniyeleri arasındaki ortalama hızı istenilmektedir. Bir önceki şıktaki çözüme benzer olarak ortalama hız aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$v_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{X(t_3) - X(t_2)}{t_3 - t_2} = \frac{X(3) - X(2)}{3 - 2} = \frac{5.3^2 - 5.2^2}{3 - 2} = \frac{45 - 20}{1} = 25\ m/sn$$



Şekil 2.9. Ortalama Hız ve Sekant Kiriş Doğrusu II

Şekil 2.9.'da görüldüğü üzere bir önceki şıktakine benzer olarak yine bulunan $v_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ifadesindeki Δx ve Δt ifadeleri bir dik üçgenin dik kenarlarını oluşturmaktadır. Bu durumda $v_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ değeri sekant kiriş doğrusunun eğimine (bağımsız değişken olan t ekseni ile yapılan açının tanjantına) denk gelmektedir. Diğer bir deyişle $\tan(\alpha_2) = v_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ olur.

e) Problemde çok küçük aralıklarla ölçüm yapan radar benzeri bir cihazınız olsaydı eğer cismin $t_1 = 2$ saniye civarındaki hızının yaklaşık değerinin ne olacağı sorulmaktadır. Önceki iki şıkta 1-2 saniye aralığında ve 2-3 saniye aralığındaki ortalama hızlar bulunmuştur. Bu değerler sırasıyla 15 m/sn ve 25 m/sn'dir. Bu ortalama hızların artışından cismin hızlanan bir hareket seyreylediği sonucu

çıkarılabilir. Serbest düşme hareketine bırakılan cisimlerin zamana bağlı olarak hızlandığı gözlemiyle bu bulgu örtüşmektedir. Bu hızlar dikkate alınarak ikinci saniye civarında yaklaşık hız değerinin 15 m/sn ile 25 m/sn arasında olması gerektiği aşikârdır. Daha hassas bir aralık bulabilmek için Tablo 2.2. gibi bir tablo yapmakta fayda vardır.

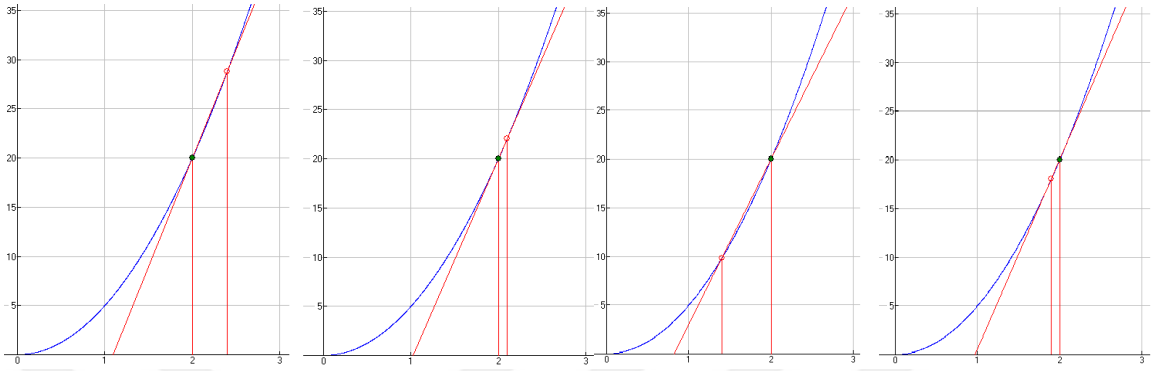
Tablo 2.2. Küçük Aralıklarla Ölçüm Yapıldığında Ortalama Hız Davranışı

t_1	t_0	$X(t_1)$	$X(t_0)$	$\Delta t = t_1 - t_0$	$\Delta x = X(t_1) - X(t_0)$	$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{X(t_1)-X(t_0)}{t_1-t_0}$
1	2	5	20	-1	-15	15
1,3	2	8,45	20	-0,7	-11,55	16,5
1,6	2	12,8	20	-0,4	-7,2	18
1,9	2	18,05	20	-0,1	-1,95	19,5
1,91	2	18,2405	20	-0,09	-1,7595	19,55
1,95	2	19,0125	20	-0,05	-0,9875	19,75
1,99	2	19,8005	20	-0,01	-0,1995	19,95
2	2	20	20	0	0	Tanımsız
2,01	2	20,2005	20	0,01	0,2005	20,05
2,05	2	21,0125	20	0,05	1,0125	20,25
2,09	2	21,8405	20	0,09	1,8405	20,45
2,1	2	22,05	20	0,1	2,05	20,5
2,4	2	28,8	20	0,4	8,8	22
2,7	2	36,45	20	0,7	16,45	23,5
3	2	45	20	1	25	25

Tablo 2.2.'de görüldüğü üzere serbest düşmeye bırakılan cisim, bir saniye aralıkla gözlemlenmiştir. Bu durumda ortalama hız aralığı 15m/sn ile 25m/sn çıkmıştır. Ölçüm aralığı 0,7 saniye yapılmış olsaydı ortalama hız aralığı 16,5 m/sn ve 23,5 m/sn olacaktı. Aralık daha da hassaslaştırılıp 0,1 saniyeye düşürülürse eğer hesaplanan ortalama hız 19,5m/sn ile 20,5 m/sn arasında bir değer alırdı. Çok daha hassaslaştırılıp 0,01 saniyede bir ölçüm almak mümkün olsaydı bu aralık 19,95 m/sn ile 20,05 m/sn arasına indirilirdi. Buradan ölçüm aralığı sıklaştırıldığında ortalama hızın 20m/sn değerine yaklaştığı söylenebilir. Ancak 2. saniyede 0/0 belirsizliği ortaya çıkmaktadır. Bunun sebebi tablo oluşturulurken kullanılan hız formülü $v_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{X(t_1)-X(t_0)}{t_1-t_0}$'dır. Bu formülde $t_1 = t_0 = 2$ alındığında pay ve payda aynı anda sıfır olmaktadır.

Her bir tablo değeri için grafik çizmek yer israfı olacağından sadece birkaç değer için grafikler Şekil 2.10.'daki gibi olur. Tabloda hesaplanan her bir hız değeri ortalama hızdır.

Daha önce de belirtildiği üzere bu hız değerleri, fonksiyonu iki noktadan kesen sekant kiriş doğrularının eğimlerine denk gelmektedir. Şekil 2.10.'daki grafiklerde sekant kiriş doğruları, kırmızı olarak işaretlenmiştir.



t_1=2,6 t_1=2,1 t_1=1,6 t_1=1,9

Şekil 2.10. Sekant Kiriş Doğrularının Teğete Yaklaşması

Problemin son aşamasında $t_0 = 2$ saniyedeki anlık hız sorulmaktadır. Anlık hız hesaplayabilmek için ***an*** kavramının ne anlama geldiğini incelemek gerekmektedir. An, en küçük zaman aralığı olarak tanımlanabilir. En küçük zaman aralığı ise sıfırdır. Günlük hayatta bu mümkün olmasa da matematikte bu mümkündür. Zaman aralığı olan Δt yi sıfır almak bir önceki şıkta 0/0 tanımsızlığına yol açmıştı. Ancak matematikteki limit argümanıyla bu tanımsızlığın üstesinden gelinebilir. Buna da $X(t)$ fonksiyonunun $t_0 = 2$ noktasındaki türevi denir.

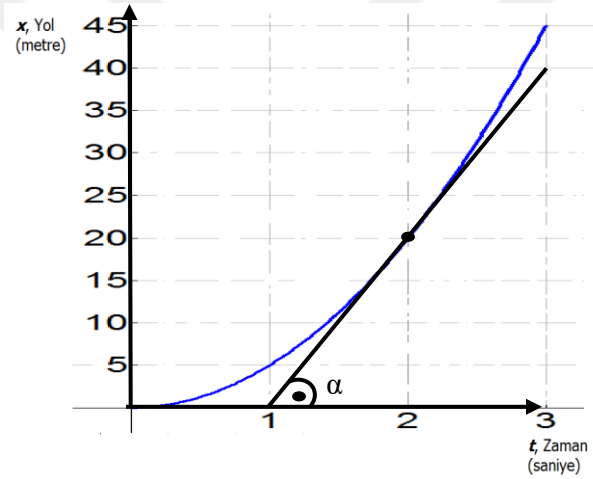
$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to 2} \frac{x(t) - x(2)}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{5.t^2 - 5.2^2}{t - 2}$$

$$= \lim_{t \to 2} \frac{5(t-2)(t+2)}{t-2} = \lim_{t \to 2} \frac{5(t+2)}{1} = 20\ m/sn = X'(2) = X'(t_0)\text{dır.}$$

Grafik üzerinden yapılan işlem değerlendirilecek olursa, bir önceki şıktaki sekant kiriş doğrularının hareketine dikkat etmek gerekir. Sekant kiriş doğruları fonksiyonu iki noktadan kesmektedirler. Bunlardan ilki $t_0 = 2$ noktasıdır. Bu nokta (2, 20) diğer şıklarda, içi dolu bir daire ile işaretlenmiştir. t_1 değerlerine karşılık gelen $(t_1, 5{t_1}^2)$ noktaları ise içi boş daireler ile işaretlenmiştir. t_1 değerleri $t_0 = 2$ değerine yaklaştığında Δt değeri de sıfıra yaklaşmaktadır. Bu durumda içi boş daireler (($t_1, 5{t_1}^2$) noktaları) git gide içi dolu daireye ((2, 20) noktasına) yaklaşmaktadır.

$\Delta t \to 0$ olduğunda iki nokta üst üste gelip tek bir nokta diğer bir deyişle (2, 20) noktası olacaktır. Bu durumda sekant kiriş doğrusu (aşağıdaki grafikte görüldüğü gibi) fonksiyona (2, 20) noktasından çizilen teğete dönüşecektir. Bulunan değer ise fonksiyona bu noktadan çizilen teğetin eğimine denk gelecektir. Diğer bir deyişle $V = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} = X'(2) = X'(t_0) = \tan \alpha$ dır.

Sonuç olarak bir t_0 noktası civarında, bağımlı değişkendeki (yoldaki) anlık değişimin bağımsız değişkendeki (zamandaki) anlık değişime oranı (anlık değişim oranı) anlık hızı verir. Buna fonksiyonun bir t_0 noktasındaki türevi denir. Aynı zamanda bu, Şekil 2.11'de gösterildiği gibi, fonksiyonun çizdiği eğriye t_0 noktasında çizilen teğetin eğimidir.



Şekil 2.11. Anlık Hız, Noktasal Türev, Noktada Çizilen Teğetin Eğimi

$\lim_{t \to t_0} \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}$ ifadesine (t_0 noktasındaki) noktasal türev denklemi denir. Bu ifadede $t \to t_0, t - t_0 = -h$ ve $t \to t_0 \equiv h \to 0$ dönüşümlerini yapılsın. Bu durumda noktasal türev denklemi $\lim_{h \to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$ ifadesine dönüşecektir. Sonuçta elde edilen $\lim_{h \to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h}$ ifadesine türevin genel denklemi denilmektedir.

Türev "bir fonksiyondaki bağımlı değişkendeki anlık değişimin bağımsız değişkendeki anlık değişime oranı" şeklinde tanımlanabilir. Tanımdan da anlaşılacağı üzere türevden bahsedebilmek için fonksiyonun bilinmesi gerekmektedir ancak bu yeterli değildir. "Anlık değişim oranı" fikrinin anlaşılabilmesi için limit kavramı bilinmelidir. Türevin "fonksiyona bir noktadan çizilen teğetin eğimi" özelliğini kavrayabilmek için geometri ve trigonometrinin bilinmesi gerekmektedir. Sonuç olarak türev kavramını

anlamlandırabilmek için geometri, fonksiyon, limit, teğet, eğim ve süreklilik gibi kavram ve konularının iyi bilinmesi ve türev fikriyle ilişkilendirilmesi gerekmektedir. Bu kavramlar ve konular başlı başına öğrenen bireylerin zorluk yaşadığı alanlardır. Dolayısıyla türev konusunun anlamlandırılmasında zorluklar yaşanılması pek doğaldır (Bingölbali, 2008). Yapılan araştırmalar (Asiala, Cottrill, Dubinsky ve Schwingendorf, 1997; Çetin, Dane ve Bekdemir, 2012; Orton, 1983; Tatar, Okur ve Tuna, 2008) bu durumu desteklemektedir.

Asiala, Cottrill, Dubinsky ve Schwingendorf (1997) araştırmalarında çeşitli yüksek matematik dersleri almış olan öğrencilerle klinik mülakat yapmışlardır. Katılımcılara bir fonksiyonun ve fonksiyonun bir noktasında fonksiyona teğet olan denklem grafiği sunulmuştur. Söz konusu noktada fonksiyonun türev değeri sorulmuştur. Sunulan problem durumunda teğet doğrusunun eğimini grafikteki verileri (teğet doğrusunun eksenleri kestiği noktalar) kullanarak hesaplamak mümkündür. Bu araştırmada bazı öğrenciler kolaylıkla probleme çözüm üretebilirken bazı öğrenciler çeşitli sebeplerden dolayı ciddi problemler yaşamışlardır. Yaşanılan problemler, grafiği okuyamama, grafik ile fonksiyon arasındaki ilişkiyi kuramama ve fonksiyonun cebirsel yapısının eksikliğini hissetme gibi durumlardır.

Türev kavramının diğer konu ve kavramlarla (teğet, eğim gibi) ilişkisini zihninde yapılandıramayan bireylerin rutin yol ve yöntemlere bağlı kaldığı ifade edilebilir. Zira Asiala, Cottrill, Dubinsky ve Schwingendorf'un (1997) araştırmasının bulgularından olan "fonksiyonun cebirsel yapısının eksikliğini hissetme" durumu türev ile ilgili işlemleri uygulayarak problemi çözme eğiliminden kaynaklanmaktadır. Literatürde bu bulguyu destekleyen araştırmalara rastlamak mümkündür. Örneğin Orton'un (1983) yaptığı araştırmada öğrenciler türevle ilgili (polinom fonksiyonun türevini almak gibi) rutin işlemleri rahatlıkla yaparken türevi kavramsal olarak çok az anladıkları tespit edilmiştir. Bu duruma bir başka örnek de Asiala, Cottrill, Dubinsky ve Schwingendorf'un (1997) yaptıkları klinik mülakat sonuçlarından çıkarılabilir. Mülakatta doğrusal bir fonksiyonun türevini alan Larry isimli katılımcı doğal olarak sabit bir fonksiyona ulaşır. Sabit fonksiyonun değeri doğrusal fonksiyonun eğimidir. Ancak Larry $f'(x) = m$ ifadesinde x yerine bir değer koyarak hesaplama yapamayacağını ifade eder. Çünkü sağ tarafta x ifadesi kalmamıştır. Araştırmacılar ifade etmeseler de Larry'nin "türevini alıp x yerine istenilen değeri yaz ve bul" tarzı bir mekanik yaklaşım sergilediği söylenebilir.

Çetin, Dane ve Bekdemir'e (2012) göre matematiksel kavramlar birbirleriyle ilişkilidir. Anlamlı bir öğrenme için yeni bilginin ilişkili olduğu kavramların iyi anlaşılması ve yeni bilgiyle bunun bağlantısının kurulması önem arz etmektedir. Bu fikirden hareketle matematik bölümü ve matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin yığılma noktası konusunda gerçekleştirdikleri anlamayı incelemişlerdir. Çünkü yığılma noktası, limit fikrine temel oluşturur ve dolaylı olarak da türev kavramının anlaşılmasını sağlar. Yapılan araştırmada katılımcıların hiçbiri yığılma noktasını doğru olarak tanımlayamamıştır. Büyük bir kısmı ise kısmen doğru cevap vermeyi başarmıştır. Araştırmanın bir diğer sonucu ise katılımcıların yığılma noktası kavramının limit ve türev gibi kavramlarla ilişkisinden (kısmen de olsa) haberdar olmasıdır.

Sonuç olarak türev kavramı doğası gereği anlaşılması zordur. Bu durum öğrenen bireylerin kavramla ilgili algılarına da yansımaktadır. Örneğin Tatar, Okur ve Tuna (2008) birinci sınıfta okuyan öğretmen adaylarına, ortaöğretim zamanlarında en çok zorlandıkları konuları sormuşlardır. Öğretmen adayları türev ve uygulamaları konusunda genellikle zorlandıklarını ifade etmişlerdir. Bu noktada "ne yapılırsa türev kavramının öğretimi kolaylaştırılabilir" problemi kurulabilir. Matematik eğitiminde türev kavramıyla ilgili tartışmaların genel olarak odağında bu problem bulunmaktadır (Aksoy, 2007; Asiala, Cottrill, Dubinsky ve Schwingendorf, 1997; Bingölbali, 2008; Bulut, 2009; Orton, 1983; Sağlam, Altun ve Aşkar, 2009). Bu probleme her bir araştırmacı kendi bakış açısıyla çözümler getirmeye çalışmıştır. Önerilen çözümler: 1. Konuyla ilgili bilişsel şemaların ortaya çıkarılması, 2. Teknoloji destekli, 3. Temsiller arası bağlantıların kurulması, 4. Konu-kavramlar arası ilişkilerin oluşturulması matematik eğitimi şeklinde sıralanabilir.

Çözüm önerilerinden ilki bilişsel şemaların ortaya çıkarılmasıdır. Asiala, Cottrill, Dubinsky ve Schwingendorf'a (1997) göre bireylerin matematiksel kavramları öğrenirken veya bir problem çözerken izledikleri bilişsel yolları ortaya çıkarmak, matematik eğitimcilerine bu kavram ve problemleri derslerinde yapılandırırken yardımcı olabilir. Bu amaçla yürüttükleri çalışmalarında öğrencilerin türev ve eğim konusundaki bilişsel yapılarını APOS teori aracılığıyla ortaya çıkarmaya çalışmışlardır. Bunun için klinik mülakat şeklinde görüşmeler yapmışlardır.

Çözüm önerilerinden ikincisi, teknoloji aracılığıyla matematik eğitimi yapılmasıdır. Bu öneriyi getiren çok sayıda çalışma (Aksoy, 2007; Asiala, Cottrill, Dubinsky ve Schwingendorf, 1997; Bingölbali, 2008; Bulut, 2009; Sağlam, Altun ve Aşkar, 2009) bulunmaktadır. Örneğin Asiala, Cottrill, Dubinsky ve Schwingendorf'un (1997) yaptıkları araştırmada C4L olarak isimlendirdikleri kavramsal öğrenmeye yönelik hazırlanmış bilgisayar destekli işbirlikçi öğrenme ortamlarında eğitim gören öğrencilerin türevi anlama düzeylerinin geleneksel yöntemlerle eğitim alan öğrencilere göre daha yüksek olduğu raporlanmıştır.

Aksoy (2007) doktora çalışması kapsamında Maple programı aracılığıyla türev öğretiminin etkisini incelemiştir. Araştırma kapsamında oluşturulan denkleştirilmiş deney ve kontrol gruplarına beş haftalık eğitim sonrası son test uygulamıştır. Son test verilerine göre bilgisayar destekli matematik öğretiminin öğrencilerin problem çözme becerilerini artırdığı ve türev konusunda kavramsal anlama gelişmelerini desteklediği tespit edilmiştir.

Bulut (2009) doktora çalışmasında Maple programı aracılığıyla türev öğretiminin etkisini araştırmıştır. Deney grubu da kontrol grubu da işbirliğine dayalı yapılandırmacı ortamda eğitim görmüşlerdir. Türev konusunda akademik başarıyı ölçen son test puanlarında, Maple programını işbirlikçi öğrenme ortamında kullanarak türev eğitimi alan deney grubu lehine istatistiksel olarak anlamlı fark oluşmuştur.

Sağlam, Altun ve Aşkar (2009) bilgisayar cebir sistemleri aracılığıyla öğretmen adaylarının türev konusundaki problem çözme stratejilerini incelemişlerdir. Çalışmada, katılımcılardan bir (x_0, y_0) noktasında kesişen iki fonksiyona bu noktadan çizilecek teğet doğruları arasındaki eğimin hesaplanmasını içeren bir formül geliştirilmesi istenilmiştir. Geliştirilen formüller Maple programı aracılığıyla test edilmiş ve formüllerdeki hatalar tespit edilip giderilmeye çalışılmıştır. Katılımcılardan biri dışında diğerleri bu görevde başarılı olmuştur.

Bingölbali (2008) türev öğretiminde grafik analiz gibi matematik eğitimine yönelik hazırlanmış bilgisayar programların kullanılmasıyla türev öğretiminde yaşanılması muhtemel zorlukların aşılabileceğini söylemektedir. Bilgisayar programları sadece türev öğretiminde değil, matematik eğitiminin diğer konularında da yardımcı olabilir. Sonuç olarak yapılan araştırmalar ışığında bilgisayar programları yardımıyla yapılan matematik

öğretiminde, öğrenen bireylerin matematiğe yönelik olumlu tutum geliştirdiği (Aktümen ve Kaçar, 2008) bu programların öğrenilmesi gereken zor konuları basitleştirerek akademik başarıyı desteklediği (Aksoy, 2007; Asiala, Cottrill, Dubinsky ve Schwingendorf, 1997; Bulut, 2009; Sağlam, Altun ve Aşkar, 2009) söylenebilir.

Çözüm önerilerinden üçüncüsü, türevin farklı temsilleri arasındaki ilişkiler kurularak bir öğretim ortamı planlanmasıdır. Türevin grafiksel, cebirsel ve sayısal (tablo-nümerik değerler) gösterim olmak üzere üç farklı temsil türü vardır. Konuyla ilgili araştırmalar bu temsillerin birlikte kullanılmasını ve birbirleriyle ilişkilendirilmesini önermektedir (Aksoy, 2007; Bingölbali, 2008). Türev kavramına yönelik yukarıda sunulan öğretimsel durum, bu önerileri getiren araştırmacıların (Bingölbali, 2008; Çetinkaya, Erbaş ve Alaca, 2013) ortaya koyduğu örnek öğretim ortamları sentezlenerek oluşturulmuştur.

Bingölbali (2008) temsiller arası ilişkileri kurabilmek için farklı temsilleri aynı ekranda gösteren BCS uygulamalarının kullanımı tavsiye edilmektedir. Benzer şekilde Tall, türev öğretiminde eğrinin doğrusallığı fikrini geliştirmiştir. BCS'nin yakınlaştırma özelliği sayesinde eğrilere yeterince yaklaşıldığında eğrinin doğrusal görünmesi sağlanabilmektedir. Tall öğrenen bireylere bunun fark ettirilmesinin türevin öğrenilmesinde kolaylaştırıcı olacağını öne sürmüştür (Aksoy, 2007, s.32).

Son çözüm önerisi ise kavram ve konular arasındaki ilişkilerin kurulmasıdır. Matematikteki tüm konu ve kavramlar bir birleriyle bağlantılıdır (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013). Bu durum matematiksel bilginin tarihsel süreç içerisinde birikimli olarak ilerlemesinden kaynaklanıyor olabilir. Buna gerekçe olarak insanların fiziki ya da zihinsel deneyimleriyle yeni bilgiler üretirken eski bilgileri aracılığıyla düşünmeleri sunulabilir.

Matematiğin tüm konularında olduğu gibi türev kavramı da matematikte birçok konu ve kavramla bağlantılıdır. Özetlemek gerekirse türev kavramı, doğrudan limit dolaylı olarak da yığılma noktası (Çetin, Dane ve Bekdemir, 2012) geometri, fonksiyon, limit, teğet, eğim ve süreklilik (Bingölbali, 2008) gibi konu ve kavramlarla ilişkilidir. Bu ilişkilerin anlamlı bir şekilde kurulması önemlidir. Çünkü türevin diğer konu ve kavramlarla bağlantısını kuramayan bireyler rutin yol ve yöntemlere bağlı kalırlar (Asiala, Cottrill, Dubinsky ve Schwingendorf, 1997). Bu da bireylerin iyi birer problem çözücü olmasının önünde engel teşkil edebilir.

Matematiksel fikirlerin gelişimine engel teşkil eden bir diğer durum da geleneksel yol ve yöntemlere bağlı kalmaktır (Mamolo ve Zazkis, 2012). Geleneksel yol ve yöntemlerin dışına çıkarak üretilebilecek bir fikir de çevre ve alan arasındaki türev ilişkisidir. Bir sonraki bölümde bu ilişki tanıtılacaktır.

2.2.3. Çevre ve Alan Arasındaki Türev İlişkisi

Bu çalışma kapsamında giriş bölümünde de belirtildiği üzere çevre ve alan kavramları arasında var olan türev ilişkisi ele alınacaktır. Bu ilişkiler kurulurken Zazkis ve Mamolo'nun (2011) sınıf içi gözlemlerinde tesadüfi olarak denk geldikleri çevre ve alan arasındaki türev ilişkisi değerlendirilecektir. Sonra bu ilişkilerin öğrenciler tarafından kurulabilir olup olmadığıyla ilgili çalışmaları (Mamolo ve Zazkis, 2012) ele alınacaktır. Sonra Zazkis, Sinitsky ve Leikin'in (2013) türev ilişkisinin ispatına yönelik çalışması kısaca sunulacaktır. Bu üç çalışmalardaki matematiksel fikirler tartışılarak matematiksel açıdan görece daha estetik bir ispatlama süreci geliştirilmeye çalışılacaktır.

Zazkis ve Mamolo (2011) bir lisede matematik öğretmeni olan Bayan Violet'i derslerini gözlemlemişlerdir. Yaptıkları gözlemler öğretmenlerin pedagojik alan bilgisinin derslerde ortaya çıkan beklenmedik durumlarda nasıl devreye girdiğiyle ilgilidir. Öğrencilerden biri, dairenin alanının türevinin dairenin çevresini verdiğini fark etmiştir. Öğrenci, ders sonunda Bayan Violet'e bu durumu açıklamış ve kare gibi diğer şekillerde neden oluşmadığını sormuştur.

Karenin alışılagelmiş alan formülü, kenar uzunluğuna bağlıdır. Kenar uzunluğu w olan bir karenin alan fonksiyonu $A(w) = w^2$ dir. Kenar uzunluğuna bağlı alan fonksiyonunun türevi $A'(w) = 2w \neq 4w = Ç(w)$ karenin çevresine eşit değildir.

Zazkis ve Mamolo'nun (2011) raporladığına göre öğretmen, üniversite yıllarında aldığı matematiksel bilgilerden faydalanarak bu durumu öğrencisine açıklamıştır. Karenin alan fonksiyonunu, karenin bir kenar uzunluğunun yarısına w diyerek $A(w) = 4w^2$ şeklinde oluşturmuştur. Böylece alan fonksiyonunun türevi $A'(w) = 8w = Ç(w)$ karenin çevresini vermiştir. Burada kurulan alan fonksiyonu türev ilişkisi bağlamında çevreyi verse de yapılan açıklama ve üretilen fikirler matematiksel açıdan sakıncalıdır. Çünkü "kenar uzunluğunun yarısına bağlı alan fonksiyonu" fikri tüm düzgün çokgenlerde çevre ile alan arasındaki türev ilişkisini kurmaya yardımcı olmaz.

Mamolo ve Zazkis (2012) bir önceki çalışmalarında (Zazkis ve Mamolo, 2011) ortaya çıkan matematiksel bağlantıyı matematikçi Dr. Burgundy ile paylaşmıştır. Dr. Burgundy analiz derslerini alan herhangi bir kişinin bu bağlantıyı kurabileceğini belirtmiştir. Bunun üzerine araştırmacılar bu matematiksel çevre ve alan arasındaki türev ilişkisi fikrinin herkes tarafından fark edilip edilemeyeceğini test etmişlerdir. Çalışmalarına belirli bir matematik bilgisine sahip matematik bölümü 2. sınıfta okuyan 32 üniversite öğrencisini katılımcı olarak almışlardır. Araştırmada çemberin çevresi ve alanı arasındaki türev ilişkisi sunulan öğrencilerden 17'si hesaplama ve gerekçelendirme yaparak bunu açıklayabilmişlerdir. Otuz iki öğrenciden biri dışında diğerleri, karede türev ilişkisinin mümkün olmayacağını ifade etmiştir. Karenin çevresiyle alanı arasındaki türev ilişkisi izah edilen öğrencilerden sadece on yedisi bu açıklamayla ikna olmuştur. Bu öğrencilerden sadece dokuz tanesi küpün yüzey alanı ve hacmi arasındaki türev ilişkisini kurabilmiştir.

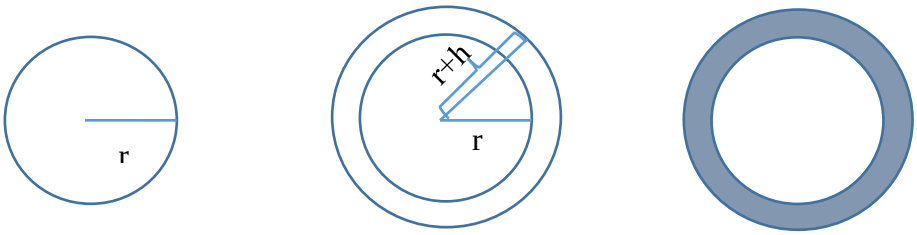
Mamolo ve Zazkis (2012) karenin çevresiyle alanı arasındaki türev ilişkisini kurarken Zazkis ve Mamolo'nun (2011) raporladığı Bayan Violet'in yapmış olduğu açıklamaya benzer bir açıklama yapmıştır. Bu ilişkiyi kurarken karenin bir kenar uzunluğunun yarısı olan w değişkenine yarıçap demişlerdir. Yarıçap modeli yine matematiksel açıdan zayıf ve sakıncalı bir açıklamadır. Çünkü yarıçap fikri "düzgün bir çokgenin ortasından (buna ilerleyen aşamalarda ağırlık merkezi denilecektir) kenara indirilen dikme mi yoksa çokgenin orta noktasının kenara dik uzaklığı mı" gibi bir karmaşaya sebebiyet vermektedir.

Zazkis, Sinitsky ve Leikin (2013) daha önceki çalışmalarda (Zazkis ve Mamolo, 2011; Mamolo ve Zazkis, 2012) ortaya çıkan fikirleri matematiksel olarak gerekçelendirmişlerdir. Bu çalışmada çember ve düzgün çokgenlerin çevreleriyle alanları arasındaki türev ilişkisi ispatlanmıştır. Düzgün çokgenlerle ilgili yapılan ispatlarda bağımsız değişken iç teğet çemberinin yarıçapı olarak seçilmiştir. Düzgün çokgenlerde iç teğet çember merkezi ile ağırlık merkezi aynıdır. Dolayısıyla ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı ile iç teğet çemberinin yarıçapı aynıdır. Bu eşitlikten dolayı söz konusu çalışmada (Zazkis, Sinitsky ve Leikin, 2013) yapılan ispatlar geçerli olsa da önceki çalışmalarda (Zazkis ve Mamolo, 2011; Mamolo ve Zazkis, 2012) olduğu gibi matematiksel açıdan sakıncalıdır. Küre ve düzgün çokyüzlülerin yüzey alanı ve hacimleri arasında türev ilişkisi kurulmaya çalışılırken "iç teğet çember merkezi" fikri geçerliliğini

yitirecektir. Nitekim Zazkis, Sinitsky ve Leikin (2013) küre ve düzgün çokyüzlülerde ispatlama yaparken cismin "içine yerleştirilmiş kürenin yarıçapı" gibi bir değişken tanımlamak durumunda kalmışlardır. Oysa alan fonksiyonu oluşturulurken "ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı" bağımsız değişken olarak seçilirse çevre ve alan arasındaki türev ilişkisi matematiksel olarak daha estetik bir şekilde ispatlanabilir. Benzer şekilde hacim formülü oluşturulurken ağırlık merkezinin yüzeye dik uzaklığı bağımsız değişken olarak seçilirse geçerli olabilir. Bu fikirden hareketle ispatlar aşağıdaki gibi yapılabilir.

2.2.3.1. Dairede Çevre ve Alan Arasındaki Türev İlişkisi

Yarıçapı r olan bir daire ele alınsın. Dairenin alanı πr^2 ve çevresi de $2\pi r$'dir. Dairenin alanı $A: R \to R, A(r) = \pi r^2$ ve çevresi de $Ç: R \to R, Ç(r) = 2\pi r$ olacak şekilde iki fonksiyon olarak belirlensin. Alan ve çevre fonksiyonlarındaki bağımsız değişkenler yarıçap diğer bir deyişle r dir. Alan fonksiyonunun bağımsız değişkene göre türevini alınırsa, $A'(r) = 2\pi r = Ç(r)$ olduğu, diğer bir deyişle çevreyi verdiği aşikârdır. Bunun altında yatan matematiksel ilişki, geometrik olarak incelenecek olursa;



Şekil 2.12. Dairenin Alanı ve Çevresi Arasındaki Türev İlişkisinin Geometrik Yorumu

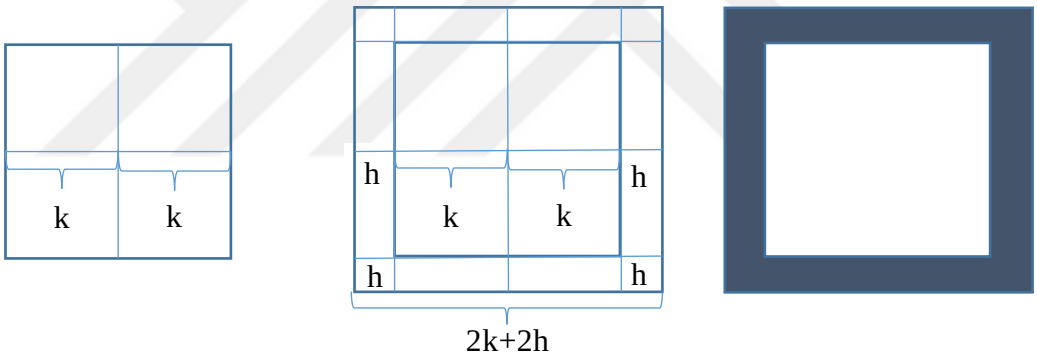
Şekil 2.12.'de gösterildiği üzere r yarıçaplı bir daire ele alınsın. Bağımsız değişkende h kadarlık bir değişim yapılsın. Alan fonksiyonunun değeri $A(r+h) = \pi(r+h)^2$ olacaktır. Bağımlı değişken olan alan fonksiyonundaki değişim ise $A(r+h) - A(r) = \pi(r+h)^2 - \pi r^2 = 2\pi h + h^2 = h(2\pi + h)$ kadar olacaktır. Bu da Şekil 2.12.'in en sağındaki halka kısmının alanına denk gelmektedir.

Bağımlı değişkendeki değişimi bağımsız değişkendeki değişime oranlanırsa eğer $\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta r} = \lim_{h \to 0} \frac{A(r+h)-A(r)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\pi(r+h)^2 - \pi r^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2r\pi+h)}{h} = \lim_{h \to 0} 2r\pi + h = 2\pi$r olur. Diğer bir deyişle alandaki anlık değişimin yarıçaptaki anlık değişime oranı $2\pi r$ kadardır.

Yarıçapı h kadar artırılırsa eğer dairenin alanı Şekil 2.11.'in sağındaki halkanın alanı kadar artmaktadır. h ifadesi küçültüldüğünde halkanın alanı git gide küçülecektir. $h \to 0$ olduğunda (h sıfıra gittiğinde) eklenilen halkanın alanı ancak bir çevre uzunluğu kadar olacaktır.

2.2.3.2. Karede Çevre ve Alan Arasındaki Türev İlişkisi

Ağırlık merkezinin bir kenara dik uzaklığı k (dolayısıyla kenar uzunluğu $2k$) olan bir kare ele alınsın. Karenin alanı $4k^2$ ve çevresi de $8k$ dır. Karenin alanı $A: R \to R, A(k) = (2k)^2$ ve çevresi de $Ç: R \to R, Ç(k) = 8k$ olacak şekilde iki fonksiyon olarak belirlensin. Alan ve çevre fonksiyonlarındaki bağımsız değişkenler "ağırlık merkezinin kenara olan dik uzaklığı" olan k'dır. Alan fonksiyonunun bağımsız değişkene göre türevini alırsak, $A'(k) = ((2k)^2)' = 8k = Ç(k)$ olmaktadır. Bunun altında yatan matematiksel ilişki incelenecek olursa;



Şekil 2.13. Karenin Alanı ve Çevresi Arasındaki Türev İlişkisinin Geometrik Yorumu

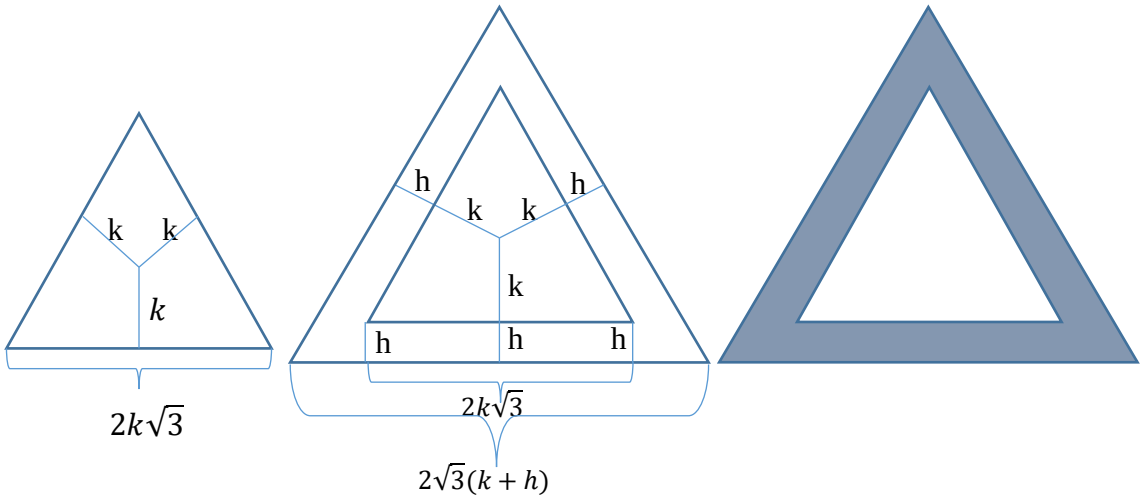
Şekil 2.13'te gösterildiği üzere ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı k olan bir kare ele alınsın. Düzlemsel şekillerin alanında değişim yapıldığı zaman bunun orantılı bir şekilde yapılmasına dikkat edilmelidir. Orantılı bir değişim yapılırsa, bağımsız değişken olan ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığında h kadarlık bir değişim olur. Bu durumda alan fonksiyonunun değeri

$A(k+h) = (2(k+h))^2$ olacaktır. Bağımlı değişken olan alan fonksiyonundaki değişim ise $A(k+h) - A(k) = (2(k+h))^2 - (2k)^2 = 8hk + 4k^2 = 4h(2k+h)$ kadar olacaktır. Bu da Şekil 2.13'ün en sağındaki *"karesel çerçeve"* kısmının alanına denk gelmektedir.

Bağımlı değişkendeki değişimi bağımsız değişkendeki değişime oranlanırsa eğer $\lim_{\Delta k\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta k}=\lim_{h\to 0}\frac{A(k+h)-A(k)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(2(k+h)\right)^2-(2k)^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h(2k+h)}{h}=\lim_{h\to 0}8k+4h=8k=$ $Ç(k)$ olur. Diğer bir deyişle alandaki anlık değişimin kenar orta dikme uzunluğundaki anlık değişime oranı $8k$ kadardır. Bu da çevreyi vermektedir. Kenar uzunluğu orantılı bir şekilde h kadar artırılırsa eğer karenin alanı Şekil 2.12'nin sağındaki "karesel çerçevenin" alanı kadar artmaktadır. h ifadesi küçültüldüğünde "karesel çerçevenin" alanı git gide küçülecektir. $h\to 0$ olduğunda (h sıfıra gittiğinde) eklenilen "karesel çerçevenin" alanı ancak bir çevre uzunluğu kadar olacaktır. Sonuç olarak karenin alanıyla çevresi arasında türev ilişkisi vardır.

2.2.3.3. Eşkenar Üçgende Çevre ve Alan Arasındaki Türev İlişkisi

Ağırlık merkezinin bir kenara dik uzaklığı k olan bir eşkenar üçgen ele alınsın. Eşkenar üçgenin alanı $3k^2\sqrt{3}$ ve çevresi de $6k\sqrt{3}$'tür. Eşkenar üçgenin alanı $A:R\to R, A(k)=3k^2\sqrt{3}$ ve çevresi de $Ç:R\to R, Ç(k)=6k\sqrt{3}$ olacak şekilde iki fonksiyon olarak belirlensin. Alan ve çevre fonksiyonlarındaki bağımsız değişkenler ağırlık merkezinin bir kenara dik uzaklığı olan k dır. Alan fonksiyonunun bağımsız değişkene göre türevini alırsak, $A'(k)=\left(3k^2\sqrt{3}\right)'=6k\sqrt{3}=Ç(k)$ olmaktadır. Bunun altında yatan matematiksel ilişki incelenecek olursa;



Şekil 2.14. Üçgenin Alanı ve Çevresi Arasındaki Türev İlişkisinin Geometrik Yorumu

Şekil 2.14'te gösterildiği üzere ağırlık merkezinin bir kenara dik uzaklığı k olan bir eşkenar üçgen ele alınsın. Düzlemsel şekillerin alanında değişim yapıldığı zaman bunun orantılı bir şekilde yapılmasına dikkat edilmelidir. Orantılı bir değişim yapılırsa, bağımsız değişkende h kadarlık bir değişim olur. Bu durumda alan fonksiyonunun değeri $A(k+h) = 3(k+h)^2\sqrt{3}$ olacaktır. Bağımlı değişken olan alan fonksiyonundaki değişim ise $A(k+h) - A(k) = 3(k+h)^2\sqrt{3} - 3k^2\sqrt{3} = 3h(2k+h)\sqrt{3}$ kadar olacaktır. Bu da Şekil 2.13'ün en sağındaki *"eşkenar üçgensel çerçeve"* kısmının alanına denk gelmektedir. Bağımlı değişkendeki değişimi bağımsız değişkendeki değişime oranlanırsa eğer

$$\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta k} = \lim_{h \to 0} \frac{A(k+h) - A(k)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(k+h)^2\sqrt{3} - 3k^2\sqrt{3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h(2k+h)\sqrt{3}}{h}$$

$= \lim_{h \to 0} 3(2k+h)\sqrt{3} = 6k\sqrt{3} = Ç(k)$ olur. Diğer bir deyişle alandaki anlık değişimin ağırlık merkezinin bir kenara dik uzaklığındaki anlık değişime oranı $6k\sqrt{3}$ kadardır. Bu da çevreyi vermektedir. Ağırlık merkezinin bir kenara dik uzaklığı orantılı bir şekilde h kadar artırılırsa eğer eşkenar üçgenin alanı Şekil 2.14'ün sağındaki *"eşkenar üçgensel çerçevenin"* alanı kadar artmaktadır. h ifadesi küçültüldüğünde *"eşkenar üçgensel çerçevenin"* alanı git gide küçülecektir. $h \to 0$ olduğunda (h sıfıra gittiğinde) eklenilen *"eşkenar üçgensel çerçevenin"* alanı ancak bir çevre uzunluğu kadar olacaktır. Sonuç olarak eşkenar üçgenin alanıyla çevresi arasında türev ilişkisi vardır.

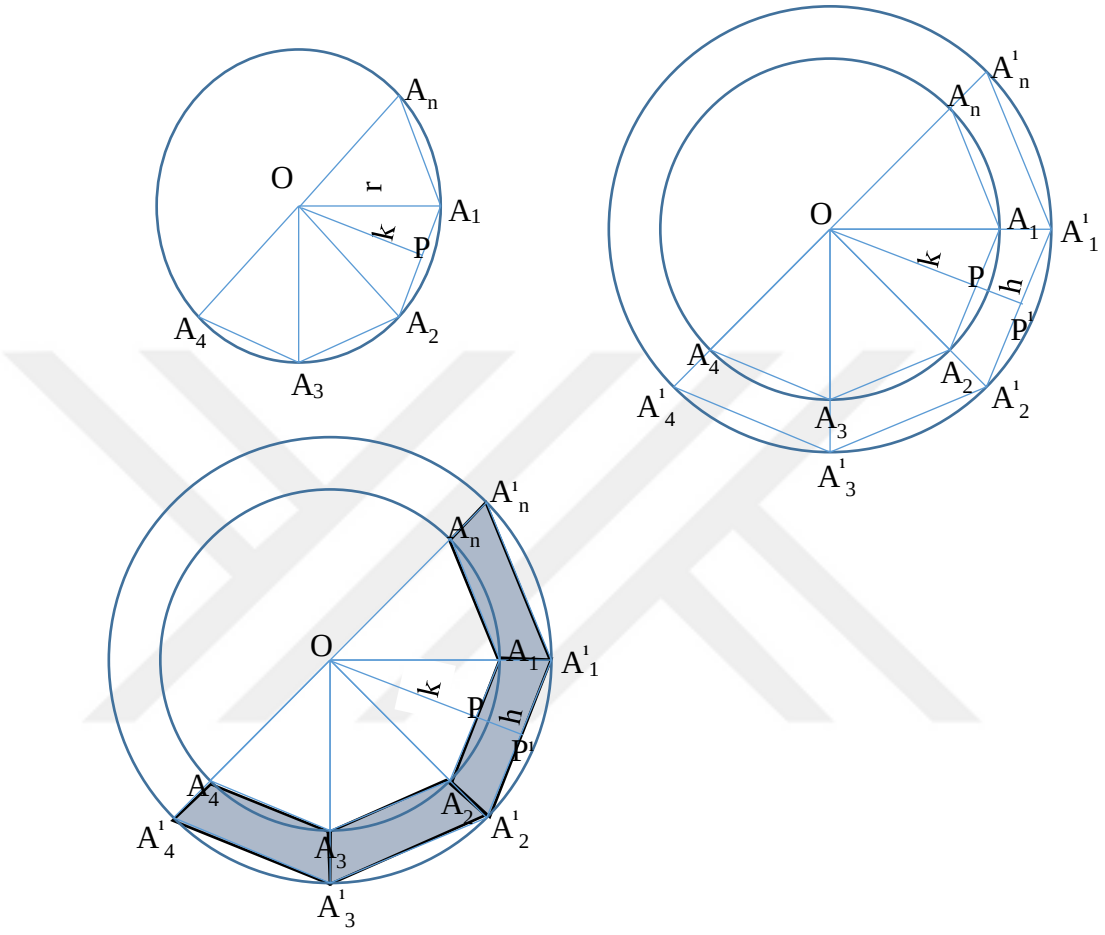
2.2.3.4. Düzgün Çokgenlerde Çevre ve Alan Arasındaki Türev İlişkisi

Düzgün çokgenlerin çevrel çember merkezi, ağırlık merkezi ve iç teğet çember merkezi aynı noktadır. Şekil 2.15'te gösterildiği gibi çevrel çember merkezi O, çevrel çember yarı çapı r ve köşeleri A_1, A_2, A_3, A_4, …, A_n olan düzgün çokgen ele alınsın. $m(\widehat{OA_1A_2}) = \alpha$ ve ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı $|OP| = k$ olsun. Düzgün çokgenin;

- Bir kenar uzunluğu $|A_2A_2| = 2.k.cot\alpha$ olur.
- Alan fonksiyonu $A: R \to R, A(k) = n.k^2.cot\alpha$ ve
- Çevre fonksiyonu ise $Ç: R \to R, Ç(k) = 2.n.k.cot\alpha$

Alan ve çevre fonksiyonlarındaki bağımsız değişkenler ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı olan $|OP| = k$ dır. Alan fonksiyonunun bağımsız değişkene göre türevini alırsak,

$A'(k) = (n.k^2.cot\alpha)' = 2.n.k.cot\alpha = Ç(k)$ olmaktadır. Diğer bir deyişle düzgün çokgenin alanının türevi çevresini vermektedir. Bunun altında yatan matematiksel ilişki incelenecek olursa;



Şekil 2.15. Düzgün Çokgenin Alanı ve Çevresi Arasındaki Türev İlişkisinin Geometrik Yorumu

Şekil 2.15'te gösterildiği üzere ağırlık merkezinin bir kenara dik uzaklığı olan $|OP| = k$ uzunluğuna h kadarlık bir ekleme yapılsın. Yapılan bu ekleme orantılı olarak tüm şekle yansır. Bu durumda alan fonksiyonunun değeri $A(k+h) = n.(k+h)^2.cot\alpha$ olacaktır. Bağımlı değişken olan alan fonksiyonundaki değişim ise $A(k+h) - A(k) = n.(k+h)^2.cot\alpha - n.k^2.cot\alpha = n.h.(2k+h).cot\alpha$ kadar olacaktır. Bu da Şekil 2.15'in en sağında taralı olarak verilen "*düzgün çokgensel çerçeve*" kısmının alanına denk gelmektedir. Bağımlı değişkendeki değişimi bağımsız değişkendeki değişime oranlanırsa eğer

$$\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta k} = \lim_{h \to 0} \frac{A(k+h) - A(k)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{n.(k+h)^2.cot\alpha - n.k^2.cot\alpha}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{n(2.h.k + h^2).cot\alpha}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{n.h.(2k+h).cot\alpha}{h} = \lim_{h \to 0} n.(2k+h).cot\alpha$$

$= 2.n.k.cot\alpha = Ç(k)$ olur. Diğer bir deyişle alandaki anlık değişimin ağırlık merkezinin bir kenara dik uzaklığı olan $|OP| = k$ değerindeki anlık değişime oranı $2.n.k.cot\alpha$ kadardır. Bu da çevreyi vermektedir. $|OP|$ ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı orantılı bir şekilde h kadar artırılırsa eğer düzgün çokgenin alanı Şekil 2.15'in sağındaki *"düzgün çokgensel çerçevenin"* alanı kadar artmaktadır. h ifadesi küçültüldüğünde *"düzgün çokgensel çerçevenin"* alanı git gide küçülecektir. $h \to 0$ olduğunda (h sıfıra gittiğinde) eklenilen *"düzgün çokgensel çerçevenin"* alanı ancak bir çevre uzunluğu kadar olacaktır. Sonuç olarak düzgün çokgenlerin alanıyla çevresi arasında türev ilişkisi vardır.

BÖLÜM 3: YÖNTEM

Bilim, bilimsel metodoloji ile bilgi üretme işidir. Bu çalışmada da bilimsel bilgi üretme kaygısı taşınmaktadır. Dolayısıyla "Bilimsel bilgiyi üretmenin metodolojisi nedir/neler olabilir?" felsefi sorgulaması bu araştırma için önem arz etmektedir. Bu nedenle bu ana başlık altında çalışmanın metodolojisi literatür ışığında temellendirilmeye çalışılacaktır.

3.1. Araştırma Deseni

Nitel araştırma yöntemleri, paradigmalar, verilere yaklaşımlar ve veri çözümleme teknikleri bakımından oldukça fazla çeşide ayrılmaktadır (Punch, 2005). Benimsenen paradigma, verilere yaklaşım ve verilerin çözümlenmesi bakımından yürütülen bu çalışmanın deseni fenomenografidir (phenomenography). Bu ana başlık altında fenomenografik araştırmanın ne olduğu, ne için yapıldığı ve bu araştırmanın neden bir fenomenografik araştırma örneği olduğu tartışılacaktır. Fenomenografik araştırmaların nasıl yürütüldüğü ve ortaya çıkan verilerin nasıl çözümlendiği ise ilerleyen başlıklar altında açıklanacaktır.

3.1.1. Fenomenografi

Marton (1992) anlamayı birey ile olgu arasındaki deneysel ilişkiler olarak tanımlamaktadır. Burada kullanılan olgu kavramı, gerçekleşmiş olan ya da gerçekleşen her şey anlamında kullanılmaktadır. Bu bağlamda anlama süreçlerini ortaya çıkarmak amacıyla Marton (1986; 1992) fenomenografi yöntemini geliştirmiştir. Bu çalışmanın amacı "öğretmen adaylarının alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini" anlamlandırma süreçlerini detaylandırarak ortaya çıkarmaktır. Yürütülen araştırma, anlama süreçlerine odaklandığı ve bu süreçleri incelemenin kuvvetli yollarından biri fenomenografi olduğu için bu araştırmanın desen olarak Marton'un ortaya koyduğu fenomenografi seçilmiştir. Bu başlık altında kısaca fenomenografinin ne olduğu ve nasıl yürütüldüğü ve ilerleyen aşamalarda da yürütülen bu araştırmanın tasarımının nasıl olduğu detaylandırılacaktır.

Fenomenografi kavramı etimolojik açıdan Yunan kökenlidir. Görünüş anlamına gelen "phainomenon" ve açıklama anlamına gelen "graphein" kelimelerinin birleşimidir (Hasselgren ve Beach, 1997). Burada kullanılan fenomenografi kavramı, "bireylerin

anlama, anlamlandırma, düşünme ve öğrenme dinamiklerindeki farklılaşmaları ortaya çıkarma amacıyla yürütülen nitel araştırma türü" anlamında kullanılmaktadır. Bu araştırma yönteminin temelinde aynı durumu yaşayan kişilerin bu duruma yönelik geliştirdikleri anlayış ve yorumlama farklılıklarını karakterize etme çabası yatmaktadır (Çepni, 2018; Marton, 1986). Marton'un (1986, s. 28) aktardığına göre bu yöntem, ilk olarak 1970'li yıllarda İsveçli bilim insanları tarafından düşünme ve öğrenmenin doğasını belirlemeye yönelik geliştirilmiştir. Marton, bazı fiziksel olguları anlamlandırma şekillerindeki farklılıkları raporlayan çalışmalara referans vererek, insanların bir olguyu çok farklı şekillerde deneyimleyebileceğini dolayısıyla da anlamlandırma ve kavramsallaştırma süreçlerinin de kendilerine özgü olabileceğini ifade etmektedir.

Fenomenografi, fenomenolojinin bir alt türü olarak görülür ancak durum böyle değildir. Marton'a (1986) göre fenomenografik araştırmalar insanlar ve çevreleri arasındaki farklı yollar ve ilişkileri inceler. Bu araştırma yönteminde çevre olduğu gibi tarif edilmeye çalışılmaz ya da bunun mümkün olup olmadığı da tartışılmaz. "Çevre insana nasıl görünüyor" sorusuna cevap aranır. Fenomenoloji de ise gerçekliğin neye benzediği araştırılmaya çalışır. Fenomenografi, gerçekliğin zihin dünyasında oluşturduğu yansımaların farklılaşmalarıyla ilgilidir. Fenomeloji ise deneyimin özüne odaklanmaya çalışır ve tüm yansımalardaki ortak yönler ortaya çıkarılmaya çalışır. Çepni (2018, s.114) fenomelojinin fenomen, fenomenografinin ise fenomenin insanlar tarafından nasıl algılandığına odaklandığını ifade ederek bu ayrımı özetlemiştir.

Fenomenografi, öğretme ve öğrenme ile ilgili bazı genel düşüncelerden hareketle geliştirilmiştir. Bu çalışmaların temelinde başarılı öğrenci olmanın bileşenlerinin ortaya çıkarılması yoktur. Aksine öğrenmenin ne anlama geldiğini açıklığa kavuşturma çabası vardır (Marton, 1986). Marton (1992) bireyler ile olgu arasındaki deneysel ilişkileri anlama ve bu süreçteki değişiklikleri de öğrenme olarak tanımlamaktadır. Araştırmacı, öğretim yönteminin etkililiğini belirlemek veya öğretim yöntemleri geliştirmek için öğrencilerin farklı ama sonlu anlama yollarını - fenomenografik araştırmalar ile - ortaya çıkarmanın önemine değinmektedir. Böylece anlamayı geliştirmek için etkili yollar keşfedileceğini belirtmektedir. Sonuç olarak fenomenografik araştırmaların sonuçları iyi anlaşılırsa bireylerin öğrenme süreçleri ile ilgili ilerleme kaydedilebilir (Çepni, 2018).

3.2. Çalışma Grubu

Bu araştırmanın çalışma grubunu, ilköğretim matematik öğretmenliği anabilim dalının üçüncü sınıfında okuyan üç öğretmen adayı oluşturmaktadır. Bu öğretmen adayları 2015-2016 eğitim öğretim yılı bahar döneminde Güneydoğu Anadolu Bölgesindeki bir devlet üniversitesinde öğrenimlerine devam etmekte olan öğretmen adayları arasından seçilmiştir. Öğretmen adayı seçiminde iki farklı kıstas kullanılmıştır. Çalışma grubunun kıstaslara uyan kişilerden oluşturulması yönüyle bu çalışmada, ***amaçlı örnekleme yöntemlerinden*** biri olan ***ölçüt örnekleme*** yöntemi ile çalışma grubu oluşturulmuştur. Çünkü Yağar ve Dökme (2018, s.6) da belirttiği üzere bu örnekleme yönteminde "önceden belirlenen bazı önem ölçütlerini karşılayan tüm durumları çalışmak" söz konusudur.

Birinci kıstas akademik başarıdır. Bunun iki gerekçesi vardır. Birinci gerekçe, katılımcıların alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini kurabilmeleri için ön bilişsel bilgilerinin yeterli olmasına duyulan ihtiyaçtır. Mamolo ve Zazkis (2012) "matematik bölümünde okuyan öğrencilerin alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini, kurabilirler mi?" sorusunu bir uzmana sormuşlardır. Uzman "analiz derslerini almış olan bir kişinin" alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini kurabileceğini ifade etmiştir. Bu nedenle çalışma kapsamında göz önüne alınan konu bağlamında çalışma grubuna seçilecek öğretmen adaylarının hem türev kavramını bilen hem de analiz ve geometri (alan ve çevre kavramları için) grubu dersleri alarak başarı ile tamamlamış öğretmen adaylarından oluşturulmuştur. Öğretmen adaylarıyla yapılan ön görüşmede, söz konusu dersleri başarıyla tamamlamalarına rağmen, türev kavramını, yeterince anlamlandıramadıklarını ifade etmişlerdir. Bu nedenle "2.2.2.1. Türev Öğretimi İçin Problem Durumu" başlığı altında verilen yaklaşıma uygun olacak şekilde öğretmen adaylarıyla bir ders yapılmıştır. Böylece türev ile ilgili ön bilgilerinin tazelenmesi sağlanmaya çalışılmıştır.

Birinci kıstasın ikinci gerekçesi ise çalışma grubundaki öğretmen adaylarının bir ay süresince haftada bir oturum şeklinde planlanan çalışmaya, derslerini aksatmadan zaman ayırabilmeleridir. Çünkü her ne kadar çalışma sürecinde öğretmen adayları, mesleki yaşantılarına katkı sağlayabilecek şeyler öğrenecek olsalar da günlük hayatlarını aksatmaları ve öğrencilik sorumluluklarını yerine getirememeleri, istenmeyen bir durumdur. Hem üçüncü hem de dördüncü sınıflar birinci kıstastaki duruma (diğer bir

deyişle alan derslerini başarıyla tamamlama durumuna) uymaktaydılar. Fakat 4. sınıf öğretmen adaylarının, genel olarak, KPSS'ye (Kamu Personeli Seçme Sınavı) yönelik çalışmalara yönelmeleri nedeniyle ikinci gerekçeye göre (günlük hayatlarını aksatmadan çalışmaya dâhil olma şartına) uygun olmadığına karar verilmiştir. Söz konusu bütün bu durumlar göz önüne alınarak araştırmanın çalışma grubuna ilköğretim matematik öğretmenliği anabilim dalında okuyan üçüncü sınıf öğretmen adaylarının alınması kararlaştırılmıştır.

Yapılan ön değerlendirmeye göre 52 öğretmen adayından 21 öğretmen adayının, analiz ve geometri grubu dersleri başarıyla tamamladığı tespit edilmiştir. Diğer bir deyişle 21 öğretmen adayı birinci kıstasın birinci (alan derslerini başarıyla tamamlama) gerekçesini karşılamaktadır. Bu öğretmen adaylarının sadece dokuz tanesinin çalışmanın yürütüldüğü dönem itibariyle alttan dersinin olmadığı anlaşılmıştır. Bu noktada birinci kıstasın ikinci gerekçesi (çalışma grubuna katılarak hayatlarının olağan akışını aksatma riski) gereği çalışma grubuna dâhil olabilecek öğretmen adayı sayısı dokuza inmiştir. Sonuç olarak birinci kıstasa uygun dokuz öğretmen adayına çalışmaya dâhil olmaları için teklifte bulunulmuştur.

Çalışma grubu oluşturulurken kullanılan ikinci kıstas, bilgilendirilmiş onama bağlı olarak araştırmaya katılmak ve çalışmanın şartlarını yerine getirmeleri için gönüllü olmalarıdır. Robson (2015, s. 644) bilgilendirilmiş onamı "olası katılımcılara araştırma hakkında yeterince bilgi vererek, katılıp katılmama konusunda bilgilendirilmiş bir tercih yapabilmelerini sağlayan ilke" şeklinde tanımlamaktadır. Bu nedenle araştırmaya başlamadan önce alınan etik kurul izni (bknz. EK-1) doğrultusunda, dokuz öğretmen adayına, araştırmanın amacı, süreci, süresi ve sonucunda kişisel bilgilerin korunması gibi konularda açıklama yapılmıştır. Bunun sonucunda üç öğretmen adayı derslerine engel olacağı kaygısı ve sosyoekonomik durumdan dolayı (çalışma zorunluluğu gibi sebeplerle) çalışmaya katılmak istememiştir. Sonuç olarak çalışma, ilköğretim matematik öğretmenliği üçüncü sınıfında okumakta olan altı öğretmen adayı ile yürütülmüştür.

Belirlenen altı öğretmen adayından üç tanesi ile araştırmacının klinik mülakat süreciyle ilgili deneyim kazanması ve çalışma kapsamında asıl uygulamaya geçmeden olası aksaklıkları önceden tespit ederek bu aksaklıklara yönelik tedbirlerin alınması için pilot çalışma yapılmıştır. Daha sonra diğer üç öğretmen adayı ile asıl uygulama yürütülmüştür.

Çalışma grubunda göz önüne alınan altı öğretmen adayının alan derslerindeki akademik başarı durumları Tablo 3.1. de sunulmuştur.

Tablo 3.1. Katılımcıların Akademik Başarı Düzeyleri

		Cinsiyet	Genel Matematik	Geometri	Analiz I	Analiz II	Analiz III	Analitik Geometri I
Pilot Uygulama	Bektaş	Erkek	75	80	72	63	75	61
	Ramiz	Erkek	82	86	64	81	76	64
	Seda	Kadın	60	78	60	60	60	72
Asıl Uygulama	Yavuz	Erkek	60	83	71	66	60	60
	Gaye	Kadın	67	95	60	73	68	67
	Ömür	Erkek	74	80	65	62	60	66

Çalışmada, öğretmen adaylarının gerçek isimleri kullanılmamıştır. Çalışmada kullanılan isimler: Bektaş, Ramiz, Seda, Yavuz, Gaye ve Ömür'dür. Tablodan da görüleceği üzere notlar arasındaki en düşük değer 60 en yüksek değer ise 95'tir. Dolayısıyla katılımcılar söz konusu dersleri başarıyla[1] tamamlamışlardır.

Yukarıda sayılan kıstaslar (gönüllü olma ve akademik başarı) ve bu kıstaslardan ikincisinin gerekçeleri (türev ilişkisini kurabilmesi ve araştırmaya ayırdığı süre nedeniyle günlük hayatını aksatmaması) çalışma grubunu oluştururken kullanılmıştır. Çalışma grubundaki öğretmen adayları ile araştırmacı aynı üniversitededirler. Bu yönüyle hem kıstaslar hem de bu kıstaslara göre seçilimin uygulandığı grup araştırmanın yapılmasını kolaylaştırmaktadır.

3.3. Veri Toplama Araçları

Bu çalışmada veriler, klinik mülakat yoluyla toplanmıştır. Klinik mülakat sürecinde öğretmen adaylarının kullandığı çalışma kâğıtları ile klinik mülakat bulguları desteklenmeye çalışılmıştır. Bu başlık altında neden klinik mülakata başvurulduğu açıklanacak ve klinik mülakat süreci hakkında bilgi verilecektir.

İnsanların dünyayı algılayışlarını ortaya çıkarmanın farklı yolları vardır. İnsanların günlük yaşamlarını gözlemlemek ve ortaya çıkan ürünleri incelemek ya da belirli bir konuda çizdikleri resimleri incelemek bu yollara örnek olarak verilebilir (Marton, 1986). Fenomenografik araştırmanın birincil veri toplama yöntemi, görüşmedir (Hasselgren ve

[1] Çalışmanın yürütüldüğü üniversitede, araştırmanın yapıldığı tarih itibariyle, dersten başarılı olma notu 60'tır.

Beach, 1997; Marton, 1986). Görüşme yaparken de olabildiğince açık uçlu sorular kullanılması, mevcut anlayış farklılıklarını ortaya çıkarmayı mümkün kılar (Marton, 1986).

Matematiksel anlamanın gelişimi teorisinin kurucuları Pirie ve Kieren'e (1994) göre bireyin geçmişe yönelik anlamalarını anlattığı mülakatlar ile anlamaları ortaya konulamaz. Çünkü birey geçmişe yönelik olarak anlamasının nasıl geliştiğini ifade ettiği zaman açığa çıkan sözel ifadeler anlamanın göstergesi olan söylem değildir. Söylemler o an çalışılan seviyedeki eylemlerin içeriği ile ilgilidir. Dolayısıyla anlık olarak ele alınıp değerlendirilmesi gerekmektedir. Bu nedenle klinik mülakat, anlamanın ve öğrenmenin gelişimini incelemek için iyi bir veri toplama tekniğidir (Ginsburg, 1981; Pirie, 1996).

Matematik eğitimi araştırmalarında klinik mülakat, a) bilişsel yapılar, süreçler ve düşünme kalıplarının keşfi, b) bilişsel faaliyetlerin tanımlanması ve c) yeterlilik seviyelerinin keşfi için yapılabilir (Ginsburg, 1981). Bu araştırma bağlamında katılımcıların alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini anlamlandırma süreçlerini ortaya çıkarabilmek için klinik mülakatlar yapılmıştır. Ginsburg'a (1981, s.5) göre matematik eğitimi alanında klinik mülakat ile yürütülen çalışmaların ilk amacı matematiksel düşünceyi keyfi bir şekilde tanımlamak değil matematiksel düşüncenin gelişimsel özelliklerini belirlemektir. Çünkü gelişim süreci incelendiğinde ortaya çıkan şaşırtıcı sonuçlar, matematiksel düşüncenin kavramsallaştırılmasını ve tanımların geliştirilmesini sağlayabilir. Ginsburg'un (1981) altını çizdiği amaç, Pirie ve Kieren'in teorisine göre öğretmen adaylarının alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini anlamlandırma süreçlerinin incelenmesi amacıyla örtüşmektedir. Bu nedenle, çalışmada, klinik mülakat yöntemi kullanılmıştır.

Katılımcıların her birine, matematik işlemlerini yazmaları ve oluşturmuş oldukları fikirleri not etmeleri için, bir resim defteri ve keçeli kalem verilmiştir. Öğretmen adaylarının üzerinde çalışılan problem durumuna bütünsel bir bakış açısı geliştirmelerini sağlamak ve düşünme süreçlerinde kopukluk (bir önceki sayfaya bakmak gibi) yaşamalarının önüne geçebilmek için resim defteri kullanılmıştır. Bu süreçte veri kaybı yaşanmaması için katılımcıların da izni alınarak sadece resim defteri görünecek şekilde video kayıt alınmıştır. Böylece çalışmadaki veri toplama araçları olarak klinik mülakat verileri ve öğretmen adayı çalışma kâğıtları kullanılmıştır.

3.4. Verilerin Toplanması

Fenomenografik çalışmalarda tercih edilen veri toplama yöntemi, mülakattır. Mülakat sürecinde araştırmacının mümkün olduğunca fenomen ile ilgili kendi kavrayışlarını yansıtmadan tarafsız kalması önem arz etmektedir (Çepni, 2018; Marton, 1986). Fenomenografik araştırmalar için önerilen açık uçlu sorularla derinlemesine yapılan mülakat (Çepni, 2018; Marton, 1986) tür olarak Ginsbur'un (1981) tarif ettiği klinik mülakat türüne bir örnek teşkil etmektedir. Klinik mülakat, açık uçlu bir görev ile başlamaktadır. Süreç içerisinde araştırmacının soracağı soruların niteliği ve sıralaması, katılımcının yanıtlarına göre şekillenmektedir. Bu süreçte araştırmacı, katılımcının zihinsel süreçlerini eyleme ya da söyleme dönüştürmesini teşvik etmektedir (Ginsburg, 1981).

Araştırma kapsamında yapılan klinik mülakatların başlangıç görevleri her bir katılımcı için aynı olsa da ilerleyişi - Ginsburg'un (1981) klinik mülakatların seyri ile ilgili yaptığı açıklamaya uygun olarak- katılımcıların sergilemiş oldukları eylemler ve söylemlere göre şekillenmiştir. Bu sebeple çalışma kapsamındaki klinik mülakatların başlangıç görevleri aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

1. Klinik mülakat : Dairede alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinin oluşturulması

2. Klinik mülakat : Karede alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinin oluşturulması

3. Klinik mülakat : Eşkenar üçgende alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinin oluşturulması

4. Klinik mülakat : Düzgün çokgende alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinin oluşturulması

Bu sıralamanın izlenmesinin sebebi, kolaydan zora bir ilerleyiş olmasıdır. Örneğin dairenin alan ve çevre fonksiyonları, genel olarak, yarıçap bağımsız değişkenine göre bilinmektedir. Bu nedenle söz konusu fonksiyonlar arasında türev ilişkisi doğrudan ortaya çıkmaktadır. Kare ve eşkenar üçgen gibi düzgün çokgenlerde çoğunlukla kenar uzunluğu bağımsız değişkenine göre alan ve çevre fonksiyonları kullanılmaktadır. Ancak kare ve eşkenar üçgende türev ilişkisini kurabilmek için ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığına göre alan ve çevre fonksiyonlarının oluşturulması gerekmektedir. Bu nedenle dairedeki göreve nazaran daha zor bir görevdir. Ayrıca eşkenar üçgenin alan fonksiyonu genel

olarak "taban çarpı yükseklik" şeklinde olduğu için kareye göre daha zordur. Mamolo ve Zazkis (2012) kenar uzunluğuna bağlı olarak oluşturulup, genel olarak kullanılan bu fonksiyonları, geleneksel olarak nitelendirmekte ve türev ilişkisinin kurulmasının önünde bir engel teşkil ettiğini belirtmektedir. Son olarak düzgün n-gen'in alan ve çevre fonksiyonlarını oluşturmak kare ve eşkenar üçgene göre çok daha zordur.

Ginsburg (1981) klinik mülakatın işlevini yerine getirmesi için üç şey önermektedir. Önerilerinden ilki, araştırmacının katılımcıyı, bilişsel süreçler ile eş zamanlı olarak***, dili düzgün kullanmaya teşvik etme***sidir. Çünkü bireylerin dil gelişimleri (sadece konuşma dili değil, matematiksel iletişim becerisi de dil gelişiminin içindedir) yetersiz olabilir. Dil gelişimi yetersiz olduğunda bireyler, bilişsel süreçlerini, söylemlerine yansıtamayabilirler. Bu durumda söylemler yanıltıcı olabilir. Bunun için iki farklı (sonda kullanımı ve belirsiz ifadeleri belirgin hale getirmek) yola başvurulabilir. Ginsburg'un (1981) birinci tavsiyesi duruma özgü olarak teyit amaçlı kullanılan sondalardır. Problemi başka şekilde ifade eden sorular, meydan okumaya yönelik sorular (emin misin, şu şekilde değil miydi gibi) ve durumu açıklatma amaçlı sorular süreç içerisinde kullanılan sondalara örnek olarak verilebilir. Bu çalışmada, yürütülen klinik mülakatın bağlamına özgü olarak, yukarıda değinilen sondalara başvurulmuştur. Meydan okumaya yönelik sorulan sondalar, aynı zamanda katılımcıların verdiği cevabın o anki bilişsel yapıyı resmedip resmetmediğini ortaya çıkarma amacıyla kullanılmıştır. Araştırma kapsamında bilişsel süreçleri ortaya çıkarmak için başvurulan ikinci yol ise katılımcıların yazmaya teşvik edilmesidir. Yapılan klinik mülakatlarda katılımcıların kendilerine verilen deftere, ürettikleri bilgileri ve bu süreçte yapmış oldukları işlemleri düzgün bir şekilde not etmesi sağlanmaya çalışılmıştır. Katılımcıların görev ve çözüm süreçlerini yazmaya teşvik edilmesinin bir diğer amacı, katılımcıların görevleri anladığından emin olmaktır. Ginsburg (1981) katılımcının görevleri doğru anlamasının öneminin altını çizmekte ve bunun için ek sorular ve işaretlerin (sözel ve sözel olmayan) takip edilmesini önermektedir.

Ginsburg'un (1981) klinik mülakatın işlevini yerine getirmesi için önerdiği ikinci şey, ***belirsiz ifadelerin belirginleştirilme***ye çalışılmasıdır. Araştırmada birinci tavsiyeye yönelik yapılanlar (sondalar ve yazdırma), ikinci öneriyi de dikkate alacak şekilde yürütülmüştür. Ginsburg'un (1981) son önerisi de ***alternatif hipotezlerin anlık olarak test edilmesi***dir. Alternatif hipotezden kastedilen şey, araştırmacının "ya şöyle

düşünmüşse gibi" tereddüde düştüğü noktalardır. Çünkü katılımcının verdiği cevap, bilişsel yapıyı resmetmeyebilir. Bu durumda araştırmacı tereddüt ederse, müdahale ederek bu tereddüttü ortadan kaldırabilir. Müdahaleler ise genellikle sondalar ile yapılır. Araştırma kapsamında birinci öneriye yönelik kullanılan sondalar (meydan okuma gibi) ile bu oluşan tereddütler, oluştuğu bağlamda, ortadan kaldırılmaya çalışılmıştır.

Ginsburg (1981) klinik mülakatların sağlıklı bir şekilde yürütülebilmesi için araştırmacının katılımcının motive olmasına dikkat etmesi gerektiğini ifade etmektedir. Bunun için üç yol tavsiye etmektedir. Bu yollardan ilki, araştırmacının katılımcının yetersizliklerini vurgulamak yerine yapabileceği görevler ile süreci yönlendirmesidir. Yürütülen araştırmada bu durum göz önünde bulundurulmuştur. Örnek vermek gerekirse klinik mülakatların başlangıç problemleri kolaydan zora doğru sıralanmıştır.

Ginsburg'un (1981) ikinci tavsiyesi, araştırmacının duruma göre esnek davranmasıdır. Diğer bir deyişle katılımcı bir yoldan yapamıyorsa katılımcıya başka bir yoldan başarma fırsatı sunulmasıdır. Esnekliği sağlayabilmek için yürütülen mülakatlarda, katılımcıların takıldıkları noktalarda katılımcıyı aynı hedefe ulaştırabilecek ya da takılma nedenini gösterebilecek şekilde farklı görevler verilmiştir. Örneğin karede alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini kenara göre kurmaya çalışan katılımcıya, "dairede çapı bağımsız değişken olarak seçseydin bu ilişki kurulur muydu?" gibi sorular sorulmuştur.

Ginsburg'un (1981) üçüncü tavsiyesi, tekrarlamaktır. Motivasyon problemini çözmek için (bazen sakıncalı olsa da) sorunun tekrarlanması çözüm olabilir. Tekrarlamak, yürütülen mülakatlarda pek uygulanmamıştır. Bazı noktalarda katılımcılar araştırmacıdan doğrudan cevabı istediğinde araştırmacı, katılımcının problemi çözmeye devam etmesi için "evet, hı hı!" gibi kısa ifadeler kullanmıştır. Motivasyon problemi için yapılan üç tavsiyeye ek olarak, Ginsburg (1981) araştırmacı ile katılımcının yakınlığının (bazı durumlarda sakıncalı olsa da) motivasyon problemini çözebileceğini ifade etmektedir. Araştırmacı ile katılımcıların aynı fakülteden olmaları ve üç yıllık bir süreçte birbirini tanımaları bu bağlamda avantaj sağlamıştır.

3.4.1. Pilot Uygulama

Bu araştırma kapsamında daha önce de belirtildiği üzere üç öğretmen adayı ile pilot çalışma yürütülmüştür. Pilot uygulama dört oturum şeklinde düzenlenmiştir. Hem

katılımcı ve araştırmacının dinlenebilmesini hem de katılımcıların bilgiyi işleme süreçlerine izin vermesini sağlamak amacıyla mülakatlar birer hafta arayla uygulanmıştır. Mülakatlar, araştırmacı ve katılımcının müsait olduğu ortak zamanlarda gerçekleştirilmiştir. Başlangıç görevleri daha önce belirtildiği şekli ile kolaydan zora doğru sıralanmıştır. Toplam on iki klinik mülakat yürütülmüştür. Tablo 3.2.'de pilot uygulama kapsamında yapılan mülakatların süresi sunulmaktadır.

Tablo 3.2. Katılımcıların Klinik Mülakat Süreleri

Klinik Mülakat Numarası	Başlangıç Görevi	Bektaş	Ramiz	Seda	Toplam
1. Oturum	Daire	0:23:46	0:24:55	00:33:43	
2. Oturum	Kare	0:44:37	0:30:51	00:25:37	
3. Oturum	Eşkenar Üçgen	0:41:19	0:24:46	00:26:10	
4. Oturum	Düzgün Çokgen	0:52:02	00:36:51	00:53:10	
Toplam		2:41:44	1:57:23	2:18:40	6:57:47

Bektaş ile yapılan klinik mülakatlar toplam 2 saat 41 dakika 44 saniye sürmüştür. Ramiz'de bu süre 1 saat 57 dakika 23 saniye olarak hesaplanmıştır. Seda'da ise 2 saat 18 dakika 40 saniye sürmüştür. Pilot uygulamada toplam 6 saat 57 dakika 47 saniyelik bir klinik mülakat süreci yürütülmüştür.

Pilot çalışma a) araştırmacının klinik mülakat sürecini yönetme becerisini edinmesi, b) asıl uygulamada ortaya çıkması muhtemel problemlerin belirlenmesi ve bunlara yönelik önlemlerin geliştirilmesi ve c) klinik mülakatların araştırmanın amacına hizmet edip etmediğini ve araştırma problemlerine çözüm üretebilir olup olmadığını test etmek amacıyla yapılmıştır. Bu amaçlar, alt başlıklar altında ele alınacaktır. Tablo 3.3.'te pilot uygulama sürecinde Ramiz ile yapılan klinik mülakat serisinin (karede alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinin kurulmasına yönelik yapılan) ikinci oturumundan bir kesit sunulmuştur. Bu kesitten alıntılar ile söz konusu alt başlıklar altında tartışma yürütülecektir.

Tablo 3.3. Ramiz ile İkinci Oturumda Yapılan Karede Merkez Arayışı

08:34	A	Şimdi! Yarıçapın mantığı nedir? Çemberde nasıl bir işlevi var?
08:41	R	Çember üzerindeki bütün noktalara eşit uzaklıktadır. Merkez var.
08:45	A	Hı! Hı!
08:45	R	Eşit uzaklıkta olan bir uzunluk.
08:48	A	Karede bütün noktalara eşit uzaklıkta bir nokta bulabilir misin?
08:51	R	Var. Burada (ağırlık merkezini işaret ederek) mesela.
08:52	A	Bütün noktalara eşit uzaklıkta mıdır, o?
08:54	R	Evet. Yani merkez olarak her yere eşit uzaklıktadır.
08:58	A	Her yere eşit uzaklıkta mıdır?
09:00	R	Mesela küçük bir yarıçap çizelim. Ben kare çizeyim.
09:05	A	Hı! Hı!
09:07	R	(Karenin ağırlık merkezini işaret ederek) Şurada.
09:07	A	Hı! Hı!
09:08	R	Bir merkez oldu. Şunun (ağırlık merkezinin) şuraya (köşeye) uzaklığı… Ama! Şunun (ağırlık merkezinin) şuraya (kenara dik) uzaklığı… Olmadı.
09:13	A	Eşit olmadı.
09:14	R	Evet, eşit olmadı.
09:15	A	Önemli değil. Şu noktanın (ağırlık merkezi işaret ediliyor.) kare için önemi nedir?
09:21	R	(Sessizlik)
09:23	A	Karenin neyidir bu?
09:24	R	Karenin merkezidir.
09:25	A	Ne merkezidir?
09:31	R	Ağırlık merkezidir.
09:31	A	Ağırlık merkezidir, tamam. Tamam. Bu noktanın (dairenin merkezi işaret ediliyor) çember için, daire için önemi nedir?
09:41	R	Bu da ağırlık merkezidir.
09:42	A	Bu da ağırlık merkezidir…

*A: Araştırmacı, R: Ramiz.

a) Araştırmacının klinik mülakat sürecini yönetme becerisini edinmesi, pilot uygulama yapılmasının (Robson, 2015) en önemli gerekçelerinden biridir. Klinik mülakat yürüten bir araştırmacının iyi gözlem yapabilmesi, mülakattaki asıl soruları sorabilmesi, cevapları yorumlayabilmesi (Patton, 2018), böylece anlık kalibrasyon yapabilmesi, mülakat soruları dışında duruma özgü sorular sorabilmesi ve esnek davranabilmesi (Ginsburg, 1981) gerekmektedir. Çünkü araştırmacı, mülakat ile veri toplarken birincil veri toplama aracı olacaktır (Patton, 2018). Mülakat sürecinde ortaya çıkarılacak bilginin niteliği, mülakatı yapan araştırmacıya bağlı olduğu için (Patton, 2018) araştırmacının bu beceriye sahip olması, değilse bu beceriyi kazanması gerekmektedir. Bunun için araştırmacının pilot uygulama yapması ve pilot uygulama sırasında alınan kayıtların ("görüşme sağlıklı bir şekilde yürütülebilmiş mi?" sorusunu göz önünde bulundurarak) değerlendirilmesi (Robson, 2015) önem arz etmektedir. Belirtilen nedenlerden dolayı araştırmacının klinik mülakat yapma becerisini kazanması için çalışma kapsamında pilot uygulama yapılmıştır. Bunun için pilot uygulama sırasında alınan video kayıtları, hem araştırmacı hem de tez danışmanı tarafından incelenmiştir. Araştırmacı böylece yetkinlik kazanmaya çalışmıştır.

Tablo 3.3.'te sunulan örnek kesitte, karede alan ve çevre arasındaki türev ilişkisi anlamlandırılmaya çalışılmaktadır. Karede kenar uzunluğuna göre türev ilişkisini oluşturamayan Ramiz'e araştırmacı tarafından ağırlık merkezinin türev ilişkisindeki rolü sorgulatılıyor. Katılımcının ağırlık merkezi özelliğini fark edebilmesi için daireden örnek vererek "Şimdi! Yarıçapın mantığı nedir? Çemberde nasıl bir işlevi var?" sorusu sorulmaktadır. Araştırmacının başlattığı bu sorgulama durma noktasına gelen anlamanın gelişiminin önündeki engeli aşmaya yöneliktir. Bu durum, Robson'un (2015) işaret ettiği klinik süreci yönetme becerisine örnek olarak verilebilir. 08:41'de katılımcı "Çember üzerindeki bütün noktalara eşit uzaklıktadır. Merkez var." demektedir. Katılımcının vermiş olduğu cevap çember için doğru olsa da diğer geometrik şekiller için hatalıdır. Araştırmacı bu hatayı katılımcının fark edebilmesi için 08:48, 08:52 ve 08:58'de sorular sormuştur. Araştırmacının bu soruları sorması, Patton'un (2018) işaret etmiş olduğu verilen cevabı yorumlama becerisinin geliştiğinin göstergesidir. Zira araştırmacı, katılımcının vermiş olduğu hatalı cevabı anlık olarak yorumlamış ve ek sorular sorarak katılımcının bir sorgulama sürecine girmesini sağlamaya çalışmıştır. Ağırlık merkezi ile ilgili yanılgı, katılımcıda o anda fark edilmiş ve araştırmacı, Ginsburg'un (1981) işaret ettiği becerilerden olan esnek davranma ve mülakat konusu dışına çıkarak duruma özgü sorular sorma becerisi göstermiştir.

Pilot uygulamada, mülakatların daha etkili bir şekilde yürütülebilmesi ve böylece daha zengin veri elde edilebilmesi için fark edilen durumlar, asıl uygulamaya yansıtılmaya çalışılmıştır. Bu durumlar iki örnek ile özetlenecektir. Birinci örnek, katılımcıların defteri kullanma yönüne (yatay-dikey) dikkat etmektir. Pilot uygulamanın başlangıcında buna dikkat edilmemiştir. Ancak yatay kullanımın daha etkili olduğu fark edilince pilot uygulamanın kalan kısmında ve asıl uygulamada katılımcıların defterleri yatay olarak kullanmasına dikkat edilmiştir. Bu durum, fiziksel düzenleme ile ilgili bir farkındalıktır. Diğer taraftan pilot uygulama ile mülakatlarda kullanılan dil, sorulan soruların niteliği gibi konularda da farkındalık gelişmiştir. İkinci örnek bu durumla ilgilidir.

İkinci örnek: Bektaş ile yapılan ilk klinik mülakatta 04:17'ye kadar dairenin alan ve çevre fonksiyonları arasındaki ilişki sorgulanmıştır. Katılımcı türev ilişkisini fark edemeyince araştırmacı "Peki bu fonksiyonun türevi nedir?" sorusuyla katılımcının dikkatini türev ilişkisine odaklamıştır. Araştırmacının bu müdahalesi, katılımcının ilişkiyi kendisinin fark etmesi yönünde engel oluşturmuştur. Asıl uygulamada türev ilişkisinin hemen fark

edilememesi problemi, Yavuz isimli katılımcı ile yapılan birinci mülakatta ortaya çıkmıştır. Bunun için araştırmacı, katılımcının önce alan ve çevre formüllerini birer fonksiyon olarak yazmasını teşvik etmiştir. Sonra her iki fonksiyonda da bağımlı ve bağımsız değişkenler sorgulanmıştır. Son olarak 03:25'te araştırmacı alan ve çevre fonksiyonlarını işaret ederek "*Şuradan şuraya geçerken r'nin kuvveti nasıl değişmiş?*" sorusunu sormuştur. Katılımcı 03:33'te "*Azalmış. Sanki fonksiyon tarzında böyle inmiş. (Üstel ifadenin türevinden bahsediyor.) Türev tarzında*" cevabını vermiştir. Araştırmacı (03:37'de) katılımcının son ifadesi olan "*Türev tarzında*" ifadesini, katılımcının hemen ardından tekrar ederek katılımcının fikrini onayladığını ima etmiştir. Böylece katılımcı 03:38'de "*Yani bu üstü başa indiriyoruz üstü 1 azaltıyoruz öyle olmuş*" demek suretiyle türev ilişkisi fikrini dile getirmiş böylece bu fikri sahiplenmiştir. Katılımcının son kelimesini, yerinde ve zamanında tekrar ederek bir nevi katılımcının cümlesini tamamlamak, mülakat sürecinde akıcılığı yakalamayı da sağlamıştır.

b) Asıl uygulamada ortaya çıkması muhtemel problemleri belirleyip çözmek, pilot uygulama yapılmasının ikinci gerekçesidir. Pilot uygulamada tespit edilen ilk şey, fiziksel mekânın önemidir. Işık, havalandırma ve sestir. Işık ve havalandırma ile ilgili çözümler geliştirilmiştir. Ancak ses problemleri (yankılanma ve dış sesin çok olması gibi) daha uygun bir fiziksel mekân bulunamadığı için çözülememiştir. Ses problemi, video kayıtlarının çözümlenmesini güçleştirmiştir.

Yürütülen pilot uygulamada fark edilen ikinci şey öğretmen adaylarının alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini anlamlandırma sürecinde yaşadıkları zorluklardır. Bu zorluklardan birkaç örnek vermek gerekirse ilk örnek, yukarıda Bektaş ve Yavuz özelinde verilen dairede türev ilişkisinin hemen fark edilememe olabilir. Pilot uygulamada yapılan hata zorluğu aşmak için türev sorgulamasına doğrudan başlanılması olmuştur. Bu zorluk, araştırmacının klinik mülakat yürütme becerisini uygun sorular sorarak geliştirmesiyle asıl uygulamada aşılmıştır.

Zorluk örneklerinden ikincisi dairede alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini fark eden öğretmen adaylarının bu ilişkinin matematiksel temellerini açıklamakta zorlanması olabilir. Bu noktada araştırmacı, öğretmen adaylarına, genel türev denkleminin pay kısmındaki farkı, genel türev denkleminin paydası ile bu farkın limit işlemi altındaki anlamını sorgulamaları yönünde kasıtlı müdahalelerde bulunmuştur. Öğretmen adayları,

bu sorgulamayı yaptıktan sonra türev ilişkisini kurabilmişlerdir. Bu süreçte geliştirilen müdahale becerisi asıl uygulamada kullanılmıştır.

Anlamlandırma sürecinde karşılaşılan zorluklara başka bir örnek ise karedeki türev ilişkisinin kurulmasıdır. Öğretmen adayları, ilk aşamada, karenin kenar uzunluğuna göre alan ve çevre fonksiyonlarını oluşturmuşlardır. Bu noktada araştırmacı (ağırlık merkezine dolaylı vurgu yapabilmek için) öğretmen adaylarının dairede çapa göre türev ilişkisini denemeleri yönünde müdahalede bulunma yolunu pilot uygulamada geliştirmiş ve asıl uygulamada kullanmıştır. Bu müdahaleler ile gelişen sorgulama süreci neticesinde, öğretmen adayları karede merkez arayışına girmişlerdir. Tablo 3.3.'te verilen örnek kesitte 08:34'te merkez arayışı başlamaktadır. 09:14'e kadar bu aranılan merkezin kenar noktalara eşit uzunlukta olması gerekliliği gibi bir yanlış varsayımı çürütmek ile geçmektedir. Devam eden sorgulama neticesinde 09:31'de bu noktanın ağırlık merkezi olması gerektiği fikri gelişmiştir. Ancak ağırlık merkezi fikrinin gelişmesi, ağırlık merkezine göre bağımsız değişken seçiminin doğru olmasını garantilememiştir. Örneğin ağırlık merkezinin köşeye uzaklığı gibi bir değişken ile türev ilişkisinin kurulamadığı imaj oluşturma çalışmaları gözlenmiştir. Pilot uygulamada bu durumun imaj zenginliği oluşturduğu fark edilmiştir. Dolayısıyla asıl uygulamada katılımcıların bağımsız değişken olarak farklı denemeler yapması, engellenmemiş aksine teşvik edilmiştir.

c) Klinik mülakatların araştırmanın amacına hizmet ettiğini ve araştırma problemlerine çözüm üretebildiğini test etmek, pilot uygulama yapılmasının son gerekçesidir. Yapılan ön değerlendirmelerde öğretmen adaylarının alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini kurabildiği tespit edilmiştir. Ayrıca bu ilişkiyi kurma sürecinde ortaya çıkan veri setinin Pirie ve Kieren'in (1989; 1992; 1994) matematiksel anlamanın gelişimi teorisine göre incelenebildiği kanaatine varılmıştır. Öğretmen adaylarının alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini anlamasına ilişkin seviyelerde ortaya çıkan durumlar, verilerin analizi başlığı altında önce tablo olarak sunulacaktır. Bu durumlardan bazıları, pilot uygulamadaki veriler ile örneklendirilerek neden söz konusu anlama seviyelerine denk geldiği gerekçelendirilecektir.

3.4.2. Asıl Uygulama

Ginsburg'un (1981) klinik mülakat sürecinde araştırmacının katılımcıyı anlık olarak kalibre etmesi ve buna göre esneklik göstermesi yönündeki telkinine hem pilot

uygulamada hem de asıl uygulamada hassasiyet gösterilmiştir. Pilot uygulamada edinilen deneyimle asıl uygulama yürütülmüştür. Yukarıda da bahsedildiği üzere pilot uygulamada fark edilen olası zorluklar, müdahale yöntemleri, mülakatın gelişimindeki engelleri aşmak için araştırmacının doğrudan bilgiyi işaret etmesi yerine uygun sorular ile katılımcıyı yönlendirmesi, mülakatın akıcılığı için cümle tamamlama, defter kullanımı gibi hususlar dikkate alınarak asıl uygulama yapılmıştır.

Katılımcılar ile yapılan klinik mülakatlar, pilot uygulamaya paralel olarak (birer hafta arayla başlangıç görevleri aynı dört oturum şeklinde) düzenlenmiştir. Sonuç olarak asıl uygulamada da üç katılımcı ile toplamda on iki klinik mülakat görüşmesi gerçekleştirilmiştir. Her bir katılımcının mülakatlarının ne kadar sürdüğü Tablo 3.4.'teki gibidir.

Tablo 3.4. Katılımcıların Klinik Mülakat Süreleri

Klinik Mülakat Numarası	Başlangıç Görevi	Yavuz	Gaye	Ömür	Toplam
1. Oturum	Daire	0:28:01	00:21:34	0:25:53	
2. Oturum	Kare	0:53:22	00:22:19	0:22:09	
3. Oturum	Eşkenar Üçgen	0:31:00	00:12:23	0:23:25	
4. Oturum	Düzgün Çokgen	0:50:17	00:25:37	0:32:53	
Toplam		02:42:40	01:21:53	01:44:20	05:48:53

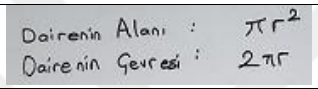
Yavuz ile yapılan klinik mülakatlar toplam 2 saat 42 dakika 40 saniye sürmüştür. Gaye'de bu süre 1 saat 21 dakika 53 saniye olarak hesaplanmıştır. Ömür'de ise 1 saat 44 dakika 20 saniye sürmüştür. Toplamda 5 saat 48 dakika 53 saniyelik bir klinik mülakat süreci yürütülmüştür.

3.5. Verilerin Analizi

Fenomenografik araştırmalarda, çoğunlukla, açık uçlu görüşmeden elde edilen çözümlemeler veri analizinde kullanılır. Veriler analiz edilirken yapılan eylem ya da geliştirilen söylem, bağlamıyla birlikte değerlendirildiğinde anlam kazanır. Veriler, bağlamından soyutlandığında anlam daralması ya da genişlemesi pek muhtemeldir (Marton, 1986). Bu nedenle mülakatların çözümlenmesi kelimesi kelimesine yapılmıştır. Anlam daralması ya da genişlemesinin önüne geçebilmek için Tablo 3.5.'teki analiz

formu[2] kullanılmıştır. Bu formda katılımcıların o an üzerinde çalışılan matematiksel fikrin resim defterine not edilmiş halinin görseli de sunulmaktadır. Bu görsel katılımcıların kullandığı resim defterlerinin (video ile eş zamanlılık teyit edilerek) ilgili kısmından alınarak tabloya eklenmiştir.

Tablo 3.5. Ömür'e Ait Çözümleme Kesiti

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
00:21	A	Yaz. Yanına yaz dairenin alanı yaz. Dairenin çevresi?	1			
00:40	Ö	Dairenin çevresi…				1
00:57	A	$2\pi r$ Tamam. Bu arada kamera sadece defteri çekiyor, Ömür.	6			
						
01:16	Ö	(Katılımcı yazıyor.)Tamam. Fark etmez hocam.		2	2	1

Veri analizinde kullanılan tablonun birinci sütunu zamanı göstermektedir. İkinci sütun o anda konuşan kişiyi işaret etmektedir. Araştırmacı A olarak katılımcı ise isminin baş harfi ile temsil edilmektedir. Üçüncü sütun ise o anda konuşulan ya da yazılan şeyi bulundurmaktadır.

Çözümlemeler analiz edilirken Marton'un (1986) fenomenografik araştırmalarda analiz süreciyle ilgili yaptığı açıklamalar dikkate alınmıştır. Marton'a göre veriler analiz edilirken ilk olarak görüşmelere dikkat edilir. Tablo 3.5.'teki ilk üç sütun görüşmeleri yansıtmaktadır. Fenomenografik araştırmalarda analizin ikinci aşamasında (alt başlıklar halinde detaylı bir şekilde aşağıda açıklanan) anlam havuzu oluşturulur. Böylece her alıntının iki bağlamı olur: birincisi, alındığı görüşme ikincisi ise ait olduğu anlam havuzudur. İfadeler benzerliklerine göre kategorilere ayrılır. Kategoriler, verilere göre test edilir, ayarlanır, tekrar test edilir ve tekrar ayarlanır. Tablo 3.5.'teki son dört sütun ise bu çalışmada ortaya çıkarılan anlam havuzunun kodlarıdır. Anlam havuzu oluşturulurken müdahale, geri katlamanın türü, geri katlamanın çıktısı ve o anda bulunduğu matematiksel anlama seviyesi değişkenleri, Tablo 3.5.'in son dört sütununda kodlanmıştır. Sayısal kodlamaya başvurulmasının sebebi, her defasında yazma iş yükünü

[2] Ömür isimli katılımcı yapılan klinik mülakat serisinin ilkinden alınan bir kesittir. Bu klinik mülakat, dairenin alanı ve çevresi arasındaki türev ilişkisine odaklanmaktadır.

azaltma ve böylece kodlama kolaylığı sağlamaktır. Tablo 3.6.'da her bir değişkenin bileşenlerinin kodları verilmektedir.

Tablo 3.6. Kodlamaların İçeriği

Değişken	Kod	Tür
Müdahale	1	Odaklanmış Kasıtlı Öğretmen Müdahalesi
	2	Odaklanmamış Kasıtlı Öğretmen Müdahalesi
	3	Kasıtsız Öğretmen Müdahalesi
	4	Odaklanmış Kasıtlı Kendine Müdahale
	5	Odaklanmamış Kasıtlı Kendine Müdahale
	6	Dış Teşvik
Geri Katlama Türü	1	Mevcut Anlamaları Kullanarak Daha İç Bir Seviyede Çalışmak
	2	Daha İç Bir Seviyede Toplamak
	3	Konunun Dışına Çıkmak ve Orada Çalışmak
	4	Sürekliliği Bozan Geri Katlama
Geri Katlamanın Çıktısı	1	Etkisiz Geri Katlama
	2	Dış Teşvikle Etkili Geri Katlama
	3	Dış Teşvik Olmadan Etkili Geri Katlama
Anlamanın Seviyeleri	1	Ön Bilgi
	2	İmaj Oluşturma
	3	İmaja Sahip Olma
	4	Özellikleri Fark Etme
	5	Formelleştirme
	6	Gözlem Yapma
	7	Yapılandırma
	8	Keşfetme

Bu çalışmada araştırmacı, klinik mülakatları yürütmüş ve çözümlemeleri yapmıştır. Bu yönüyle Marton'un (1981) analiz süreciyle ilgili belirlediği ilk aşama (görüşmelere dikkat etme) gerçekleştirilmiştir. İkinci aşama olan anlam havuzu oluşturma ve kategorileştirme gerçekleştirilmiştir. Müdahale, geri katlama ve geri katlamanın çıktısına yönelik kategoriler oluşturulurken Martin'in (2008) ortaya koyduğu teorik çerçeve dikkate alınmıştır. Anlamanın seviyelerine yönelik kategoriler ise Pirie (1988), Pirie ve Kieren (1989, 1994) tarafından geliştirilen matematiksel anlamanın gelişimi teorisine göre düzenlenmiştir. Bu kategoriler a) müdahale, geri katlama ve geri katlamanın çıktısı ile b) anlamanın seviyeleri olarak iki alt başlık halinde ele alınmıştır. Son olarak zamana bağlı olarak müdahale-geri katlama döngülerini de gösterecek şekilde zihin haritaları oluşturulmuştur. Bu haritaların nasıl oluşturulduğu ise son alt başlık altında verilmiştir.

a) Müdahale, Geri Katlama ve Geri Katlamanın Çıktısı Kategorileri, Pirie ve Martin (2000) ile başlayan Martin (2008) ile zenginleştirilen ve detayları kuramsal çerçevede ele alınmış teorik çerçeve doğrultusunda ortaya çıkarılmıştır. Martin (2008) müdahaleleri kaynağına (kendisi, arkadaşı, materyal ve öğretmen) kasıtlı ve odaklanmış olup olmadığına göre toplamda 11 farklı şekilde sınıflandırmaktadır. Bu çalışmada arkadaş ve

materyal birer müdahale kaynağı olarak var olmadığı için beş farklı müdahale türünün örnekleri bu çalışmada ortaya çıkmaktadır. Tablo 3.6.'da da gösterildiği üzere bu türler: 1- Odaklanmış Kasıtlı Öğretmen Müdahalesi, 2- Odaklanmamış Kasıtlı Öğretmen Müdahalesi, 3-Kasıtsız Öğretmen Müdahalesi, 4- Odaklanmış Kasıtlı Kendine Müdahale ve 5- Odaklanmamış Kasıtlı Kendine Müdahale olarak kodlanmıştır. Dış teşvik ile müdahale karışıklığı olmaması için dış teşvikler 6 olarak kodlanmıştır. Martin (2008) dört farklı geri katlama türü belirlemiştir. Tablo 3.6.'da da gösterildiği üzere bu türler: 1- Mevcut Anlamaları Kullanarak Daha İç Bir Seviyede Çalışmak, 2- Daha İç Bir Seviyede Toplamak, 3- Konunun Dışına Çıkmak ve Orada Çalışmak ve 4- Sürekliliği Bozan Geri Katlama olarak kodlanmıştır. Son olarak Martin (2008) geri katlamaların çıktılarıyla ilgili üç tür belirlemiştir. Tablo 3.6.'da da gösterildiği üzere bu türler: 1- Etkisiz Geri Katlama, 2- Dış Teşvikle Etkili Geri Katlama ve 3- Dış Teşvik Olmadan Etkili Geri Katlama olarak kodlanmıştır.

Müdahale, geri katlama ve geri katlamanın çıktısı bir permütasyon olarak değerlendirilirse 120 farklı permütasyon örneği ortaya çıkması muhtemeldir. Bunların hepsinin örneklenmesi ve gerekçelendirilmesi zor olsa da birkaç örnek burada sunulacaktır. Tablo 3.5.'te sunulmuş olan mülakat kesitinde, araştırmacı, katılımcıdan çemberin çevre formülünü sormaktadır. Özellikle hangi anlama (ön bilgi "1") seviyesine dönülmesi gerektiği işaret edildiği için *odaklanmış bir müdahale* olarak kodlanmıştır. Martin (2008) müdahalede kasıt olup olmadığının müdahalenin kaynağının niyetine bağlı olduğunu ifade etmektedir. Bu soru, araştırmacının katılımcıya bilinçli olarak bir müdahalesini içerdiği için *kasıtlı müdahale*ye bir örnektir. Dolayısıyla bu müdahale o*daklanmış kasıtlı öğretmen müdahalesi*ne (1) bir örnektir. Mülakat kesitinden anlaşıldığı üzere katılımcı çevre formülüne ihtiyacının olduğunu bildiği halde bu bilgiyi geri çağıramamaktadır. Bireyin neye ihtiyacının olduğunu bilmesi ancak bu bilgiyi geri çağıramaması durumunda (Martin, 2008) ikinci tip geri katlama olarak kodlanan *daha iç bir seviyede toplamak* (2) ortaya çıkmaktadır. Birey, böylesi bir durumda birilerine sorabilir, defterlerini karıştırabilir ya da kitaplardan bakarak bu geri çağırma işini yapabilir (Martin, 2008). Araştırmacının 00:57'de bu bilgiyi katılımcıya vermesi, bu yönüyle *dış teşvik* (6) olarak değerlendirilmiştir. Bu geri katlama türü standart bir hatırlama işleminden farklıdır. Çünkü geri çağrılan bilgi, ihtiyaçlar doğrultusunda izlenir ve işe yarıyorsa ilişkilendirilip sağlamlaştırılır (Martin, 2008). Nitekim dairenin çevre

formülü, bu klinik mülakat kapsamında alan ve türev ile ilişkilendirilerek sağlamlaştırılmıştır. Sonuç olarak *dış teşvik ile etkili bir geri katlama* (2) durumu söz konusudur.

Tablo 3.7. Yavuz'un Kare Çalışmasından Bir Çözümleme Kesiti

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
27:28	Y	(Araştırmacının sözünü kesiyor.) Ağ! Ağırlık merkezinden kenarlara çizdiğimiz uzaklıklar.	4			2
27:35	A	Uzaklık ama nasıl uzaklık?	6			
27:36	Y	Eşit uzaklık.		1	1	2
…		…				
52:11	A	Bugünü de burada kapatmış olduk. Biraz ilginç bir şey oldu değil mi?	3			
52:16	Y	Çok ilginç bir şey oldu.				4
52:19	A	(Gülme)				
52:20	Y	(Gülme) Şimdi biz kenara a diyoruz sağlamıyor. Ağırlık merkezinden kenarlara dik uzaklıkları… I! Onlara değer vererek… Verdiğimizde bize türevin... I!		1	3	4

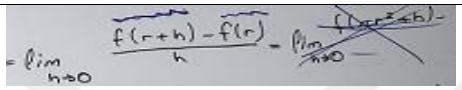
Yukarıda odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalesine örnek verilmiştir. Araştırma kapsamında tespit edilen diğer müdahale çeşitlerini örneklemek için Yavuz isimli katılımcıyla karede alan ve çevre arasındaki türev ilişkisine yönelik yapılan ikinci klinik mülakattan bir kesit Tablo 3.7.'de sunulmuştur. Kesitin ilk kısmı, 27:28'de katılımcı, odaklanmış kasıtlı kendine müdahale (4) ile geri katlama sürecine girmiştir. Katılımcı geri katlamaya ihtiyaç duyduğunda ağırlık merkezine bağlı bir uzaklık anlayışı bu geri katlamanın odağını oluşturmuştur. Böylece katılımcı imaj oluşturma seviyesindeki ayrık anlayışları (kare ve dairede merkez olgusu) ilişkilendirerek "temellendirmiş" (Martin, 2008, s.77) olduğu için mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde bir geri katlama yapmıştır. Kullanılan dış teşvike (6) rağmen etkisiz bir geri katlama (1) ortaya çıkmıştır.

Araştırma kapsamında ortaya çıkan son müdahale türü, kasıtsız öğretmen müdahalesidir. Tablo 3.7.'de sunulan kesitin 52:11 anında araştırmacı, mülakatı bitirmek için müdahale kastı olmadan bir cümle kurmuştur. Bu ifade, geri katlamaya sebebiyet verdiği için kasıtsız öğretmen müdahalesi (3) şeklinde gelişmiştir. "Yüksek bir bilinçle mevcut anlamalara geri dönüş" (Martin, 2008, s.77) gerçekleştiği için mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde dış teşvik olmadan etkili (3) bir geri katlama yapılmıştır.

Yukarıda müdahaleler için örnek verilirken mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) ve daha iç bir seviyede toplama (2) türündeki geri katlamalara

örnekler verilmiştir. Ömür ve Gaye isimli katılımcılar ile dairede alan ve türev ilişkisinin çalışıldığı birinci mülakattan iki kesit Tablo 3.8.'de sunulmuştur. Bu kesitlerde konunun dışına çıkıp orada çalışmak (3) ve sürekliliği bozan geri katlama (4) türlerine örnek teşkil eden iki bölüm verilmiştir.

Tablo 3.8. Gaye ve Ömür'ün Daire Çalışmasından Bir Çözümleme Kesiti

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
06.20	A	Bu böyle mi olur?	1			
						
06.23	Ö	Direkt böyle yazdım hocam.				
06.25	A	Bu fonksiyon nasıl bir fonksiyon? Parantez içini ne yapıyor? ($f(r) = \pi r^2$ ifadesini işaret ediyor)	6			
06.29	Ö	Direkt kendi içine alıyor.		3	1	1
…		…				
09:55	A	Çok yakın olursa, nasıl bir durum sergiler? Yani sıfır olursa nasıl bir daire kalır?	1			
10:02	G	Teğetliğe mi döner çünkü yakın birbirine?		4	1	2

Tablo 3.8.'de görüldüğü üzere, Ömür isimli katılımcı, 06:20'de odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalesi (1) ile bir geri katlama süreci gelişmiştir. Fonksiyonun açılımının işaret edilmesi, bu müdahalede odak noktası olmuştur. Martin (2008) üzerinde çalışılan konuyla ilgili ihtiyaç duyulan bilginin eksikliğinde genellikle ön bilgi seviyesine gidilip o bilginin ilişkili olduğu konunun çalışılmaya başlanması, böylece üzerinde çalışılan konunun dışına çıkılması durumunu *konunun dışına çıkıp orada çalışmak* türünde bir geri katlama olarak tanımlamıştır. Mülakat kesitindeki müdahale-geri katlama sürecine ihtiyaç duyulmasının sebebi, katılımcının fonksiyon bilgisi eksikliği ya da dikkat eksikliğinden kaynaklı olarak hatalı bir matematiksel ifade yazımı olmuştur. Bu nedenle alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinden çıkılıp ön bilgi seviyesinde bulunması gereken fonksiyon bilgisine geri katlama yapılmıştır. Bu nedenle örnekteki durum, konunun dışına çıkıp orada çalışmak (3) türünde geri katlama olarak kodlanmıştır. Geri katlama sürecinde verilen dış teşvike (6) rağmen geri katlama etkisiz olmuştur. Çalışılan anlama seviyesi ise fonksiyon konusuyla ilgili ön bilgi (1) seviyesi olarak kodlanmıştır.

Tablo 3.8.'in ikinci kısmı, Gaye isimli katılımcı ile yürütülmüş mülakattan alınmıştır. Bu kesite son geri katlama türü olan *sürekliliği bozan geri katlama* (4) türüne örnek sunmak için yer verilmiştir. Martin'e (2008) göre bu geri katlama türünde bir geri dönme eylemi söz konusudur. Ancak bu faaliyet sürecinde, konuyla ilişkisiz bir imaj oluşturulur ve mevcut anlayış sağlamlaştırılmaz. 09:55'te limit durumunda h'ın sıfıra gitmesinin halka

formuna yansımasına odaklanmış bir kasıtlı müdahale (1) ile geri katlama süreci başlamıştır. Katılımcı, imaj oluşturma seviyesine dönüş yapıp, teğet ile ilgili bir imaj oluşturmaya başlamıştır. Ancak oluşturulan imaj mevcut anlayışla ilgisi olmayan ve anlamanın gelişimini sağlam temellere oturtmayan bir imajdır. Dolayısıyla olan sürekliliği bozan geri katlama (4) olarak kodlanmıştır. Geri katlamanın çıktısı etkisiz olurken – bu tür geri katlamaların doğası gereği – çalışılan anlama seviyesi, imaj oluşturma (2) olarak kodlanmıştır.

b) Anlamanın Seviyelerine yönelik kategorileri oluşturulurken Pirie (1988), Pirie ve Kieren'in (1989, 1994) tarafından geliştirilen matematiksel anlamanın gelişimi teorisinden faydalanılmıştır. İkinci bölümde (Kuramsal Çerçeve) de değinildiği üzere bu teoriye göre matematiksel anlama sekiz seviyeli bir yapıya sahiptir. Çalışma kapsamında gözlemlenen hangi eylem ya da söylemlerin hangi anlama seviyesine denk geldiği Tablo 3.9.'da sunulmuştur. Pilot uygulama ve asıl uygulamadan elde edilen veriler ile bu durumlar örneklendirilmiştir. Eylem veya söylemlerin neden söz konusu seviyeye bir örnek teşkil ettiğinin gerekçeleri de tartışılmıştır.

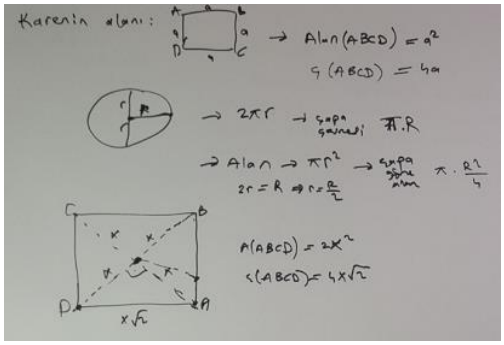
Tablo 3.9.'da ***önbilgi*** seviyesinde değerlendirilebilecek daha fazla konu olmasına rağmen tabloda ele alınan konular ile sınırlı kalınmıştır. Mamolo ve Zazkis (2012) matematik bölümünde eğitim alan bir öğrencinin alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini kurabilmesi için sahip olması gereken ön bilgiyi araştırmışlardır. Danıştıkları bir uzman, analiz derslerini almış olan bir kişinin bu bağlantıyı kurabileceğini ifade etmiştir. Ancak söz konusu çalışmada bu ilişkinin kurulmasında yaşanılan zorluklar raporlanmıştır. Bu nedenle analiz derslerinin konusu olan genel türev denklemi, fonksiyonlar ve trigonometriye ek olarak geometrinin içerisinde değerlendirilebilecek ağırlık merkezi, düzlemsel şekillerin alan ve çevre formülleri gibi konular da ön bilgi olarak ele alınmıştır. Katılımcı seçiminde önbilgi seviyesinin önemi ve bununla ilgili göz önünde bulundurulan kıstaslar detaylı bir şekilde anlatılmıştır.

Tablo 3.9. Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisini Anlamadaki Seviyeler

Seviyeler	Seviyeye Özgü Belirteçler
Ön Bilgi	Genel türev denklemi, fonksiyonlar, trigonometri, ağırlık merkezi, düzlemsel şekillerin alan ve çevre formülleri, bağımlı ve bağımsız değişken, çevre ve uzunluk arasındaki ilişki, uzunluk ve alanın boyut kavramları, çember ve daireye ilişkin bilgiler
İmaj Oluşturma	Dairede alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini, yarıçap bağımsız değişkenine göre oluşturmak için şekiller çizilmesi ve hesaplamaların yapılması Düzgün çokgenlerde kenar ya da ağırlık merkezinin köşeye dik uzaklığı bağımsız değişkenlerine göre çizim ve hesaplama yapılması, **bu hesaplama neticesinde türev ilişkisinin kurulması ya da kurulamaması** Dairede çap bağımsız değişkenine göre çalışma yapılması Düzgün çokgenlerde çizimler yapılması Genel türev denklemi ile hesaplama yapılması
İmaja Sahip Olma	Dairede alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinin yazılması veya ifade edilmesi
Özellikleri Fark Etme	İmajlar arasında karşılaştırma yapılması. Örneğin: Dairede çap bağımsız değişkenine göre oluşturulan imaj ile düzgün çokgenlerde kenar uzunluğu ya da ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı bağımsız değişkenine göre oluşturulan imajın karşılaştırılması Daha önce alan ve çevre arasında türev ilişkisinin kurulmuş olduğu bir düzgün çokgen imajını göz önünde bulundurarak "…'da standart değişkene* göre bu ilişkiyi kurulmuştu. Bunda da deneyelim. Ya da … değişkenine göre bu ilişki kurulamamıştı. Bunu denemeye gerek yok" gibi bir karşılaştırma yapılması. Kare ve eşkenar üçgende alan ve çevre arasındaki türev ilişkisine yönelik sonuç yazılması
Formelleştirme	İmajların karşılaştırılması sonrasında bilinçli olarak standart değişkene göre çalışmaya başlanması. (Bilinçli olmalı, bunun için bireyin kendinden emin olarak bağımsız değişkenini seçmesi gerekmektedir. Benzer şekilde deneme ile bu sonuca varmamalıdır.)
Gözlem Yapma	"Düzgün çokgenlerde (üçgen ya da düzgün n-gende olabilir) standart değişkene göre alan ve çevre arasında türev ilişkisi vardır/kurulabilir" öngörüsüne doğrudan sahip olmak.
Yapılandırma	Düzgün n-gende standart değişkene göre alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinin ifade edilmesi, değişim oranı cinsinden yazılması ve ispat edilmesi
Keşfetme	Hacim ile yüzey alanı arasındaki türev ilişkisinin sorgulanması

*Düzgün geometrik şeklin ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı standart değişken olarak isimlendirilmektedir.

Katılımcıların dairede alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini fark etmesi, bu ilişkiyi matematiksel bir açıklamaya kavuşturabilmesi için şekiller çizmesi, bunun için genel türev denklemine başvurması ve hesaplamalar yapması gibi eylemler, ***imaj oluşturma*** seviyesi olarak belirlenmiştir. Klinik mülakatların ilerleyen zamanlarında düzgün çokgenlerde kenar uzunluğu ya da ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı bağımsız değişkenlerine göre çizim ve hesaplama yapılması ve bu hesaplamalar neticesinde türev ilişkisinin kurulması ya da kurulamaması gibi eylemler de bu seviye içerisinde ele alınmıştır. Çünkü katılımcılar bu eylemler ile ön bilgilerini ilişkilendirmekte, yeniden inşa etmekte (Pirie ve Kieren, 1989) ve böylece zihinsel bir nesne oluşturmaktadır (Pirie ve Kieren, 1994). Şekil 3.1.'de Bektaş isimli katılımcının karede alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini kurmaya çalışmasına ait kesit sunulmaktadır.

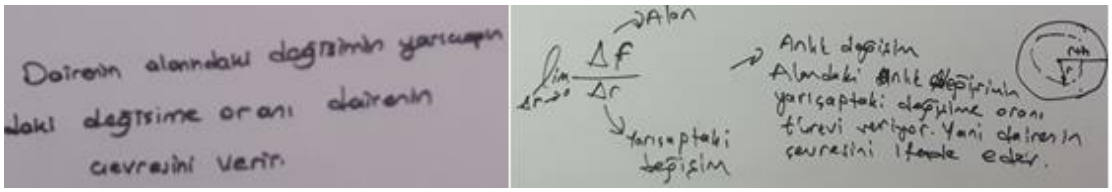


Şekil 3.1. Bektaş'ın Çalışma Kâğıtlarından Bir Kesit

Şekil 3.1.'de de görüldüğü üzere katılımcı karede türev ilişkisini kurmaya çalışırken önce ön bilgi seviyesindeki karede alan ve çevre formüllerini geri çağırmıştır. Bu ikisi arasındaki ilişkiyi incelerken bir imaj oluşturmuştur. Sonra dairede çap bağımsız değişkenine göre ilişki kurmaya çalışmış bir imaj daha oluşturmuştur. Sonra karenin ağırlık merkezinin köşeye dik uzaklığını bağımsız değişken olarak kullanarak türev ilişkisini kurmaya çalışırken bir imaj daha oluşturmuştur.

İmaj oluşturma seviyesine Ömür isimli katılımcı ile yapılan daire konulu mülakatın (birinci oturum) 09:55-10:02 aralığı örnek verilebilir. Bu kesit Tablo 3.8.'de sunulmuştur. Araştırmacının "*Çok yakın olursa, nasıl bir durum sergiler? Yani sıfır olursa nasıl bir daire kalır?*" sorusuyla katılımcı geri katlama sürecine girmiştir. Böylece dairede teğet ile ilgili bir imaj oluşturmaya başlamıştır. Bu örnekten de anlaşılacağı üzere imaj oluşturmaktan kasıt, deftere bir şeyler çizmenin ötesinde zihinsel bir nesne oluşturmaktır.

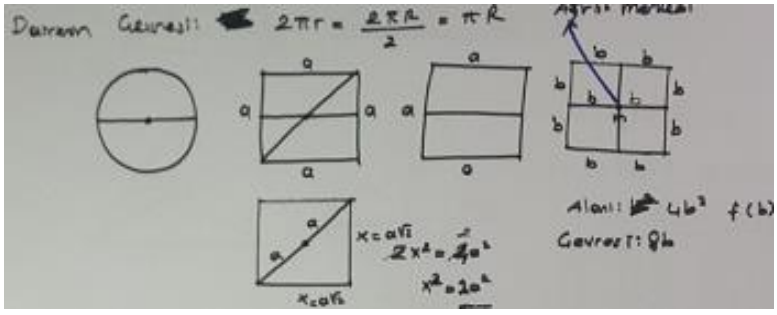
Katılımcıların dairedeki alan ve çevre arasında bulunan türev ilişkisini bir sonuç ya da teorem olarak ifade etmesi, ***imaja sahip olma seviyesi***ndeki bir eylem olarak değerlendirilmiştir. Çünkü ifadelerde Şekil 3.2.'de görüldüğü üzere yarıçap bağımsız değişkenine göre bir sonuç oluşturma söz konusudur. Bu durumda ağırlık merkezinin kenarlara dik uzaklığını bağımsız değişken olarak seçmek yerine sadece daire imajıyla çalışıldığı için yarıçap bağımsız değişkenine göre çalışmak söz konusudur. Bu sonuç çıkarma eylemi, Pirie ve Kieren'in (1989, s.8) imaja sahip olma seviyesinde belirttiği "*tek imaja dayalı olduğu için eksik ve ilkel bir soyutlama*" tanımıyla uyuşmaktadır.



a **b**

Şekil 3.2. Bektaş (a) ve Seda'nın (b) Çalışma Kâğıtlarından Bir Kesit

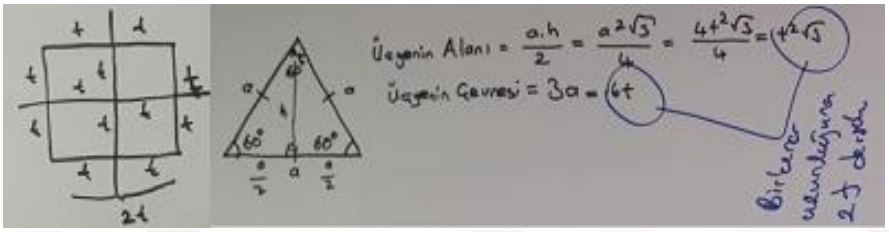
Özellikleri fark etme (4) seviyesinde Pirie ve Kieren'in (1989, s.8-9) deyimiyle "imajlar arasında bağlantılar veya kombinasyonların fark edilmesi" diğer bir deyişle imajların karşılaştırılması söz konusudur. Oluşturulması muhtemel imajlar, imaj oluşturma seviyesinde belirtilmiştir. Bu karşılaştırmaya verilebilecek birinci örnek katılımcıların dairede çap bağımsız değişkenine göre oluşturulan imaj ile düzgün çokgenlerde kenar uzunluğu ya da ağırlık merkezinin köşeye dik uzaklığı bağımsız değişkenine göre oluşturulan imajın karşılaştırılmasıdır. Diğer örnek ise katılımcının daha önce alan ve çevre arasında türev ilişkisini kurumuş olduğu bir düzgün çokgen imajını göz önünde bulundurarak "söz konusu çokgende standart değişkene göre bu ilişkiyi kurulmuştu. Bunda da deneyelim." gibi bir karşılaştırma yapması ya da "söz konusu çokgende bu değişkene göre bu ilişki kurulamamıştı. Bu çokgende bunu denemeye gerek yok" gibi bir çıkarım yapması bu seviyeye örnek olarak verilebilir. Seda isimli katılımcının merkez ve değişken arayışı ve bu arayışa bağlı olarak imajlar arasındaki bağlantı ve farklılıkları ortaya koyduğu sürecin bir kısmı Şekil 3.3.'te resmedilmektedir.



Şekil 3.3. Seda'nın Özellikleri Fark Seviyesinde Yapmış olduğu Çalışmadan Bir Kesit

Özellikleri fark etme seviyesinde kısıtlı imajlara dayalı olarak muhtemel hatalı ya da iyi yapılandırılmamış genellemeler bulunabildiği için bilinçsiz öğrenmenin en dış seviyesi (Pirie ve Kieren, 1989, s.8-9) olarak nitelendirilmektedir. İmaja sahip olma seviyesindeki

genellemeden farkı birden fazla imaja dayalı olarak ve bu imajların karşılaştırılmasıyla oluşturulmasıdır. Bu nedenle eşkenar üçgen ve karede alan ve çevre arasındaki türev ilişkisine yönelik sonuç yazılması, iyi yapılandırılmamış genelleme olarak ele alınmıştır. Ömür isimli katılımcının üçgen konusundaki çalışma kâğıdından bir kesit ile bu durum Şekil 3.4.'te örneklendirilmiştir.

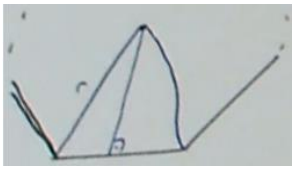


Şekil 3.4. Ömür'ün Kare ve Üçgen Çalışma Kâğıtlarından Bir Kesit

Ömür, kare konusunda çalışırken karede kenar uzunluğu, dairede çap ve yarıçap imajlarını karşılaştırdıktan sonra karenin kenar uzunluğunun yarısını (t) bağımsız değişken olarak seçip türev ilişkisini kurmuştur. Dolayısıyla standart değişken anlayışı olgunlaşmamıştır. Üçgen konusuna gelince kenar uzunluğunun yarısını (t) bağımsız değişken olarak seçip bu değişkene göre türev ilişkisini kurmaya yönelik başarısız bir imaj daha oluşturmuştur. Bu nedenle Ömür'ün kare konusundaki genellemesi, hatalı ve iyi yapılandırılmamış bir genelleme olarak değerlendirilmiş ve özellikleri fark etme (4) seviyesi olarak kodlanmıştır.

Katılımcıların özellikleri fark etme seviyesinde, imajlar arasında karşılaştırmalar yaparak kurmuş olduğu bağlantılar sonrasında, bilinçli olarak, ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığına göre çalışmaya başlanması, ***formelleştirme*** (5) seviyesi olarak değerlendirilmiştir. Çünkü bu eylemde özellikleri fark etme seviyesi için tanımlanan "fark edilen özellikleri bilinçli olarak düşünme" (Pirie ve Kieren, 1989, s.9) ve "ortak özellikleri çıkarma" (Pirie ve Kieren, 1989, 1994) durumu söz konusudur. Ortaya çıkarılan ortak özellik, bağımsız değişken seçiminde ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığını göz önünde bulundurmadır. Tablo 3.10.'da Gaye isimli katılımcının düzgün n-gen çalışmasından bir kesit örnek olarak sunulmuştur.

Tablo 3.10. Gaye'nin Formelleştirme Seviyesindeki Eylemlerinden Bir Örnek

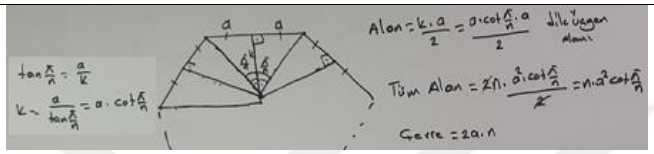
			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
						
05:03	A	Şu, tamam! Ona (çevrel çemberin yarıçapına) göre mi yapacağız, yoksa şu yüksekliğe göre mi yapacağız?	1			
05:10	G	Yüksekliğe göre.				5
05:10	A	Niye?				
05:12	G	Çünkü alanı, yani yükseklik… (Mırıldanma)		1	2	5
05:15	A	Alan çevre ilişkisini kurmak için. Mesela karede köşegen uzaklıklarına göre mi yaptık. Kareyi bir açsana. Karede şöyle şu uzaklığa göre mi yaptık yoksa şuraya göre mi?	1			
05:32	G	İndirdiğimiz dikmelere göre.				5
05:34	A	İndirdiğimiz dikmeye göre. Evet.				
05:36	G	O yüzden burada da indirdiğimiz dikmeye göre yapmamız gerekiyor.		1	2	5

Tabloda verilen mülakat kesitinde iki farklı müdahale-geri katlama döngüsü oluşmuştur. Katılımcı çizimi bitirdikten sonra araştırmacı, 05:03'te bağımsız değişken olarak neyin seçileceğini sormuştur. Katılımcı, önceki imajlarından da faydalanarak ortak bir yol olarak "yükseklik" cevabını vermiştir. 05:15'te araştırmacı bu cevabın altında yatan gerekçeyi biraz daha netleştirmek için ikinci bir müdahalede bulunmuştur. Katılımcı mevcut imajlardan hareketle ortaya çıkardığı ortak özelliği tekrar açıklamıştır. Dolayısıyla bu faaliyet formelleştirme (5) seviyesinde gelişmiş bir anlama olarak değerlendirilmiştir. Süreç içerisinde odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalelerine (1) karşılık mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde geri katlamalar, dış teşvik ile etkili (2) olarak sonuçlanmıştır.

Pirie ve Kieren (1989, s.9) bireyin kendi düşünce yapılarını gözlemlemesi ve bunları tutarlı olarak organize etmesini, bu farkındalıkla düşüncelerinin sonuçlarını görebilmesini ***gözlem yapma seviyesi***ndeki eylemler olarak tanımlamıştır. Bu seviyede "tüm durumlar için doğru olan nedir" sorgulamasının yapılması (Pirie ve Kieren,1989) ve sonuçlarının bir teorem olarak ifade edilmesi (Pirie ve Kieren, 1994) söz konusudur. Bu açıklamalar ışığında yürütülen çalışma incelenecek olursa "düzgün çokgenlerde (üçgen ya da düzgün n-gende olabilir) standart değişkene göre alan ve çevre arasında türev ilişkisi vardır/kurulabilir" öngörüsüne doğrudan sahip olmak gözlem yapma seviyesi olarak değerlendirilebilir. Çünkü bu öngörü, formel faaliyetlerin derinlemesine düşünülerek

koordine edilmesi ve bu koordinasyon sonucunda bir teorem olarak ifade edilmesinin (Pirie ve Kieren, 1994, s.171) bir sonucudur. Tablo 3.11.'de Yavuz isimli katılımcı ile düzgün n-gen ile ilgili yapılan klinik mülakattan bir kesit, gözlem yapma seviyesini örneklemek için sunulmuştur.

Tablo 3.11. Yavuz'un Gözlem Yapma Seviyesindeki Eylemlerinden Bir Örnek

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
						
15:27	A	Tamam. Türev ilişkisi var mı?	1			
15:31	Y	Türev ilişkisi var mıdır? Mutlaka vardır. Çünkü…				6
15:37	A	Şu anda bunun (alanın) türevini aldığında bunu (çevreyi) veriyor mu?	6			
15:40	Y	Veri… Vermiyor.		1	2	2
…		…				
16:36	A	Burada neye göre oluşturduk?	1			
16:38	Y	Burada neye göre oluşturduk? (4 saniye sessizlik) Burada biz kenara göre mi oluşturduk?		1	2	4

Tablo 3.11.'deki kesitten öncesinde katılımcı kendinden emin bir şekilde standart değişkene göre çalışmaya başlamıştır. Ancak muhtemelen dikkat eksikliğinden dolayı $tan\frac{\pi}{n} = \frac{a}{k}$ ifadesinden $a = k.tan\frac{\pi}{n}$ eşitliğini elde edeceğine $k = \frac{a}{tan\frac{\pi}{n}} = a.cot(\frac{\pi}{n})$ eşitliğini elde etmiştir. Diğer bir deyişle kenar uzunluğunun yarısını standart değişken cinsinden bulmak yerine tam tersini yapmıştır. Bu değişkene ile 15:27'ye kadar alan ve çevre fonksiyonlarını oluşturmuştur. Bu noktada araştırmacı türev ilişkisine odaklanmış kasıtlı (1) bir müdahalede bulunmuştur. Katılımcının 15:31'de kendinden emin bir şekilde *"... Mutlaka vardır..."* demesi, katılımcı eşkenar üçgen ve karede fark ettiği özellikleri, genellemiş ve bir teorem olarak ifade edebilecek düzeye gelmiştir. Nitekim hatanın kaynağına yönelik yapılan sorgulama neticesinde katılımcı durumu fark etmiştir. Sonuç olarak katılımcı, düzgün n-genin alanı ve çevresi arasında standart değişkene göre türev ilişkisinin olduğundan emin olacak şekilde bir anlayış geliştirmiştir. Dolayısıyla katılımcı, 15:31'de gözlem yapma seviyesinde bir faaliyet sergilemiştir.

Yapılandırma seviyesinde birey, düşüncelerini sıralayabilir ve ilişkilendirebilir, neden doğru olduğu sorusuna yanıt verebilir, aksiyomatik sistem içerisinde düşünebilir (Pirie ve Kieren, 1989). Diğer bir deyişle bir araya gelen teoremleri birbiriyle ilişkilendirebilir ve genel bir ispat yapabilir (Pirie ve Kieren, 1994). Bu nedenle kare ve eşkenar üçgen için

yazılan sonuçların (teoremlerin) kendi arasındaki ilişkileri kurarak bu ilişkiyi kenar sayısından bağımsız olarak düzgün çokgenlere genelleme ve ortaya çıkan meta teoremi (genel teoremi) ispatlama eylemi, yapılandırma seviyesi olarak değerlendirilmiştir. Yapılan pilot çalışmada bu seviyeye uygun sonuç yazma eylemi gözlenmiştir.



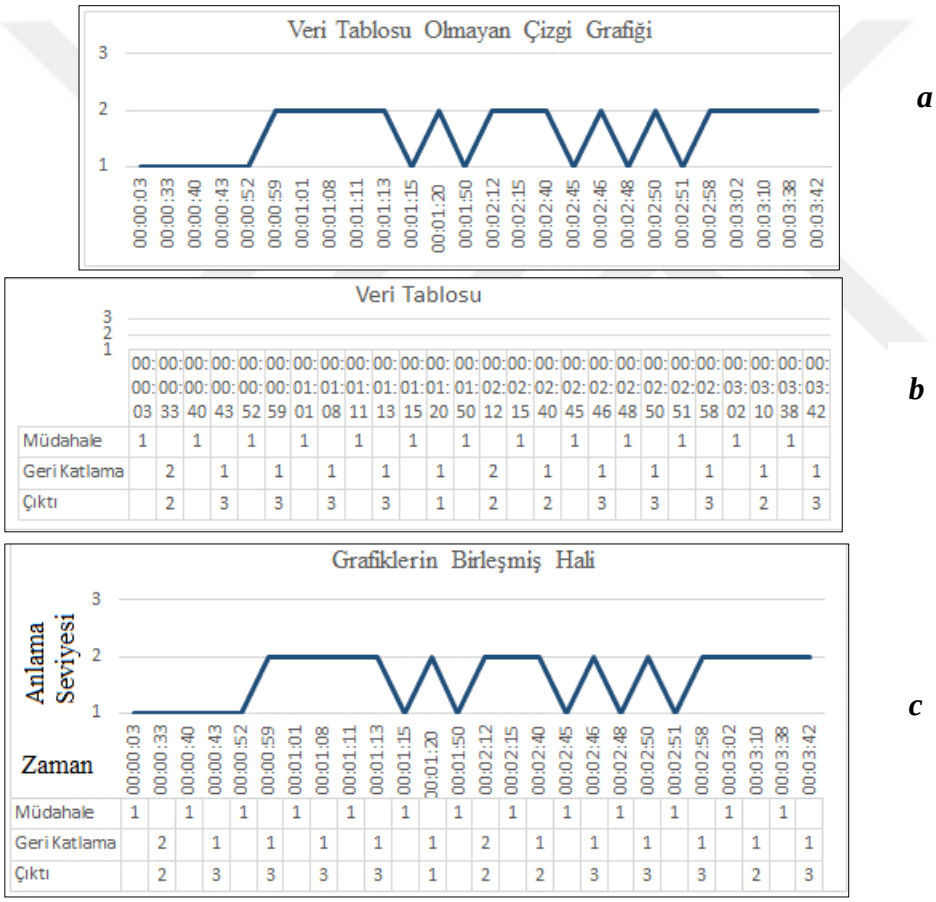
Şekil 3.5. Seda'nın Yapılandırma Seviyesinde Yazdığı Sonuçlar

Şekilde 3.5.'te Seda isimli katılımcının yapılandırma (7) seviyesinde yapmış olduğu ispatlardan bir kesit sunulmuştur. Bu sonuçta halka yapısının alanının limit durumunda *h*'ın sıfıra gitmesiyle çevreye dönüştüğü açıklanmıştır. Şekil üzerinde de ok ile halka yapısının hangi yöne doğru hareket edeceği belirtilmiştir. Böylece yapılandırma seviyesinde bir faaliyet sergilemiştir.

Son olarak katılımcının "acaba hacim ve yüzey alanı arasında benzer bir ilişki var mı?" sorusunu sorması, ***keşfetme seviyesi***nde değerlendirilebilir. Çünkü düzgün geometrik şekiller için yapılandırdığı bilgi ile uyumlu olarak düzgün çokyüzlülerde hacim ve yüzey alanı arasında bir sorgulama başlayacaktır. Zira Pirie ve Kieren (1989) mevcut yapıyla uyumlu yeni bir bilişsel yapı inşasını, keşfetme seviyesi olarak tanımlamaktadır. Bu seviye ile ilgili eyleme dört oturum şeklinde düzenlenen mülakat serisinde rastlanılmamıştır. Ancak "bundan sonra türev ilişkisini arayabileceğimiz kavramlar neler olabilir?" şeklinde bir provakatif müdahalede bulunulsa idi keşfetme seviyesine geçişin olması muhtemel olabilirdi. Böylesi bir müdahale ne pilot uygulamada ne de asıl uygulamada kullanılmamıştır.

c) Anlamanın gelişimine yönelik zihin haritası oluşturulurken müdahale ve geri katlama döngülerini de gösterecek şekilde veri tablolu çizgi grafiğinden faydalanılmıştır. Bunun için veri analizinde kullanılan tabloların zaman, müdahale, geri katlama, çıktı ve seviye

sütunları Excel programına aktarılmıştır. Klinik mülakat oturumlarındaki satır sayıları çok olduğu için sadece müdahalenin yapıldığı satır ile geri katlamanın sonlandığı satır kalacak şekilde veri düzenlemesi yapılmıştır. Böylece her oturum için satır sayısı çizgi grafiğine sığacak miktara indirgenmiştir. Buna rağmen tüm oturumları tek bir grafikte çizmek, mülakatların süresinin uzun olmasından ve müdahale-geri katlama döngülerinin çok olmasından kaynaklı olarak mümkün olmamıştır. Bu problem ile baş edebilmek için her oturum başına bir grafik oluşturulmuştur. Şekil 3.6.'da Gaye isimli katılımcının birinci mülakatının 00:03-03:42 zaman kesitinden elde edilen veriler kullanılarak grafik oluşturmadaki aşamalar gösterilmiş ve örnek bir zihin haritası sunulmuştur.



Şekil 3.6. Anlama Sürecine İlişkin Zihin Haritası Örneği

Çizgi grafiğine, Şekil 3.6.'da görülen ***a*** grafiğine, veri tablosu eklendiğinde, yatay eksendeki zaman bağımsız değişkenini okumak güçleşmiştir. Bu problem ile baş edebilmek için önce Şekil 3.6'da sunulan ***b*** şeklinde veri tablosu olmayan bir grafik oluşturulmuştur. Sonra ***b*** şeklindeki veri tablolu grafik yatay eksen uzunluğu eşit olacak şekilde oranlanarak çizilmiştir. Paint programı aracılığıyla bu iki grafik birleştirilerek

Şekil 3.6.'da sunulan ***c*** grafiği oluşturulmuştur. Böylece zamana bağlı olarak anlama seviyelerinin değişimi ve müdahale-geri katlama döngüleri tek bir haritada sunulabilmiştir.

Çizgi grafiğinde zaman bağımsız değişken, zamandır. Excell programı zaman eksenini zaman ile orantılı olacak şekilde grafiğe yansıtmamaktadır. Orantılı olan bir grafik, değerlerin okunmasını güçleştirecektir. Çünkü bazı müdahale-geri katlama döngüleri 2-3 saniye gibi çok kısa bir zaman aralığında gerçekleşirken bazıları birkaç dakika zaman alabilmektedir. Zaman aralıkları oranlandığında ise yatay eksendeki değerlerden bazıları iç içe girerken bazıları arasında oldukça mesafe oluşmaktadır. Bu nedenle orantılı bir grafik çizme arayışına girilmemiştir.

3.5.1. Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları

Nitel araştırmalar, güvenirlik ve geçerlilik noktasında nicel araştırmalardan farklılaşmaktadır. Miles ve Huberman (2019, s.277) güvenirlik ve geçerlilik ile ilgili tartışmayı, "sonuçların niteliğine ilişkin standartlar" olarak ele almaktadır. Bunun için iç içe geçen beş konudan bahsetmektedir. Bu konular: İç Geçerlik (İnanırlık/Özgünlük), Doğrulanabilirlik (Nesnellik), Dış Geçerlik (Aktarılabilirlik/Uygunluk), Kullanım (Uygulama/Eylem Uygunluğu) ve Güvenirlik (Güvenilebilirlik/Denetlenebilirlik)'dir. Bu konular iç içe geçmiş ve bir birleriyle sıkı sıkıya ilişkilidir.

Miles ve Huberman'ın (2019) "***iç geçerlik***"ten (inanırlık/özgünlük) kastı, bulguların gerçekte olan şeyi yansıtabilmesidir. Diğer bir deyişle bulguların kuramla ilişkilendirilmesi, anlamlı ve ikna edici olabilmesi gibi kıstaslardır. Bunun için çalışma kapsamında ulaşılan bulgular Pirie ve Kieren'in (1989, 1994) matematiksel anlamanın gelişimi teorisi ve Martin'in (2008) bu teoriye eklediği "geri katlama ve müdahale süreci" ile ilişkilendirilerek sunulmaya çalışılmıştır. Örnek kodlamalar ve bu kodlamaların gerekçeleri verilerin analizi başlığının altında detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Ayrıca ulaşılan bir bulgunun neden öyle isimlendirildiği teorideki tanım ve örnekler ile kıyaslanarak gerekçelendirilmeye çalışılmıştır.

Miles ve Huberman'ın (2019) "***doğrulanabilirlik*** (nesnellik)" olarak isimlendirdiği konu bir bakıma dış geçerliliktir. Bunun için önerdiği dört madde bulunmaktadır. Bu maddeler a) yöntem ve sürecin şeffaf bir şekilde aktarılması, b) veri ile bulgunun ilişkisinin

olabildiğince net bir şekilde ortaya konulması, c) araştırmacının rolü ve d) verilerin muhafazası ve ulaşılabilirliği şeklinde özetlenebilir. a) Bu çalışmada yöntem ve sürecin şeffaf bir şekilde aktarılması için katılımcıların seçim süreci, çalışma öncesinde türev konusunda yapılan dersin içeriği, pilot ve asıl uygulamada verilerin toplanma süreçleri ve ortamları, bu verilerin kelimesi kelimesine çözümlenmesi gibi önlemler alınmıştır. Böylece yöntem ve süreç olabildiğince şeffaf bir şekilde aktarılmaya çalışılmıştır. b) Veri ile bulgunun ilişkisinin olabildiğince net bir şekilde ortaya konulması için çözümlemeler aracılığıyla yapılan analizin nasıl yapıldığı yöntem kısmında örnekler vererek aktarılmaya çalışılmıştır. Ayrıca bulgular kısmına doğrudan alıntılar ile bulgular desteklenmeye çalışılmıştır. c) Araştırmacının rolü, araştırmacının kendi varsayımlarını, değer ve yanlılıklarını ve ilişkisel durumlarını açıkça belirtmesi ve bunların farkında olarak araştırma sürecini yürütmesiyle ilgilidir. Bu kıstas için araştırma kapsamında ayrıca bir başlık açılmıştır. d) Verilerin muhafazası ve ulaşılabilirliği için bu çalışmada resim defterlerinden alınan görsellerle desteklenen kelimesi kelimesine video kayıt çözümleri ek olarak sunulmuştur. Bu çözümleme aracılığıyla anlam daralmasının ya da genişlemesinin (Marton, 1986) önüne geçilmeye çalışılmıştır. Ayrıca Çepni'nin (2018) bulguların ve doğrudan alıntıların okuyucuya ve alan uzmanlarına sunulmasıyla sağlanacağını ifade ettiği iletişimsel geçerlilik de sağlanmaya çalışılmıştır. Çözümlemelerin ekler kısmında sunulma sırası Tablo 3.12.'deki gibidir. İlerleyen süreçte konuya ilgi duyan ya da başka bir anlama teorisiyle ilgili verileri analiz etmek isteyen araştırmacılar ekler kısmından verileri alıp üzerinde çalışabilir.

Tablo 3.12. Çözümlemelerin Ekler Kısmındaki Sıralanışı

	Yavuz	Gaye	Ömür
1. Klinik Mülakat	EK-2	EK-6	EK-10
2. Klinik Mülakat	EK-3	EK-7	EK-11
3. Klinik Mülakat	EK-4	EK-8	EK-12
4. Klinik Mülakat	EK-5	EK-9	EK-13

Miles ve Huberman (2019) "***dış geçerliliği***" sağlamak için çalışma grubunun iyi betimlenmesi, araştırmacının yapabileceği makul genellemelerin kapsam ve sınırlarını tanımlayabilmesi, bulguların kapsamlı açıklama içermesi, bulguların kuramla tutarlı olması, sonuçların denenebileceği ortamlar önermesi gibi eylemlerin gerçekleştirilebileceğini ifade etmektedirler. Dış geçerliliği sağlayabilmek için çalışma grubu olabildiğince net bir şekilde betimlenmeye çalışılmıştır. Bulgular kapsamlı

açıklama içerecek ve matematiksel anlamanın gelişimi teorisiyle tutarlı olacak şekilde sunulmaya çalışılmıştır. Ancak araştırmanın bulguları, kişiye özgü anlama süreci ve bu süreçteki (yine bağlama özgü) müdahale ve geri katlama süreçlerini (Pirie ve Kieren, 1989, 1994; Martin, 2008) içermesi bakımından genelleme pek mümkün değildir. Bunun yanı sıra araştırmadan edinilecek deneyim, anlamanın gelişimini teşvik edebilecek öğrenme ortamı oluşturmak ve öğretmen yaklaşımı geliştirmek için bir çerçeve oluşturabilecek potansiyeldedir. Ayrıca yapılan çözümlemeler ekte verilerek araştırmacıların incelenmesine sunulmuştur.

Miles ve Huberman'ın (2019) ***kullanım*** (uygulama/eylem uygunluğu) olarak ele aldığı konu, pragmatist bir bakış açısıyla, araştırmanın önemini, sonuçlarını ve önerilerinin niteliğiyle ilgilidir. Diğer bir deyişle çalışmanın ne fayda sağladığının incelenmesidir. Bu çalışmada bulguların okuyucuya, anlamanın gelişimi ve geri katlama-müdahale mekanizmasının anlamanın gelişimindeki rolünü aktarabilmesi için hassasiyet gösterilmiştir. Böylece okuyucunun faydalanabileceği bir araştırma ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Miles ve Huberman'ın (2019) ***güvenirlik*** (güvenilebilirlik/denetlenebilirlik) için yaptığı açıklamalardan araştırma sorularının araştırma deseniyle uyumlu olması, araştırmacının rolü ve konumunun açıkça tanımlanması, çalışma grubunun uygunluğu ve kodlayıcı güvenirliği gibi kriterler ortaya çıkmaktadır. Araştırma sorularının ve araştırmanın amacının bu çalışmada uygulanan desen olan fenomenografi ile uygunluğu araştırmanın deseni başlığı altında tartışılmıştır. Araştırmacının rolü ve konumu ayrı bir başlık altında ele alınacaktır. Çalışma grubunun uygunluğu, çalışma grubunu oluşturma kriterleriyle birlikte olabildiğince açık bir şekilde açıklanmaya çalışılmıştır. Kodlayıcı güvenirliği ise aşağıda açıklanmıştır.

Çepni (2018, s.115) fenomenografik çalışmalarda güvenirlik için "yorumlayıcı farkındalık, üçgenleme, gözlemciler arası güvenirlik ve söylemsel güvenirlik kontrolü" tekniklerini önermektedir. Bu çalışmada güvenirlik için ***yorumlayıcı farkındalık*** kullanılmıştır. Yorumlayıcı farkındalık, araştırmacının analiz sürecini belirli aralıklarla yeniden gözden geçirmesiyle yapılmaktadır. Bu teknik, fenomenografik çalışmalarda analizin temelinde vardır (Çepni, 2018). Marton (1986) analiz sürecinde kategorilerin, verilere göre test edilmesini, buna göre ayarlanmasını, tekrar test edilmesini ve tekrar

ayarlanmasını önermektedir. Bu durum çalışma sürecinde dikkate alınmıştır. Miles ve Huberman (2019) araştırmacı tarafından veri setinin bir kısmının kodlanmasını ve üzerinde belirli bir zaman geçtikten sonra (2 hafta kadar) orijinal veri setinin tekrar kodlanmasını önermektedir. Bu iki kodlama arasındaki uyum için aşağıdaki formüle göre yapılacak olan hesaplamada %90 civarında bir görüş birliği oranı önerilmektedir.

$$g\ddot{u}venirlik = \frac{g\ddot{o}r\ddot{u}\text{ş } birliği\ sayısı}{toplam\ g\ddot{o}r\ddot{u}\text{ş } birliği + g\ddot{o}r\ddot{u}\text{ş } ayrılığı}$$

Bu çalışmada veri analizi kısmında ele alınan ve açıklanan değişkenler: *a) Müdahale, b) Geri Katlama, c) Geri Katlamanın Çıktısı ve d) Anlamanın Seviyeleri*dir. Tablo 3.13.'te yapılan kodlamalardaki bildirilen görüş sayısı ile ilgili betimsel istatistikler sunulmaktadır.

Tablo 3.13. Birinci ve İkinci Kodlamadaki Bildirilen Görüş Sayısı

	Müdahale	Geri Katlama	Geri Katlamanın Çıktısı	Anlamanın Seviyesi
Birinci Kodlama	101	77	77	78
İkinci Kodlama	99	76	76	78

Birinci kodlama ile ikinci kodlama arasındaki bildirilen görüş miktarları arasındaki fark en çok iki en az ise birdir. Bu görüşler arasındaki uyum oranı Miles ve Huberman'ın (2019) önerdiği formüle göre dört farklı değişken için hesaplanmış ve bu oranlar Tablo 3.14.'te sunulmuştur.

Tablo 3.14. Yorumlayıcı Farkındalık Görüş Birliği Oranları

	Müdahale	Geri Katlama	Geri Katlamanın Çıktısı	Anlamanın Seviyesi
Görüş Birliği	92	74	72	78
Görüş Ayrılığı	9	4	6	78
Uyum	0.911	0.949	0.923	1

Tablo 3.14.'te de görüldüğü üzere müdahale değişkeni için hesaplanan görüş birliği oranı 0,911'dir. Geri katlama için hesaplanan oran 0,949 ve geri katlamanın çıktısı için ise 0,923'tür. Anlamanın seviyesi için hesaplanan oran ise 1 olarak çıkmıştır. Bu oranların hepsi Miles ve Huberman (2019) tarafından önerilen oranın (%90 civarı) üstündedir.

3.5.2. Araştırmacının Rolü

Bir araştırmada araştırmacının rolüne yer verilmesi Miles ve Huberman'ın (2019) araştırma sonuçların niteliğine ilişkin sıraladığı standartlardan doğrulanabilirlik ve

güvenirlik ile yakından ilişkilidir. Pillow (2003) araştırmanın güvenirlik ve geçerliliği için kullanılabilecek kanıt göstergelerinden biri olarak sunduğu araştırmacının rolüyle ilgili, düşünümsellik (reflexivity) kavramının altını çizmektedir. Yazara göre düşünümsellik araştırmacının hem kendisinin hem de bağlamdaki değişkenlerle birlikte sürecin farkında olması anlamına gelmektedir. Patton (2018, s.65) bu kavramı, "araştırmacının kendisinin, mülakat yapılan diğerlerinin ve raporun yazıldığı kişilerin bakış açısı ve söylemlerine kültürel, politik, sosyal, dilbilimsel ve ideolojik temellerin bilincinde olma ve bunlara dikkat etme" olarak tanımlamaktadır.

Bu çalışmada araştırmacının rolü; araştırmacının

i) araştırdığı anlama sürecine bakış açısı,

ii) hem veri analizi hem de veri toplama sürecini yönetme konusundaki yeterliliğinin tartışılması ve

iii) katılımcılarla olan ilişkisi temaları altında sunulmuştur.

i) Araştırmacının bakış açısı: Araştırmacı, matematiksel anlamanın gelişimini incelerken Pirie ve Kieren'in geliştirdiği (1989, 1994) matematiksel anlamanın gelişimi teorisi ve Martin'in (2008) bu teoriye eklediği "geri katlama ve müdahale süreci" paradigmasını benimsemektedir. Bunun iki gerekçesi vardır. Birincisi araştırmanın amacı ve araştırma sorularıdır. Çünkü araştırmanın amacı, "öğretmen adaylarının alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini anlamlandırma sürecinin Pirie ve Kieren'in (1989, 1992, 1994) teorisine göre incelenmesi" dir. İkincisi ise APOS teori (Dubinsky, 1991) ve Pirie ve Kieren'in (1989, 1992, 1994) teorisinin karşılaştırıldığı başlık altındaki tartışmada da belirtildiği üzere "araştırmacının ilgisi ve istidatları" bu bakış açısının seçilmesinde tercih sebebidir.

ii) Araştırmacının yeterliliği: Araştırmacının ilgi alanları ve kabiliyetleri Pirie ve Kieren'in (1989, 1992, 1994) teorisiyle araştırma yapmaya uygundur. Bu bir bakıma analiz sürecinde araştırmacının yeterliliği olarak değerlendirilebilir. Ancak yine de hem veri toplama olması hem de verileri analiz etme yeterliliği nitel araştırmanın doğası açısından önem arz etmektedir.

Mülakat tekniği ile veri toplanılan nitel araştırmalarda veri toplama aracı, araştırmacının kendisidir (Patton, 2018). Robson (2015) yapılandırılmış bir görüşmeye oranla yarı yapılandırılmış ya da yapılandırılmamış bir görüşmede ***görüşmecinin yeterli olması***

gerektiğini ifade etmektedir. Ginsburg (1981) ise klinik mülakat sürecinde görüşmecinin anlık kalibrasyon yapma yeterliliğinin önemini vurgulamaktadır. Çünkü araştırmada elde edilen bilginin kalitesini mülakat yapan kişiye bağlıdır (Patton, 2018). Her ne kadar araştırmacı, çeşitli mecralarda özel dersler vermiş, kişisel gelişim (NLP Practitioner, NLP Master Practitioner gibi) programlarına katılmış ve araştırmayı yaptığı tarih itibariyle dört yıl resmi olarak öğretmenlik yapmış olsa da tüm bunlar klinik mülakat sürecini yönetebilmek için yeterli olmayabilir. Bu nedenle Robson'un (2015) araştırmacının yetkinlik kazanabilmesi için pilot uygulama yapması önerisi dikkate alınarak araştırma kapsamında (detayları pilot uygulama başlığı altında sunulan) pilot uygulama yapılmıştır. Böylece araştırmacı, klinik mülakat yapma yetkinliği kazanmaya çalışmıştır.

Çalışmanın yapısı gereğince öğretmen adaylarının geri katlama yapabilmeleri için anlamalarının önündeki olası engelleri aşmasına yardımcı olacak müdahalelerde bulunulması gerekmektedir. Araştırmacı bu beceriyi pilot çalışma yaparak geliştirmiştir. Böylece gerekli yerlerde kasıtlı müdahalelerde bulunulmuştur. Kasıtlı müdahalelerde bulunmanın sebebi, araştırma problemlerinden ikincisini anlama sürecinde kasıtlı öğretmen müdahalesinin rolünü, üçüncüsü öğretmen adaylarının yaptığı geri katlama türlerini ortaya çıkarmaya yönelik olmasıdır. Dolayısıyla araştırmacının veri toplama sürecindeki bir rolü de müdahale etmektir. Patton (2018, s. 405) iyi bir mülakatın hem araştırmacıda hem de katılımcıda bilgi ve deneyim bırakması yönüyle insanları etkilediğini ve bu nedenle de mülakatların "müdahale" olduğunu ifade etmektedir.

Verilerin analizi yapılmadan önce danışman öğretim elemanı ile hangi göstergelerin nasıl kodlanacağı üzerine istişare edilmiş ve kodlar tespit edilmiştir. Yorumlayıcı farkındalık güvenirlik oranı hesaplamak için araştırmacının farklı zamanlarda yaptığı kodlamalar, danışman öğretim elemanı ile incelenmiş ve kodlamalar üzerinde hem fikir olunmuştur. Böylece kodlayıcı eğitimi yapılarak araştırmacının ***veri analizi sürecinde yeterlilik*** kazanması sağlanmaya çalışılmıştır. Ayrıca yorumlayıcı farkındalık güvenirlik oranı ile ilgili yapılan hesaplamalar Tablo 3.10.'da verilmiştir. Dört farklı değişken için hesaplanan oranların en küçüğü 0,911 iken en büyüğü 1'dir. Dolayısıyla Miles ve Huberman (2019) tarafından önerilen oranın (%90 civarı) üzerindedir.

iii) Araştırmacının katılımcılarla olan ilişkisi: Araştırmacının rolü ile ilgili son tema araştırmacının katılımcılar ile olan ilişkisidir. Araştırmacı, katılımcıların bulunduğu

bölümde öğretim görevlisi olup daha önceki dönemlerde derslerine girmiş ve araştırmanın yapıldığı tarih itibariyle de iki farklı derslerini yürütmektedir. Bu nedenle araştırmacı ve katılımcılar birbirlerini yakından tanımaktadırlar. Ginsburg (1981) araştırmacı ile katılımcı tanışıklığının bazı durumlarda sakıncalı olsa da klinik mülakat sürecinde motivasyon problemine çözüm olabileceğini ifade etmektedir. Bu araştırmada tanışıklığın motivasyon problemini çözmeye katkı sağladığı söylenebilir. Çünkü katılımcıların araştırma bittikten sonra benzer çalışmalar olursa yer almak istemesi, hem araştırma sürecinde olumlu kazanımlar edindiği hem de araştırmacının yaptığı araştırmaya katılmaya motive oldukları şeklinde yorumlanabilir.

3.6. Araştırmada Alınan Etik Önlemler

Mülakat sürecinde etik konuları özel olarak ele alan Patton (2018) on maddeden oluşan bir kontrol listesi yapmıştır. Bu çalışmada, on maddeden beşi (diğer maddeler, bu araştırmaya uygun olmadığı için) göz önünde bulundurulmuştur. Söz konusu kontrol maddeleri: 1. Amacı açıklamak, 2. Vaatler ve karşılıklılık (katılımcının mülakattan kazanımı), 3. Risk değerlendirmesi, 4. Gizlilik ve 5. Bilgilendirilmiş Onamdır. Söz konusu maddeler, EK-1'de sunulan etik kurul izni ile de paralellik göstermektedir.

Çalışma grubunun oluşturulması kısmında da değinildiği üzere katılımcı adayları ile (dokuz kişi) ön toplantı yapılmıştır. Bu ön toplantıda araştırmanın amacı açıklanmış, araştırma sürecinde katılımcıların olası kazanımları izah edilmiştir. Buna bağlı olarak bilgilendirilmiş onam istenmiştir. Bunun için bir haftalık düşünme süresi verilmiş, katılımcılardan altısı o anda çalışmaya katılmaya gönüllü olmuşlardır. Diğer üç katılımcı adayı ise derslerine engel olacağı kaygısı, sosyoekonomik durumdan dolayı çalışma zorunluluğu gibi nedenlerle çalışmaya katılmak istememişlerdir. Bilgilendirilmiş onam alınmasına rağmen katılımcıların istedikleri zaman araştırmadan ayrılabilecekleri ifade edilmiştir. Ancak katılımcılar klinik mülakat sürecine içsel olarak motive olmuşlardır. Sürecin sonunda ileride yapılması muhtemel araştırmalara da katılma konusunda ricada bulunmuşlardır.

Araştırmanın amacı detayları ile açıklanmıştır. Açıklama yapılırken "alan ve çevre arasındaki türev ilişkisi" gibi bir ifade kullanmaktan sakınılmıştır. Bunun yerine "dört oturum şeklinde yürütülecek çalışmanın her bir oturumunda diğer oturumlardaki problem

durumlarıyla ilişkili bir problem ele alınacaktır" gibi bir ifade kullanılmıştır. Bunun sebebi, anlık olarak değerlendirilmesi gereken anlama sürecinin araştırmadan önce başlamasının önüne geçmektir. Bu gerekçe katılımcılara açıklanmış ve klinik mülakatların konuları ile ilgili birbirleri ile konuşmamaları rica edilmiştir. Bunun dışında katılımcıların anlama süreçlerinin belirlenmesi amacıyla bu araştırmanın yürütüldüğü ve doktora tezi kapsamında yapıldığı gibi ayrıntılar detaylı olarak açıklanmıştır.

Katılımcılara ön toplantıda, araştırma ile edinecekleri kazanımlar açıklanırken "yeni şeyler öğreneceksiniz" gibi bir ifade kullanılmıştır. Neyi öğreneceklerinin net olarak önceden bildirilmemesinin sebebi, yukarıda (anlamanın anlık olarak değerlendirilmesi) sunulan kaygıdan dolayıdır. Araştırma sürecinin sonunda ise katılımcılar alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini kurmuşlardır. Ayrıca klinik mülakatlardan önce yapılan türev dersi ile de türev konusundaki anlayışlarının derinleştiği söylenebilir. Katılımcılardan çalışma sonunda alınan geri bildirimler ve katılımcıların ileride yapılabilecek çalışmalara katılmayı istemesi bu durumu destekler niteliktedir.

Bu çalışmada göz önünde bulundurulan bir diğer etik konu ise risk değerlendirilmesidir. Çalışma sürecinde katılımcıların karşılaşması muhtemel en büyük risk, klinik mülakatlar uzun sürmese bile, katılımcıların günlük hayatlarının olağan akışını aksatma riskidir. Diğer bir deyişle derslerini aksatması durumudur. Bunun için iki önlem alınmıştır. Birinci önlem, çalışma grubu oluşturulurken kullanılan birinci kıstasın ikinci gerekçesi ile sağlanmıştır. İkinci önlem ise hem araştırmacının hem de katılımcının ortak müsait zamanlarında klinik mülakatların yapılmasıdır. Araştırma kapsamında katılımcıların ders programındaki boş günlerden ziyade boş saatler kullanılmaya çalışılmıştır. Bunun sebebi ise katılımcının hem boş gününü bölmemek hem de sadece mülakat için kampüse gelerek dolmuş ücreti masrafına girmesinin önüne geçmektir.

Bu çalışmadaki son etik konu ise gizliliktir. Katılımcılar kendi isimlerinin araştırmada kullanılmasının kendileri için sakınca doğurmayacağını, aksine bundan mutlu olacaklarını ön toplantı sonucunda belirtmiştir. Ancak araştırmanın doğası gereği isimlerinin değiştirilerek raporlama yapılacağı ifade edilmiş ve çalışma kapsamında isimleri değiştirilerek raporlanmıştır. Bu çalışma sonunda ortaya çıkan ürünler, katılımcıların özel isteği üzerine, kendilerine ulaştırılarak ve hangi isimlerin kendi isimlerine karşılık geldiği konusunda bilgi verilmiştir.

BÖLÜM 4: BULGULAR

Bu bölümde, öğretmen adaylarının alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini anlama sürecine ilişki bulgular sunulmuştur. İlk ana başlık altında söz konusu anlamanın gelişiminde izlenilen yolların oturumlara göre dağılımları ele alınmıştır. İkinci ana başlık altında anlamanın gelişiminde önemli rol oynayan (Martin, 2008) müdahale ve geri katlamaların türlerinin klinik mülakatlara göre dağılımları değerlendirilmiştir. Üçüncü ana başlık altında anlama seviyelerinde gösterilen faaliyet sürelerinin mülakat oturumlarına göre dağılımları değerlendirilmiştir. Son ana başlık altında ise öğretmen adaylarının anlama sürecini özetleyen zihin haritaları sunulmuştur.

4.1. Öğretmen Adaylarının Alan ve Çevre Kavramları Arasındaki Türev İlişkisini Anlamlandırma Sürecinde İzledikleri Yollar

Bu ana başlık altında öğretmen adaylarının türev ilişkisine yönelik anlamalarının gelişimindeki izlenilen yollar, klinik mülakat oturumlarına göre sırayla, ele alınmıştır. Dört oturum şeklinde yapılan klinik mülakat serisindeki görevler sırasıyla dairede, karede, eşkenar üçgende ve düzgün n-gen'de alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinin kurulmasıdır. Bu oturumlarda izlenilen yolları örneklendirebilmek için mülakatlardan kesitler sunulacaktır. Böylece birinci araştırma problemine cevap aranmıştır.

4.1.1. Dairede Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisinin Kurulmasında İzlenilen Yollar

Bu başlık altında öğretmen adaylarının alan ve çevre kavramları arasındaki türev ilişkisini anlamlandırma süreci genel hatlarıyla betimlenmeye çalışılmıştır. Diğer bir deyişle anlama sürecinde izlenilen yollardaki farklılıklar ve benzerlikler sunulmuştur. Tablo 4.1.'de öğretmen adaylarının bu süreç içerisinde yaptığı genel eylemler verilmiştir. Eylemler zamana bağlı olarak sıralanmıştır.

Tablo 4.1. Dairede Türev İlişkisini Kurarken Yapılan Eylemler

Eylem	Ömür	Gaye	Yavuz
Alan ve çevre formüllerinin arasındaki türev ilişkisini fark etmek	+	+	+
Genel türev denklemini sorgulamak ve halka yapısını sözel olarak ifade etmek	+	+	+
Değişim oranı cinsinden ifade etmek	+	+	+

Tablo 4.1.'de sunulduğu üzere birinci oturum olan dairede tüm öğretmen adayları aynı aşama ve eylemleri takip etmişlerdir. Oturumun başında araştırmacı dairenin alan ve çevre formüllerini sormuştur. Sonra katılımcıları bu formüller arasındaki ilişkiye odaklayacak şekilde kasıtlı müdahalede bulunmuştur. Katılımcıların hepsi alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini doğrudan fark edebilmişlerdir. Bu ilişkinin fark edilmesine dair Ömür ile yapılan çalışmadan örnek bir kesit Tablo 4.2.'deki gibidir.

Tablo 4.2. Ömür'ün Dairede Türev İlişkisini Fark Etmesi

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
01:20	A	Bu iki $2\pi r$ ile πr^2 arasında bir ilişki var mı?	1			
01:25	Ö	Evet var.				2
01:26	A	Nasıl bir ilişki var?				
01:32	Ö	İlişkisi, r^2 ye göre türevdir.		1	3	2

Tablo 4.2.'de görüldüğü üzere, araştırmacı 01:20'de kasıtlı ve odaklanmış bir müdahale ile dairenin alan ve çevre fonksiyonları arasında bir ilişki olup olmadığını sormuştur. Bu müdahaleye bağlı olarak katılımcı, alan ve çevre fonksiyonları arasındaki türev ilişkisini fark etmiştir. Böylece mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma türünde (1) dış teşvik olmadan etkili (3) bir geri katlama yapmıştır. Katılımcı bu süreçte imaj oluşturma (2) seviyesinde bir faaliyet göstermiştir.

Tablo 4.1.'de de belirtildiği üzere katılımcılar, ikinci aşamada genel türev denklemi aracılığıyla alan fonksiyonunun türevi hesaplamış ve çevre fonksiyonuna ulaşmışlardır. Bu denklemin sorgulanması, türev ilişkisine temel teşkil edecek olan matematiksel fikrin gelişmesini sağlamıştır. Gaye isimli katılımcının söz konusu sorgulamasından bir kesit, Tablo 4.3.'te sunulmaktadır.

Tablo 4.3. Gaye'nin Dairede Halka Yapısına Ulaşması

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
06:37	A	Tamam. İki alanı birbirinden çıkardığımız zaman nasıl bir şey çıkar ortaya? Şekil üzerinde göster.	1			
06:46	G	Bunlardan mı?				2
06:48	A	Hangisini hangisinden çıkarıyorsun?	6			
06:49	G	Büyük olandan küçük olanı çıkarıyorum. Yani şöyle bunu da burada çizsem. Nasıl çizebilirim? Çizemiyorum.		1	2	2
…	…	…	…	…	…	…
						
15:07	A	Tamam, (halka kast ediliyor) alan neye dönüşür?	1			
15:08	G	Çembere dönüşür.				2
15:09	A	Çemberin neyine dönüşür?	6			
15:12	G	Çemberin çevresine dönüşür.		1	2	3
15:15	A	Çemberin çevresine dönüşür. Nasıl dönüşür çemberin çevresine?	1			
15:22	G	Çünkü hocam şey oluyor hani alan gitgide küçüldüğü için sadece noktalar kalıyor. Çemberde bir noktaya eşit uzaklıkta olan noktalar kümesiydi. O zaman ben çemberin çevresini elde etmiş oluyorum. Yani ben burada da türev aldığımda o zaman çemberin çevresini bulmam gerekiyor.		1	2	3

Tablo 4.3.'teki kesitin tamamında Gaye isimli katılımcı, genel türev denkleminin pay kısmındaki farkı $f(r+h)-f(r)$ sorgulamış ve böylece halka yapısına ve limit durumunda $h \to 0$ ifadesi ile bağlantılı olarak halkanın alanının çevreye dönüşmesi durumunu sözel olarak açıklanmıştır. Bu kesitin ilk kısmında (06:37) araştırmacının kasıtlı odaklanmış müdahalesi (1) genel türev denkleminin payındaki $f(r+h)-f(r)$ farkını sorgulamayı amaçlamıştır. Katılımcı "Bunlardan mı?" dediği (06:46) için araştırmacı "Hangisini hangisinden çıkarıyorsun?" ifadesiyle dış teşvik (6) kullanmıştır. Her ne kadar katılımcı süreç sonunda (06:49) çizimde sorun yaşasa da söz konusu farkın ne anlama geldiğine yönelik bir anlayış geliştirmiştir. Böylece katılımcı mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde dış teşvik ile etkili (2) bir geri katlama yapmıştır. Katılımcı, bu süreçte, imaj oluşturma (2) seviyesinde bir anlayış geliştirmiştir.

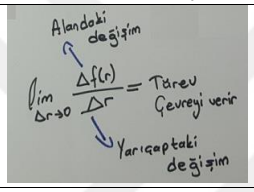
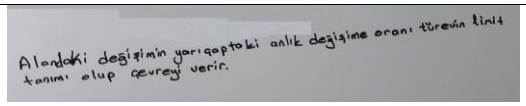
Çizim sonrası limit durumunda h'ın sıfıra gitmesinin şekil üzerindeki yansıması sorgulanmaya başlanmıştır. Bu sorgulamanın neticesinde (15:07) araştırmacı kasıtlı odaklanmış müdahalede (1) bulunmuştur. Böylece katılımcı dış teşvikin de yardımıyla (6) türev ilişkisindeki matematiksel temeli yapılandırmayı başarmıştır (15:12). Katılımcı bu aşamada mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde dış

teşvikle etkili bir geri katlama yapmıştır. Böylece imaj oluşturma (2) seviyesinden imaja sahip olma (3) seviyesine geçiş gerçekleşmiştir.

Araştırmacı 15:15'te katılımcının oluşturduğu matematiksel anlayışın gerekçesini sormak suretiyle kasıtlı ve odaklanmış bir müdahalede (1) bulunmuştur. Katılımcı, bu müdahaleye bağlı olarak ulaştığı matematiksel anlayışın temellerini açıklamaya başlamıştır. Bu süreçte mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde dış teşvikle etkili (2) bir geri katlama yapmıştır. Dış teşvik ise müdahale olarak nitelendirilen sorunun kendisidir. Böylece imaja sahip olma (3) seviyesinde bir anlayış geliştirmiştir.

Dairede alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinin kurulduğu birinci oturumun son kısmında, bu ilişki değişim oranı cinsinden ifade edilmiştir. Ömür isimli katılımcının türev ilişkisini değişim oranı cinsinden ifade etme sürecinden bir kesit Tablo 4.4.'te sunulmaktadır. Bu süreç 18:05'te başlamıştır. Sürecin büyük bir kısmı "alandaki değişim" ve "yarıçaptaki değişim" ve bu değişimlerin anlık oranını sorgulamak ile geçmiştir. Bunun sebebi katılımcının türevin genel denklemi ($\lim_{h\to 0}\frac{f(r+h)-f(r)}{h}$) ile anlık değişim oranı ($\lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta r}$) arasındaki geçişte yaşadığı zorluktur. Bu zorluk tüm öğretmen adaylarında gözlenmiştir. Katılımcı bu zorluğu aştıktan (23:09) sonra türev ilişkisini anlık değişim oranın kavramlarıyla ifade edebilmiştir.

Tablo 4.4. Ömür'ün Dairedeki Türev İlişkisini Değişim Oranı Cinsinden İfade Etmesi

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
18:05	A	Tamam. Peki değişim oranı cinsinden ifade edecek olsaydık. Burada neler arasındaki fark bu? (Genel türev denkleminin pay kısmı işaret ediliyor.)	1			
18:16	Ö	$r + h$ yarı çaplı r yarı çaplı				2
18:20	A	Bunlar nelerin farkı? Şurası neyin farkı şurası? (Genel türev denkleminin pay kısmı işaret ediliyor.)	6			
18:29	Ö	(Mırıldanma)				2
18:32	A	Şu neyin farkı? (Genel türev denkleminin pay kısmı işaret ediliyor.)	6			
18:35	Ö	İki tane fonksiyonun.				2
18:37	A	Tamam. Ne fonksiyonu onlar?	6			
18:42	Ö	İki tane alanın.		1	2	3
…	…	…	…	…	…	…
22:12	A	Başka neyi veriyor?	1			
22:16	Ö	Bize hem de ikisinin çevresini, çevresine ulaşmamızı sağlıyor.		1	2	3
						
…	…	…	…	…	…	…
23:09	A	Cümle olarak yaz. (Katılımcı "alanlar… diye başladığı için araştırmacı düzeltiyor.) Alandaki değişimin. Alanlardaki değil. Bak bu aslında bizim sonradan eklediğimiz sanal bir şey, çember. Gitgide küçülen bir çember. Alan, alandaki değişimi diyelim.	1			
23:31	Ö	Alandaki değişimin yarıçaptaki…				2
2:39	A	Çaptaki.	6			
23:41	Ö	Çaptaki				2
23:41	A	Dur. Δr'yi sıfıra götürüyorsak eğer anlık demektir bu.	6			
23:48	Ö	Evet, anlık.				2
23:48	A	Anlık değişime	6			
23:56	Ö	Anlık değişime oranı türevin tanımı olup (sonradan türevin kelimesi ile tanımı kelimesi arasına ekleme yapıyor) limit, tanımı olup bize çevreyi verir.		1	2	3
						

Tablo 4.4.'te özetlenen süreç detaylı olarak incelenecek olursa eğer araştırmacı 18:05'te araştırmacı *"...neler arasındaki fark bu..."* sorusuyla genel türev denkleminin pay kısmındaki alanlar arasındaki farka odaklanacak şekilde kasıtlı bir müdahalede (1) bulunmuştur. Ancak katılımcının bu müdahaleye cevap verebilmesi için üç tane dış teşvik (6) ile süreci desteklemiştir. Böylece katılımcı imaj oluşturma seviyesindeki (2) ayrık anlayışları ilişkilendirerek "temellendirmiş" (Martin, 2008, s.77) ve mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışmaya (1) başlamıştır. Dış teşvik ile etkili bir şekilde gerçekleştirilen bu (2) geri katlama neticesinde imaja sahip olma (3) seviyesinde bir anlayış gerçekleşmiştir.

22:12'te araştırmacı *"Başka neyi veriyor?"* diyerek kasıtlı ve odaklanmış öğretmen müdahalesinde (1) bulunmuştur. Dış teşvik içeren bu müdahalenin sonucunda katılımcı anlık değişim oranı, türev ve alan ile çevre arasındaki türev ilişkisini kurarak "mevcut anlayışını sağlamlaştırdığı" (Martin, 2008, s.77) için mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde dış teşvik ile etkili (2) bir geri katlama yapmıştır. Böylece imaj oluşturma seviyesindeki anlayışlar ilişkilendirip bunları "bir forma" dönüştürerek (Pirie ve Kieren, 1989, s.8) daire imajına dayalı "ilkel bir soyutlama" (Pirie ve Kieren, 1989, s.8) yapmıştır. Anlamanın gelişimi ile ilgili bu faaliyet ise imaja sahip olma seviyesi (3) olarak değerlendirilmiştir.

Ömür'ün anlayışının daha da sağlamlaşması için araştırmacı, ulaşılan fikrin yazılmasını (23:09) istemiştir. Oluşturulan anlayışın cümle olarak yazılması odak noktası olduğu için yapılan müdahale kasıtlı ve odaklanmış öğretmen (1) müdahalesi olarak kodlanmıştır. Bu müdahaleye bağlı olarak gelişen geri katlama süreci, dış teşvikler ile 23:56'da nihayete ermiştir. Böylece katılımcı, "mevcut anlayışını sağlamlaştırdığı" (Martin, 2008, s.77) için mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışmak (1) türünde dış teşvikle etkili (2) bir geri katlama yapmıştır. Geri katlamanın sonucunda katılımcı, imaj oluşturma seviyesindeki (2) daire imajına dayalı "ilkel soyutlama" (Pirie ve Kieren, 1989, s.8) sürecini tamamlayarak imaja sahip olma (3) seviyesinde bir anlayışa ulaşmıştır.

4.1.2 Karede Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisinin Kurulmasında İzlenilen Yollar

Klinik mülakat serisinin ikinci oturumunda karenin alanıyla çevresi arasındaki türev ilişkisi ele alınmıştır. Tablo 4.5.'te katılımcıların bu oturum sürecinde yaptıkları eylemler sunulmaktadır. Buna göre katılımcılar, birinci aşamada karede kenar uzunluğu bağımsız değişkeniyle çalışmışlardır. Böylece karede türev ilişkisinin kurulamadığı bir imaj oluşturulmuştur. Araştırmacı, dairede çap bağımsız değişkenine göre çalışılması yönünde müdahalede bulunmuştur. Bu sayede dairede çap değişkenine göre türev ilişkisinin oluşturulamadığı bir imaj daha yapılandırılmıştır. Bu imajlar arası benzerlikler irdelenerek özellikleri fark etme seviyesine ulaşılmıştır. Böylece karede merkez ve merkeze bağlı bir değişken arayışı süreci başlamıştır. Bu noktada Ömür doğrudan standart değişken ile çalışmaya başlayıp türev ilişkisini kurarken Gaye ve Yavuz, ağırlık merkezinin köşeye uzaklığını bağımsız değişken olarak seçmiştir. Gaye ve Yavuz hatalı

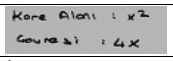
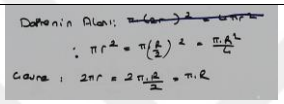
seçim sonrası araştırmacının kasıtlı müdahaleleri doğrultusunda standart değişkene göre türev ilişkisini kurmuştur. Sondan ikinci aşamada ise genel türev denkleminin pay kısmını sorgulayarak üçgensel halka yapısına ulaşılmış ve sözel olarak ifade edilmiştir. Son olarak değişim oranı cinsinden bu türev ilişkisi ifade edilmiştir.

Tablo 4.5. Karede Türev İlişkisini Kurarken Yapılan Eylemler

Eylem	Ömür	Gaye	Yavuz
Kenar uzunluğu bağımsız değişkenine göre türev ilişkisini kuramamak	+	+	+
Dairede çapa göre türev ilişkisini kuramamak	+	+	+
Daire imajları ile kare imajının karşılaştırılması ve merkez arayışı	+	+	+
Karede merkez arayışında bulunmak	+	+	+
Ağırlık merkezinin köşeye uzaklığı bağımsız değişkenine göre türev ilişkisini kuramamak	-	+	+
Standart değişkene göre türev ilişkisini kurmak	+	+	+
Genel türev denklemini sorgulamak ve halka yapısını sözel olarak ifade etmek	+	+	+
Değişim oranı cinsinden ifade etmek	+	+	+

Gaye isimli katılımcının katılımcı ile yapılan klinik mülakat serisinden bir kesit Tablo 4.6.'da sunulmuştur. Katılımcı 00:42'ye kadar karenin alan ve çevre formüllerini kenar uzunluğuna göre yazmıştır. Araştırmacı, bu noktada, türev ilişkisine odaklanmış kasıtlı (1) bir müdahalede bulunmuştur. Katılımcı bu müdahaleye istinaden mevcut türev ilişkisi anlayışına "yüksek bir bilinçle" geri dönerek bu anlayışa "eklemeler" (Martin, 2008, s.77) yaptığı için mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde, dış teşvik olmadan etkili (3) bir geri katlama yapmıştır. Katılımcı karede alan ve çevre formülü gibi ön bilgileri türev kavramıyla ilişkilendirdiği (Pirie ve Kieren, 1989) bu sayede zihinsel bir nesne (Pirie ve Kieren, 1994) oluşturduğu için söz konusu anlama seviyesi imaj oluşturma (2) olarak kodlanmıştır.

Tablo 4.6. Gaye'nin Karede Kenar Dairede Çapa Göre Çalışması

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
…		…				
00:35						
00:42	A	İlişki var mı?	1			
00:46	G	Kesin vardır. Şimdi türevle bağlantı kurayım. Türevin 2 katı gibi görünüyor. (Gülümseme)		1	3	2
00:58	A	Peki. Dairede biz ne yapmıştık? Yarıçapa göre mi bakmıştık? Çapa göre mi?	1			
01:03	G	Yarıçapa göre bakmıştık.		1	3	3
01:06	A	Tamam. Çapa göre deneyelim dairede.	1			
01:08	G	Dairede çapa göre.				2
…		….				
02:33	G	Çevre. 2πr idi. O zaman r gördüğüm yere yine $\frac{R}{2}$ yazacağım. $2\pi.\frac{R}{2}$ den πR olacak.		3	2	2
02:45	A	Bu arada bir türev ilişkisi var mı? (Alan ve Çevre formülleri gösterilerek)	1			
						
02:49	G	Bu arada... Türev alsam $\frac{\pi R}{2}$. Yani bunun yarısı mı hocam? (sesinin tonu çok düşük, emin değil)		1	2	2

Araştırmacı, 00:58'de dairedeki alan ve çevre ilişkisine odaklanmış kasıtlı (1) bir müdahalede bulunmuştur. Bu müdahaleye bağlı olarak katılımcı "*Yarıçapa göre bakmıştık.*" şeklinde cevap vermiştir. Bu cevap, imaja sahip olma seviyesinde (3) bir anlayışla gerçekleşmiştir. Dış teşvik olmadan yapılan etkili geri katlamanın (3) türü ise mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışmak (1) olarak değerlendirilmiştir.

Araştırmacı bu noktada (01:06) katılımcının dairede çapa göre türev ilişkisini kurmaya çalışması için yeni bir imaj oluşturmasına yönelik kasıtlı odaklanmış (1) bir müdahalede bulunmuştur. Bu müdahaleye bağlı olarak mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde gelişen geri katlama ile birlikte, katılımcı, yeni bir imaj oluşturma eylemine başlamıştır. Bu geri katlama ve imaj oluşturma faaliyeti, 02:33'te dış teşvik ile etkili (2) bir şekilde sonuçlanmıştır.

02:45'te araştırmacı türev ilişkisine odaklanmış kasıtlı (1) bir müdahalede bulunmuştur. Bu müdahale ile katılımcı, mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde bir geri katlama yaparak dairenin alan ve çevresi arasındaki türev ilişkisine ilişkin anlayışını geliştirip bu anlayışına çap değişkenine göre çalışma fikrini eklemiştir. Müdahale içerik olarak dış teşvik (işaret etmek) barındırdığından geri katlamanın çıktısı, dış teşvik ile etkili (2) olarak gözlenmiştir.

Kasıtlı öğretmen müdahaleleri aracılığıyla katılımcıların dairede çap bağımsız değişkenine göre çalıştıktan sonra bunu karede kenar uzunluğu bağımsız değişkenine göre çalışmak ile karşılaştırmaları sağlanmıştır. İmajlar arasındaki ayrım, kombinasyon ve bağlantıların yapıldığı anlama seviyesi özellikleri fark etme seviyesi (Pirie ve Kieren, 1989, s.8-9) olarak tanımlanmaktadır. Bu nedenle dairede çap ve karede kenar uzunluğu ile ilgili oluşturulan imajların karşılaştırılması ve buna bağlı olarak karede bir merkez arayışında bulunmak özellikleri fark etme seviyesi (4) olarak değerlendirilmiştir. Tablo 4.7.'de Gaye ile yapılan klinik mülakattan imajların karşılaştırılması ve merkez arayışı ile ilgili kesit sunulmaktadır.

Tablo 4.7. Gaye'nin Karede İmaj Karşılaştırmaları

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
03:00	A	Alan çevre türev ilişkisi olmuyor.	1			
03:02	G	Evet.				2
03:03	A	Burada da yarısı oldu. (Karenin kenar uzunluğuna göre kurulmaya çalışılan ilişki işaret edilerek)	6			
03:04	G	Evet.				4
03:05	A	Yani bir gariplik var.	6			
03:07	G	Hı hı!				4
03:10	A	Peki demek ki dairede çapa göre çalışmamak,	6			
03:16	G	Evet				4
03:17	A	… (dairede) yarıçapa göre çalışmak lazımmış. Karede o zaman?	6			
03:21	G	Karede de demek ki çevresinin.... (Mırıldanıyor) Burada çapa göre çalıştık... (İlişkiyi, zihninden kurmaya çalışıyor ancak emin değil ve yapamıyor.)		1	1	4
…		….				
04:25	A	Şimdi bu nedir? Çemberin? (Çemberin merkezi işaret ediliyor.)	1			
04:29	G	Merkezi. O zaman bunun da mı merkezine göre çalışacağız?		1	2	2

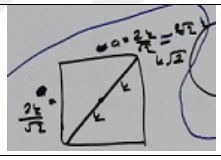
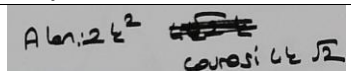
Araştırmacı, 03:00'da katılımcıya kasıtlı odaklanmış (1) müdahalede bulunarak katılımcının düşünme sürecini dairede ile ilgili iki (çap ve yarıçap) ve kare ile ilgili kenar uzunluğu imajlarına odaklamıştır. Katılımcı, verilen dış teşvikler ile birlikte (6) bu imajlar arasındaki ilişkileri ortaya çıkarma ve bu imajları karşılaştırma sürecine girdiği için özellikleri fark etme seviyesinde (4) çalışmaya başlamıştır. Böylece mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde geri katlama yapmış ancak bu geri katlamanın sonucu etkisiz (1) olmuştur.

04:25'e kadar bu karşılaştırmalar devam etmiştir. Bu noktada araştırmacı, kasıtlı ve odaklanmış (1) bir müdahale ile anlama sürecini çemberin merkezine yöneltmiştir. Bu müdahale dış teşvik içerdiği için katılımcı dış teşvik ile etkili (2) bir geri katlama

yapmıştır. Bu süreçte türev ilişkisine merkez kavramı "eklendiği" ve böylece anlayış "değişip geliştiği" (Martin, 2008, s.77) için yapılan geri katlama mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) olarak kodlanmıştır. Bu noktadan sonra Gaye (ve diğer katılımcılar da) karede merkez ve bu merkeze bağlı olarak değişken arayışı sürecine girmişlerdir.

Tablo 4.5.'te de gösterildiği üzere merkez arayışının sonucunda Ömür doğrudan standart değişkene göre ilişki kurmuştur. Ancak Gaye ve Yavuz ağırlık merkezinin köşelere uzaklığı bağımsız değişkenine göre bir deneme yapmışlardır. Tablo 4.8.'de Gaye isimli katılımcının bu denemesinden bir kesit sunulmaktadır.

Tablo 4.8. Gaye'nin Karede Ağırlık Merkezinin Köşeye Uzunluğuna Göre Çalışması

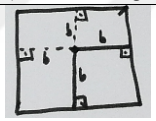
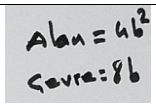
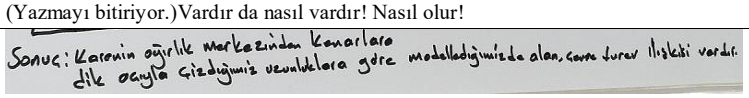
			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
04:33	A	Deneyelim bakalım. İkinci bir şekil çiz.	1			
04:43	G	Burası karenin merkezi olursa...				2
04:45	A	Hı hı!	6			
04:45	G	Ağırlık merkezi. Şöyle burası x burası x. (Kenar uzunluklarına x değişkenini atıyor.)		1	1	2
…		…				
						
07:29	A	Tamam. Arada türev ilişkisi var mı?	1			
07:33	G	E burayı yanlış yazmışım. Burayı düzelmem gerekiyor. (Yanlış yazılan ifadenin üstünü çiziyor.) Çevresi o zaman… (Kenar uzunluğunu göstererek) $k\sqrt{2}$ ise $4k\sqrt{2}$… Dört… Yine olmuyor.		1	3	2
						

Gaye isimli katılımcı, 04:33'te kasıtlı ve odaklanmış öğretmen müdahalesiyle (1) ağırlık merkezinin köşeye uzaklığına göre türev ilişkisi oluşturmaya yönelik bir imaj oluşturma (2) eylemine başlamıştır. Katılımcı, ilk denemesinde yine kenar uzunluğunu bağımsız değişken olarak seçtiği için etkisiz (1) geri katlama yapmıştır. Katılımcı, 04:45-07:29 zaman aralığında ağırlık merkezinin köşeye uzaklığı bağımsız değişkenine bağlı olarak alan ve çevre formüllerini oluşturmuştur. Bu noktada araştırmacı, kasıtlı ve odaklanmış bir müdahale (1) ile türev ilişkisine dikkati çekmiştir. Katılımcı 07:33'te mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışmaya başla türünde (1) bir geri katlama yapmış ve alan fonksiyonunun türevini hesaplamıştır. Sonra "... *Yine olmuyor"* demiştir.

Böylece dış teşvik olmadan etkili bir geri katlama (3) yapmıştır. Bu süreçte imaj oluşturma (2) seviyesinde faaliyet göstermiştir.

Karede merkeze bağlı değişken arayışının son noktası, standart değişkene göre çalışmak olmuştur. Böylece karede alan ve çevre arasındaki türev ilişkisi kurulmuştur. Bununla ilgili Yavuz adlı katılımcının ile yürütülen klinik mülakattan bir kesit Tablo 4.9.'da sunulmuştur.

Tablo 4.9. Yavuz'un Karede Standart Değişkene Göre Türev İlişkisini Kurması

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
24:22	A	Vermiyor. O zaman başka bir… Merkezin başka bir uzaklık… Yani başka, başka bir uzaklığını alacağız. Ağırlık merkezinin köşelere uzaklığını almıyormuşuz demek ki.	2			
24:35	Y	Başka bir şey, ne olabilir ki?				4
24:41	A	Bir tane daha kare çiz.	6			
…		…				
25:05	A	Nereye? Başka nereye uzaklıklarını… Uzaklığını alabiliriz?	6			
25:11	Y	Mesela şu kenara uzaklığını alabiliriz.		1	2	4
25:12	A	Kenara uzaklığını alabilir miyim?	2			
…		…				
25:58	Y	(Her bir uzaklığa *b* yazıyor.) *b* diyek. *b* diyek.		1	3	2
						
…		…				
26:20	A	Çevre?	1			
26:23	Y	("Çevre" yazıyor.) Çevre? E! Bu da… (Bir kenarı işaret ediyor.) 2… 8*b* olur.		1	3	2
						
26:38	A	Hı! Hı!				
26:40	Y	I! Şim… (Kısık sesle deyip duruyor.)	4			4
26:43	A	Ne oldu?				
26:44	Y	I! Şimdi tam oldu.		1	3	4
…		…				
27:17	A	(Araştırmacı ilk denemelerin olduğu kısmı mavi kalemle ayırıyor.) Bunun açıklamasını yapalım. Bu hangi noktaydı? Bu noktanın özel adı neydi? (Ağırlık merkezi işaret ediliyor.)	1			
27:27	Y	Ağırlık merkeziydi.		1	3	2
…		…				
27:45	A	Yaz o zaman. Karede de. Sonuç de.	1			
27:50	Y	Sonuç. Şoktayım da…				4
…		…				
29:45	Y	(Yazmayı bitiriyor.)Vardır da nasıl vardır! Nasıl olur!		1	2	4
						

Yavuz ikinci oturumda 24:22'ye kadar karede kenar uzunluğu, dairede çap gibi değişkenler ile çalışarak türev ilişkisiyle ilgili imajlar oluşturmuştur. Araştırmacı bu

noktada kasıtlı ve odaklanmamış bir müdahalede (2) bulunmuştur. Böylece katılımcı mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde bir geri katlama yapmıştır. Bu geri katlama sürecinde dış teşvikler kullanılmış (6) ve geri katlama 25:11'de etkili bir şekilde (2) sonuçlanmıştır. Bu süreç boyunca katılımcı özellikleri fark etme seviyesinde bir anlayış geliştirmiştir.

25:12'de araştırmacı, teyit amaçlı, kasıtlı ve odaklanmamış bir müdahalede (2) bulunmuştur. Katılımcı 25:58'e kadar dış teşvike ihtiyaç duymadan mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde bir geri katlama yapmıştır. Bu geri katlamanın çıktısı, dış teşvik olmadan etkili (3) türündedir. Bu süreç boyunca katılımcı imaj oluşturma seviyesinde (2) çalışmıştır.

Katılımcı 26:23'e kadar alan ve çevre fonksiyonlarını oluşturmuştur. Bunun için araştırmacı kasıtlı ve odaklanmış (1) müdahalelerde bulunmuştur. Mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türündeki geri katlama, dış teşvik olmadan etkili (3) bir şekilde gerçekleştirilmiştir. Katılımcı, tüm bu süreçte, imaj oluşturma (2) seviyesinde çalışmıştır.

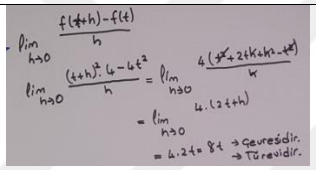
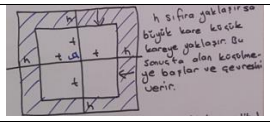
Katılımcı alan ve çevre formüllerini oluşturduktan sonra 26:40'da kendi kendisine odaklanmış doğal olarak da kasıtlı (4) bir müdahalede bulunarak türev ilişkisini fark etmiştir. Bu süreçte katılımcı mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde ve dış teşvik olmadan etkili (3) bir geri katlama yapmıştır. Böylece katılımcı özellikleri fark etme seviyesinde (4) bir anlayış geliştirmiştir.

Araştırmacı 27:17'de "*...Bu hangi noktaydı?*" sorusuyla ağırlık merkezini sorgulatmak için kasıtlı odaklanmış (1) bir müdahalede bulunmuştur. Katılımcı 27:27'de "*Ağırlık merkeziydi*" diyerek mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma türünde (1) bir geri katlama yapmıştır. Katılımcı dış teşvik olmadan etkili bir geri katlama (3) yaparak imaj oluşturma seviyesinde çalışmıştır.

Araştırmacı, 27:45'te katılımcının bulduğu ilişkiyi sözel olarak ifade etmesini istemiştir. Böylece katılımcı mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma türünde (1) bir geri katlama yapmıştır. 29:45'e kadar devam eden bu süreçte bir dizi dış teşvik verilmiş ve etkili bir geri katlama (2) yapıldığı gözlenmiştir. Böylece katılımcı özellikleri fark etme seviyesinde bir anlayış geliştirmiştir.

Katılımcılar, standart değişkene göre türev ilişkisini kurduktan sonra genel türev denklemini sorgulamışlardır. Böylece halka yapısının limit işlemi altındaki değişimini sözel olarak ifade etmişlerdir. Bu aşama tüm katılımcılarda ortak olarak gözlenmiştir. Tablo 4.10.'da Ömür isimli katılımcının bu sürecinden bir kesit sunulmuştur.

Tablo 4.10. Ömür'ün Karede Halka Yapısını Açıklaması

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
09:46	A	Limitin genel denklemiyle yapalım bunu. Bunu bir fonksiyon olarak belirtebilir misin? Alan fonksiyonu…	1			
09:51	Ö	Belirtebilirim. Söyleyebilirim.				2
…		…				
10:01	Ö	$4t^2$ diyebilirim.		1	2	2
…		…				
10:54	A	Ne olur onun sonucu? Öngörün var mı?	1			
10:58	Ö	Ya, türev almanın tanımı olduğu için işte hemen türevi aldığımda cevabı bulabilirim $8t$ derim.		1	3	2
…		…				
						
…		…				
12:27	A	Tamam! Güzel. Şu ne anlam ifade ediyor? $f(t+h)$'tan $f(t)$'yi çıkartmak.	1			
…		…				
14:06	A	Yani bu iki alanın neyiydi? (Genel türev denkleminin pay kısmı yani alanlar farkı anlamına gelen ifade işaret ediliyor.)	6			
14:09	Ö	$(t+h)$'ın alanı. Ama şu şekilde. Bu şekildedir. (Karesel halka bölgeyi tarıyor.)		1	2	2
14:27	A	Devam et devam et devam et. Bir şey olmaz. Kalem ucuz. Beyin bedava. (Gülüşme) Tamam. Devamını getir. Açıklamanı yap. (Tamamını taraması için teşvik ediliyor.)	1			
14:48	Ö	Açıklaması… giderek.				4
14:51	A	Giderek dediğin ne nereye doğru gidiyor?	6			
14:54	Ö	h, t'ye doğru giderken yani çıkarken yani sıfıra doğru giderken türev şeyine göre tanımladığımızda giderek yaklaşıyor. Ama...				4
15:05	A	Hangisi hangisine yaklaşır? Okla göster.	6			
15:07	Ö	Büyük kare küçük kareye doğru yaklaşmaya başlar.				4
…		…				
15:36	A	Tam sıfır olduğu zaman ne olur? Alan neye dönüşür? Bu taralı alan neye dönüşecek?	6			
15:40	Ö	Çevreye dönüşmeye başlayacak.		1	2	4
…		…				
15:45	A	Hı! Hı! O zaman bir açıklamasını yaz şuraya. De ki işte tam yaklaştığı zaman h sıfıra gittiği zaman yaklaşık falan fistan.	1			
15:52	Ö	h sıfıra yaklaşırsa büyük kare küçük kareye yaklaşır.				4
16:20	A	Tamam!				
16:21	Ö	Sonuçta alan küçülmeye başlar ve çevresini verir.		1	3	4
						

Ömür isimli katılımcı, 09:46'ya standart değişken seçimiyle birlikte karede alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini kurmuştur. Bu noktada "*Limitin genel denklemiyle yapalım*

bunu. Bunu bir fonksiyon olarak belirtebilir misin? Alan fonksiyonu…" ifadesiyle alan fonksiyonuna odaklanmış kasıtlı bir müdahalede bulunmuştur. Bunun üzerine katılımcı, mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde bir geri katlama yapmış ve aldığı dış teşvikler aracılığıyla 10:01'de alan fonksiyonunu oluşturmuştur. İmaj oluşturma seviyesinde (2) çalıştıktan sonra dış teşvikle etkili bir geri katlama yapmıştır.

Katılımcı, 10:01'dan 10:54'ya kadar olan sürede türevin genel denklemini yazmıştır. Bu sürecin sonunda araştırmacı "*Ne olur bunun sonucu? Öngörün var mı?*" sorusuyla kasıtlı ve odaklanmış (1) bir müdahalede bulunmuştur. 10:58'de katılımcı mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma türünde (1) dış teşvik olmadan etkili (3) bir geri katlama yapmıştır. Bu süre zarfında imaj oluşturma seviyesinde (2) çalışmıştır.

Katılımcı, 10:58 ile 12:27 arasında genel türev denklemini açmıştır ve karşılığını yazmıştır. Bu sürenin sonunda araştırmacı, katılımcının genel türev denkleminin payındaki $f(t+h)-f(t)$ ifadesini sorgulaması için bunun ne anlama geldiğini soran kasıtlı ve odaklanmış bir müdahalede bulunmuştur. Katılımcı erilen dış teşvikler (6) ile 14:09'da karesel bir halka çizmiş ve taramıştır. Bu süreçte mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışmış (1) ve sürecin sonunda dış teşvikle etkili bir geri katlama (2) yapmıştır. Çizilen şekiller ve yapılan hesaplamalar imaj oluşturma seviyesinde (2) gelişmiştir.

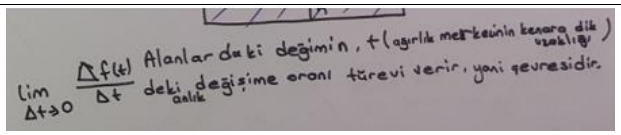
Araştırmacı 14:27'de katılımcının sözel açıklama yapması için kasıtlı ve odaklanmış (1) müdahalede bulunmuştur. Araştırmacı katılımcının türev ilişkisinin geometrik yorumunu yapabilmesi için 15:40'a kadar bir dizi dış teşvik (6) kullanmıştır. Bu dış teşvikler ile örülü diyalog sürecinin bir kesiti Tablo 4.10.'da sunulmuştur. Bu sürecin sonunda katılımcı mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışmış (1) ve dış teşvikle etkili bir geri katlama (2) yaparak özellikleri fark etme seviyesine ulaşmıştır.

Araştırmacı, katılımcının sözel olarak yapılandırdığı bilgiyi yazılı olarak ifade etmesi için 15:45'te kasıtlı ve odaklanmış bir müdahalede (1) bulunmuştur. Katılımcı 16:21'e kadar türev ilişkisini yazılı olarak yazmıştır. Tablo 4.10.'daki görselde katılımcının çalışma kâğıdının ilgili bölümünden bir kesit sunulmuştur. Katılımcı bu süreç içerisinde mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışmış (1) ve sonunda dış teşvik olmadan

etkili (3) bir geri katlama yapmıştır. Böylece özellikleri fark etme seviyesinde bir anlayış geliştirmiştir.

Karede türev ilişkisini anlamlandırmanın son aşamasında katılımcılar, türev ilişkisini değişim oranı cinsinden ifade etmiştir. Tüm katılımcıların gerçekleştirdiği bu eylem, araştırmacının kasıtlı ve odaklanmış müdahaleleriyle ortaya çıkmıştır. Tablo 4.11.'de Ömür isimli katılımcı ile yapılan mülakattan bir kesit bu eylemi örneklemek için sunulmuştur.

Tablo 4.11. Ömür'ün Karedeki Türev İlişkisini Değişim Oranı Cinsinden İfade Etmesi

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
16:43	A	Tamam! Değişim oranı cinsinden ifade et.	1			
16:49	Ö	Değişim oranı.				4
…		…				
18:06	Ö	O alanlar arasındaki… ($\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t}$ yazıp duruyor.)				4
18:08	A	Fark.	6			
18:09	Ö	Fark! Farkıyla alanlardaki değişimin				4
18:18	A	Hı! Hı!.				
18:23	Ö	Yarıçapların, buraya yazayım mı?		1	2	4
18:24	A	O yarıçap değil. Burası yarıçap değil. Bu nokta karenin hangi noktasıdır? (Ağırlık merkezi işaret ediliyor.)	1			
…		…				
19:09	A	Ağırlık merkezinin… Bu t dediğimiz şey aslında nedir? Burası ağırlık merkezi. Şurası G.	1			
19:17	Ö	Evet.				2
19:18	A	Ağırlık merkezinin nereye uzaklığıdır t?	6			
19:26	Ö	Ağırlık merkezinin… Diğer kenar uzunluklarına kadar.				2
19:30	A	Kenara dik uzaklığıdır.	6			
19:33	Ö	Evet.		1	2	2
19:34	A	Tamam! Aladaki değişimin... Tamam! Devam et.	1			
19:39	Ö	Alanlardaki değişimin ağırlık merkezi...				4
19:42	A	(Katılımcı yazıyor.) t! t yaz. Parantez aç. Baya bir boşluk bırak, şöyle, şuraya kadar. Tamam! Şurada parantezi kapat. (Katılımcı yazıyor. ve araştırmacı katılımcının yazdıklarını söylüyor.) "…deki değişime oranı. t( )'deki anlık değişime oranı." (Katılımcı yazıyor.) Anlık yaz oraya. Anlık yazalım.	6			
20:04	Ö	Anlık değişime oranı, bize türevini veriyor.				4
20:12	A	Hı! Hı!				
20:16	Ö	Türevini verir. Yani çevresini verir.		1	2	4
…		…				
						

Tablo 4.11.'de görüldüğü üzere araştırmacı 16:43'te katılımcının bulduğu türev ilişkisini değişim oranı cinsinden ifade etmesi için kasıtlı odaklanmış müdahalede (1) bulunmuştur. 18:23'e kadar mülakat akışında dış teşvikler (6) kullanılmıştır. Bu süre içerisinde katılımcı, mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede (1) çalışmıştır. Sonunda dış

teşvikle etkili (2) bir geri katlama yapmıştır. Katılımcı geri katlama sürecinde özellikleri fark etme seviyesinde (4) çalışmıştır.

Ömür diğer katılımcılardan farklı olarak doğrudan standart değişken ile çalışmaya başladığı için standart değişkeni tanımlayamamıştır. Bu nedenle 18:24 ile 19:33 arasında katılımcının standart değişkeni tanımlaması için araştırmacı tarafından iki tane kasıtlı ve odaklanmış öğretmen müdahalesi (1) kullanmıştır. Katılımcı 19:33'te dış teşvikler yardımıyla mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (3) türünde dış teşvikle etkili (2) bir geri katlama yapmıştır. Bu süreçte imaj oluşturma seviyesinde çalışılmıştır.

Araştırmacı, katılımcının 18:06'da söyleyip sonrasını getiremediği ifadeyi 19:34'te kullanarak, katılımcının türev ilişkisini değişim oranı cinsinden ifade etmesi için kasıtlı ve odaklanmış (1) müdahalede bulunmuştur. Böylece katılımcı yazma eylemine başlamak suretiyle mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma türünde (1) geri katlama yapmıştır. Katılımcı, verilen dış teşvik ile birlikte 20:16'da katılımcı geri katlama sürecini dış teşvikle etkili bir şekilde (2) tamamlamıştır ve yazma işlemini tamamlamıştır. Tablo 4.11.'de katılımcının çalışma kâğıdına yazdığı sonuç kesit halinde sunulmuştur. Bu süreç içerisinde özellikleri fark etme seviyesinde (4) bir anlayış geliştirmiştir.

4.1.3. Eşkenar Üçgende Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisinin Kurulmasında İzlenilen Yollar

Klinik mülakat serisinin üçüncü oturumunda üçgenin alanıyla çevresi arasındaki türev ilişkisi ele alınmıştır. Tablo 4.12.'de katılımcıların bu oturum sürecinde yaptıkları eylemler sunulmuştur.

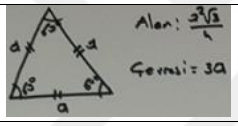
Tablo 4.12. Eşkenar Üçgende Türev İlişkisini Kurarken Yapılan Eylemler

Eylem	Ömür	Gaye	Yavuz
Kenar uzunluğu bağımsız değişkenine göre türev ilişkisini kuramamak	+	+	+
Kenar uzunluğuna 2t diyerek çalışmak	+	-	-
Standart değişkene göre türev ilişkisini kurmak	+	+	+
Genel türev denklemini sorgulamak ve halka yapısını sözel olarak ifade etmek	+	+	+
Değişim oranı cinsinden ifade ettirildi.	+	+	+

Buna göre katılımcıların tamamı önce kenar uzunluğu bağımsız değişkenine göre türev ilişkisini kurmaya çalışmıştır. Böylece türev ilişkisinin kurulamadığı bir imaj oluşturulmuştur. Diğer katılımcılardan farklı olarak Ömür, eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğuna $2t$ bağımsız değişkenini atayarak bir imaj daha oluşturmuştur. Sonra tüm

katılımcılar doğrudan standart değişkene göre çalışmaya başlamıştır. Standart değişkene göre türev ilişkisi kurulduktan sonra genel türev denklemi sorgulanmış ve üçgensel halka bölge açıklaması sözel olarak yapılmıştır. Son olarak üçgendeki türev ilişkisi değişim oranı cinsinden ifade edilmiştir. Yavuz isimli katılımcının üçgende kenar bağımsız değişkenine göre türev ilişkisini kurmaya çalışmasından bir kesit Tablo 4.13.'te sunulmuştur.

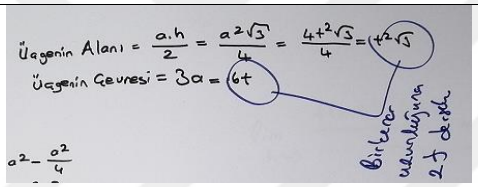
Tablo 4.13. Yavuz'un Eşkenar Üçgende Kenar Uzunluğuna Göre Çalışması

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
01:11	A	…Şimdi eşkenarı deneyeceğiz. Eşkenar üçgen.	1			
01:16	Y	Eşkenar üçgen.				2
01:17	A	Evet.				
01:18	Y	Bir eşkenar üçgen çizelim.				1
…		…				
						
03:04	A	Hı! Hı!				
03:06	Y	$3a$'dır. (Sessizlik) Arasında nasıl bir ilişki kuracağız. Alanla çevre arasında.				2
03:14	A	Türevini aldığımızda çevreyi veriyor mu?	6			
03:16	Y	Vermiyor.		1	2	2

Tablo 4.13.'te görüldüğü üzere araştırmacı, 01:11'de kasıtlı ve odaklanmış (1) bir müdahalede bulunmuştur. Bunun üzerine katılımcı imaj oluşturma (2) ön bilgi seviyelerinde çalışmıştır. Bu süreçte bir dizi dış teşvik (6) kullanılmıştır. Yavuz, mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma türünde (1) dış teşvikle etkili bir geri katlama yapmıştır. Benzer süreç diğer katılımcılarda da olmuştur. Diğer katılımcılar doğrudan standart değişkene göre çalışmaya başlamışken Ömür kenar uzunluğuna $2t$ bağımsız değişkenini atayarak bir denemede bulunmuştur. Bu çalışmadan bir kesit Tablo 4.14.'te sunulmuştur.

Ömür eşkenar üçgende kenar uzunluğu bağımsız değişkeniyle çalıştıktan sonra araştırmacı 03:54'te kasıtlı ve odaklanmış bir müdahalede (1) bulunmuştur. Araştırmacının kare çalışma kâğıdına geri dönülmesi yönündeki dış teşviki (6) ile birlikte katılımcı kare ile ilgili çalışma kâğıdını açmıştır. Böylece katılımcı, mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde bir geri katlama yapmıştır. Bu süreçte özellikleri fark etme seviyesinde (4) bir anlayış geliştirmiştir.

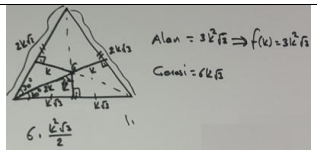
Tablo 4.14. Ömür'ün Eşkenar Üçgenin Kenar Uzunluğuna 2t Ataması

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
03:54	A	… Karede de olmuyordu ilk etapta.	1			
…		…				
04:00	A	Nasıl bir modelleme yapmıştık? Kareye geri dön.	6			
04:07	Ö	Şu t şeklinde almıştık $\frac{a}{2}$ yi. (Karesel halka modeli işaret ediliyor.)				4
04:12	A	Yani, buraya a dememiştik de şuraya t demiştik.	6			
04:15	Ö	Evet.		1	2	4
…		…				
04:57	Ö	Şu $\frac{a}{2}$'ye göre mi işlemi yaparsak. (Kenar uzunluğunun yarısı işaret ediliyor.)	4			2
05:02	A	Üçgende nasıl yapacağız?	6			
05:04	Ö	Hım! a yerine $2a$ deyip, bunlara a diyebiliriz.		1	2	2
05:08	A	Tamam, de.	1			
05:10	Ö	Eğer dersek $h^2 = 2a^2$'den dersek.				2
…		…				
06:01	Ö	Bir kenar uzunluğuna $2a$ dedik.				2
06:04	A	$2t$ dedik.	6			
06:05	Ö	$2t$ dedik, evet.				2
						
06:08	A	Yine sağlar mı bu sefer?				
06:10	Ö	$2\sqrt{3}t$ hayır, sağlamaz.		1	2	2

Tablo 4.14'te görüldüğü üzere katılımcı 04:47'de kendi kendine odaklanmış bir müdahalede bulunmuştur. Verilen dış teşvik (6) ile birlikte mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde bir geri katlama yapmıştır. Çalıştığı problem durumuna göre dış teşvikle etkili (2) bir geri katlama yapmıştır. Bu süreç boyunca imaj oluşturma (2) seviyesinde çalışmıştır.

05:08'de katılımcı "*Tamam, de.*" diyerek kasıtlı ve odaklanmış bir müdahalede bulunmuştur. Ömür, bu müdahale neticesinde, eşkenar üçgenin kenar uzunluğuna $2t$ demek suretiyle imaj oluşturma seviyesinde (2) çalışarak bu bağımsız değişken ile eşkenar üçgenin alan ve çevre formüllerini oluşturmuştur. Dış teşviklerle (6) mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türündeki geri katlama 06:10'da dış teşvikle etkili (2) bir şekilde sonuçlanmıştır. Bu aşamadan sonra Ömür de diğer katılımcılar gibi standart değişkene göre çalışmaya başlamıştır. Yavuz ile yapılan klinik mülakattan eşkenar üçgende türev ilişkisinin standart değişken ile kurulmasından bir kesit Tablo 4.15.'te sunulmaktadır.

Tablo 4.15. Yavuz'un Eşkenar Üçgende Türev İlişkisini Kurması

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
03:17	A	Vermiyor. Karede de vermiyordu.	1			
03:19	Y	Biz… Karede de vermiyordu. Biz şey yapıyorduk. Ağırlık merkezinden kenarlara dik…				3
03:26	A	İndiriyorduk.	6			
03:27	Y	He! Dik… He! Dik indiriyorduk. Dik uzaklık… Şurada yapabilir miyiz? (İlk çizdiği şekil üzerinde çalışmak istiyor.)		1	2	4
03:33	A	Yeni bir şekil çiz.	1			
…		…				
03:50	Y	Şuradan… Ağırlık merkezi, zaten şöyle çizdiğimizde… Nokta, nokta… Nokta, nokta… Hepsinin kesişmiş olduğu nokta ağırlık merkezi. Yani şurası G dersek… I! Dik, dik midir? O var. Dik midir? (Eşkenar üçgenin köşelerinden başlayıp ağır merkezinden geçerek karşı köşede sonlanan doğru parçalarının kenar ile dik kesişip kesişmediğini sorguluyor. Söz konusu doğru parçaları, kenarortaydır. Eşkenar üçgende de kenarortay aynı zamanda dikme ve açıortaydır.)				1
…		…				
05:19	Y	Bu şeydir. Buna… I! Ağırlık merkezinin kenar uzunluğuna biz k dersek.				2
05:24	A	Tamam. O k diyeceğin yeri kalın çiz. Nokta, nokta olmasın. Çiz.	6			
05:28	Y	Şuraya (çiziyor) k dersek…				2
…		…				
07:11	A	Hı! Hı! Çevresi ne olur?	6			
07:18	Y	Çevresi… I! $6k\sqrt{3}$ olur.				2
…		…				
07:38	A	Alanı nasıl hesaplayacağız?	6			
07:40	Y	Alanı nasıl hesaplayacağız?				2
07:41	A	Evet.				
07:42	Y	Alanı formülden de hesaplayabiliriz.				2
…		…				
08:05	A	Alan bulacağız değil mi? Hesapla.	6			
08:06	Y	(Yazmaya başlıyor.) Alan… Şuraya yazayım. Alan… Buranın alanı $k^2\sqrt{\ }$ … I! $\frac{3}{2}$ dir. Hani, $k^2\sqrt{\frac{3}{2}}$'dir. Tamamı da 6 tane…				2
…		…				
						
08:36	A	Hı! Hı!				
08:37	Y	Şimdi bunun… I! Karesini… Bunun türevini aldığımızda… I! Bize çevresini verir.		1	2	2

Yavuz eşkenar üçgende kenar uzunluğuna göre çalıştıktan sonra "*Vermiyor*" diyerek türev ilişkisinin sağlanmadığını ifade etmiştir (Tablo 4.13.'ün son satırı). Araştırmacı, 03:17'de katılımcının söylediğini tekrar ederek "*Vermiyor. Karede de vermiyordu*" demek suretiyle kare çalışmasına odaklanmış kasıtlı bir müdahalede (1) bulunmuştur. Katılımcı bu süreçte, mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde bir geri katlama yapmıştır. Verilen dış teşvik (6) ile birlikte etkili (2) bir geri katlama yapmıştır. Çalışılan anlama seviyeleri, önce imaja sahip olma (3) sonra özellikleri fark etme (4) seviyeleri olmuştur.

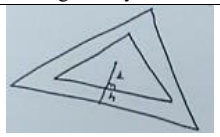
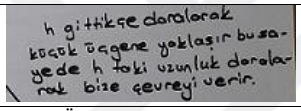
Yavuz 03:27'de ilk şekil üzerinde çalışmak isterken araştırmacı 03:33'te yeni bir şekil çizmesi için kasıtlı ve odaklanmış bir müdahalede (1) bulunmuştur. Bu müdahale ile başlayan geri katlama süreci, 08:37'ye kadar devam etmiştir. Yavuz bu süreçte, dış teşvikleri de kullanarak (6) standart değişkene göre eşkenar üçgenin alan ve çevre fonksiyonlarını oluşturmuştur. Böylece mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde dış teşvik ile etkili bir geri katlama yapmıştır. Geri katlama sürecinin bir kısmı ön bilgi (1) bir kısmı ise imaj oluşturma seviyesinde (2) gerçekleşmiştir.

Klinik mülakat serisinin üçüncü oturumunda katılımcılar önce eşkenar üçgende alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini kuran modellemeyi yapmıştır. Sonra, kasıtlı ve odaklanmış öğretmen müdahalesiyle, bu ilişkiyi açıklamaya başlamıştır. Tablo 4.16.'da Ömür'ün genel türev denklemini sorguladıktan sonra üçgensel halka bölge çizmesi ve türev ilişkisinin geometrik yorumunu yapmasından bir kesit sunulmuştur.

Tablo 4.16.'da da görüldüğü üzere araştırmacı 13:36'da katılımcıya "*Şekil çiz*" diyerek kasıtlı ve odaklanmış bir müdahalede bulunmuştur. Katılımcı bu süreçte dış teşvike ihtiyaç duyduğu için araştırmacı 13:44'te genel türev denkleminin pay kısmındaki $f(k+h)-f(k)$ ifadesini işaret etmiştir. Katılımcı, bu ve benzeri dış teşvikler (6) aracılığıyla mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde geri katlama yapmıştır. Böylece dış teşvikle etkili (2) bir geri katlama yapmıştır. Geri katlama sırasıyla imaj oluşturma seviyesi (2) ve özellikleri fark etme (4) seviyelerinde gerçeklemiştir.

Katılımcının yapmış olduğu açıklamanın matematiksel açıdan daha sağlam temellere oturması için 16:23'te kasıtlı ve odaklanmış (1) bir müdahalede bulunulmuştur. Verilen iki dış teşvik ile birlikte etkili (2) bir geri katlama gerçekleşmiştir. Mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türündeki bu geri katlama ile limit durumunda $h \to 0$ ifadesinin halka bölgeye yansıması tartışılmıştır. Yapılan tartışma özellikleri fark etme (4) seviyesinde bir anlayış ile gerçekleşmiştir. Araştırmacı, katılımcının gerekçesini öğrenmek için 16:47'de kasıtlı ve odaklanmamış (2) bir müdahalede bulunmuştur. Bu müdahaleye bağlı olarak gelişen mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türündeki geri katlama 17:06'da verilen dış teşvik ile birlikte (6) etkili (2) olmuştur. Bu süreç boyunca özellikleri fark etme (4) seviyesinde çalışılmıştır.

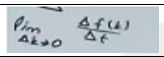
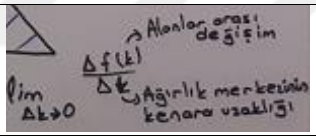
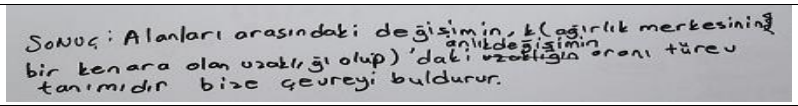
Tablo 4.16. Ömür'ün Eşkenar Üçgende Halka Yapısını Açıklaması

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
13:36	A	Şekil çiz.	1			
13:42	Ö	Yine mi üçgen?				2
13:42	A	Evet.				
13:43	Ö	İç, içe?				2
13:44	A	Yani şu ne anlama geliyor, şu ne anlama geliyor? Karede yapmıştık ya. (Araştırmacı, gene türev denklemindeki $f(k+h)$ ve $f(k)$ ifadelerinin üstünü mavi kalem ile işaretliyor.)	6			
14:16	Ö	h'ı doğru mu yazdım?				2
						
14:17	A	Hı! Hı!	6			
14:20	Ö	h gittikçe daralarak... (Üçgensel halka bölgeyi tarıyor.)				4
…		…				
15:52	A	Tamam! Uygun bir şekilde yaz, ifade et.	6			
16:00	Ö	h... (Katılımcı yazıyor.)		1	2	4
						
16:23	A	Şimdi Ömür. Şu önceki şeyi bir açsana. (Bir önceki çalışma kastediliyor.)	1			
16:27	Ö	Tamam.				4
16:28	A	Çünkü açıklama çok sağlıklı olmadı. h sıfıra yaklaşır, bu sonuçta alan küçülmeye başlar ve ne yapar?	6			
16:38	Ö	Çevresini verir.				4
16:40	A	Çevreyi verir. Aslında çevreyi verir mi yoksa alan çevreye mi dönüşür?	6			
16:44	Ö	Alan çevreye dönüşür.		1	2	4
16:47	A	Niye?	2			
16:51	Ö	Yani gittikçe küçülerek. Yani gittikçe küçülüp çevreyi sağlar. Yani taralı alan gittikçe kapanır.				4
17:00	A	Hı! Hı!				
17:02	Ö	Sadece uzunluk kalır.				4
17:04	A	Alan uzunluğa dönüşmüş oluyor.				
17:05	Ö	Evet.				4
17:06	A	Sıfır kalınlığını düşürttüğün zaman alanı olmaktan çıkar.	6			
17:10	Ö	Evet. Uzunluğa dönüşür.		1	2	4

Eşkenar üçgende alan ve çevre arasındaki türev ilişkisi kurulurken son aşama bu ilişkiyi değişim oranı cinsinden ifade etmek olmuştur. Bu aşama, kasıtlı ve odaklanmış öğretmen müdahalesiyle gelişmiştir. Süreklilik arz etmesi için Ömür isimli katılımcının çalışmasından konuyla ilgili kesit Tablo 4.17.'de sunulmuştur.

17:11'de araştırmacı kasıtlı ve odaklanmış bir müdahalede (1) bulunmuştur. 17:22'de katılımcı etkisiz bir geri katlama (1) yapmıştır. Mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türündeki bu geri katlama sürecinde imaj oluşturma seviyesinde bir anlayış izlenmiştir.

Tablo 4.17. Ömür'ün Üçgendeki Türev İlişkisini Değişim Oranı Cinsinden İfade Etmesi

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
17:11	A	… Tamam, güzel. Bunu Δt cinsinden, değişim oranı cinsinden yazalım.	1			
17:22	Ö	$\Delta t, \Delta f$ eşittir....(Δt –yazıp duruyor.)		1	1	2
17:25	A	Karede nasıl yapmıştık? t bitti artık t ile çalışmıyoruz.	1			
17:32	Ö	k ile çalışıyoruz. Δt sıfıra gidiyor. Δk sıfıra gider. (geri dönüp yanlış yazdığı ifadeyi düzeltmeye çalışıyor.) Limit Δk sıfıra giderken...				2
17:50	A	Sil, sil tekrardan yazalım. (Araştırmacı, yanlış yazılan ifadenin üstünü mavi kalemle çiziyor.)	6			
17:54	Ö	Limit Δk sıfıra giderken, $\Delta f(k)$ bölü Δt'ye göre olması lazım. (Katılımcının yazdığı ifade: $\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta f(k)}{\Delta t}$ şeklinde yine hatalı.)				
		 				
18:08	A	Δk.	6			
18:10	Ö	Δk, pardon. Olması lazım.		1	2	2
…		…				
18:28	A	Bu neyin değişimi? (Anlık değişim oranı ifadesinin payda kısmı işaret ediliyor.)	1			
…		…				
18:48	Ö	Ağırlık merkezinin				4
18:52	A	Kenara.	6			
18:54	Ö	Uzaklığıdır.		1	2	4
19:00	A	Güzel, tamam. Şimdi sözel olarak ifade edelim. (Araştırmacı, işaret ederek katılımcının sayfayı geri çevirip kare çalışmasına dönmesini istiyor.)	1			
						
19:06	Ö	Geri mi katlayayım?				4
19:07	A	Karede bir sözel ifade vardı ya, şuna benzer bir sözel ifade yazacağız. (Karedeki yazılı ifade işaret ediliyor.)	6			
…		…				
20:25	Ö	Uzaklığın oranıdır. Oranı türevi, oranı türev tanımıdır. Bize çevreyi buldurur.				4
21:00	A	Okuyalım bakalım, düzgün oldu mu? Alanları arasında ki değişimin k'da ki uzaklığın oranı, k'daki uzaklığın mı oranı yoksa bu k'da ki nedir?	6			
21:21	Ö	Değişimin. ("Uzaklığın" ifadesinin üstünü çizip "anlık değişimin" ifadesini ekliyor.)				4
21:22	A	Değişimin oranı mı? k'da ki değişimin, anlık değişimin.	6			
21:26	Ö	Evet. Değişimin.				4
21:31	A	Anlık yazacağız oraya.				
21:33	Ö	Anlık değişimin.		1	2	4
						

Araştırmacı 17:25'te karedeki anlayışa odaklanmış kasıtlı bir müdahalede (1) bulunmuştur. $\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta f(k)}{\Delta t}$ ifadesinin payda kısmındaki hata verilen dış teşvik (6) ile düzeltilmiştir. Mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türündeki bu geri katlama ile imaj oluşturma (2) seviyesinde çalışılmıştır. Dış teşvik ile etkili (2) bir geri katlama yapılmıştır.

18:10-18:28 arasında anlık değişim oranı ifadesinin pay kısmı sorgulanmıştır. 18:28'de kasıtlı ve odaklanmış (1) müdahale ile bu ifadenin payda kısmındaki Δk ifadesi sorgulanmaya başlanmıştır. Katılımcıyı yazarken konuşmaya teşvik etmek için araştırmacı katılımcının yazdıklarından bir kısmını yazıyla eşzamanlı olacak şekilde seslendirmiş (18:52) ve katılımcı geri kalanını okumuştur. Böylece dış teşvik (6) kullanılmıştır. Katılımcı, mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde geri katlama yapmıştır. Dış teşvik ile etkili (2) olarak sonuçlanan bu geri katlama süreci boyunca özellikleri fark etme (4) seviyesinde çalışılmıştır.

19:00'da katılımcı karede yazılan sonuca benzer bir sonuç oluşturulması için katılımcıya kasıtlı odaklanmış (1) bir müdahalede bulunmuştur. Kullanılan bir dizi dış teşvik (6) ile birlikte etkili (2) bir geri katlama yapılmıştır. Katılımcı, mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde olan bu geri katlama süreci boyunca, özellikleri fark etme (4) seviyesinde bir anlayış geliştirmiştir.

4.1.4. Düzgün n-gen'de Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisinin Kurulmasında İzlenilen Yollar

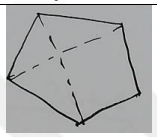
Klinik mülakat serisinin dördüncü oturumunda düzgün n-gen'in alanıyla çevresi arasındaki türev ilişkisi ele alınmıştır. Tablo 4.18.'de katılımcıların bu oturum sürecinde yaptıkları eylemler sunulmuştur.

Tablo 4.18. Düzgün Çokgende Türev İlişkisini Kurarken Yapılan Eylemler

Eylem	Ömür	Gaye	Yavuz
Köşegene göre çalışmak ve köşegenlerin merkezde kesişmeyebileceğini fark etmek	-	+	+
Kenar uzunluğunun yarısına göre türev ilişkisini kuramamak	-	-	+
Standart değişkene göre türev ilişkisini kurmak	+	+	+
Genel türev denklemini sorgulamak ve halka yapısını sözel olarak ifade etmek	+	+	+
Değişim oranı cinsinden ifade etmek	+	+	+

Tablo 4.18.'den de anlaşılacağı üzere Ömür doğrudan standart değişkene göre alan ve çevre fonksiyonlarını oluşturmaya başlamış ve türev ilişkisini kurmuştur. Yavuz ve Gaye ilk etapta köşegenlerin ağırlık merkezinden geçebileceği düşüncesiyle ağırlık merkezinin köşelere uzaklığına göre çalışmayı denemiştir. Gaye, bu aşamadan sonra standart değişkene göre çalışmaya başlamıştır. Ancak Yavuz kenar uzunluğunun yarısına göre alan ve çevre fonksiyonlarını oluşturmaya çalışmış ve türev ilişkisini test etmiştir. Bu çalışmadan bir kesit Tablo 4.19.'da sunulmuştur.

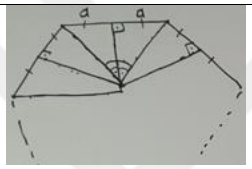
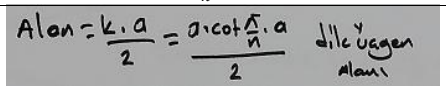
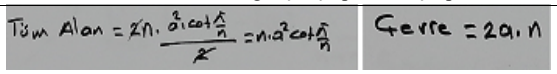
Tablo 4.19. Yavuz'un Düzgün Çokgende Köşegenlere Göre Çalışması

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
…		…				
02:16	A	…(Katılımcı çizimi bitirdikten sonra) Ne yapacağız?	1			
02:20	Y	Ağırlık merkezini bulmamız gerekiyor.		1	3	5
02:21	A	Tamam, bul.	1			
02:23	Y	Ağırlık merkezi de köşelerden, köşeleri birleştirirsek... (Köşegenleri çizmeye başlıyor.)				1
02:27	A	Köşeleri birleştirirsek… Mesela şöyle…	6			
…		…				
03:09	A	Bir beşgen çiz.	6			
03:11	Y	Bir beşgen… Şöyle çizeyim. Beşgen. (Mırıldanma)				1
03:21	A	Şuradan alıp şuradan uzat, birleştir. (Köşegenleri tarif ediyor.)	6			
03:24	Y	Şöyle bir şey mi? Şunu da uzatalım, şöyle. Şunu da… Olmuyor. Sanki bir dengesizlik var. Olmuyor.				2
						
…		…				
03:43	A	Köşegenlerin kesim merkezi değilmiş ama.	6			
03:46	Y	Değilmiş.		1	2	2

02:16'ya kadar katılımcı düzgün n-gen için bir çizim yapmıştır. Bu noktada araştırmacı kasıtlı ve odaklanmış bir müdahale (1) ile değişkenin seçimine yönelik "*ne yapacağız*" diye sormuştur. Katılımcı hemen "*ağırlık merkezini bulmamız gerekiyor*" cevabını vermiştir. Katılımcı kendinden emin olarak bu cevabı verdiği için çalıştığı anlama seviyesi formelleştirme (5) olarak değerlendirilmiştir. Katılımcı, bu süreçte, mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışmış (1) dış teşvik olmadan etkili bir geri katlama (3) yapmıştır.

02:21'de araştırmacı "*tamam bul*" demek suretiyle kasıtlı ve odaklanmış bir müdahalede bulunmuştur. Bu şekilde başlayan mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma türündeki (1) geri katlama süreci dış teşvikler ile birlikte (6) 03:46'ya kadar devam etmiştir. Katılımcı, dış teşvikle etkili (2) bir şekilde yapılan bu geri katlama süresi içerisinde, sırasıyla ön bilgi (1) ve imaj oluşturma (2) seviyelerinde çalışmıştır. Köşegenlerin ağırlık merkezinden geçeceği yanılgısı, beşgen yönlendirmesiyle düzeltilmiştir. Bu yanılgı düzeltildikten sonra Yavuz, diğer katılımcılardan farklı olarak kenar uzunluğunun yarısına göre çalışmayı tercih etmiştir. Bu çalışmadan bir kesit Tablo 4.20.'de sunulmuştur.

Tablo 4.20. Yavuz'un Kenar Uzunluğunun Yarısına Göre Çalışması

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
08:11	A	…Formüllerden gitmeyeceğiz biz kendimiz oluşturacağız. (Alan ve çevre formülleri)	1			
08:26	Y	Hı! Hı! Formül zaten biz… Değer vererek mi? Nasıl?				2
08:31	A	Neye ne diyelim. Çıkart, çıkart söyle. (Katılımcının yüz ifadesinden fikrinin olduğu tahmininde bulunuyor.)	6			
08:35	Y	Acaba bir kenara uzaklığa… (Emin olmadan kısık sesle konuşuyor.)				5
08:37	A	He!	6			
08:39	Y	k, a cinsinden bir şey dersek bulabilir miyiz? Zor gibi. (Katılımcı düşünce süreçlerinde elini çenesinin altına koyduğu için dedikleri tam anlaşılmıyor.)		1	2	5
08:42	A	De bakayım.	1			
08:46	Y	Şuraya mesela a diyelim. (Düzgün n-genin kenar uzunluğunun yarısı işaret ediliyor.)				2
…		…				
09:05	Y	Hepsine uyarlayabiliriz.		1	3	2
…		…				
						
10:22	A	Açıyı bulduk. Hemen hemen. Dik üçgen var. Açı var. Bir kenarı biliyorsak? (Dış sesten kaynaklı anlaşılmayan konuşma.)	2			
…		…				
11:15	Y	Karşı bölü komşu olur. Bu da yarar herhalde.				2
…		…				
11:40	Y	$k = \frac{a}{tan\frac{\pi}{n}}$ olur.		1	2	2
…		…				
12:26	Y	Kepçeyi bulduk. O zaman… I! Alanı bulabiliriz.	4			2
…		…				
13:12	A	Tamam. Bize ama tüm, hepsinin alanı lazım.	6			
…		…				
13:34	Y	Bu da a çarpı… I! $\cot\frac{\pi}{n}$… I! Çarpı a bölü 2. (Katılımcı $\frac{a.\cot\frac{\pi}{n}.a}{2}$ yazıyor.) Dik üçgenindir.		1	2	2
						
…		…				
14:00	A	Tüm alan?	1			
…		…				
14:49	Y	Yani eşittir $n.a^2.\cot\frac{\pi}{n}$ olur.		1	2	2
14:57	A	Hı! Hı! Çevre?	1			
14:59	Y	I! Çevre… I! Çevre de şey olur. Çevre, tüm çevre, herhalde çevre de tüm çevre olur. Çevre… Çevre de bir kenarı… I!				2
15:18	A	$2a$.	6			
15:18	Y	$2a$ ise… Bir de n kenar olduğu için çarpı n'dir. Çarpı n'dir.		1	2	2
						
15:27	A	Tamam. Türev ilişkisi var mı?	1			
15:31	Y	Türev ilişkisi var mıdır? Mutlaka vardır. Çünkü…				6
15:37	A	Şu anda bunun (alanın) türevini aldığında bunu (çevreyi) veriyor mu?	6			
15:40	Y	Veri… Vermiyor.		1	2	2

Yavuz ile yürütülen son mülakatta 03:46 ile 08:11 arasında ağırlık merkezi üzerinde bir diyalog yürütülmüştür. 08:11'de araştırmacı, kasıtlı ve odaklanmış (1) bir müdahalede

bulunmuştur. Katılımcı, 08:35'te "*bir kenara uzaklığa…*" diyerek standart değişkene göre çalışmaya yönelik bir intiba uyandırmıştır. Bunun üzerine verilen dış teşvikle birlikte (6) değişken atamaya başlamıştır. Önce imaj oluşturma seviyesinde (2) yapılan çalışma sonra formelleştirme (5) seviyesine taşınmıştır. Mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma türündeki (1) bu geri katlama 08:39'da dış teşvik ile etkili (2) bir şekilde sonuçlanmıştır.

Katılımcı, 08:46'da kasıtlı odaklanmış (1) müdahale ile gelişen mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma türündeki geri katlama (1) ile çizilen şekil üzerine kenar uzunluğunun yarısı olan a değişkeni atanmıştır. Katılımcı bu süreçte bir dik üçgen için elde edilen bilginin diğer dik üçgenler için de geçerli olduğunu ifade etmiştir. Bu geri katlama süreci dış teşvik olmadan etkili (3) bir şekilde 09:05'te tamamlanmıştır. Bu süreç içerisinde imaj oluşturma seviyesinde (2) çalışılmıştır.

09:05 ile 10:22 arasında katılımcı ile düzgün çokgenin kenar orta noktası, ağırlık merkezi ve düzgün çokgenin o kenara ait köşesi arasındaki açı değeri hakkında diyalog yürütülmüş ve şekil tamamlanmıştır. Araştırmacı bu noktada kasıtlı odaklanmamış (2) bir müdahale ile yükseklik ve kenarın yarısı değişkenlerini birbiri cinsinden yazılabilmesinin yolunu sormuştur. Verilen dış teşvikler (6) ile gelişen mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türündeki geri katlama dış teşvik ile etkili (2) bir şekilde sonuçlanmıştır. Bu süreçte imaj oluşturma seviyesinde (2) çalışılmıştır.

11:40 ile 12:26 arasında $\frac{1}{tana} = cota$ dönüşümü üzerinde çalışılmıştır. 12:26'da katılımcı kendi kendine odaklanmış (4) bir müdahale ile alan fonksiyonunu oluşturmaya başlamıştır. Verilen dış teşviklerle (6) devam eden mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türündeki geri katlama 13:34'te dış teşvikle etkili (1) bir şekilde tamamlanmıştır. Bu süreçte imaj oluşturma seviyesinde (2) bir anlayış geliştirilmiştir.

14:00'da kasıtlı odaklanmış (1) müdahale ile katılımcı tüm alanı hesaplamaya başlamıştır. 14:49'a kadar devam eden mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türündeki geri katlama dış teşvik ile etkili (2) bir şekilde sonuçlanmıştır. Bu zaman aralığında imaj oluşturma seviyesinde (2) faaliyet gösterilmiştir.

Araştırmacı, 14:57'de çevre fonksiyonunun bulunması için kasıtlı odaklanmış (1) müdahalede bulunmuştur. Mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde gelişen bu geri katlama dış teşvik ile birlikte (6) etkili (2) bir şekilde

sonuçlanmıştır. Geri katlama sürecinde imaj oluşturma seviyesinde (2) anlayış geliştirilmiştir.

Alan ve çevre fonksiyonlarının kenar uzunluğunun yarısına göre bulunması, 15:18'de sonuçlanmıştır. 15:27'de araştırmacı kasıtlı ve odaklanmış bir müdahale ile türev ilişkisini sorgulatmıştır. Verilen dış teşvik (6) ile katılımcı alan ve çevre fonksiyonlarını incelemiştir. 15:40'da sonlanan mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türündeki bu geri katlama dış teşvik ile etkili bir şekilde sonuçlanmıştır. 15:31'de katılımcı "*Türev ilişkisi var mıdır? Mutlaka vardır…"* ifadesi ile alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini teorem olarak ifade etmiş ve gözlem yapma seviyesinde (6) bir anlayış geliştirmiştir. Sonra fonksiyonlar arasındaki türev ilişkisine odaklanınca imaj oluşturma seviyesine (2) geri dönmüştür.

Yavuz, standart değişkene göre çalışmasını bilerek işe başlamıştır. Ancak kenar uzunluğunun yarısına göre devam etmiştir. Sonuç olarak türev ilişkisini kuramamıştır. Katılımcının bu sonucun nedenini sorgulamasına ilişkin mülakat kesiti Tablo 4.21.'de sunulmuştur.

Tablo 4.21. Yavuz'un Kenar Uzunluğunun Yarısına Göre Çalıştığını Fark Etmesi

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
16:06	A	Çık! (4 saniye sessizlik) Peki, vermesi için… Mesela karede vermesi için biz neye göre oluşturduk alan formülünü, çevre formülünü?	1			
16:18	Y	Biz şeye göre… I! Ağırlık merkezinden…				4
…		…				
16:27	A	Mesela eş kenar üçgende ne yapmıştık? Ağırlık merkezinin…	6			
16:30	Y	Ağırlık merkezinden… kenarlara dik uzaklık				4
16:31	A	Kenara (eş zamanlı konuşma) dik uzaklığa göre oluşturduk alan ve çevre formüllerini doğru mudur?				
16:31	Y	Kenarlara dik uzaklık… Evet, aynen öyle. Doğrudur.		1	2	4
16:36	A	Burada neye göre oluşturduk?	1			
16:38	Y	Burada neye göre oluşturduk? (4 saniye sessizlik) Burada biz kenara göre mi oluşturduk?		1	2	4
…		…				
16:55	A	*a*'dır. *a*'ya göre oluşturduk. Mesela karede *a*'ya göre oluşturduğumuz zaman sağlıyor muydu?	1			
17:00	Y	Yok. Biz *b*'ye göre oluşturduğumuzda sağladı.				4
17:01	A	Eşkenar üçgende? Eşkenar üçgende sağlıyor muydu?	6			
17:05	Y	Sağlamadı.				4
17:06	A	Sağlamıyor. (Gülümseme) O zaman...	6			
17:09	Y	O zaman *k* ile ilgili bir şey yapmak lazım...				5
17:10	A	*k*'ya göre.				
17:11	Y	*k*'ya göre.		1	2	5

16:06'te araştırmacının kasıtlı odaklanmış müdahalesi (1) ile kare ve eşkenar üçgende türev ilişkisini oluşturmak için seçilen bağımsız değişken sorgulanmıştır. Böylece

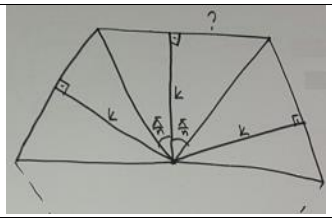
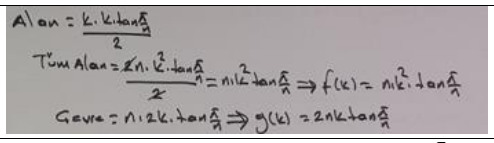
özellikleri fark etme seviyesine (4) mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde bir geri katlama süreci başlamıştır. Bu süreçte verilen dış teşvik (6) ile etkili (2) bir geri katlama gözlenmiştir. Ardından araştırmacı "*Burada neye göre oluşturduk?*" sorusunu sorarak kasıtlı odaklanmış (1) bir müdahalede daha bulunmuştur. Bu sayede katılımcı sahip olduğu imajları karşılaştırarak özellikleri fark etme (4) seviyesine, mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde bir geri katlama daha yapmıştır. Müdahale, aynı zamanda bir dış teşvik de içerdiği için dış teşvik ile etkili bir geri katlama gözlenmiştir.

16:55'te araştırmacı kasıtlı ve odaklanmış (1) bir müdahale ile standart değişkeni sorgulatmaya başlamıştır. Katılımcı, verilen dış teşvikler (6) yardımıyla mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde dış teşvikle etkili (2) bir geri katlama yapmıştır. Bu geri katlamanın 17:00 ile 17:09 arasındaki kısmında imajların karşılaştırılması eylemiyle diğer bir deyişle özellikleri fark etme (4) seviyesinde gerçekleşmiştir sonra bu karşılaştırmadan bir ortak özellik ortaya çıkarma ve türev ilişkisini kurmak için bir yöntem geliştirme eylemleri gerçekleşmiş dolayısıyla formelleştirme (5) seviyesinde bir anlayış gerçekleşmiştir.

Yavuz'un standart değişkeni kullanarak türev ilişkisini kurması 19:45 ile 23:49 arasında gerçekleşmiştir. Bu sürenin 22:41'e kadar olan kısmı alan ve çevre fonksiyonlarını oluşturmak ile geçmiştir. Ömür'de yaklaşık olarak 10 dakika (01:33 ile 11:40 arasında) Gaye'de ise 9 dakika (03:53 ile 13:21 arasında) sürmüştür. Yavuz'un bu iş için harcadığı süre görece daha az olduğu tespit edilmiştir. Çünkü standart değişken cinsinden kenar uzunluklarını hesaplama işi (tan ve cot fonksiyonundan faydalanarak kenar uzunluğunun yarısı cinsinden standart değişkeni hesaplama deneyimine sahip olduğu için) Yavuz'un daha az zamanını almıştır.

Kare ve eşkenar üçgende olduğu gibi düzgün n-gende de alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinin kurulması, standart değişken ile mümkündür. Başlangıç noktaları farklı olsa da tüm katılımcılar bu değişkene göre türev ilişkisini kurmuştur. Süreklilik arz etmesi için Yavuz adlı katılımcının standart değişkene göre çalışarak türev ilişkisini kurmasından bir kesit Tablo 4.22.'de sunulmuştur.

Tablo 4.22. Yavuz'un Düzgün n-gende Türev İlişkisini Kurması

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
19:45	Y	k dersek… Şuraya da k diyelim.	4			2
						
20:04	A	Şimdi şurayı şunun cinsinden bulabilir misin? …	6			
20:30	Y	Bulabiliriz. Şuraya tanjant dersek…				2
…		…				
20:45	Y	I! k'dır. ($tan\frac{\pi}{n}=\frac{?}{k}$ denklemini yazıyor.) O da… I! Soru işareti eşittir… I! k çarpı tanjant π bölü n'dir. (Katılımcı $?=k.tan\frac{\pi}{n}$ yazıyor.)				2
…		…				
21:14	Y	I! Şimdi?		1	2	2
21:18	A	Alanını bul.	1			
…		…				
21:47	A	Tüm alan?	6			
…		…				
22:19	Y	Eşittir n çarpı k^2 tanjant π bölü n. (Katılımcının yazdığı ifade "$=n.k^2.\tan\frac{\pi}{n}$" şeklindedir.)		1	2	2
22:29	A	Tamam.				
22:31	Y	Çevre.	4			2
…		…				
22:41		$2k$ tanjant… I! π bölü n'dir. (Yazdığı ifade "Çevre $=n.2k.tan\frac{\pi}{n}$" şeklindedir.) Çevre… Hıh!		1	3	2
	Y	Sanki, sanki, sanki… Sanki bir ilişki çıkıyor gibi.				
23:02	A	Nasıl bir ilişki?	1			
23:05	Y	Biz… I! k'ya göre almıştık. O zaman bağımsız değişkenimiz k'dır.				5
23:10	A	Hı! Hı!				
23:10	Y	Fonksiyon olarak yazdığımızda… Ya da onu direkt men eşittir fonksiyon olarak da yazabiliriz.				2
…		…				
						
23:49	Y	$g(k)=2$… I! n k π bölü n'dir. ($g(k)=2nktan\frac{\pi}{n}$ ifadesini yazıyor. Şimdi oldu! Kesin oldu.		1	2	6

Yavuz ile yapılan dördüncü klinik mülakatta 16:55 (Tablo 4.21.'in sonu) ile 19:45 (Tablo 4.22.'nin başı) arasında standart değişken üzerine bir diyalog yürütülmüştür. Bu diyaloğun sonunda Yavuz, kendi kendine odaklanmış (4) bir müdahale ile imaj oluşturma (2) seviyesinde çalışmaya başlamış ve bu faaliyetiyle kenar uzunluğunu, standart değişken cinsinden bulmuştur. Bu süreçte araştırmacı dış teşvikleri (6) kullanmıştır. Mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışmak (1) türünde gelişen bu geri katlama dış teşvik ile etkili (2) bir şekilde sonuçlanmıştır.

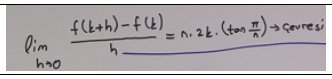
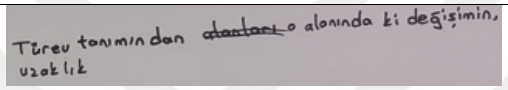
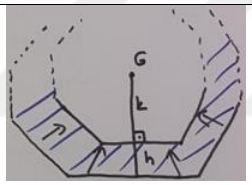
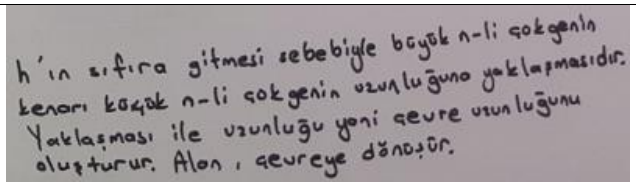
21:18'de araştırmacı, katılımcının alan fonksiyonunu oluşturması için kasıtlı ve odaklanmış (1) bir müdahalede bulunmuş böylece Yavuz imaj oluşturma (2) seviyesinde çalışmaya başlamıştır. Geri katlama süreci içerisinde araştırmacı dış teşvikleri (6) kullanmıştır. Mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışmak (1) türünde gelişen bu geri katlama dış teşvik ile etkili (2) bir şekilde sonuçlanmıştır. Böylece katılımcı düzgün n-gen'in alan fonksiyonunu standart değişkene bağlı olarak bulmuştur.

22:31'de katılımcı kendi kendine odaklanmış (4) bir müdahale ile düzgün n-gen'in çevre fonksiyonunu standart değişkene bağlı olarak oluşturmak için imaj oluşturma (2) seviyesine geri katlama yapmıştır. Mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde gelişen bu geri katlama, dış teşvik olmadan etkili (3) bir şekilde sonuçlanmıştır. Böylece çevre fonksiyonu oluşturulmuştur.

Çevre fonksiyonunu oluşturan Yavuz, "*Sanki, sanki, sanki… Sanki bir ilişki çıkıyor gibi*" diyerek türev ilişkisine işaret etmiştir. Bunun üzerine araştırmacı, 23:02'de yaptığı kasıtlı odaklanmış (1) bir müdahale ile katılımcının farkına vardığı ilişkiyi açıklamasını istemiştir. Formelleştirme (5) seviyesinde başlayan geri katlama süreci alan ve çevre formüllerini birer fonksiyon olarak ifade etmek için imaj oluşturma (2) seviyesinde devam etmiştir. Bu süreçte kullanılan bir dizi dış teşvik (6) kullanılmıştır. Mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türündeki bu geri katlama dış teşvik ile etkili bir şekilde sonuçlanmıştır. Bu sürecin sonunda katılımcı "*Şimdi oldu! Kesin oldu.*" diyerek, türev ilişkisini kurduğundan emin olduğunu dile getirmiştir. Diğer bir deyişle katılımcı, türev ilişkisini bir teorem ifade etmiş, böylece gözlem yapma (6) seviyesinde bir anlayış geliştirmiştir.

Dördüncü klinik mülakatta standart değişkene göre oluşturulan alan ve çevre fonksiyonları arasındaki türev ilişkisi kurulduktan bu ilişkinin açıklanmasına sıra gelmiştir. Katılımcılardan Yavuz, kendi kendisine genel türev denklemini sorgulayarak halka yapısını açıklamıştır. Sonra değişim oranı cinsinden açıklama yapmıştır. Ömür bunları kasıtlı ve odaklanmış öğretmen müdahalesi aracılığıyla yapmıştır. Diğer taraftan Gaye önce değişim oranı cinsinden açıklama yapmayı tercih etmiş sonra genel türev denklemine başvurmuştur. Diğer başlıklarla paralellik göstermesi için önce genel türev denkleminin doğurduğu açıklama Ömür isimli katılımcının çalışmasından bir kesitle Tablo 4.23.'te sunulmuştur.

Tablo 4.23. Ömür'ün Düzgün n-gende Üçgende Halka Yapısını Açıklaması

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
16:33	A	O limitli açıklamayı yapalım bakalım. Nasıl bir açıklama yapacağız.	1			
…		…				
16:56	Ö	Oluşur. (Yazdığı $\lim_{h\to 0}\frac{f(k+h)-f(k)}{h}$ ifadesini açmaya yelteniyor.)		1	3	2
16:59	A	Bunun sonucu nedir? (Genel türev denklemi işaret ediliyor.) Ne öngörüyorsun?	1			
17:29	Ö	Çevresi. Yani alanı olan… I! Alanlara olan değişimin uzaklıklara olan değişime oranı bize çevreyi verir.		1	3	6
						
17:46	A	Sözel olarak yaz.	1			
17:47	Ö	(Yazıyor.)				7
18:08	A	Alanları değil de alanındaki değişim diyelim.	6			
18:11	Ö	(Yanlış ifadenin üstünü çizip yazmaya devam ediyor.)		1	1	7
						
…		…				
18:58	A	Şekil çizsene. (Araştırmacı boş bir yer işaret ediyor.) Şunu sonradan yaparız. (yarım kalan yazılı ifade işaret ediliyor.) Şuraya şekil çiz.	1			
19:03	Ö	Tamam. Tamam. (Çokgen halkasal bölge çizimi yapmaya başlıyor.)		1	2	2
…		…				
						
…		…				
22:13	A	Değişim. (Konuşmalar senkronize oluyor.) Tamam. Alanlar arasındaki değişim. Şimdi o h'ı sıfıra götürdüğünde ne olur?	1			
22:17	Ö	E! Büyük çokgendeki şey, uzaklık, kapanmaya başlar.				7
22:22	A	Hı! Hı! O aradaki alan neye dönüşür?				
…		…				
22:29	Ö	Çevre uzunluğuna dönüşür.		1	2	7
22:30	A	Bunu şey yapalım, sözel olarak yaz. (Şeklin altındaki boş yer işaret ediliyor.)	1			
…		…				
24:15	Ö	E! h'ın gittikçe daralmasıdır. (Eliyle büyük çokgenin küçük çokgene yaklaştığını işaret ediyor.) Yani sıfıra gitmesidir.				7
…		…				
24:26	A	Uzunluğa dönüşecek olan şey ne?	6			
24:33	Ö	Alanı.				7
24:34	A	Ha! Alanı. Bak burada gizli özne var. Buraya alan yaz. (Yazılı ifade düzeltilmeye çalışılıyor.) Alan...	6			
24:40	Ö	Çevreye… (yazmaya devam ediyor.) Dönüşür. (Kısık sesle yazdıklarını okuyor.)		1	2	7
						

16:33'te araştırmacı, katılımcının türev ilişkisini genel türev denklemi aracılığıyla açıklaması için kasıtlı ve odaklanmış (1) bir müdahalede bulunmuş ve böylece katılımcı

imaj oluşturma (2) seviyesinde çalışmaya başlamıştır. Mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışmak (1) türünde gelişen bu geri katlama dış teşvik olmadan etkili (3) bir şekilde sonuçlanmıştır. Katılımcı, genel türev denklemini yazdıktan sonra bu denklemi açmaya başlayacakken araştırmacı, 16:59'da tekrar kasıtlı ve odaklanmış (1) bir müdahalede bulunarak katılımcının genel türev denkleminin sonucuyla ilgili öngörüsünü sormuştur. Bu müdahaleye bağlı olarak mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışmak (1) türünde bir geri katlama gerçekleşmiş ve dış teşvik olmadan etkili (3) bir şekilde sonuçlanmıştır. Katılımcı genel türev denkleminin sonucuna ilişkin öngörüsünü "*Çevresi. Yani alanı olan… I! Alanlara olan değişimin uzaklıklara olan değişime oranı bize çevreyi verir*" ifadesiyle dile getirmiştir. Bu öngörü, türev ilişkisini teorem olarak ifade etmek şeklinde olduğu için gözlem yapma (6) seviyesinde bir anlayış gelişmiştir.

17:46'da araştırmacı, kasıtlı ve odaklanmış (1) bir müdahale ile katılımcının türev ilişkisini açıklamasını istemiştir. Böylece türev ilişkisinin gerekçesini açıklamaya yönelik bir faaliyet başlamıştır. Bu faaliyet yapılandırma (7) seviyesinde gerçekleşmiştir. Mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde gelişen bu geri katlama, katılımcının kendisini ifade edememesinden dolayı, etkisiz (1) olarak sonuçlanmıştır.

18:58'e kadar araştırmacı, katılımcının sözel olarak kendisini ifade etmesi için müdahalelerde bulunmuş ancak sonuç alamamıştır. Bunun üzerine kasıtlı odaklanmış (1) bir müdahale ile katılımcıyı şekil çizmeye yönlendirmiştir. Böylece katılımcı imaj oluşturma (2) seviyesinde çalışmaya başlamış ve dış teşviklerin (6) de yardımıyla halka yapısını ortaya çıkarmıştır. Dolayısıyla mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde gelişen bu geri katlama, dış teşvik ile etkili (2) bir şekilde sonuçlanmıştır.

22:13'te araştırmacı, katılımcının limit durumunda h'ın sıfıra gitmesinin şekle nasıl yansıyacağını ifade edebilmesi için kasıtlı ve odaklanmış (1) bir müdahalede bulunmuştur. Katılımcının verdiği cevabı matematiksel açıdan kabul edilir seviyeye ulaştırmak için araştırmacı, 22:22'de soruyu farklılaştırıp tekrar sorarak dış teşvik (6) kullanmıştır. Böylece katılımcının, türev ilişkisini açıklamaya yönelik yapılandırma seviyesinde (7) oluşturulan gerekçeleri kabul edilebilir bir hale gelmiştir. Mevcut

anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türündeki geri katlama dış teşvik ile etkili (2) bir şekilde sonuçlanmıştır.

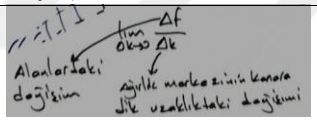
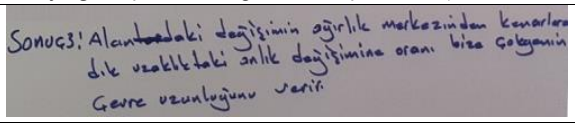
22:30'da araştırmacı, katılımcının türev ilişkisine ilişkin gerekçeyi yazılı olarak belirtmesini isteyerek kasıtlı ve odaklanmış (1) bir müdahalede bulunmuştur. Müdahaleye bağlı olarak mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışmak (1) türünde bir geri katlama, yapılandırma (7) seviyesinde geçekleşmiştir. Geri katlama sürecinde katılımcının gerekçelerini sözel ve yazılı olarak ifade etmekte zorlandığı ve bu nedenle bazı yerlerde vücut dilini kullandığı tespit edilmiştir. Araştırmacı bu zorluğu aşabilmek için bir dizi ek soruyu dış teşvik (6) olarak kullanmıştır. Böylece dış teşvik ile etkili (2) bir geri katlama gerçekleşmiştir.

Klinik mülakat serisinin son oturumundaki son aşama, düzgün n-gen'de oluşturulan türev ilişkisinin anlık değişim oranı cinsinden ifade etmek olmuştur. Yavuz isimli katılımcının bu ifadeyi oluşturmasından bir kesit Tablo 4.24.'te sunulmuştur. Katılımcının bu ifadeyi oluşturması, 38:17'de başlamış ve 47:56'da bitmiştir.

38:17'de araştırmacı, kasıtlı ve odaklanmış (1) bir müdahale ile katılımcının türev ilişkisini anlık değişim oranı cinsinden ifade etmesini istemiştir. Bu müdahaleyle başlayan geri katlama ve verilen dış teşvikler (6) katılımcının sırasıyla yapılandırma (7), imaj oluşturma (2), formelleştirme (5), imaj oluşturma (2) ve tekrar yapılandırma seviyelerinde faaliyet göstermesini sağlamıştır. Mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türündeki bu geri katlama dış teşvik ile etkili bir şekilde sonuçlanmıştır. Böylece katılımcı $\frac{\Delta f}{\Delta k}$ ifadesini ve bu ifadenin pay ve payda kısmından oklar çekerek karşılarına sırasıyla "*alanlardaki değişim*" ve "*ağırlık merkezinin kenara dik uzaklıktaki değişimi*" ifadelerini yazmıştır.

Katılımcının yazdığı ifadede limit eksik olduğu için 40:38'de araştırmacı kasıtlı ve odaklanmış (1) bir müdahalede bulunmuştur. Daha iç bir seviyede toplama (2) türünde gelişen geri katlama sürecinde dış teşvik ile katılımcı hatırlamakta zorlandığı ifadeyi hatırlamak için önceki oturumda oluşturduğu çalışma kâğıdına bakmıştır. Böylece dış teşvik ile etkili bir geri katlama yapmıştır. Katılımcı, özellikleri fark etme (4) seviyesine dönerek geri katlamayı yapmıştır.

Tablo 4.24. Yavuz'un Düzgün n-gen'deki Türev İlişkisini Değişim Oranı Cinsinden İfadesi

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
38:17	A	Değişim oranı cinsinden ifade et.	1			
…		…				
38:37		(Yazmaya devam ediyor.) Ya da… Bi de ağırlık merkezinden kenara dik uzaklığı o da k idi. k'daki				5
	Y	değişim… Delta k…				
…		…				
39:20		Şunu şöyle şuraya alayım. ("$\frac{\Delta f}{\Delta k}$" ifadesinin payından bir ok çiziyor. 3 saniye sonra konuşuyor) Fonksiyonların alanlarındaki değişim. (3 saniye sessizlik. Emin olmadığı için okun ucuna				7
	Y	yazmıyor.)				
39:34	A	Hı! Hı! Fonksiyonların alanları mı?	6			
39:38	Y	Fonksiyondaki değişimin… Biz alan… Alanlardaki değişimin aslında.				7
39:45	A	Alanlardaki değişim… (Katılımcı konuşmaya devam ettiği için araştırmacı susuyor.)				
39:45	Y	Biz alanı fonksiyon şeklinde yapmıştık.				2
…		…				
40:08		("$\frac{\Delta f}{\Delta k}$" ifadesinin pay kısmından çizdiği okun karşısına "Ağırlık merkezinin kenara dik uzaklıktaki		1	2	7
	Y	değişimi" yazıyor. Bitirince son kelimeyi seslendiriyor.) Değişimi.				
40:38	A	Limiti ne yaptın?	1			
…		…				
41:37		Biz… I! Ağırlık merkezinin kenarlara dik uzaklıktaki… I! h'ı sıfıra... Limit olarak h'ı sıfıra götürdüğümüzde anlık değişim… (Katılımcı hatırlamayınca önceki çalışma sayfalarını geri çeviriyor ve üçgen ile ilgili çalışma sayfasını açıyor.) Değişimi falan yazmışım. Ama anlık yazmamışız. (Katılımcı çalıştığı sayfaya geri dönüyor ve "$\frac{\Delta f}{\Delta k}$" ifadesinin başına "$\lim_{\Delta k \to 0}$ " ifadesini		2	2	4
	Y	ekliyor.)				
						
…		…				
44:09	A	Alanlar mı? Alan mı?	1			
44:11	Y	Alan olması lazım. Çünkü o diğeri hayali olduğu için		1	2	2
…		…				
46:01	A	Limit demiyoruz. Limit demiyoruz. Sözel açıklama yapıyoruz. Uzaklıktaki neye?	1			
…		…				
46:24	A	Geri gel bakayım öncekilerde ne demişiz?	6			
46:27	Y	Anlık değişim… (Üçgen konusundaki çalışma sayfalarına geri dönüyor.) Anlık değişim oranı.				4
46:38	A	Anlık değişimine oranı. Tamam.				
46:41		Anlık değişime oranı bize… (Mevcut çalışma sayfasına geri gelip yazmaya kaldığı yerden devam ediyor. O ana kadar yazılmış ifade "Sonuç 3: Alandaki değişimin ağırlık merkezinden kenara dik		2	2	7
	Y	uzaklıktaki" şeklindedir.) Dik uzaklıktaki anlık... Anlık…				
…		…				
47:07		Eklenir çok küçücük minnacık. (Çokgensel halka bölgenin kalınlığı işaret ediliyor.) Hani sen bu	1			
	A	h'ı sıfıra götürüyorsun ya… Delta k'yı sıfıra götürmek…				
47:13	Y	h'ı sıfıra götürmek				2
47:14	A	h'ı sıfıra götürmek…				
47:15	Y	Anlık. (Eş zamanlı konuşma)				2
47:15	A	Anlık…	6			
…		…				
47:56		(Yazmaya devam ediyor.) Çevre uzunluğunu verir. Uzunluğunu verir. (Yazılan ifadenin tamamı "Sonuç 3: Alandaki değişimin ağırlık merkezinden kenarlara dik uzaklıktaki anlık değişime oranı		1	2	7
	Y	bize çokgenin çevre uzunluğunu verir." şeklindedir.)				
						

Yazılan "*alanlardaki değişim*" ifadesi hatalı olduğu için 44:09'da araştırmacı kasıtlı ve odaklanmış (1) bir müdahalede bulunmuştur. Mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde gelişen bu geri katlama dış teşvik olmadan etkili (3) bir şekilde sonuçlanmıştır. Bu süreçte imaj oluşturma (2) seviyesine geri katlama yapılmıştır.

Katılımcı Tablo 4.24.'deki $\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta k}$ görselinden faydalanarak sözel açıklamayı yazmaya çalışmıştır. Yazılı ifadede $\lim_{\Delta k \to 0}$ anlamı taşıyan ifadenin eksikliğinin farkında olan katılımcı bu eksikliği "*limit*" ifadesiyle tamamlamaya çalışmıştır. Bunun üzerine 46:01'de araştırmacı kasıtlı ve odaklanmış (1) bir müdahalede bulunmuştur. Verilen dış teşvikler neticesinde katılımcı hatırlamakta güçlük çektiği kavramı hatırlamak için üçgen ile ilgili çalışma sayfasına bakmıştır. Böylece özellikleri fark etme (4) seviyesine geri katlama yaparak yapılandırma (7) seviyesine geri dönmüştür. Daha iç bir seviyede toplamak (2) türündeki geri katlama ile bilginin geri çağırılması ve mevcut duruma uyarlanması gerçekleşmiştir.

47:07'de araştırmacı halkanın kalınlığı olan h ve Δk ile "anlık" ifadesi arasındaki ilişkiye odaklanmış kasıtlı bir müdahalede (1) bulunmuştur. Böylece katılımcı, mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma (1) türünde geri katlama yapmış ve imaj oluşturma (2) seviyesinde bir süre çalıştıktan sonra yapılandırma seviyesine (7) geri dönmüştür. Bu geri katlama, dış teşvik ile etkili (2) bir şekilde sonuçlanmıştır.

4.2. Müdahale ve Geri Katlama Süreçlerine Yönelik Bulgular

Bu başlık altında müdahale, müdahaleye bağlı olarak gelişen geri katlama ve bu geri katlamaların sonuçları türlerine göre değerlendirilmiştir. Ayrıca bu döngüler sürecinde kullanılan dış teşviklerin sayısal değerleri ele alınmıştır. Böylece ikinci araştırma problemine cevap aranmıştır. Bu değerlerin klinik mülakatlara göre dağılımı Tablo 4.25.'te sunulmuştur.

Tablo 4.25. Müdahale, Geri Katlama ve Geri Katlamanın Çıktısı Türlerinin Oturumlara Göre Dağılımı

		Ömür					Gaye					Yavuz					
	Oturumlar	M1	M2	M3	M4	Toplam	M1	M2	M3	M4	Toplam	M1	M2	M3	M4	Toplam	Genel Toplam
Müdahale	Odaklanmış Kasıtlı Öğretmen Müdahalesi	75	39	32	45	191	75	49	20	45	189	57	70	25	51	203	583
	Odaklanmamış Kasıtlı Öğretmen Müdahalesi	2	2	2	1	7	0	7	1	7	15	4	9	2	6	21	43
	Kasıtsız Öğretmen Müdahalesi	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
	Odaklanmış Kasıtlı Kendine Müdahale	0	3	1	0	4	0	2	3	3	8	1	5	1	7	14	26
	Odaklanmamış Kasıtlı Kendine Müdahale	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Müdahale Toplamı	77	44	35	46	202	75	58	24	55	212	62	85	28	64	239	653
Geri Katlama	Mevcut Anlamaları Kullanarak Daha İç Bir Seviyede Çalışmak	66	38	33	46	183	70	54	22	48	194	58	81	28	62	229	606
	Daha İç Bir Seviyede Toplamak	4	0	0	0	4	3	0	2	6	11	4	1	0	2	7	22
	Konunun Dışına Çıkmak ve Orada Çalışmak	5	6	2	0	13	0	4	0	1	5	0	3	0	0	3	21
	Sürekliliği Bozan Geri Katlama	2	0	0	0	2	2	0	0	0	2	0	0	0	0	0	4
	Geri Katlama Toplamı	77	44	35	46	202	75	58	24	55	212	62	85	28	64	239	653
Dış Teşvik		72	53	74	113	312	24	82	44	64	214	139	212	100	114	565	1091
Çıktı	Etkisiz Geri Katlama	9	8	8	8	33	7	13	3	10	33	16	13	7	12	48	114
	Dış Teşvikle Etkili Geri Katlama	54	21	24	30	129	52	34	14	32	132	43	57	18	44	162	423
	Dış Teşvik Olmadan Etkili Geri Katlama	14	15	3	8	40	16	11	7	13	47	3	15	3	8	29	116
	Çıktı Toplamı	77	44	35	46	202	75	58	24	55	212	62	85	28	64	239	653

Tablo 4.25. hakkında genel bir değerlendirme yapılacak olursa her bir mülakatta ortaya çıkan müdahale, geri katlama ve geri katlamanın çıktısı sayıları birbirine eşittir. Örneğin (Tablo 4.25.'te de görüldüğü üzere) toplam müdahale sayısı, toplam geri katlama sayısı ve toplam geri katlama çıktı sayısı 653 olarak hesaplanmıştır. Bu durum, beklenilen bir durumdur çünkü herhangi bir eylem ya da durumun müdahale olarak nitelendirilebilmesi için geri katlama oluşturması gerekmektedir (Martin, 2008).

Müdahale ve geri katlama döngülerinin toplam değerleri, Ömür için 202, Gaye için 212 ve Yavuz için 239 olarak hesaplanmıştır. Müdahale ve geri katlama döngülerinin toplam değerlerinin oturumlara göre dağılımı incelendiğinde Ömür için bu değerler sırasıyla 77, 44, 35, 46 olarak hesaplanmıştır. Bu değerler birinci oturumdan üçüncü oturuma doğru bir azalış eğilimi gösterirken son oturumda tekrar artmıştır. Gaye (75, 58, 24 ve 55) ve Yavuz (62, 85, 28 ve 64) ile yapılan mülakatlarda da benzer durum tespit edilmiştir.

Tablo 4.25.'te sunulan müdahale türlerinin toplamları sunulmuştur. Bu değerlere göre, 583 tane odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalesi, 43 tane odaklanmamış kasıtlı öğretmen müdahalesi, 1 tane kasıtsız öğretmen müdahalesi, 26 tane odaklanmış kasıtlı kendi kendine müdahale gözlemlenmiştir. Odaklanmamış kasıtlı kendi kendine müdahale ise gözlemlenmemiştir. Bu verilere göre en çok kullanılan müdahale türü odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalesi olmuştur.

Odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalelerinin sayısı üçüncü oturuma doğru azalma eğilimi sergilemiş ve dördüncü oturumda tekrar artmıştır. Örneğin Ömür isimli katılımcının mülakatlarında bu sıralama 75, 39, 32 ve 45; Gaye'de 75, 49, 20, 45 ve Yavuz'da 57, 70, 25 ve 51 şeklinde olmuştur. Kasıtlı öğretmen müdahalelerinden odaklanmamış olan türün sayısı (toplam değerler Ömür için yedi, Gaye için on beş ve Yavuz için yirmi bir) oldukça az gözlenmiştir. Diğer taraftan kasıtsız öğretmen müdahalesi tüm mülakatlar boyunca sadece bir kez, Yavuz isimli katılımcı ile yapılan ikinci mülakatta, gözlemlenmiştir.

Tablo 4.25.'e göre kendi kendine odaklanmamış kasıtlı müdahale gözlenmemiştir. Kendi kendine odaklanmış kasıtlı müdahale sayısı 26 olarak raporlanmıştır. Bu müdahale türü Ömür ile yürütülen mülakatlarda toplam dört kere, Gaye'de sekiz kere ve Yavuz'da on dört gözlemlenmiştir.

Tablo 4.25.'te müdahale ve geri katlama mekanizmasını desteklemek için kullanılan dış teşvik sayıları bulunmaktadır. Ömür için kullanılan toplam dış teşvik sayısı 312, Gaye için 214 ve Yavuz için ise 565 olarak hesaplanmıştır. En çok dış teşvik gözlemlenen mülakatlar, Yavuz ile yapılmıştır. En az dış teşvike ihtiyaç duyan katılımcı ise Gaye olmuştur. Bu durum mülakatların toplam süresiyle de paralellik göstermiştir. Mülakatları toplamda en yüksek sürede (2 saat 42 dakika) tamamlayan katılımcı Yavuz iken en düşük sürede (1 saat 21 dakika) tamamlayan katılımcı Gaye olmuştur.

Yapılan müdahalelerin sonucunda oluşan geri katlamaların türleri değerlendirildiğinde, mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışmak türünün daha fazla gözlemlendiği tespit edilmiştir. Bu türden geri katlama toplamda 653 olarak hesaplanmıştır. En az görülen geri katlama türü ise sürekliliği bozan geri katlamadır. Bu türden geri katlamalar toplam 4 adet gözlenmiştir.

Geri katlamanın çıktısına yönelik değerler incelendiğinde toplamda 114 etkisiz geri katlama, 423 dış teşvik ile etkili geri katlama ve 116 dış teşvik olmadan etkili geri katlama gözlenmiştir. Toplam dış teşvik miktarı ise 1091 olarak tespit edilmiştir. Etkisiz geri katlamaların hepsinde dış teşvik kullanılmış olsa bile kullanılan dış teşvik sayısı, dış teşvik kullanılan geri katlama sayısının iki katı kadar çıkmıştır.

Tablo 4.25.'deki değerler odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalelerinin anlama sürecindeki yeri hakkında bir fikir verse de bu müdahalelere bağlı olarak gelişen geri katlamalar ve bu geri katlamaların çıktıları hakkında fikir vermemektedir. Bu nedenle Tablo 4.26.'daki değerleri oluşturulmuştur. Bu değerlere göre toplam 583 odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalesinin 543'ü mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma türünde geri katlama sürecini başlatmıştır. Bu 543 geri katlamanın 359 tanesi dış teşvik ile 91 tanesi de dış teşvik olmadan etkili bir şekilde sonuçlanmıştır. Toplamda 450 tane etkili müdahale-geri katlama döngüsü gözlenmiştir.

Tablo 4.26. Odaklanmış Kasıtlı Öğretmen Müdahalelerinin Başlattığı Döngüler

Geri Katlama Türü	Geri Katlama Sayısı	Geri Katlamanın Çıktısı	Çıktı Sayısı
Mevcut Anlamaları Kullanarak Daha İç Bir Seviyede Çalışmak	543	Etkisiz	93
		Dış Teşvik ile Etkili	359
		Dış Teşvik Olmadan Etkili	91
Diğer Geri Katlama Türleri	40	Etkisiz	12
		Dış Teşvik ile Etkili	24
		Dış Teşvik Olmadan Etkili	4

Odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalelerinden 40 tanesi diğer türde geri katlama süreçlerini başlatmıştır. Bu türler, daha iç bir seviyede toplamak, konunun dışına çıkıp orada çalışmak ve sürekliliği bozan geri katlama türleridir. Bu müdahale-geri katlama döngülerinden 12 tanesi etkisiz olmuştur. Diğer taraftan 24 tanesi dış teşvik ile 4 tanesi de dış teşvik olmadan etkili bir çıktı ile sonuçlanmıştır.

4.3. Öğretmen Adaylarının Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisini Yapılandırırken Anlama Seviyelerinde Toplam Faaliyet Süreleri

Bu başlık altında öğretmen adaylarının alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini anlamlandırma sürecinde hangi seviyelerde ne kadar süre faaliyet gösterdiği değerlendirilmiştir. Bu değerlendirme hem oturumlara göre hem de toplam zaman üzerinden yapılmıştır. Böylece üçüncü araştırma problemine cevap aranmıştır. Tablo 4.27.'de seviyelere ve mülakat oturumlarına göre zaman dağılımı ve bunların yüzdelerinin yuvarlanmış halleri sunulmuştur.

Tablo 4.27. Seviyelere ve Mülakatlara Göre Zaman Dağılımı

			Ön Bilgi	İmaj Oluşturma	İmaja Sahip Olma	Özellikleri Fark Etme	Formelleştirme	Gözlem Yapma	Yapılandırma	Toplam
Gaye	M1	Süre	00:03:34	00:14:01	00:03:40					00:21:15
		Yüzde	%17	%66	%17					%100
	M2	Süre	00:01:17	00:14:28	00:00:22	00:05:50				00:21:57
		Yüzde	%6	%66	%2	%26				%100
	M3	Süre	00:01:25	00:07:53	00:00:18	00:02:41				00:12:17
		Yüzde	%12	%64	%2	%22				%100
	M4	Süre	00:00:25	00:16:19	00:00:00	00:00:31	00:01:09	00:00:44	00:05:48	00:24:56
		Yüzde	%2	%65	%0	%2	%5	%3	%23	%100
	Toplam	Süre	00:06:41	00:52:41	00:04:20	00:09:02	00:01:09	00:00:44	00:05:48	01:20:25
		Yüzde	%8	%67	%4	%11	%2	%1	%3	%100
Ömür	M1	Süre	00:07:03	00:15:50	00:02:45					00:25:38
		Yüzde	%27	%62	%11					%100
	M2	Süre	00:02:49	00:11:52	00:00:49	00:06:33				00:22:03
		Yüzde	%13	%54	%4	%29				100%
	M3	Süre	00:00:45	00:13:06	00:00:00	00:09:30				00:23:21
		Yüzde	%3	%56	%0	%41				%100
	M4	Süre	00:02:42	00:16:08	00:00:00	00:02:04	00:00:08	00:01:21	00:10:20	00:32:43
		Yüzde	%8	%49	%0	%6	%1	%4	%32	%100
	Toplam	Süre	00:13:19	00:56:56	00:03:34	00:18:07	00:00:08	00:01:21	00:10:20	01:43:45
		Yüzde	%13	%55	%3	%17	%1	%1	%10	%100
Yavuz	M1	Süre	00:05:36	00:16:16	00:05:56					00:27:48
		Yüzde	%20	%59	%21					%100
	M2	Süre	00:07:42	00:19:56	00:03:12	00:22:28				00:53:18
		Yüzde	%15	%37	%6	%42				%100
	M3	Süre	00:02:29	00:17:40	00:00:15	00:10:36				00:31:00
		Yüzde	%8	%57	%1	%34				%100
	M4	Süre	00:01:57	00:29:08	00:00:00	00:04:38	00:00:40	00:01:43	00:12:07	00:50:13
		Yüzde	%4	%58	%0	%9	%2	%3	%24	100%
	Toplam	Süre	00:17:44	01:23:00	00:09:23	00:37:42	00:00:40	00:01:43	00:12:07	02:42:19
		Yüzde	%11	%51	%6	%23	%1	%1	%7	%100

Tablo 4.27.'ye göre tüm katılımcılar birinci oturumda sadece ön bilgi, imaj oluşturma ve imaja sahip olma seviyelerinde faaliyet göstermişlerdir. Bu seviyelerde geçen sürenin yüzdelik değerleri incelendiğinde Gaye isimli katılımcı birinci mülakatın %16'sında ön bilgi, %66'sında imaj oluşturma ve %17'sinde imaja sahip olma seviyesinde faaliyet göstermiştir. Bu değerler Ömür için sırasıyla %27, %62 ve %11 iken Yavuz için %20, %59 ve %21' olarak hesaplanmıştır. Tüm katılımcıların mevcut sürelerinin yarıdan fazlası imaj oluşturma seviyesinde faaliyetler ile geçmiştir.

Tüm katılımcılar ikinci oturumda ön bilgi, imaj oluşturma, imaja sahip olma ve özellikleri fark etme seviyelerinde faaliyet göstermişlerdir. Bu seviyelerde geçen sürenin yüzdelik değerleri incelendiğinde Gaye isimli katılımcı birinci mülakatın %6'sında ön bilgi, %66'sında imaj oluşturma, %2'sinde imaja sahip olma ve %26'sında özellikleri fark etme seviyesinde faaliyet göstermiştir. Bu değerler Ömür için sırasıyla %13, %54, %4 ve %29 iken Yavuz için %15, %37, %6 ve %42 olarak hesaplanmıştır. Gaye (%66) ve Ömür'ün (%54) imaj oluşturma seviyesinde faaliyet gösterme oranlarının mevcut zamanın yarısından fazla olduğu tespit edilmiştir. Yavuz ise en fazla özellikleri fark etme seviyesinde faaliyet göstermiştir.

Tüm katılımcılar üçüncü oturumda ön bilgi, imaj oluşturma, imaja sahip olma ve özellikleri fark etme seviyelerinde faaliyet göstermişlerdir. Bu seviyelerde geçen sürenin yüzdelik değerleri incelendiğinde Gaye isimli katılımcı birinci mülakatın %12'sinde ön bilgi, %64'ünde imaj oluşturma, %2'sinde imaja sahip olma ve %22'sinde özellikleri fark etme seviyesinde faaliyet göstermiştir. Bu değerler Ömür için sırasıyla %3, %56, %0 ve %41 iken Yavuz için %8, %57, %1 ve %34 olarak hesaplanmıştır. Tüm katılımcıların mevcut sürelerinin yarıdan fazlası imaj oluşturma seviyesinde faaliyetler ile geçmiştir.

Tablo 4.27.'ye göre katılımcıların tamamı, dördüncü mülakatta imaja sahip olma ve keşfetme dışındaki tüm seviyelerde faaliyet göstermiştir. İmaj oluşturma seviyesinde gösterilen faaliyetin süresinin dördüncü mülakat süresine oranı incelendiğinde, bu oranın yüzde elli ve üzeri olduğu tespit edilmiştir. Bu oranlar, Gaye için %65, Ömür için %49 ve Yavuz için %57 olarak hesaplanmıştır.

Mülakatların tamamında alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinin gelişimi söz konusu olmuştur. Dolayısıyla Tablo 4.27.'deki toplam satırları incelendiğinde zaman üzerinden yüzde olarak en az faaliyet gösterilen anlama seviyeleri formelleştirme (Gaye'de %2, Ömür ve Yavuz'da %1) ve gözlem yapma (tüm katılımcılarda %1) olmuştur. En fazla faaliyet gösterilen anlama seviyesinin ise imaj oluşturma olduğu tespit edilmiştir. Bu seviyenin oranları Gaye'de %67, Ömür'de %55 ve Yavuz'da %51 olarak hesaplanmıştır.

4.4. Pirie ve Kieren Modeline Göre Öğretmen Adaylarının Zihin Haritaları

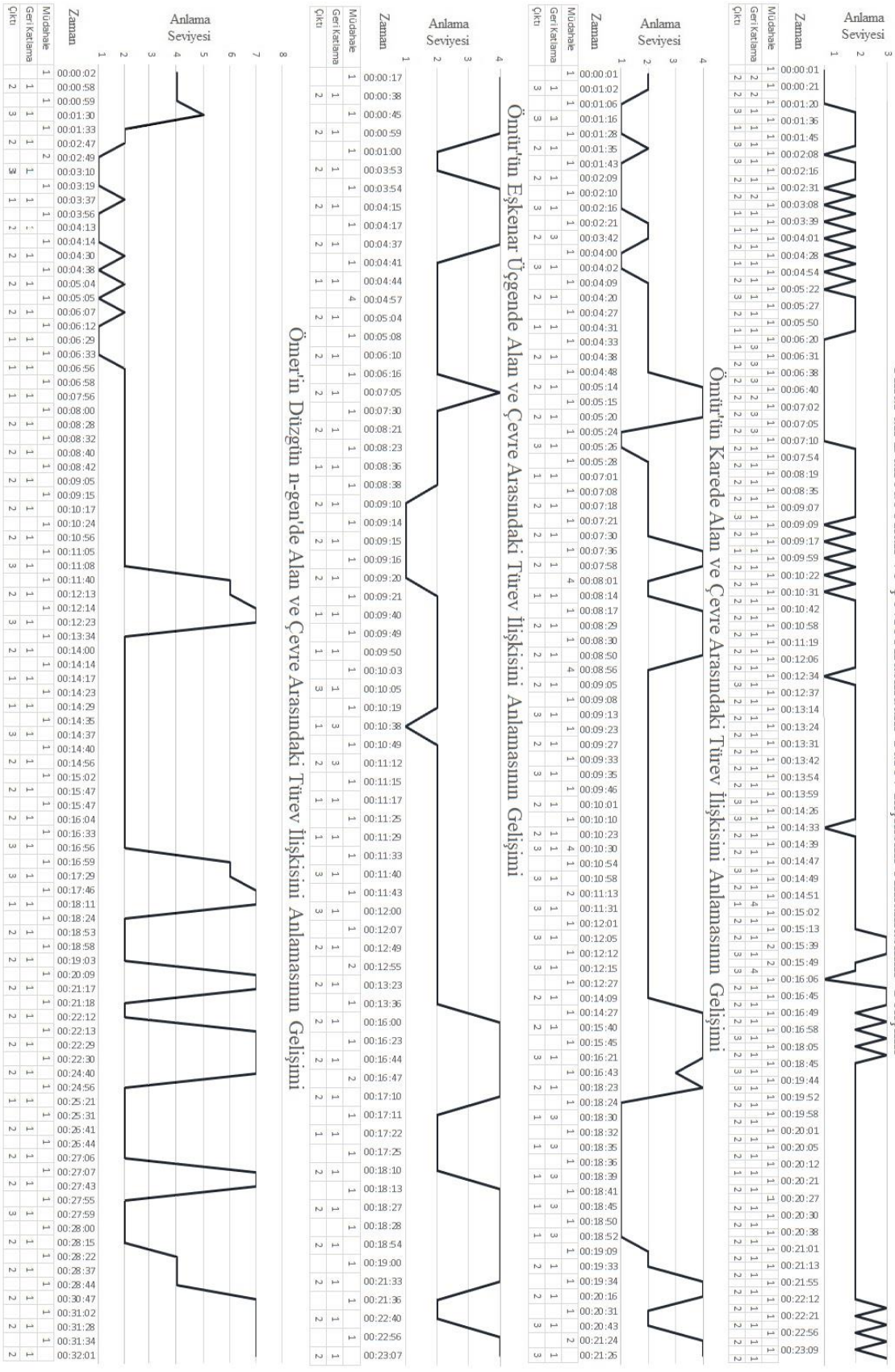
Bu başlık altında öğretmen adaylarının alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini anlamlandırma sürecindeki zihin haritaları değerlendirilmiştir. Dört oturum dizisi halinde

yapılan klinik mülakat serisinde müdahale ve geri katlama döngülerinin çok olmasından dolayı katılımcıların matematiksel anlama sürecini yansıtan tek bir harita çizmek mümkün olmamıştır. Bu nedenle katılımcıların anlamasının gelişime ilişkin haritaları oturum başına birer tane olmak üzere çizilmiştir. Oluşan dört harita birleştirilip tek görsele dönüştürülmüştür. Böylece dördüncü araştırma problemine cevap aranmıştır.

4.4.1. Ömür'ün Türev İlişkisini Anlama Sürecindeki Zihin Haritası

Ömür isimli katılımcının türev ilişkisini anlamlandırmasına ilişkin harita Şekil 4.1.'deki gibidir. Şekil 4.1.'e göre Ömür, birinci oturumda ön bilgi (1), imaj oluşturma (2) ve imaja sahip olma (3) seviyelerinde anlayış geliştirmiştir. İkinci ve üçüncü oturumda bu üç anlama seviyesine ek olarak özellikleri fark etme (4) seviyesinde bir faaliyet izlenmiştir. Son oturumda ilk dört seviyeye ek olarak formelleştirme (5), gözlem yapma (6) ve yapılandırma (7) seviyelerinde çalışılmıştır. Süreç boyunca keşfetme (8) seviyesinde bir anlayış gözlenmemiştir.

Tüm oturumlarda ön bilgi (1) seviyesinde faaliyete ihtiyaç duyulmuştur. Birinci oturumda önce dairenin alan ve çevre formülleri, türev, alan ve çevreye yönelik türev ilişkisinden yoksun önceki anlayış, genel türev denklemi, alan ve çevre formüllerini birer fonksiyon olarak ifade etme ve bağımlı-bağımsız değişkenlerin tespiti gibi ön bilgilere başvurulmuştur. Sonra genel türev denkleminin pay kısmındaki $f(r)$ ve $f(r+h)$ ifadelerinin ifade ettiği görseller ile ilgili halka yapısına yönelik günlük hayat örneği (tekerlek), çevre ve uzunluk arasındaki ilişki gibi ön bilgiler anlamanın gelişiminde kullanılmıştır. İkinci oturumda karenin kenar uzunluklarına göre alan ve çevre formülleri, dairede çap ve yarıçap arasındaki ilişki, dairenin alan ve çevre formülleri, dairenin merkezinin özellikleri konularında ön bilgilere başvurulmuştur. Üçüncü oturumda eşkenar üçgenin kenarortaylarının kenar ve köşelere göre açı özellikleri, 30^0, 60^0, 90^0 üçgeninin özellikleri ön bilgilerine ihtiyaç duyulmuştur. Son oturumda düzgün n-genin kenara dik uzaklığının kenarı iki eşit parçaya bölmesi, eşkenar ve ikizkenar üçgen, düzgün n-genin ağırlık merkezinden köşelere çizilen uzunluklarla kaç üçgene bölüneceği ve bu üçgenlerin açı özellikleri, Pisagor teoremi, trigonometrik (tanjant ve kotanjant) fonksiyonlar ön bilgileri kullanılmıştır.



Şekil 4.1. Ömür'ün Türev İlişkisini Anlama Sürecine İlişkin Zihin Haritası

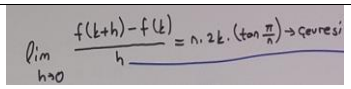
Anlama sürecini resmetme çabasıyla oluşturulan haritaya göre katılımcı, tüm oturumlarda imaj oluşturma (2) seviyesinde faaliyet gerçekleştirmiştir. Grafikler seviyelerdeki faaliyet sürelerini orantısal olarak yansıtmadığı için bu seviyede gösterilen faaliyetlerin süresini diğer seviyeler ile karşılaştırmak için daha önce raporlanmış olan Tablo 4.27.'ye bakmak gerekmektedir. Tablo 4.27.'de de raporlandığı üzere tüm oturumlardaki faaliyetlerin yarısından fazlası imaj oluşturma seviyesinde gösterilmiştir.

Tablo 4.28. Ömür'ün Formelleştirme Seviyesindeki Söylemleri

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
00:59	A	Ağırlık merkezi, merkez. Şimdi, soru şu: "Düzgün çokgende alan-çevre türev ilişkisi kurabilir miyiz? Kurabilirsek nasıl kurabiliriz?"	1			
01:14	Ö	Eğer kurarsak onu da daha öncekiler gibi ağırlık merkezine göre göre kurmalıyız.				5
01:19	A	Ağırlık merkezine göre… Fonksiyon olarak tanımlayacağımız şey, neye bağlı olması lazım? Kenar uzunluğuna mı bağlı olması lazım, yoksa ağırlık merkezine…	6			
01:30	Ö	Ağırlık merkezinden kenara olan dik uzaklığına bağlı bir fonksiyon…		1	3	5

Katılımcının en az faaliyeti formelleştirme (5) seviyesinde olmuştur. Bu seviye, sadece bir kez gözlenmiştir. Katılımcının formelleştirme seviyesindeki faaliyeti Tablo 4.28.'de sunulmuştur. Tabloda raporlanan diyalogdan da anlaşılacağı üzere katılımcı kare ve eşkenar üçgende oluşturduğu imajlar ve bu imajların ayrım ve kombinasyonları neticesinde fark edilen özellikleri düşünmüş ve bunlara bağlı olarak ortak bir yol geliştirmiştir.

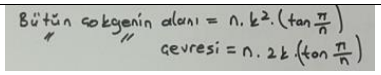
Tablo 4.29. Ömür'ün Gözlem Yapma Seviyesindeki Faaliyetlerinden Biri

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
16:59	A	Bunun sonucu nedir? (Genel türev denklemi işaret ediliyor.) Ne öngörüyorsun?	1			
17:03	Ö	E! Alanın… E! Türevine göre alan fonksiyonunun sonucu olarak çevreyi verecek.				6
17:10	A	Güzel. O zaman eşittir yaz.				
17:13	Ö	Eşittir, $n.2k.tan\frac{\pi}{n}$'dir.				6
17:24	A	Buraya da çevre yazalım.				
17:29	Ö	Çevresi. Yani alanı olan… I! Alanlara olan değişimin uzaklıklara olan değişime oranı bize çevreyi verir.		1	3	6
						

Gözlem yapma (6) seviyesinde dördüncü oturumda toplamda iki faaliyet izlenmiştir. Bu faaliyetlerden biri Tablo 4.29.'da sunulmuştur. Bu mülakat kesitinden de anlaşıldığı üzere katılımcı düzgün n-gende türev ilişkisini teorem olarak ifade edebilecek seviyede anlayış geliştirmiştir.

Anlamanın gelişimine dair haritaya göre her oturumda zikzaklar (seviyeler arası geri katlamalar) izlenmiştir. Bu zikzakların sıklığı birinci oturumdan üçüncü oturuma doğru azalış eğilimi (64, 39, 26 köşe) izlerken dördüncü oturumda (45 köşe) tekrar artış göstermiştir. Bu durum Tablo 4.1.'deki geri katlamaların sayısının mülakat oturumlarına göre dağılımıyla da desteklenmiştir. Tabloda, oturum sırasına göre müdahale-geri katlama döngü sayısı 77, 44, 35, 46 olarak raporlanmıştır. Ancak döngülerin hepsi haritaya bir zikzak olarak yansımamıştır. Çünkü aynı seviye içinde gözlenen geri katlamalar bulunmaktadır. Tablo 4.30.'da dördüncü oturumdan bir kesit, bu duruma örnek olarak, sunulmuştur. Tabloda iki müdahale ve geri katlama döngüsü verilmiştir. Bu döngülerin her ikisi de imaj oluşturma (2) seviyesinden imaj oluşturma seviyesine olduğu için söz konusu değişim Şekil 4.1.'deki anlamanın gelişimini gösteren haritaya yansımamıştır.

Tablo 4.30. Ömür'ün Aynı Seviyeye Geri Katlama Yapmasına Bir Örnek

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
10:24	A	Bu sayıyı burada yazdığında pi ile karışma ihtimali var. (Tanjant ifadesinden sonra gelen k ifadesinin karışma ihtimali ima ediliyor.) Uzunluk ile açıyı karıştırma ihtimali var. Bütün alan ne olur?	1			
10:32	Ö	(Suskunluk)				2
10:35	A	Bütün çokgenin alanı?	6			
10:39	Ö	n çarpı…				2
10:40	A	Tamam. Bütün çokgenin alanı yazalım.	6			
10:56	Ö	(Yazıyor) $n.k^2.tan\frac{\pi}{n}$ olur.		1	2	2
11:05	A	n olur. Çevre?	1			
11:08	Ö	Çevresi de…Tüm kenar uzunlukları olmalı. O zaman (yazıyor) büyün çokgenin… n çarpı şu uzunluğu. (Çokgenin bir kenarını işaret ediyor.) O da $2k.tan\frac{\pi}{n}$ olur.		1	3	2
						

4.4.2. Gaye'nin Türev İlişkisini Anlama Sürecindeki Zihin Haritası

Gaye isimli katılımcının türev ilişkisini anlamlandırmasına ilişkin harita Şekil 4.2.'deki gibidir. Şekil 4.2.'ye göre Ömür, birinci oturumda ön bilgi (1), imaj oluşturma (2) ve imaja sahip olma (3) seviyelerinde anlayış geliştirmiştir. İkinci ve üçüncü oturumda bu üç anlama seviyesine ek olarak özellikleri fark etme (4) seviyesinde bir faaliyet izlenmiştir. Son oturumda imaja sahip olma (3) dışındaki ilk dört seviyeye ek olarak formelleştirme (5), gözlem yapma (6) ve yapılandırma (7) seviyelerinde çalışılmıştır. Süreç boyunca keşfetme (8) seviyesinde bir anlayış gözlenmemiştir.



Şekil 4.2. Gaye'nin Türev İlişkisini Anlama Sürecine İlişkin Zihin Haritası

Tüm oturumlarda ön bilgi (1) seviyesinde faaliyete ihtiyaç duyulmuştur. Birinci oturumda önce dairenin alan ve çevre formülleri, türevin teğet anlamı, genel türev denklemi, alan ve çevre formüllerini birer fonksiyon olarak ifade etme ve bağımlı-bağımsız değişkenlerin tespiti, çember tanımı, çember ve daire arasındaki ilişki, halka yapısına ilişkin günlük hayat örneği (simit) gibi ön bilgilere başvurulmuştur. İkinci oturumda karenin kenar uzunluklarına göre alan ve çevre formülleri, dairede çap ve yarıçap arasındaki ilişki, dairenin alan ve çevre formülleri, köklü sayılar konularında ön bilgilere başvurulmuştur. Üçüncü oturumda Pisagor teoremi, 30^0, 60^0, 90^0 üçgeninin özellikleri ön bilgilerine ihtiyaç duyulmuştur. Son oturumda düzgün n-genin köşegenlerinin kesişim yeri, beşgenin köşegen özellikleri, çevrel çemberin yarıçapı, trigonometrik (tanjant ve kotanjant) fonksiyonlar ön bilgileri kullanılmıştır.

Ömür isimli katılımcıda olduğu gibi Gaye de tüm oturumlarda imaj oluşturma (2) seviyesinde faaliyet gerçekleştirmiştir. Grafikler seviyelerdeki faaliyet sürelerini orantısal olarak yansıtmadığı için bu seviyede gösterilen faaliyetlerin süresini diğer seviyeler ile karşılaştırmak için daha önce raporlanmış olan Tablo 4.27.'ye bakmak gerekmektedir. Tablo 4.27.'de de raporlandığı üzere tüm oturumlardaki faaliyetlerin yarısından fazlası imaj oluşturma seviyesinde gösterilmiştir.

Tablo 4.31. Gaye'nin Formelleştirme Seviyesindeki Faaliyetlerinden Biri

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
08:30	A	r ile yaptığımız zaman alan formülü alan çevre türev ilişkisini sağlayabilir miyiz?	1			
…		…				
08:44	G	Hı karede sağlamıyordu. Üçgen… Hocam ağırlık merkezine dik indirerek yapmamız lazım.				5
08:51	A	Dike göre yapmamız gerekiyor. O zaman oluşturacağımız alan formülünde değişken olarak sadece ne olması lazım?	6			
08:57	G	Sessizlik. (k uzuluğunu işaret ediyor.)				5
09:01	A	k olması lazım.	6			
09:03	G	k olması lazım.		1	2	5

Katılımcının en az faaliyeti sırasıyla gözlem yapma (6) ve formelleştirme (5) seviyelerinde olmuştur. Katılımcının formelleştirme seviyesindeki faaliyeti iki kere gözlenmiştir. Katılımcının formelleştirme seviyesindeki ikinci faaliyeti Tablo 4.31.'de sunulmuştur. Tabloda raporlanan diyalogdan da anlaşılacağı üzere katılımcı daha önceden oluşturmuş olduğu imajlar ve bu imajların ayrım ve kombinasyonları neticesinde fark edilen özellikleri düşünmüş ve bunlara bağlı olarak ortak bir yol geliştirmiştir.

Geliştirilen yol, standart değişken fikridir. Böylece formelleştirme (5) seviyesinde bir faaliyet sergilemiştir.

Katılımcının gözlem yapma (6) seviyesindeki faaliyeti iki kere olmuştur. Katılımcının bu seviyedeki faaliyetlerinden biri Tablo 4.32.'de sunulmuştur. Bu mülakat kesitinden de anlaşıldığı üzere katılımcı düzgün n-gende türev ilişkisini teorem olarak ifade edebilecek seviyede anlayış geliştirmiştir.

Tablo 4.32. Gaye'nin Gözlem Yapma Seviyesindeki Faaliyetlerinden Biri

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
13:49	A	Hı! Hı! Beşse beştir. Onsa ondur. Şunun açıklamasını yapalım. Niye olması şaşırtıcı bir şey miydi?	1			
14:01	G	Yok. Değil.				6
14:02	A	Niye? Olacağını nerden öngördük? Neye dayanarak ön gördük?	6			
14:07	G	Çünkü alanın türevi genelde çevreyi veriyor.				6
14:09	A	Ama neye göre oluşturduğumuzda oluşuyor?	6			
14:11	G	Şey, e! ağırlık merkezinden kenarlara indirdiğimiz dikmeye göre.		1	2	6

Anlamanın gelişimine dair haritaya göre her oturumda zikzaklar (seviyeler arası geri katlamalar) izlenmiştir. Bu zikzakların sıklığı birinci oturumdan üçüncü oturuma doğru azalış eğilimi (32, 28, 23 köşe) izlerken dördüncü oturumda (43 köşe) tekrar artış göstermiştir. Bu durum Tablo 4.1.'deki geri katlamaların sayısının mülakat oturumlarına göre dağılımıyla da desteklenmiştir. Tabloda, oturum sırasına göre müdahale-geri katlama döngü sayısı 75, 58, 24, 55 olarak raporlanmıştır. Ömür'dekine benzer şekilde Gaye'de de bazı müdahale-geri katlama döngüleri aynı seviye içinde olduğu için haritaya bir zikzak olarak yansımamıştır.

4.4.3. Yavuz'un Türev İlişkisini Anlama Sürecindeki Zihin Haritası

Yavuz isimli katılımcının türev ilişkisini anlamlandırmasına ilişkin harita Şekil 4.3.'teki gibidir. Şekil 4.3.'e göre Ömür, birinci oturumda ön bilgi (1), imaj oluşturma (2) ve imaja sahip olma (3) seviyelerinde anlayış geliştirmiştir. İkinci ve üçüncü oturumda bu üç anlama seviyesine ek olarak özellikleri fark etme (4) seviyesinde bir faaliyet izlenmiştir. Ancak üçüncü oturumdaki ön bilgi seviyesindeki eylem, satırların müdahale-geri katlama döngüsüne göre kısıtlanmadan dolayı, haritaya yansımamıştır. Son oturumda imaja sahip olma (3) dışındaki ilk dört seviyeye ek olarak formelleştirme (5), gözlem yapma (6) ve

yapılandırma (7) seviyelerinde çalışılmıştır. Süreç boyunca keşfetme (8) seviyesinde bir anlayış gözlenmemiştir.

Tüm oturumlarda ön bilgi (1) seviyesinde faaliyete ihtiyaç duyulmuştur. Birinci oturumda önce dairenin alan ve çevre formülleri, oran ve orantı, alan ve çevre formüllerini birer fonksiyon olarak ifade etme ve bağımlı-bağımsız değişkenlerin tespiti, polinom fonksiyonlarda türev, genel türev denklemi, türevin anlık hız anlamı, gibi ön bilgilere başvurulmuştur. Sonra çarpanlara ayırma, limitin cebirsel özellikleri, genel türev denkleminin pay kısmındaki $f(r)$ ve $f(r+h)$ ifadelerinin ifade ettiği görseller, halka yapısına ilişkin günlük hayat örneği (tekerlek) gibi ön bilgiler anlamanın gelişiminde kullanılmıştır. İkinci oturumda karenin kenar uzunluklarına göre alan ve çevre formülleri, dairede çap ve yarıçap arasındaki ilişki, çemberin tanımı, çemberin merkezinin özellikleri, ağırlık merkezi (fizik bilgisi olarak), karenin köşegenlerinin kesişimi ile ilgili açı ve uzunluk özellikleri, alan ve çevre kavramlarının boyut özellikleri, dairede teğet ve normal konularında ön bilgilere başvurulmuştur. Üçüncü oturumda eşkenar üçgenin kenarortaylarının kenar ve köşelere göre açı özellikleri, eşkenar üçgende ağırlık merkezi, üçgende dikme-açıortay-kenarortay arasındaki ilişki ön bilgilerine ihtiyaç duyulmuştur. Son oturumda düzgün n-genin köşegenlerinin kesişim yeri, beşgenin köşegen özellikleri, çevrel çember, iç teğet çemberi, çemberde kirişe inen dikmenin kirişi iki eşit parçaya ayırması, ağırlık merkezi, trigonometrik (tanjant ve kotanjant) fonksiyonlar ön bilgileri kullanılmıştır.

Diğer katılımcılarda da olduğu gibi Yavuz da tüm oturumlarda imaj oluşturma (2) seviyesinde faaliyet gerçekleştirmiştir. Grafikler seviyelerdeki faaliyet sürelerini orantısal olarak yansıtmadığı için bu seviyede gösterilen faaliyetlerin süresini diğer seviyeler ile karşılaştırmak için daha önce raporlanmış olan Tablo 4.27.'ye bakmak gerekmektedir. Tablo 4.27.'de de raporlandığı üzere, sırasına göre, oturum sürelerinin %59, %37, %57 ve %58'inde ve toplam sürenin %51'inde bu seviyede faaliyet göstermiştir.



Şekil 4.3. Yavuz'un Türev İlişkisini Anlama Sürecine İlişkin Zihin Haritası

Katılımcının en az faaliyeti sırasıyla formelleştirme (5) ve gözlem yapma (6) seviyelerinde olmuştur. Tablo 4.27.'ye göre bu değerler formelleştirme için 40 saniye ve gözlem yapma için 1 dakika 43 saniye olarak hesaplanmıştır. Bu durum haritanın dördüncü oturum kısmına da yansımıştır. Bu seviyede gösterilen 4 faaliyetten biri müdahale-geri katlama döngüsünün ortalarında bir yerde olduğu için grafiğe 3 faaliyet yansımamıştır. Katılımcının formelleştirme seviyesindeki faaliyetlerden biri Tablo 4.33.'te sunulmuştur. Tabloda raporlanan diyalogdan da anlaşılacağı üzere katılımcı, ilk olarak, kare ve eşkenar üçgen ile ilgili mevcut imajlar ve bu imajların ayrım ve kombinasyonları üzerine düşünmüştür. Bu durum özellikleri fark etme (4) seviyesi olarak kodlanmıştır. Sonra buna bağlı olarak ortak bir yol geliştirmiştir. Geliştirilen yol, standart değişken fikridir. Böylece formelleştirme (5) seviyesinde faaliyete başlamıştır.

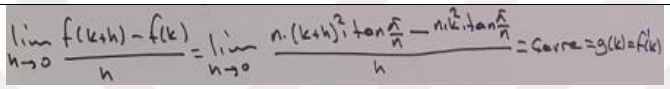
Tablo 4.33. Yavuz'un Formelleştirme Seviyesindeki Faaliyetlerinden Biri

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
16:55	A	*a*'dır. *a*'ya göre oluşturduk. Mesela karede *a*'ya göre oluşturduğumuz zaman sağlıyor muydu?	1			
17:00	Y	Yok. Biz *b*'ye göre oluşturduğumuzda sağladı.				4
17:01	A	Eşkenar üçgende? Eşkenar üçgende sağlıyor muydu?	6			
17:05	Y	Sağlamadı.				4
17:06	A	Sağlamıyor. (Gülümseme) O zaman...	6			
17:09	Y	O zaman *k* ile ilgili bir şey yapmak lazım...				5
17:10	A	*k*'ya göre.				
17:11	Y	*k*'ya göre.		1	2	5

Katılımcının gözlem yapma (6) seviyesindeki faaliyeti altı kere olmuştur. Bunlardan iki tanesi müdahale-geri katlama döngüsünün ortasına denk geldiği için haritada 4 faaliyet görünmektedir. Katılımcının bu seviyedeki faaliyetlerinden biri Tablo 4.34.'te sunulmuştur. Bu mülakat kesitinden de anlaşıldığı üzere katılımcı düzgün n-gende türev ilişkisini teorem olarak ifade edebilecek seviyede anlayış geliştirmiştir. Böylece türevin genel denklemini açama ihtiyacı hissetmeden sonucunu teorem olarak ifade etmiştir.

Tablo 4.34. Yavuz'un Gözlem Yapma Seviyesindeki Faaliyetlerinden Biri

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
26:09	A	Hı! Hı! Ne çıkar bunun sonucu?	1			
26:13	Y	Ya! Bunun sonucu… I! 2… I! n k tanjant… I! π bölü n çıkacak.				6
26:21	A	E, yani çevre olur.				
26:22	Y	Çevre olacak.				6
26:22	A	Çevre yaz işlemini de yapmaya gerek yok.				
26:24	Y	Eşittir çevre mi olur?				6
26:27	A	Hı! Hı! Çevre yaz gitsin. Türev, çevre, $g(k)$ yaz. Ne yazarsan.				
26:32	Y	Eşittir çevre.				6
26:33	A	O da eşittir $g(k)$.	6			
26:35	Y	Eşittir $g(k)$. (Senkron bir şekilde) O da eşittir…				6
26:37	A	(Katılımcı yazarken araştırmacı seslendiriyor.) O da eşittir $f'(k)$.	6			
26:43	Y	k.		1	2	6



Anlamanın gelişimine dair haritaya göre her oturumda zikzaklar (seviyeler arası geri katlamalar) izlenmiştir. Bu zikzakların sıklığı birinci oturumdan dördüncü oturuma doğru gidildiğinde önce arttığı sonra azalıp tekrar arttığı (41, 77, 17 ve 67 köşe) tespit edilmiştir. Bu durum Tablo 4.1.'deki geri katlamaların sayısının mülakat oturumlarına göre dağılımıyla da desteklenmiştir. Tabloda, oturum sırasına göre müdahale-geri katlama döngü sayısı 62, 85, 28, 64 olarak raporlanmıştır. Haritanın altındaki veri tablolarından da anlaşılacağı üzere, bazı müdahale-geri katlama döngüleri aynı anlayış seviyesinde gerçekleştiği için haritaya yansımamıştır.

BÖLÜM 5: SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu başlık altında önce araştırmanın sonuçları alan yazınındaki diğer çalışmalar ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma neticesinde araştırmanın literatürdeki yeri değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmeye bağlı olarak da araştırmanın sınırlılıkları ve sonuçları doğrultusunda öneriler sunulmuştur.

5.1. Sonuç ve Tartışma

Bu çalışma kapsamında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini anlamlandırma süreçleri, Pirie ve Kieren'in (1989, 1994) ortaya koyduğu matematiksel anlamanın gelişimi çerçevesinden incelenmiştir. Anlamanın gelişiminde müdahale ve geri katlama süreçleri Martin'in (2008) ortaya koyduğu teorik çerçeveye göre değerlendirilmiştir. Araştırmanın temel sonucu, öğretmen adaylarının alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini kurabildikleri olmuştur. Böylece bu ilişkinin anlamlandırılması ile ilgili Mamolo ve Zazkis'in (2012) raporladığı zorluğa çözüm önerisi geliştirilmeye çalışılmıştır. Söz konusu çalışmada matematik bölümünde okumakta olan ve analiz derslerini almış 32 öğrenciye karede türev ilişkisi sunulmuş ve katılımcılar (biri dışında) bu ilişkiyi kabul etmemiştir. Mamolo ve Zazkis'in (2012) çalışmasındaki katılımcı grubu, analiz derslerini başarıyla tamamlamış dolayısıyla türev kavramını bilen matematik bölümü öğrencilerinden oluşmaktadır. Bu nedenle türev ilişkisini anlamlandırmalarındaki zorluk, türevin kendi içindeki zorluktan (Asiala, Cottrill, Dubinsky ve Schwingendorf, 1997; Çetin, Dane ve Bekdemir, 2012; Orton, 1983; Tatar, Okur ve Tuna, 2008) kaynaklandığı söylenemez. Bu zorluğun olası sebeplerinin 1-) kenar uzunluğuna bağlı geleneksel (Zazkis ve Mamolo, 2011) alan ve çevre formüllerinin anlamanın gelişimine ket vurması ve 2) söz konusu çalışmada (Mamolo ve Zazkis, 2012) türev ilişkisinin doğrudan verilmesi olabilir. Bu ihtimaller göz önünde bulundurularak yürütülen bu çalışmada öğretmen adaylarının türev ilişkisini kendilerinin yapılandırabileceği ortamın hazırlanmasına dikkat edilmiştir. Böylece uygun ortam hazırlandığında katılımcıların türev ilişkisini kendilerinin yapılandırabildiği tespit edilmiştir. Bu ortam hazırlanırken ***a)*** anlamanın gelişiminde sırasıyla imaj oluşturma seviyesi, özellikleri fark etme ve ön bilgi seviyeleri ***b)*** müdahale-geri katlama

döngülerinin önemi ortaya çıkmıştır. Bu maddeler, alt başlıklar halinde aşağıda sunulmuştur.

5.1.1. Anlamanın Gelişiminde Önemli Seviyeler

Anlamanın gelişiminde imaj oluşturma, özellikleri fark etme ve ön bilgi seviyelerinin önemi bu çalışmanın ilk önemli sonucudur. Seviye ve mülakatlara göre zaman dağılımı bulgusuna göre klinik mülakat sürelerinin yarıdan fazlası ***imaj oluşturma seviyesinde*** faaliyet ile değerlendirilmiştir. Bu sonuç, anlamanın gelişimini inceleyen diğer çalışmalar (Argat, 2012; Codes, Astudillo, Martin ve Pérez, 2013; Gülkılık, 2013; Gülkılık, Uğurlu ve Yürük, 2015; LaCroix, 2002; Martin ve Pirie, 2003; Pirie; 2002) ile uyumludur. Bunun sebebi, anlamanın gelişimi sürecinde ortaya çıkan ihtiyaçlardan dolayı bu seviyeye sıkça geri katlama yapılıp yeni imajlar oluşturulması olabilir (Argat, 2012; Gülkılık, 2013; Gülkılık, Uğurlu ve Yürük, 2015). Böylece birey, hatalı anlamalarını düzeltme ve eksik anlamalarını olgunlaştırma fırsatı oluşturabilmektedir (Gülkılık, 2013; Pirie, Martin ve Kieren, 1996). Bu çalışmada, katılımcıların imaj oluşturma seviyesindeki eylemlerinin büyük bir kısmını alan ve çevre fonksiyonların üretilmesi olmuştur. Bu fonksiyonların bazıları türev ilişkisini ortaya çıkarmazken standart değişkene göre oluşturulanları türev ilişkisini ortaya çıkarmıştır. Bu ise odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalelerine bağlı olarak gelişen mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviye çalışma türünde geri katlamalar ile mümkün olmuştur.

İmaj oluşturma faaliyetleri sayesinde geleneksel ya da geleneksel olmayan bağımsız değişkenlerle alan ve çevre fonksiyonlarının oluşturulması değerli bir faaliyettir. Çünkü (daha önce de bahsedildiği üzere) Mamolo ve Zazkis'in (2012) çalışmasında ilişkilerin doğrudan verilmesinden kaynaklı türev ilişkisinin katılımcılar tarafından reddedilmesi bir nevi imaj transferi denemesi gibi değerlendirilebilir. Oysa anlamanın gelişimi sürecinde imaj transferi mümkün değildir (Pirie ve Kieren, 1989). Diğer taraftan Mamolo ve Zazkis'in (2012) ilişkinin ispatını doğrudan sunmasının başlangıç noktası teorem olarak değerlendirilirse gözlem yapma, ilişkinin ispat edilmesi yapılandırma, bu süreçte alan ve çevre hesabıyla ilgili yol-yöntem anlamına gelen fonksiyonların kullanılması formelleştirme seviyesindeki eylemler (Pirie ve Kieren, 1994) olarak değerlendirilebilir. Kitabı tersten okumaya ya da hikâyenin sonunu önce anlatmaya benzeyen bu yaklaşım, bireylere imaj oluşturma imkânı sunamaması pek muhtemeldir. Bu nedenle hikâyenin

sonu niteliğindeki yol veya yöntemleri, bireylerin kendilerinin üretebileceği öğrenme fırsatlarının önemi alan yazınında (Altun, 2010; Akkuş, Akkaş ve Yıldırım, 2018; Küçük ve Demir, 2009; Pesen, 2008; Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013) vurgulanmıştır.

Bu çalışmada katılımcılar, imaj oluşturma seviyesinde ilk olarak geleneksel yol ve yöntem olan dairede yarıçap ve düzgün çokgenlerde kenar uzunluğu değişkenine göre çalışma eğilimi göstermişlerdir. Sonra bunların dışına çıkıp dairede çap, ağırlık merkezinin köşelere uzaklığı, kenar uzunluğunun yarısı ve en nihayetinde standart değişkene (ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığına) göre alan ve çevre fonksiyonlarını geliştirmek için yeni imajlar oluşturmuşlardır. Böylece Zazkis ve Mamolo'nun (2011) geleneksel olarak nitelendirdiği kenar uzunluğuna bağlı alan ve çevre formüllerine alternatif fonksiyonlar üretmişlerdir. Bu alternatifler sayesinde gelişen anlama sürecinde veya ileri düzey problem çözümünde yerine göre engel teşkil eden geleneksel yol ve yöntemler (Battista ve Clements, 1996; Dağlı ve Peker, 2012; Köşe ve Tanışlı, 2014; Küçük ve Demir, 2009) diğer bir deyişle kavram prototipleri (Karamustafaoğlu, Karamustafaoğlu ve Yaman, 2005) genişletilerek işlevsel hale getirilmiştir. Böylece alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinin anlamlandırılmasına sağlam bir zemin hazırlanmıştır.

İmaj oluşturma seviyesi, anlamanın gelişimi için zemin hazırlarken tek başına imajların varlığı anlamanın gelişimini sağlamayabilir. Çünkü bu imajların bir birleriyle karşılaştırılması, ortak ve farklı yönlerinin ortaya çıkarılması ve bu eylemler vasıtasıyla hatalı ya da iyi yapılandırılmış genellemelerin ortaya çıkarılması, imajların oluşturduğu zemin üzerine yapı inşa edebilmek için önemlidir (Pirie ve Kieren, 1989). Bu açıdan bakıldığında (bu çalışmanın sonuçlarından biri olan) zaman açısından en çok faaliyet gösterilen ikinci seviyenin ***özellikleri fark etme seviyesi*** olması anlamlıdır. Bu sonuç, alan yazınındaki diğer araştırmalar (Codes, Astudillo, Martin ve Pérez, 2013; LaCroix, 2002) ile uyum göstermektedir. Özellikleri fark etme seviyesindeki eylemlerin anlamanın gelişimindeki yeri ve önemi bu çalışmanın sonuçları açısından değerlendirildiğinde üç önemli sonuçtan bahsedilebilir.

1. Bu çalışmada, özellikleri fark etme seviyesi kare, eşkenar üçgen ve düzgün n-genin alanıyla çevresi arasındaki türev ilişkisinin kurulduğu oturumlarda gözlemlenmiştir. Örneğin karede kenar uzunluğuna göre türev ilişkisi kurulamadığında odaklanmış kasıtlı

öğretmen müdahalesi aracılığıyla dairede çap değişkenine göre ilişki kurulmaya çalışılmıştır. Böylece dairede çap, dairede yarıçap ve karede kenar uzunluğu imajları oluşturulmuştur. Yine odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalesi aracılığıyla bu imajların karşılaştırılması sonucunda karede bir merkez arayışı başlamıştır. Bu karşılaştırma eylemi özellikleri fark etme seviyesi için tanımlanmış bir eylemdir (Pirie ve Kieren, 1989). Gaye ve Yavuz, bu merkez arayışına bağlı olarak ağırlık merkezinin köşeye uzaklığı bağımsız değişkenine göre bir imaj daha oluşturmuştur. Sonra yine bir imajlar arası karşılaştırma sayesinde standart değişkene göre çalışmaya başlamışlardır. Ömür ise doğrudan karede kenar uzunluğunun yarısına göre türev ilişkisini kurmuştur. Eşkenar üçgene gelindiğinde tüm katılımcılar önce geleneksel olarak kenar uzunluğu bağımsız değişkenine göre çalışmışlardır. Sonra karede fazladan imaj oluşturan Gaye ve Yavuz standart değişkene göre çalışmaya başlamıştır. Ancak Ömür kenar uzunluğunun yarısına göre tekrar başarısız bir imaj oluşturma ihtiyacı hissetmiştir. Bu durum anlama sürecinde uyan ve uymayan imajların oluşturulması ve bunların karşılaştırılmasının önemini ortaya koymaktadır. Bu bulgudan hareketle bireyin anlama seviyelerinde bir eylemi farkında olmadan başarsa bile ilerleyen anlama sürecinde bu imaja ve bu imajın diğer imajlarla karşılaştırılmasına ihtiyaç duyabilir. Bu durum, özellikleri fark etme seviyesinin (çalışma özelinde tespit edilen) birinci önemdir.

2. Katılımcılar, anlamanın gelişimi sürecinde yukarıda bahsedilen farklı imajlar oluşturmuştur. Sonra bu imajları, odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahaleleri aracılığıyla karşılaştırmışlardır. Böylece kare, eşkenar üçgen ve düzgün n-gen'de standart değişkene göre türev ilişkisini kurabilmeleri standart değişkene göre çalışmaya başlamış ve türev ilişkisini kurabilmişlerdir. Bu açıdan değerlendirildiğinde bu seviye faaliyetleri sayesinde ortak özellik olan standart değişkene göre alan ve çevre formülleri kurularak formelleştirme seviyesine ve sonraki seviyelere geçiş mümkün olmuştur. Çünkü özellikleri fark etme seviyesinde ortaya çıkan durumlar üzerine muhakeme yapılması (Pirie ve Kieren, 1989) ve bu durumların ortak yanlarının (çalışma özelinde standart değişken fikrinin) çıkarılması (Pirie ve Kieren, 1989, 1994) ile formelleştirme seviyesinde anlayış gelişmiştir.

3. Yüksek bir biliş seviyesiyle önceki anlamalara dönüp bunları mevcut problem durumuyla ilişkilendirme, 1- mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma ve 2- daha iç bir seviyede toplama türünde geri katlamalar ile olmaktadır. Birinci tip geri

katlamada önceki anlayışta değişiklik meydana gelirken ikincisinde değişiklik olmaz (Martin, 2008). Bu çalışmada özellikleri fark etme seviyesi için tanımlanan imajların karşılaştırılması, ortak ve farklı yönlerinin yüksek bir biliş ile irdelenmesi eylemlerinin anlamayı geliştirmek için önemli olduğu tespit edilmiştir. Katılımcıların yaptığı geri katlamalardan bu iki türün sayıca çok fazla olması yönündeki bulgu, bu tespiti desteklemiştir. Ayrıca bu bulgu, katılımcıların daha önceki öğrenme, anlama ve problem süreçlerini zihin perdesine yansıtması ve bu eylemlerinden o an için işine yarayanı seçebilmesi yönüyle üstbilişsel düşünme becerilerinin gelişkin olduğu (Lan, 2007) şeklinde de yorumlanabilir.

Özellikleri fark etme seviyesine özgü tek faaliyet, imajların karşılaştırılarak bu imajlar arasındaki benzerlik ve farklılıkları ortaya çıkarmak olmamıştır. Çünkü bu seviyede kısıtlı imajlara dayalı hatalı ya da iyi yapılandırılmamış genellemeler de bulunabilir (Pirie ve Kieren, 1989). Dolayısıyla kare ve eşkenar üçgen gibi kısıtlı imajlara dayalı olarak alan ve çevre arasındaki türev ilişkisine yönelik sonuç yazılması da bu seviyedeki bir faaliyet olarak değerlendirilmiştir.

Alan ve çevre arasındaki türev ilişkisi anlamlandırılırken en çok çalışılan üçüncü anlama seviyesi, ***ön bilgi*** olarak tespit edilmiştir. Bu bulgu, üç açısından değerlendirilebilir. ***İlk açı*** bu seviyenin anlamanın gelişiminde başlangıç noktası (Pirie ve Kieren, 1989, 1994; Pirie ve Martin, 2000) olmasıdır. Bu açıdan değerlendirildiğinde ön bilgi, anlamanın başlamasında ve dolayısıyla gelişiminde önemli bir yer tutmaktadır. Nitekim alan yazınında konuyla ilgili çalışmalarda (Argat, 2012; Gülkılık, 2013; Pirie, Martin ve Kieren, 1996) bu önem raporlanmıştır. Bu nedenle katılımcı seçiminde ön bilgi ile ilgili kriterler Mamolo ve Zazkis'in (2012) çalışmasına paralel olarak belirlenmiş ve bu kriterlere göre çalışma grubu oluşturulmuştur. Önbilgi seviyesindeki bileşenler yöntem kısmında genel hatlarıyla belirlemiştir. Ancak analizler sırasında alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinin kurulurken bu bilgilerden fazlasının işe koşulduğu tespit edilmiştir. Bunlar, bulgular kısmında, her bir katılımcı için verilen zihin haritalarıyla birlikte raporlanmıştır. Ön bilgilerin ön görülememesinin sebebi, konunun dışına çıkmak ve orada çalışmak türündeki geri katlamalar olmuştur. Tanımı gereği (Martin, 2008) konunun dışına çıkıp orada çalışma türündeki geri katlamalar, eksik olan ön bilgiye yönelik yapılmıştır. Örneğin Ömür daire konusunda çalışırken doğrudan imaj oluşturma seviyesinde kullanılması gereken fonksiyon bilgisinin eksikliği nedeniyle bu tip bir geri

katlama yapmış ve fonksiyon bilgisini sağlamlaştırmıştır. Türev ilişkisine yönelik anlamanın gelişimi böylece devam edebilmiştir. Bu ve benzeri durumlar, ön bilgilerin anlamanın başlangıcındaki önemini ortaya çıkarmıştır.

Anlamanın "*başlangıç noktası*" (Pirie ve Kieren, 1989, 1994; Pirie ve Martin, 2000) nitelendirmesinden ön bilgilere sadece ilk zamanlarda ihtiyaç duyulduğu anlamı da çıkarılmamalıdır. Ön bilgi tüm anlama sürecinde aktif olarak kullanılan bir sermaye ve anlama sürecini devam ettiren temel olarak değerlendirilebilir. Analizler yapılırken ön bilgi seviyesi olarak kodlanan faaliyetler, konunun dışına çıkıp orada çalışma türündeki geri katlama döngülerine ek olarak bariz bir şekilde hatırlama ya da hatırlatma durumlarında da ortaya çıkmıştır. Bu çalışmada bariz bir şekilde hatırlatma ya da hatırlama durumları, mevcut anlayış ile problem durumuna çözüm geliştirilemediği zamanlarda odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahaleleriyle olmuştur. Bu durum anlamanın gelişimi sürecinde herhangi bir yerde ortaya çıkabilmiştir. Örneğin standart değişkene bağlı olarak düzgün n-gen'in alan ve çevre formülleri hesaplanmaya çalışılırken kenar uzunluğunu bu değişken cinsinden bulma ihtiyacı hâsıl olmuştur. Bu durumda aklına bir şey gelmediğini ifade eden Gaye'ye "*Trigonometrik fonksiyonlar*." şeklinde odaklanmış bir kasıtlı öğretmen müdahalesinde bulunmuştur. Böylece Gaye ön bilgi olarak sahip olduğu tanjant fonksiyonuyla çalışmaya başlamış ve türev ilişkisiyle tanjant fonksiyonunu ilişkilendirebilmiştir.

Ön bilginin öneminin değerlendirilebileceği ***ikinci açı,*** (alan, çevre ve türev kavramları arasında gelişecek) ilişkilendirme becerisidir. Mamolo ve Zazkis (2012) yürüttükleri çalışmada, alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini katılımcılara doğrudan sunup bu ilişkinin katılımcılar tarafından kabul edilebilirliğini ortaya çıkarmaya çalışmışlardır. Öğretmenin bir nevi bilginin kaynağı rolünü üstlendiği (Akkuş, 2013) bu çalışmada (Mamolo ve Zazkis, 2012) katılımcılardan sadece biri karede alan ve çevre arasında türev ilişkisini kurabilmiştir. Söz konusu çalışmada yapılmaya çalışılan şey, (gözlem yapma seviyesinde ortaya çıkan) türev ilişkisi teoreminin (formelleştirme seviyesinde ortaya çıkması beklenen) standart değişken fikriyle (yapılandırma seviyesinde) ispat edilmesidir. Bu durum iki açıdan değerlendirilebilir. Birincisi anlamanın gelişmesi sürecindeki ön bilgi, imaj oluşturma, özellikleri fark etme gibi seviyeler göz ardı edilemeyecek kadar önemlidir. Şöyle ki Mamolo ve Zazkis'in (2012) çalışmasında

a) anlamanın ön bilgi seviyesinden başlaması (Pirie ve Kieren, 1989, 1994; Pirie ve Martin, 2000)

b) imajların aktif çaba sonucunda oluşturulması gerekliliği ve dışarıdan alınamaması (Pirie ve Kieren, 1989)

c) imaj oluşturmanın anlamanın gelişimindeki yeri ve önemi (Argat, 2012; Borgen ve Manu, 2002; Codes, Astudillo, Martin ve Pérez, 2013; Gülkılık, 2013; Gülkılık, Uğurlu ve Yürük, 2015; Pirie; 2002)

d) katılımcıların anlamanın gelişimi sürecinde hatalı anlamaları düzeltip eksik anlayışı olgunlaştırabilmek gibi ihtiyaçlara istinaden geri katlama yapabilecekleri imajlarının (Borgen ve Manu, 2002; Gülkılık, 2013; Pirie, Martin ve Kieren, 1996) olmaması gibi hususlar göz ardı edilmesidir.

İkinci açı ise katılımcıların bilgi ve anlayışlarını inşa edebilecekleri ve kavramlar arasında ilişkiler kurabilecekleri ortamların ve öğrenme fırsatlarının önemidir (Akkuş, Akkaş ve Yıldırım, 2018). Bu nedenle yürütülen çalışmada öğretmen adaylarına doğrudan türev ilişkisi sunulmamış bu ilişkiyi oluşturabilecekleri ortam hazırlanmaya çalışılmıştır. Böylece katılımcı öğretmen adaylarının mevcut ön bilgilerini hem bir birleriyle hem de türev ilişkisi ile ilişkilendirmişlerdir. Bunun ile ilgili en temel bulgu, katılımcıların ayrık kavramlar gibi görünen alan ve çevre kavramlarını türev bağlamında ilişkilendirmesidir. Ayrıca özellikleri fark etme seviyesindeki eylemleriyle daha önceden oluşturdukları imajları karşılaştırıp bu imajların ortak ve farklı yönlerini ortaya çıkararak bu imajları bir birleriyle ilişkilendirmişlerdir. Böylece matematik eğitimi açısından önemli olan ilişkilendirme becerisi (Bingölbali ve Çoşkun, 2016; MEB, 2009; NCTM, 2000) artırılmaya çalışılmıştır. Bu yapılırken katılımcı öğretmen adaylarının bu çalışma kapsamında bilgiyi dışarıdan almayıp ön bilgileri ilişkilendirerek yeni bir bilgi ortaya çıkarma deneyimi yaşamışlardır. Bu deneyim, öğretmenlik mesleğine yönelik hizmet öncesi eğitim için önemli bir çıktı olarak değerlendirilebilir (Akkuş, Akkaş ve Yıldırım, 2018).

Ön bilgi seviyesiyle ilgili bulgunun değerlendirilebileceği ***üçüncü açı***, dil gelişimidir. Ön bilgi seviyesi tanımlanırken anlamanın başlangıç noktası olabilecek matematiksel anlayış işaret edilmektedir (Pirie ve Kieren, 1989, 1994; Pirie ve Martin, 2000). Bu nedenle dil gelişimi ön bilgi seviyesi içerisinde değerlendirilmesinden ziyade hazırbulunuşluk olarak değerlendirilebilir. Ancak bu çalışmada dil gelişiminin matematiksel anlamanın

gelişimindeki öneminin ortaya çıkmasından dolayı, bu yeterliliği tartışmaya taşıma ihtiyacı hâsıl olmuştur. Bu çalışmada katılımcıların sözel ifadeleri yazmakta zorlanması ve matematiksel fikirlerini kolaylıkla ifade edememeleri gibi durumlar tespit edilmiştir. Örneğin Ömür ile yapılan son klinik mülakatta halka yapısını açıklarken bu durum ortaya çıkmıştır. Benzer durum iki dilli (bilingual) bireylerde matematiksel anlamanın gelişimi çerçevesinde Manu (2005a, 2005b) değerlendirilmiştir. Manu'ya (2005a) bireylerin ihtiyaç duydukları kelimenin kavramsallaştırılması ve ön bilgi düzeyinde yapılandırılmasının önemine vurgu yapılmaktadır. Diğer taraftan matematiksel anlama fikirlere ve zihinsel nesnelere (imajlara) dayanmaktadır (Manu, 2005b). Sonuç olarak dil gelişimi, zihinsel eylemlerin söyleme dönüşmesini destekler. Söylemler ise araştırmacıya katılımcının zihninde olan biten ile ilgili fikir verdiği için dil gelişiminin yetersizliği klinik mülakatlarda aşılması gereken bir problem teşkil etmektedir. Ginsburg (1981) klinik mülakatlarda dil gelişiminin yetersizliğinden kaynaklı problemleri aşabilmek için sonda kullanımını tavsiye etmektedir. Bu çalışmada sonda olarak değerlendirilebilecek dış teşvikler ve müdahaleler ile bu zorluk aşılmıştır.

5.1.2. Anlamanın Gelişiminde Müdahale-Geri Katlama Döngülerinin Önemi

Müdahale, müdahaleye bağlı olarak gelişen geri katlama ve bu geri katlamanın çıktısı, anlamanın gelişimi açısından döngüsel bir süreçtir (Martin, 2008). Bu döngüsel süreçler aracılığıyla bireyler matematiksel anlamalarını geliştirirken hatalı ya da eksik anlayışlarını geliştirebilir ve mevcut anlayışları bir birleriyle ilişkilendirebilirler (Borgen ve Manu, 2002; Gülkılık, 2013; Pirie, Martin ve Kieren, 1996). Bu döngülerin önemi, çalışma özelinde, öğretmen adaylarının alan ve çevre arasındaki türev ilişkisine yönelik matematiksel anlamalarının gelişiminde de ortaya çıkmıştır. Şöyle ki mülakat sürelerinin toplamı ile döngülerin toplamı karşılaştırıldığında iki dakikada bir döngünün geliştiği sonucu ortaya çıkmıştır. Bu döngüler sayesinde hazır bir şekilde sunulduğunda reddedilen türev ilişkisi (Mamolo ve Zazkis, 2012) katılımcı öğretmen adayları tarafından kurulmuştur. Ayrıca bu döngülerin anlama sürecine ve zihin haritalarına yansıması, anlama sürecinin doğrusal bir yol izlemediğini, aksine dinamik ve kendini yineleyen bir doğasının olduğu sonucunu ortaya çıkarmıştır. Bu sonuç, ilgili alan yazınıyla uyumludur (Pirie ve Kieren, 1989, 1992, 1994; Pirie, Martin ve Kieren, 1996).

Bulguları genel bir şekilde değerlendirmek gerekirse anlamanın gelişiminde izlenen yollar başlığı altındaki her bir aşamanın türev ilişkisinin yapılandırılmasında önemli bir mihenk noktası olduğu tespit edilmiştir. Bu aşamalar kasıtlı öğretmen müdahaleleri ile başlayıp kendine özgü bir süreçte ilerleme göstermiştir. Örneğin karede kenar bağımsız değişkenine göre oluşturulan imaj ile dairede çap ve yarıçap bağımsız değişkenlerine göre oluşturulan imajlar, odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahaleleri aracılığıyla karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sürecinde ortaya çıkan merkez arayışı sonucunda Gaye ve Yavuz, önce ağırlık merkezinin köşeye uzaklığına göre çalışmaya başlarken Ömür doğrudan kenar uzunluğunun yarısına göre çalışmıştır. Ömür'ün kenar uzunluğunun yarısına göre çalışma eğilimi, eşkenar üçgende de devam etmiştir. Diğer taraftan Gaye ve Yavuz, köşegen ve ağırlık merkezinin köşeye uzaklığına göre çalışma eğilimlerini düzgün n-gen'de sürdürmüşlerdir. Anlama sürecinin bireye özgü bir yol izlemesinden kaynaklı farklılıkların ortaya çıkması alan yazınında (Martin, 2008; Pirie ve Kieren, 1989, 1992; Pirie, 1988) vurgulanan bir özelliktir. Dolayısıyla söz konusu farklılar, olağandır. Bu farklılıkları yönetme ve yönlendirme noktasında araştırmacının süreç farkındalığı ve bu farkındalık doğrultusunda oluşturduğu provakatif ve odaklanmış kasıtlı müdahaleleri devreye girmiştir. Bu müdahalelere bağlı olarak en çok mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma türünde geri katlamalar gelişmiştir. Bu geri katlamalar, anlamanın gelişimine yön vermiştir.

Martin (2008) geri katlama türlerini tanımlamadan önceki araştırmalar, geri katlamanın anlamanın gelişiminde eksik anlayışı sağlamlaştırma ve hatalı anlayışı düzeltme işlevi gördüğünü (Borgen ve Manu, 2002; Pirie ve Kieren, 1992, 1994; Pirie, Martin ve Kieren, 1996; Thom ve Pirie, 2006) raporlamıştır. Söz konusu işlevler mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma türündeki geri katlamayı işaret etmektedir (Martin, 2008). Yapılan çalışmada bu geri katlama türünün diğer türlere göre ezici çoğunlukta olması sayesinde katılımcılar alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini başarılı bir şekilde yapılandırabilmiştir. Konuyla ilgili yapılan birçok güncel çalışma bu türü işaret eden geri katlamaların anlamanın gelişimi (Gülkılık, 2013; Gülkılık, Uğurlu ve Yürük, 2015) ve problem çözümündeki (Nillas, 2010) önemine işaret etmektedir. Söz konusu çalışmalar, geri katlamaları her ne kadar Martin'in (2008) sınıflandırmasına tabi tutmasa da içerikleri incelendiğinde mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma türündeki geri katlamaları tarif ettikleri anlaşılmaktadır. Diğer taraftan bu geri

katlamanın türünü belirleyip anlamanın gelişimindeki önemini işaret eden çalışmalar (Mabotja, Chuene, Maoto ve Kibirige, 2018) da bulunmaktadır.

Üzerinde çalışılan problem durumuyla alakası olmayan bir önbilgi birimine gidip bunu alakasızlığından dolayı mevcut problem durumuyla ilişkilendirememe anlamına gelen sürekliliği bozan geri katlama (Martin, 2008) bu çalışmada yok denecek kadar az sayıda tespit edilmiştir. Çok olmasa da önbilgi seviyesine gidip oradaki bilgi eksiğini tamamlama anlamına gelen konunun dışına çıkmak ve orada çalışmak türündeki geri katlama (Martin, 2008) bu çalışmada çok olmasa da tespit edilmiştir. Bu durum önbilgi seviyesinde çalışma süresinin yüksek olmasına sebep olmuştur. Mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma ve daha iç bir seviyede toplama türündeki geri katlamalarda, bireyin anlama süreci ve mevcut anlayışları hakkında farkındalık sahibi olması gereklidir (Martin, 2008). Araştırmada bu iki tür geri katlamanın çok olması bulgusu, farkındalık perspektifinden değerlendirilirse katılımcıların bu farkındalığa sahip olduğu ya da odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalelerinin bu farkındalığı oluşturduğu sonucu ortaya çıkmaktadır.

Martin (2008) odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalelerinin (bazı durumlarda) öğrencilerde beklenenin aksine sürekliliği bozan geri katlamalara sebebiyet verebildiğini ifade etmektedir. Martin'e (2008) göre öğrencilerin öğretmen müdahalesi aracılığıyla yapmaya başladıkları eylemleri ne için yaptığını bilmemesi bu durumu ortaya çıkarmaktadır. Bu çalışmada Martin'in (2008) bulgularının aksine, odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalelerinin çoğunlukla mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma türünde etkili sonuçlanan geri katlama döngülerini tetiklediği tespit edilmiştir. Bu farklılığa, mevcut veriler ve ilgili literatür ışığında üç farklı açıklama yapılabilir.

Birincisi dış teşviklerin anlamanın gelişimindeki katalizör rolüdür. Müdahale-dış teşvik oranına bakıldığında ortalama her müdahale-geri katlama döngüsü başına iki tane dış teşvikin kullanılmış olması bu açıklamayı destekleyebilir. Ancak dış teşvik, geri katlamayı başlatan unsur değildir. Martin (2008) odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalelerinin sürekliliği bozan geri katlama sürecini başlattığını iddia etmektedir. Odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalelerinin dış teşvikler yardımıyla anlamanın gelişiminde önemli bir yeri olan mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede

çalışma türünde geri katlama döngüsünü başlatması yönündeki açıklama gerçekçi değildir.

İkincisi, çalışma grubundaki farklılık olabilir. Martin (2008) ilkokuldan yüksek lisans seviyesine kadar farklı yaş ortalamasına sahip yedi farklı grup ile çalışmışken bu çalışmada sadece belirli bir akademik seviyenin üstündeki öğretmen adayları ile çalışılmıştır. Dolayısıyla bu çalışmadaki katılımcıların akademik seviyeleri Martin'in (2008) çalışmasındaki katılımcılara göre yüksektir. Bu durumda katılımcıların akademik seviyelerinin yüksek olması ve dolayısıyla üstbilişsel becerilerinin de gelişmiş olmasının katılımcılara neyi ne için yaptıkları konusunda bir farkındalık oluşturmuştur denilebilir. Çünkü üstbilişsel becerisi yüksek bireyler, daha önce de bahsedildiği üzere, gelişen anlama ve problem süreçlerinde neye ihtiyacı olduğunun farkında olurlar ve bu ihtiyaçlar doğrultusunda deneyimlerini gözden geçirip mevcut durum ile ilişkilendirebilirler (Lan, 2007). Böylece mevcut anlamaları kullanarak daha iç bir seviyede çalışma türünde geri katlamalar yapabilirler. Bunu bir beceri olarak değerlendiren Pirie ve Martin (2000) öğrencilerin geri katlama kabiliyetlerinin geliştirilmesi için uygun ortamlar sunulmasının önemini vurgulamaktadır. Nitekim sürekliliği bozan geri katlamaların sadece ilk oturumlarda gözlenmesi ve konunun dışına çıkmak ve orada çalışmak türündeki geri katlamaların oturumlar ilerledikçe azalması, katılımcılarda Pirie ve Martin'in (2000) bahsettiği becerinin geliştiğini göstermektedir.

Üçüncüsü, klinik mülakatları yürüten araştırmacının türev ilişkisi ve anlama süreçleri ile ilgili ***yeterlilik*** ve ***farkındalığıdır***. Söz konusu yeterliliğin içinde araştırmacının asıl soruları sorabilmesi ve verilen cevapları yorumlayabilmesi (Patton, 2018) bu süreç içerisinde de anlık kalibrasyon yaparak esnek davranıp mülakatın gidişatına uygun sorular sorabilmesi (Ginsburg, 1981) gibi beceriler bulunmaktadır. Robson (2015) bu yeterliliğin kazanılması için pilot uygulamanın önemine işaret etmiştir. Çalışma kapsamında pilot uygulama yapılmasının önemli hedeflerinden biri budur. Araştırmacı (yürütülen pilot çalışma ile) klinik mülakat yürütme becerisi kazanmanın yanı sıra alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinin anlamlandırılması sürecinde olası zorluklar ve öğretmen adaylarının anlamalarındaki gelişim yolları hakkında farkındalık geliştirmiştir. Bu farkındalık ile yürütülen klinik mülakatlarda katılımcıların o an için ihtiyacı olan anlayış analiz edilerek bu anlayışın geliştirilmesine yönelik odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalelerinde bulunulmuştur. Örneğin karede kenar uzunluğuna göre türev ilişkisinin

kurulamadığı noktada dairede çap değişkeni ile ilgili bir imajın oluşturulması ve bu imajın karenin kenar uzunluğuna göre oluşturulan imaj ile karşılaştırılması süreçlerini başlatan odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahaleleri, bu farkındalık ile geliştirilmiştir.

Yukarıda açıklanan farkındalık ile yapılan odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalelerinin matematiksel anlamanın gelişimi sürecinde

- ortaya çıkan engelleri aşmaya yardım eden bir katalizör etkisinin olduğu ve
- Martin'in (2008) söylediğinin aksine bu süreçte süreksizliğe sebebiyet verebilecek durumları giderdiği tespit edilmiştir. Mabotja, Chuene, Maoto ve Kibirige'nin (2018) çalışmasındaki odaklanmış öğretmen müdahalelerinin etkili geri katlamaları teşvik ettiği bulgusu da bu sonucu desteklemektedir. Diğer taraftan anlama bireye özgü bir süreç olduğu (Martin, 2008; Pirie ve Kieren, 1989; Pirie ve Kieren, 1992; Pirie, 1988) için anlamanın gelişiminde öğretmenin ne kadar spesifik müdahale bulunacağının net bir yanıtı yoktur (Pirie ve Martin, 2000). Öğretmenin duruma özgü müdahalede bulunabilmesi için:

a. öğrencilerin düşünme yolları hakkında bilgi sahibi olması (Gülkılık, Uğurlu ve Yürük, 2015; Park ve Oliver, 2008; Yao ve Manounchehri, 2022)
b. klinik mülakat yürütüyormuş gibi öğrencilerin anlamalarını anlık olarak ölçümleme ve o anki duruma göre esnek davranabilmesi (Ginsburg, 1981; Park ve Oliver, 2008)
c. öğretim yöntem-tekniği bilgisinin yanında işlevsel bir felsefi yaklaşıma sahip olması (Akkuş, 2013)
a. kavramsal bilgiye sahip olması (Akkuş, Akkaş ve Yıldırım, 2018; Park ve Oliver, 2008) gerekmektedir.

Bu çalışmada ortaya çıkan bir durum ile yukarıda sıralanan bileşenlerin gerekçelendirilebilir. Düzgün n-gen'de türev ilişkisini kurmaya çalışan Gaye ve Yavuz, ağırlık merkezine göre çalışmaları gerektiğini bilmektedirler. Ancak bağımsız değişken olarak köşegen seçiminde bulunmak istemişlerdir. Araştırmacı bu noktada doğrudan standart değişken önerisinde bulunmak yerine beşgenin köşegenlerini çizmelerini önermiştir. Katılımcılar, beşgenin köşegenlerini çizerek bir imaj oluşturmuş ve böylece köşegenlerin bir merkezde kesişmeyeceğini anlamışlardır. Böylece standart değişkene göre çalışmaya başlamışlardır. Merkez fikri olmasına rağmen ve merkezi bulduktan sonra

sıra değişken seçimine gelince köşegen fikrinin ortaya çıkması, karedeki köşegen imajının (karenin köşegenleri ağırlık merkezinde kesişir) buraya bir yansımasıdır. Çünkü katılımcılar, köşegenlerin ağırlık merkezinden geçeceğine ilişkin bir yanılsama içindedirler. Bu noktada araştırmacıya beşgen müdahalesini yaptıran yeterlilik, (a) öğrencilerin düşünme yolları hakkında bilgi sahibi olmasıdır. Araştırmacı bu müdahaleyi yaparken (b) katılımcıların o anki anlayışlarını ölçümleyip duruma göre esnek davranmıştır. Bu örnekte bilgiyi doğrudan vermek yerine bilgiyi inşa katılımcının bilgiyi inşa etmesini desteklemek, diğer bir deyişle oluşan öğrenme fırsatı değerlendirmek, Akkuş'un (2013) deyimiyle (c) araştırmacının işlevsel felsefi yaklaşımıyla oluşmuştur. Son olarak araştırmacı, bu müdahaleyi yaparken beşgen'in köşegenlerinin bir merkezde kesişmemesiyle ilgili (d) kavramsal bilgisini kullanmıştır.

Yukarıda tanımlanan yeterlilik ve farkındalık kavramı ve buna yönelik verilen örnekten araştırmacının klinik mülakatların tamamında bu yeterlilik ve farkındalığa sahip olduğu anlamı çıkmamaktadır. Veri toplama sürecinde araştırmacının yapması halinde daha etkili sonuçların çıkması muhtemel odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahaleleri de bulunmaktadır. Örneğin Yavuz, son mülakatta, düzgün çokgende alan ve çevre arasındaki türev ilişkisini kurmak için standart değişkene göre çalışması gerektiğini bilmektedir. Katılımcı standart değişkene k ve kenar uzunluğunun yarısına da a değişkenlerini atamıştır. Ancak $tan\frac{\pi}{n}=\frac{a}{k}$ denkleminden $k=\frac{a}{tan\frac{\pi}{n}}=a.cot\frac{\pi}{n}$ eşitliğini bulmuştur. Katılımcı farkında olmadan standart değişkeni, kenar uzunluğunun yarısına göre bulup alan ve çevre fonksiyonlarını da kenar uzunluğunun yarısına göre oluşturmuştur. Bu sürecin başında araştırmacı, o an için üzerinde çalışılan "bağımsız değişkenin ne olduğu"na yönelik odaklanmış kasıtlı öğretmen müdahalesi yapılabilirdi. Böylece katılımcının farkında olmadan başladığı alan ve çevre fonksiyonlarını kenar uzunluğunun yarısına göre oluşturma ile zaman kaybedilmemiş olabilirdi. Benzer şekilde dördüncü klinik mülakatın sonunda "bundan sonra türev ilişkisini arayabileceğimiz kavramlar neler olabilir?" şeklinde bir provakatif müdahale ile keşfetme seviyesinde bir anlayışın gelişmesinin önü açılabilirdi. Araştırmacı, anlamanın gelişimini teşvik etmesi muhtemel bu iki müdahaleyi sonradan farketmiştir. Bu durum, farkındalık ve yeterliliğin de tıpkı anlamada olduğu gibi sürekli gelişen dinamik bir yapıya sahip olduğu şeklinde yorumlanabilir.

Anlama sürecini haritalandırma, Pirie ve Kieren'in geliştirdiği teorinin önemli özelliklerden biridir (Pirie ve Kieren, 1994). Alan yazınındaki çalışmalar, anlama sürecini, iç içe geçmiş dairesel model üzerinde haritalar üzerinde göstermektedir (Argat, 2012; Codes, Astudillo, Martin ve Pérez, 2013; Gökalp, 2012; Gülkılık, Uğurlu ve Yürük, 2015; Martin ve LaCorix, 2008; Martin, 2008; Nillas, 2010; Pirie ve Martin, 2000; Sengul ve Goktepe-Yildiz, 2016). Bu model ile anlamanın seviyeleri ve geri katlama türleri gösterilebilmektedir. Bu çalışmaların yanı sıra, üzerinde çalışılan konuyu satır adı ve anlama seviyelerini sütun olacak şekilde tablolaştırma yöntemini kullanan çalışmalar (Gülkılık, 2013; Gulkılık, 2016) da bulunmaktadır. Bu araştırmada öğretmen adaylarının alan ve çevre arasındaki türev ilişkisine yönelik anlamalarının gelişimi sürecinde müdahale, müdahaleye bağlı olarak gelişen geri katlama, bu geri katlamaların çıktısı, geri katlama yapılan seviye ve zaman bütünsel olarak ele alınmıştır. Yürütülen çalışmanın neticesinde tüm bu değişkenlerin birlikte görülebileceği Şekil 4.1.'deki model geliştirilmeye çalışılmıştır. Böylece yeni bir haritalandırma yöntemi önerisiyle literatüre katkı sağlanmaya çalışılmıştır.

Her ne kadar herkesin anlama sürecine uygun bir reçete sunulması (Pirie ve Kieren, 1992) bu sürecin bireye özgü olması nedeniyle (Prie ve Kieren, 1989, 1994) imkânsız olsa da bireylerin anlama, öğrenme ve problem çözme süreçlerinde izledikleri yolları ortaya çıkaran çalışmalar matematik eğitimi açısından önemlidir. Çünkü bu yollar matematik eğitimcilerine bu konuları derslerinde ele alırken yardımcı olabilir (Asiala, Cottrill, Dubinsky ve Schwingendorf, 1997). Fenomenografik yaklaşımla yürütülen bu veya benzeri çalışmalar, anlamanın gelişimine yönelik bir reçete oluşturmasa da anlamanın nasıl gerçekleştiğini ve anlama yollarının bireylere göre nasıl farklılaştığını sorgulaması nedeniyle eğitim açısından önemli sonuçlar ortaya çıkarabilir (Marton, 1986). Bu araştırmada da katılımcıların izledikleri ortak ve farklı yollar tespit edilmiştir. Bu farklılıklar ve ortak noktalar, anlamanın gelişiminde izlenilen yolların klinik mülakatlara göre dağılımı başlığı altında sunulmuştur. Böylece alan ve çevre arasındaki türev ilişkisi bağlamında anlamanın gelişimi incelenerek literatüre katkı sağlanmaya çalışılmıştır.

Bu çalışma ile anlama yollarındaki ortak ve farklı yönlerin yanında anlamanın gelişiminde imaj oluşturma, özellikleri fark etme ve ön bilgi seviyelerinin ve müdahale-geri katlama döngülerinin anlamanın gelişimindeki önemi ortaya konulmuştur. Ayrıca anlamanın gelişiminde öğretmen farkındalığının önemi tartışılmış ve bu farkındalığın

bileşenleri ortaya konulmaya çalışılmıştır. Araştırmanın sonuçlarına yönelik tartışmadan hareketle konu bağlamında öneriler geliştirilmiştir. Bu öneriler, bir sonraki başlık altında ele alınmaktadır.

5.2. Öneriler

Alan ve çevre ile ilgili geleneksel formüllerin (Zazkis ve Mamolo, 2011) ileri düzey problemlerin çözümünde engel oluşturması (Battista ve Clements, 1996; Dağlı ve Peker, 2012; Köşe ve Tanışlı, 2014; Küçük ve Demir, 2009) bu çalışmada da tespit edilmiştir. Bu nedenle ilgili literatürün (Altun, 2010; Akkuş, Akkaş ve Yıldırım, 2018; Küçük ve Demir, 2009; Pesen, 2008; Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013) önerisine paralel olarak öğrenme ortamlarında gelenekselin yanında farklı değişkenlere göre bu formüllerin öğrenciler tarafından oluşturulmasına imkân tanınması ve bu formüllerin birer fonksiyon olduğunun fark ettirilmesi tavsiye edilmektedir. Böylece bireyler, ileri düzey problem ve anlamalar için gelenekselin dışına çıkıp ihtiyaçları doğrultusunda fonksiyonel ilişkiler kurabilirler. Ayrıca alan ve çevre formüllerinin birer fonksiyon olduğunu öğrenebilir ve geometri ile cebir arasında bir ilişkilendirme gerçekleştirebilirler.

Bireylerin geleneksel formüllerin ötesinde fonksiyonlar oluşturması ve fonksiyonel ilişkiler kurabilmesi için öğrenme ortamında izlenilen aşamalar önemlidir. Formelleştirme seviyesinde ortaya çıkan formüller doğrudan öğrenen bireye sunulursa (imaj oluşturma eylemleri oluşmadığı için) ileri düzey problem durumlarında bireylerin geri katlama yapması mümkün olmamaktadır. Bu çalışmada da imaj oluşturma seviyesinin ihtiyaçlar doğrultusunda geri katlama yapabilmek için önemi ortaya çıkmıştır. Bu nedenle öğrenme ortamları (ön bilgileri dikkate alıp) imaj oluşturma seviyesindeki eylemleri teşvik edecek ve oluşturulan imajlardan hareketle formel bilgiye ulaşacak şekilde düzenlenebilir.

Matematiksel bilgi birimlerinin başka matematiksel bilgi birimleri ile ve bunların günlük hayatla ilişkilendirilmesi önemli bir beceridir. Bu çalışmada alan ve çevre kavramları arasındaki ilişki türev bağlamında kurulmuştur. Bu yapılırken Zazkis, Sinitsky ve Leikin'in (2013) tanımladığı "iç teğet çember merkezi" bağımsız değişkeninden daha sağlam matematiksel temellere oturan "ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı" bağımsız değişkeni kullanılmıştır. Bu ve benzeri ilişkilendirmeler, matematik öğrenme

ortamlarında kurulabilir. Böylece ilişkili olduğu halde ayrık vagonlar halinde bulunan her bir bilgi birimi birbirine bağlanabilir ve her bir vagona bir lokomotif atama ihtiyacı giderilebilir. Ayrıca bir bilgi birimi unutulsa dahi bağlantılı olduğu diğer bilgi birimi aracılığıyla geri katlamalar yapılarak unutulan bilgi yeniden yapılandırılabilir.

Bu çalışmada, matematik öğrenme ortamlarında, anlama süreçlerinin kendine özgü kaotik yapısını ve yukarıdaki önerileri göz önünde bulundurarak duruma özgü müdahalede bulunma becerisinin önemi ortaya çıkmıştır. Bu beceri tartışma kısmında yeterlilik ve farkındalık olarak tanımlanmış ve bunun bileşenleri araştırmanın sınırlılıkları kapsamında belirlenmiştir. Bu becerilere sahip matematik öğretmenleri yetiştirilebilir. Hizmet öncesi eğitimlerde bu farkındalık ve yeterlilik ile yönetilen öğrenme ortamlarını deneyimleyen öğretmen adayları ihtiyaçları doğrultusunda geri katlama yapma becerisi geliştirebilir, model alma yoluyla söz konusu yeterlilik ve farkındalığı edinebilir. Hizmet içi eğitimlerde ise uzun soluklu programlar ile bu yeterlilik ve farkındalığı geliştirmek mümkün olabilir.

İleride yapılacak araştırmalar için

- Farklı çalışma gruplarının alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinin anlamlandırma süreci, bu çalışmada kullanılan teorik çerçeve perspektifinden incelenebilir. Benzer şekilde bu süreç Dubinsky'nin (1991) geliştirdiği APOS teori gibi çerçevelerden de değerlendirilebilir.
- Bu çalışma üç öğretmen adayı ile yapılan klinik mülakatlar ile sınırlıdır. Dolayısıyla alan ve çevre arasındaki türev ilişkisinin anlamlandırma sürecinin sınıf gibi farklı ortamlarda gelişimi incelenebilir. Böylece sahada uygulanabilirliği yüksek bilimsel bilgi oluşturulabilir. Örneğin işbirlikçi öğrenme ortamının sağlandığı sınıf ortamları buna temel sağlayabilir. Böylece arkadaş müdahalesinin anlama üzerindeki yeri de araştırılabilir.
- Bu çalışmada Martin'in (2008) ortaya koyduğu müdahale-geri katlama döngüsü bir bütün olarak ele alınmaya çalışılmıştır. Ancak klinik mülakat ortamı doğası gereği arkadaş ve materyal müdahalesi gibi bileşenler incelenememiştir. Anlamanın gelişiminde müdahale-geri katlama döngülerinin rolünü bütünsel olarak değerlendiren araştırmalar yapılabilir. Bütünsel değerlendirme için öğrencilerin bir birleriyle, materyaller (bilgisayar

arayüzü gibi) ve öğretmen ile etkileşimin sağlandığı, grup çalışması gibi öğrenme ortamlarında yapılabilecek gözlemler kullanılabilir.

- Bu çalışmada öğretmen adayları, müdahale-geri katlama döngülerini yaşamış ve anlamanın gelişimindeki (keşfetme hariç) seviyeleri, araştırmacı rehberliğinde tamamlamışlardır. a) Bu ortamda öğretmen adaylarının geri katlama yapma becerisinin geliştiği ilgili literatüre (Pirie ve Martin, 2000) dayanarak söylemek mümkündür. Bu çıkarım rasyoneldir. Diğer taraftan bunun araştırılması için boylamsal araştırmalar yapılarak bu çıkarım, daha sağlam temellere dayandırılabilir. Örneğin bu çalışmadaki katılımcıların başka bir matematiksel kavram ya da ilişkiyi yönelik anlama süreçleri, böylesi bir çalışmaya dâhil olmamış başka bir grup ile karşılaştırılabilir. b) Öğretmen adaylarının öğrenme deneyimlerinin meslek yaşamında izleyecekleri öğretme yaklaşımlarını etkilediği ilgili literatürde (Akkuş, Akkaş ve Yıldırım, 2018) söylenmektedir. Anlamanın gelişimini destekleyen bu ve benzeri çalışmalara katılmış bireylerin öğretmenlik mesleğine başladığında öğretim ortamlarını anlamanın gelişimini destekleyecek şekilde tasarlayıp tasarlamadıkları araştırılabilir. Benzer şekilde bu çalışmalara katılmış bireylerin (tartışma kısmında bileşenleri tanımlanan) yeterlilik ve farkındalığı model alma yoluyla geliştirip geliştirmediği araştırılabilir. Bu araştırmalar, katılımcılar ile yapılacak görüşmeler ile ortaya çıkarılabilir ya da doğrudan gözlem yoluyla yapılabilir.
- Türev ilişkisi gibi ileri düzey problemler kenar uzunluğuna bağlı geleneksel formüllerle çözülememektedir. Diğer taraftan literatürde geleneksel formüllere bağlılık raporlanmıştır. Söz konusu bağlılık bu çalışmada da ortaya çıkmıştır. Öğretmen adayları genel olarak kenar uzunluğu bağımsız değişkenine göre çalışma eğilimi göstermişlerdir. Çalışma sınırlarını aşarak "bir odanın alanını hesaplamak için kenar uzunluğu dışında bir değişken ile çalışan kimse var mıdır?" ve "insanlar ne için geleneksel değişkenlere göre işlem yapıyorlar" gibi soruların araştırılmaya değer olduğu söylenebilir.
- Tarihsel süreç içerisinde fizik ve matematik birlikte gelişmiştir. Örneğin bu çalışmaya konu olan türev kavramı, bir fizik problemi olan zaman-mekân ilişkisi bağlamında hız olgusunu açıklamak için Newton tarafından geliştirilmiştir (Topdemir, 2010). Bu açıdan değerlendirildiğinde fizik ve matematik alanlarındaki anlamaların gelişiminin benzerlik gösterdiği söylenebilir. Dolayısıyla matematiksel anlamanın

gelişimine yönelik bir açıklama olan matematiksel anlamanın gelişimi teorisi, fizik eğitimi alanında da kullanılabilir.

KAYNAKÇA

Akkuş, R. (2013). Following students' ideas: How much to let go?. *Eğitim ve Bilim, 38*(169), 96-108.

Akkuş, R., Akkaş, E. N. ve Yıldırım, B. (2018). Alan konusunu öğretirken öğrenme oluşturmada öğretmenin rolü. *İlköğretim Online, 17*(2), 1135-1149.

Akpınar, B. ve Aydın, K. (2007). Eğitimde değişim ve öğretmenlerin değişim algıları. *Eğitim ve Bilim, 32*(144), 71-80.

Aksoy, Y. (2007). *Türev Kavramının Öğretiminde Bilgisayar Cebiri Sistemlerinin Etkisi*. (Yayımlanmamış doktora tezi), Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Aktümen, M. ve Kaçar, A. (2008). Bilgisayar cebiri sistemlerinin matematiğe yönelik tutuma etkisi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi 35*, 13-26.

Altun, M. (2005). *İlköğretim 2. Kademe (6, 7, 8. Sınıflarda) Matematik Öğretimi.* Bursa: Alfa Aktüel.

Antell, S. E. ve Keating, D. P. (1983). Perceptions of numerical invariance in neonates. *Child Development, 54*, 695-701.

Argat, A. (2012). *Pirie-Kieren Dinamik Modeli ile Öğrencilerde Matematiksel Anlamanın Gelişiminin İncelenmesi*. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. ve Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. J. Kaput, A. H. Schoenfeld ve E. Dubinsky (Ed.), *Research in Collegiate Mathematics Education (Vol. 6, pp. 1-32)*. Washintong DC.: American Mathematical Society ve Rhole Island, Mathematical Association of America.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. ve Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *The Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 399-431.

Aydın, B. (2006). Gelişimin Doğası. Binnur Yeşilyaprak (Ed), *Eğitim psikolojisi* (s. 29-55). Ankara: Pegem Akademi Yayınevi.

Aydın, H. (20007). *Felsefi Temelleri Işığında Yapılandırmacılık*. Ankara: Nobel Yayıncılık.

Baki, A. (2014). *Matematik Tarihi ve Felsefesi.* Ankara: Pegem Akademi Yayınevi.

Battista, M. T. ve Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(3), 258-292.

Begg, A. (1999). Enactivism and mathematics education. In *Making the difference: Proceedings of the twenty-second annual conference of The Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA-22)* (s.68-75). Adelaide: Merga.

Bingölbali, E. (2008). Türev Kavramına İlişkin Öğrenme Zorlukları ve Kavramsal Anlama İçin Öneriler. Mehmet Fatih Özmantar, Erhan Bingölbali ve Hatice Akkoç (Ed.). *Matematiksel kavram yanılgıları ve çözüm önerileri* (1. Baskı) içinde (s.223-256). Ankara: Pegem Akademi Yayınevi.

Bingölbali, E. ve Coşkun, M. (2016). İlişkilendirme becerisinin matematik öğretiminde kullanımının geliştirilmesi için kavramsal çerçeve önerisi. *Eğitim ve Bilim, 41*(183), 233-249.

Borgen, K. L. ve Manu, S. S. (2002). What do students really understand?. *Journal of Mathematical Behavior,* 21, 151-165.

Bulut, M. (2009). *İşbirliğine Dayalı Yapılandırmacı Öğrenme Ortamlarında Kullanılan Bilgisayar Cebir Sistemlerinin Matematiksel Düşünme, Öğrenci Başarısına ve Tutumuna Etkisi.* (Yayımlanmamış doktora tezi). Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Buxton, L. (1978). Four levels of understanding. *Mathematics In School, 7*(4), 36.

Codes, M., González Astudillo, M. T., Delgado Martín, M. L. ve Monterrubio Pérez, M. C. (2013). Growth in the understanding of infinite numerical series: a glance through the Pirie and Kieren theory. *International Journal Of Mathematical Education In Science And Technology, 44*(5), 652-662.

Çepni, S. (2018). *Araştırma ve Proje Çalışmalarına Giriş* (8. Baskı). Trabzon: Celepler Matbaacılık Yayın ve Dağıtım.

Çetin, F. Ö., Dane, A. ve Bekdemir, M. (2012). A concept of "accumulation point" and its usage. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, *6*(2), 217-233.

Çetinkaya, B., Erbaş, A. K. ve Alaca, C. (2013). Değişim Oranı Olarak Türev ve Tarihsel Gelişimi. İsmail Özgür Zembat, Mehmet Fatih Özmantar, Erhan Bingölbali, Hakan Şandır ve Ali Delice (Ed.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (1. Baskı) içinde (s.529-555). Ankara: Pegem Akademi Yayınevi.

Dağlı, H. ve Peker, M. (2012). İlköğretim 5. sınıf öğrencileri geometrik şekillerin çevre uzunluğunu hesaplamaya ilişkin ne biliyor?. *Kuramsal Eğitimbilim Dergisi, 5* (3), 330-351.

Delice, A. ve Karaaslan, G. (2015). Dinamik geometri yazılımları ile çokgenler konusunda hazırlanan etkinliklerin öğrenci performansı ve öğretmen görüşlerine yansıması. *Karaelmas Journal of Sciences*, 3, 133-148.

Dewey, J. (1998). *Deneyim ve Eğitim.* (Çev. Sinan Akıllı). Ankara: ODTÖ Yayıncılık.

Duatepe-Paksu, A. ve Akkuş, O. (2007). İlköğretim matematik sınıflarında gözlem çalışması. *Eğitim ve Bilim, 145*(32), 16-22.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction In Advanced Mathematical Thinking. David Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (s. 95-126). Boston, MA: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. ve McDonald, M.A. (2001). APOS: A Constructivist Theory Of Learning In Undergraduate Mathematics Education Research. Derek Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICME study*. (273-280). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M. A. ve Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1. *Educational Studies In Mathematics*, *58*(3), 335-359.

Durmaz, M. (2012). *Ortaöğretim Öğrencilerinin (10. Sınıf) Temel Psikolojik İhtiyaçlarının Karşılanmışlık Düzeyleri, Motivasyon ve Matematik Kaygısı Arasındaki İlişkilerin Belirlenmesi.* (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bolu.

Durmaz, M. ve Şengül, S. (2018). Çevre ve Alan Arasındaki Türev İlişkisi. *31. Matematik Sempozyumu* içinde (s.96). Erzincan: Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi.

Esen, Y. ve Çakıroğlu, E. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının hacim ölçmede birim kullanmaya yönelik kavrayışları. *Matematik Eğitimi Dergisi*, *2*(1): 21–30.

Fırat, S., Gürbüz, R. ve Doğan, M. F. (2016). Öğrencilerin bilgisayar destekli argümantasyon ortamında olasılıksal tahminlerinin incelenmesi. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 24,* 906-944.

Francis, K., Khan, S. ve Davis, B. (2015). Enactivism, spatial reasoning and coding. *Digit Exp Math Educ, 2,* 1–20.

Ginsburg, H. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: aims, rationales, techniques. *For The Learning of Mathematics, 1*(3), 4-11.

Gökalp, N. D. (2012*). A Study on Sixth Grade Students' Understanding of Multiplication of Fractions Using Pirie and Kieren Model*. (Yayımlanmamış doktora tezi). Ortadoğu Teknik Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Gulkilik, H. (2016). The Role of Virtual Manipulatives in High School Students' Understanding of Geometric Transformations. Patrica S. Moyer-Packenham (Ed.), *International perspectives on teaching and learning mathematics with virtual manipulatives* (s. 213-243). Springer.

Gülkılık, H. (2013). *Matematiksel Anlamada Temsillerin Rolü: Sanal Ve Fiziksel Manipülatifler*. (Yayımlanmamış doktora tezi). Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Gülkılık, H., Uğurlu, H. H. ve Yürük, N. (2015). Examining students' mathematical understanding of geometric transformations using the Pirie-Kieren model. *Educational Science: Theory & Practice, 15*(6), 1531-1548.

Hacıömeroğlu, G., ve Apaydın, S. (2009). Tangram etkinliği ile çevre ve alan hesabı. *İlköğretim Online, 8*(2), 1-6.

Hasselgren, B., ve Beach, D. (1997). Phenomenography – a "good-for-nothing brother" of phenomenology? Outline of an analysis. *Higher Education Research & Development, 16*(2), 191-202.

Kaba, Y., ve Şengül, S. (2015). Ortaokul öğrencilerinin matematiksel anlamaları ile matematiğe yönelik tutumları arasındaki ilişki. *Eğitim ve Bilim, 40*(180), 103-123.

Karamustafaoğlu, S., Karamustafaoğlu, O. ve Yaman, S. (2005). Fen ve Teknoloji Öğretiminde Kavram Öğretimi. Mustafa Aydınoğlu ve Teoman Kesercioğlu (Ed.), *İlköğretimde fen ve teknoloji öğretimi* (s. 25-54). Ankara: Anı Yayıncılık.

Katrancı, Y. (2014). *İşbirliğine Dayalı Öğrenme Ortamlarında Problem Oluşturma Çalışmalarının Matematiksel Anlamaya ve Problem Çözme Başarısına Etkisi*. (Yayımlanmamış doktora tezi). Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Köse, N. Y. ve Tanışlı, D. (2014). Sınıf öğretmeni adaylarının geometrideki zihinsel alışkanlıkları. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 14*(3), 1203-1230.

Küçük, A., ve Demir, B. (2009). İlköğretim 6–8. sınıflarda matematik öğretiminde karşılaşılan bazı kavram yanılgıları üzerine bir çalışma. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 13, 97-112.

LaCroix, L. N. (2002). *A tradesman's mathematics understanding in a machine shop: insights provided by the pirie-kieren theory*. Proceedings of the Annual Meeting [of the] North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (Eric Document Reproduction Service Number ED 471760).

Lan, G. H. (2007). A cooperative learning programme to enhance mathematical problem solving performance among secondary three students. *The Mathematics Educator, 10*(1), 59-80.

Lipton, J. S. ve Spelke, E. S. (2003). Origins of number sense: Large-number discrimination in human infants. *Psychological Science, 14*, 396–401.

Mabotja, S., Chuene, K., Maoto, S., ve Kibirige, I. (2018). Tracking grade 10 learners' geometric reasoning through folding back. *Pythagoras - Journal of the Association for Mathematics Education of South Africa, 39*(1), a371. https://doi.org/10.4102/ pythagoras.v39i1.371.

Mamolo, A. ve Zazkis, R. (2012). Stuck on convention: a story of derivative relationships. *Educational Studies In Mathematics, 81*(2), 161-177.

Manu, S. (2005a). The relationship between bilingual students' language switching and their growth of mathematical understanding. D. E. McDougall ve J. A. Ross (Ed.), *Proceedings of The Twenty-Sixth Annual Meeting of The North American Chapter of The International Group for the Psychology of Mathematics Education,* içinde Volume 2 (s.521-523). Toronto: OISE/UT.

Manu, S. (2005b). Growth of mathematical understanding in a bilingual context: analysis and implications. H. L Chick ve J. L. Vincent (Ed.*). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* içinde Vol. 3 (s. 289-296). Melbourne: PME.

Martin, L. C. (2008). Folding back and the dynamical growth of mathematical understanding: Elaborating the Pirie-Kieren theory. *The Journal of Mathematical Behavior,* 27, 64-85.

Marton, F. (1981). Phenomenography - describing conceptions of the world around us. *Instructional Science, 10*(2), 177-200.

Marton, F. (1986). Phenomenography - a research approach to investigating different understandings of reality. *Journal of Thought, 21*(3), 28-49.

Marton, F. (1992). Phenomenography and "the art of teaching all things to all men". *Qualitative Studies In Education, 5*(3), 253-267.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB), (2009). *İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı ve Kılavuzu*. Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB), (2018a). *Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı*. Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB), (2018b). *Matematik Dersi Öğretim Programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar)*. Ankara: Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Meel, D. E. (2003). Models and theories of mathematical understanding: Comparing Pirie and Kieren's model of the growth of mathematical understanding and APOS theory. *CBMS Issues In Mathematics Education, 12*(2), 132-181.

Miles, M. B. ve Huberman, A. M. (2019). *Genişletilmiş Bir Kaynak Kitap Nitel Veri Analizi.* (Çev. Sadegül Akbaba Altun ve Ali Ersoy, 2. Basımdan Çeviri). Ankara: Pegem Akademi Yayınevi.

Mutlu, Y., Olkun, S. ve Cumhur, F. (2019). Dokunsay sayı tabletlerinin okul öncesi çocuklarının aritmetik becerileri üzerindeki etkisinin incelenmesi. *İlköğretim Online, 18* (1), 437-450.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Naylor, R. H. (1974). Galileo and the problem of free fall. *The British Journal for the History of Science, 7*(26), 105-134.

Nillas, L. A. (2010). Characterizing preservice teachers'mathematical understanding of algebraic relationships. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 1-24. Erişim Adresi: https://www.cimt.org.uk/journal/nillas.pdf.

Olkun, S. ve Özdem, Ş. (2015). Kavramsal şipşak sayılama uygulamalarının hesaplama performansına etkisi. *Başkent University Journal of Education, 2* (1), 1-9.

Olkun, S. ve Toluk Uçar, Z. (2014). *İlköğretimde Etkinlik Temelli Matematik Öğretimi* (6. Baskı). Ankara: Eğiten Kitap.

Orton, A. (1983). Students understanding of differentiation. *Educational Studies In Mathematics, 14*(3), 235-250.

Park, S. ve Oliver, J. S. (2008). Revisiting the conceptualisation of pedagogical content knowledge (PCK): PCK as a conceptual tool to understand teachers as professionals. *Research In Science Education, 38,* 261-284.

Patton, M. Q. (2018). *Nitel Araştırma ve Değerlendirme Yöntemleri*. (Çev. Mesut Bütün ve Selçuk Beşir Demir 3. Basımdan Çeviri). Ankara: Pegem Akademi Yayınevi.

Pesen, C. (2008). *Eğitim Fakülteleri ve Sınıf Öğretmenleri İçin Yapılandırmacı Öğrenme Yaklaşımına Göre Matematik Öğretimi* (4. Baskı). Ankara: Sempati Yayınları.

Philips, D. C. ve Soltis, J. F. (2005). *Öğrenme: Perspektifler*. (Çev. Soner Durmuş). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

Pillow, W. S. (2003). Confession, catharsis, or cure? Rethinking the uses of reflexivity as methodological power in qualitative research. *International Journal Of Qualitative Studies In Education, 16*(2), 175-196.

Pirie, S. E. B (2002). *Problem posing: What can it tell us about students' mathematical understanding?*. Proceedings of the Annual Meeting [of the] North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (Eric Document Reproduction Service Number ED 471760).

Pirie, S. E. B. (1988). Understanding: Instrumental, relational, formal, intuitive …? How can we know?. *For the Learning of Mathematics, 8*(3), 2–6.

Pirie, S. E. B. (1996) *Classroom video-recording: when, why and how does it offer a valuable data source for qualitative research?.* Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Panama City, FL, 14 October 1996. (Eric Document Reproduction Service Number ED401128).

Pirie, S. ve Kieren, T. (1989) A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics, 9*(3), 7–11.

Pirie, S. ve Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies In Mathematics, 23*, 505-528.

Pirie, S. ve Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it?. *Educational Studies In Mathematics, 26*, 165-190.

Pirie, S. ve Martin, L. (2000). The role of collecting in the growth of mathematical understanding. *Matmematics Education Research Journal*, *12*(2), 127-146.

Pirie, S., Martin, L. ve Kieren, T. (1996). Folding back to collect: Knowing you know what you need to know. L. Puig ve A. Gutiérrez (Ed.) *Proceedings of the 20th*

Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education içinde Vol. 4 (s.146- 154). Valencia: PME.

Punch, K. F. (2005). *Sosyal Araştırmalara Giriş Nitel ve Nicel Yaklaşımlar*. (Çev. Dursun Bayrak, H. Bader Arslan ve Zeynep Akyüz 2. Basımdan Çeviri). Ankara: Siyasal Kitabevi.

Robson, C. (2015). *Bilimsel Araştırma Yöntemleri Gerçek Dünya Araştırması*. (Çev. Şakir Çınkır ve Nihan Demirkasımoğlu 3. Basımdan Çeviri). Ankara: Anı Yayıncılık.

Sağlam, Y., Altun, A. ve Aşkar, P. (2009). Investigation of preservice teachers' problem solving strategies in computer algebra systems environments. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi, 42*(1), 351- 376.

Sengul, S. ve Goktepe Yildiz, S. (2016). An examination of the domain of multivariable functions using the Pirie-Kieren model. *Universal Journal of Educational Research, 4*(7), 1533-1544.

Seven, M. A. ve Engin, A. O. (2008). Öğrenmeyi etkileyen faktörler. *Atatürk Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi,* 12 (2), 189-212.

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher, 26*(3), 9-15.

Şengül, S., Kaba, Y. ve Erdoğan, F. (2017). The analysis of middle school students' mathematical understanding in terms of different variables. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 25*(4), 1421-1434.

Şengül, Ş. ve Kaba, Y. (2016). Ortaokul öğrencilerinin farklı değişkenlere göre matematiksel anlamaları. *The Journal of Academic Social Science Studies, 42*, 345-360.

Tan Şişman, G. ve Aksu, M. (2009). Yedinci sınıf öğrencilerinin alan ve çevre konularındaki başarıları. *İlköğretim Online, 8*(1), 243-253.

Tatar, E., Okur, M. ve Tuna, A. (2008). Ortaöğretim matematiğinde öğrenme güçlüklerinin saptanmasına yönelik bir çalışma. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 16*(2), 507-516.

Temizöz, Y., Özgün Koca, S. A. (2008). Matematik öğretmenlerinin kullandıkları öğretim yöntemleri ve buluş yoluyla öğrenme yaklaşımı konusundaki görüşleri. *Eğitim ve Bilim, 149*(33), 89–103.

Thom, J. S. ve Pirie, S. E. B. (2006). Looking at the complexity of two young children's understanding of number. *Journal of Mathematical Behavior, 25*(3), 185-195.

Topdemir, H. G. (2010). Isaac Newton ve bilim devrimi. *Bilim ve Teknik Dergisi, 515*, 86-91.

Van de Walle, J. A., Karp, K. K. ve Bay-Williams, J. M. (2013). *İlkokul ve Ortaokul Matematiği Gelişimsel Yaklaşımla Öğretim*. (Çev. Soner Durmuş, 7. Basımdan Çeviri). Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.

Yağar, F. ve Dökme, S. (2018). Niteliksel araştırmaların planlanması: araştırma soruları, örneklem seçimi, geçerlik ve güvenirlik. *Gazi Sağlık Bilimleri Dergisi*, *3*(3), 1-9.

Yao, X. ve Manouchehri, A. (2020). Teacher interventions for advancing students' mathematical understanding. *Education Sciences*, 10, 1-21.

Zazkis, R. ve Mamolo, A. (2011). Reconceptualizing knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics, 31*(2), 8-13.

Zazkis, R., Sinitsky I. ve Leikin, R. (2013). Derivative of area equals perimeter-concidence or rule?. *Mathematics Teacher, 106*(9), 686-692.

Zembat, İ. Ö. (2010). Ölçme, Temel Bileşenleri ve Sık Karşılaşılan Kavram Yanılgıları. Erhan Bingölbali ve Mehmet Fatih Özmantar (Ed.). *İlköğretim öğrencilerinin matematiksel zorlukları ve çözüm önerileri* (s. 127-154). Ankara: Pegem Akademi Yayınevi.

Zembat, İ. Ö. (2013). Matematiksel Analizi ile Ölçme Kavramı ve Uzunluk, Alan ve Hacim Nitelikleri. İsmail Özgür Zembat, Mehmet Fatih Özmantar, Erhan Bingölbali, Hakan Şandır ve Ali Delice (Ed.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* (s.529-555). Ankara: Pegem Akademi Yayınevi.

EKLER

EK-1: Etik Kurul İzni

SİİRT ÜNİVERSİTESİ ETİK KURULU

Karar No : 2

Karar Tarihi : 23.11.2015

(Siirt Üniversitesi Etik Kurulu'nun aşağıdaki görüşü tavsiye niteliğinde olup, üniversitemizle ilgili etik ilkelerinin belirlenmesi ve değerlendirilmesi amacını taşımaktadır.)

ETİK İNCELEME KONUSU

Matematik Eğitimi alanında yapılması düşünülen "Problem Çözme Bağlamında Öğretmen Adaylarının Alan ve Çevre Kavramları Arasındaki İlişkiyi Yapılandırma Süreçlerinin İncelenmesi" başlıklı projede değerlendirilecek hususlar araştırma etiği ile ilgilidir.

İNCELEME

Yapılması düşünülen araştırmada 5 hafta (10 ders saati) süresince ilköğretim okullarında matematik öğretmeni olarak çalışabilecek öğretmen adaylarına bazı problemler sunulacak ve adayların çözüm sürecindeki gelişimleri incelenecektir.

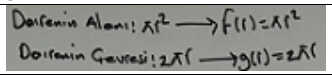
Söz konusu projeyle ilgili Etik Kurulun görevi kapsamında değerlendirilecek husus araştırma etiğiyle ilgilidir. Bu çerçevede yapılan incelemede Etik Kurul tarafından saptanan hususlar şunlardır:

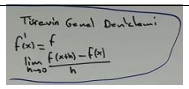
1. Söz konusu proje insan katılımına dayalı bir araştırma olup katılımcıların araştırmaya kendi rızalarıyla katılması esas olmalıdır.
2. Projenin katılımcıların yararına olması gerekir. Bu nedenle proje sonuçlarının katılımcılarla paylaşılması gerekir.
3. Araştırma süresince ve araştırma sonrasında katılımcıların herhangi bir zarara uğramaması gerekir.

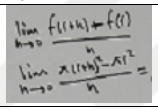
SONUÇ

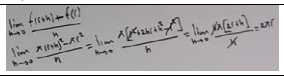
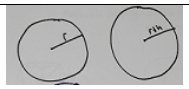
Sonuç olarak, Matematik Eğitimi ile ilgili yapılacak bu projenin araştırma etiği bakımından etik ilkelere uygun olması gerekir. Katılımcıların araştırmadan dolayı herhangi bir zarar görmemesi, kendi rızalarıyla araştırmaya katılmaları ve araştırmanın katılımcıların yararına olması esastır.

EK-2: Yavuz 1. Oturum (Dairede Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi)

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
00:01	A	(Araştırmacı kamera ayarı yapıyor.) Evet. Bakayım. Biraz daha yaklaştırsam şöyle. Tamamdır. Yavuz şimdi sana kalemler vereceğim. Sen kalemler ile çalışacaksın. Dairenin alanının formülünü biliyor musun?	1			
00:27	Y	Biliyorum.				1
00:28	A	Nedir?	6			
00:29	Y	$2\pi r^2$.				1
00:30	A	Yazabilir misin?	6			
00:31	Y	Pardon πr^2.		2	2	1
00:32	A	Tamam. Yazabilir misin?				
00:33	Y	Ortaya mı yazayım Hocam?				1
00:36	A	Yok, yok. Öyle o köşeye yaz.				
00:39	Y	Köşeye mi yazayım?				1
00:43	A	Önce bir şuraya senin adını yazayım. Belli olsun. (Çalışma defterinin köşesine katılımcının adı ve kaçıncı mülakat olduğunu yazıyor.) Tamam. Dairenin alanı yaz.				
00:56	Y	Dairenin alanı yazınca hani daire de yazayım mı? Dairenin alanı diye…				1
00:59	A	Hı! Hı! Yaz, yaz.				
01:00	Y	(Katılımcı yazıyor.)				1
01:14	A	Tamam. Dairenin çevresinin formülümü biliyor musun?	1			
01:17	Y	Evet.				1
01:18	A	Onu da yazalım.	6			
01:18	Y	(Yazıyor.) Yazım biraz kötü ama…				1
01:23	A	Hiç önemli değil.	6			
01:30	Y	$2\pi r$.		2	2	1
01:31	A	Hı! Hı! πr^2 ile $2\pi r$ arasında bir ilişki var mı?	1			
01:35	Y	I! İlişki var mı? Vardır ama nasıl?				1
01:45	A	Hı! Hı! Aklına gelenleri söyle.	6			
01:53	Y	E! Dairenin… E! Dairenin alanı da… E! r ile doğru orantılıdır.				1
02:00	A	Hı! Hı!	6			
02:01	Y	E! Dairenin çevresi de r ile doğru orantılıdır. r arttıkça ikisi de artar.		1	2	1
02:08	A	Tamam. Bunu fonksiyon cinsinden yazarsak neye bağlı olur bunların fonksiyonları?	1			
02:14	Y	r'ye bağlı olur.				1
02:15	A	Tamam yazalım.	6			
02:17	Y	Dairenin alanı bu. (Daha önce yazdığı alan formülünü gösteriyor.)				1
02:18	A	Şuraya mesela yaz. Bir ok çek.	6			
02:20	Y	(Yazıyor)				1
02:21	A	Hı! Hı!	6			
02:24	Y	$f(r)$				1
02:25	A	Hı! Hı!	6			
02:26	Y	$= \pi r^2$'dir.				1
02:30	A	Tamam. Diğerini de $h(r)$ ya da $g(r)$ diye yaz. Apayrı bir fonksiyon olacak ya.	6			
02:38	Y	$g(r) = 2\pi r$'dir.		1	2	1
						
02:44	A	Bu iki fonksiyon arasında bir ilişki var mı?	2			
02:52	Y	Vardır işte. r ile π sabittir zaten. İkisi için değişmiyor. Özellikle ikisi için yani, ikisinde de r var. İkisi de r ile doğru orantılı.		1	2	1
03:01	A	Bağımsız değişken hangisi?	1			
03:03	Y	Bağımsız değişken r'dir.				1
03:07	A	Bağımlı değişken?	6			
03:10	Y	Bağımlı değişken de $g(r)$'dir. Yani fonksiyonun kendisidir.				1
03:16	A	Yukarıda da?	6			
03:17	Y	Yukarıda da $f(r)$ 'dir.				1

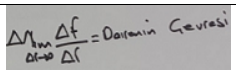
03:18	A	$f(r)$ 'dir.	6			
03:19	Y	f fonksiyonu yani y dersek y olur.		1	2	1
03:25	A	Hı! Hı! Şuradan şuraya geçerken r'nin kuvveti nasıl değişmiş? (Sırasıyla alan ve çevre fonksiyonları işaret ediliyor.)	1			
03:33	Y	Azalmış. Sanki fonksiyon tarzında böyle inmiş. (Üstel ifadenin türevinden bahsediyor.) Türev tarzında.				1
03:37	A	Türev tarzında.	6			
03:38	Y	Yani bu üstü başa indiriyoruz üstü 1 azaltıyoruz öyle olmuş.		1	2	2
03:45	A	Türev gibi olmuş değil mi? Allah, Allah! Bunun sebebi hikmeti nedir acaba? Böyle tesadüfi bir şey midir yoksa bir şeyi, sebebi var mıdır?	1			
03:57	Y	Tesadüfi değildir. Mutlaka bir sebebi vardır. Ama…				2
03:59	A	Hı! Hı!	6			
04:00	Y	Onu biz nasıl açıklayacağız? O var.				2
04:09	A	(Gülüşme)	6			
04:03	Y	Evet, onu açıklamak önemli değil mi?				2
04:07	A	Deneyelim mi?	6			
04:09	Y	Evet.				2
04:10	A	Türev… Türevi gibi görünüyor.	6			
04:12	Y	Aynen türevi gibi görünüyor.		1	2	2
04:14	A	Türevin genel denklemini hatırlıyor musun?	1			
04:17	Y	Türevin?				1
04:18	A	Genel denklemi	6			
04:19	Y	Genel denklemi.				1
04:21	A	Hı! Hı!	6			
04:24	Y	Hatırlıyorum ama hatırladığım kadarıyla yazayım mı?				1
04:26	A	Hı! Hı!	6			
04:27	Y	(Yazmaya başlıyor, yazdıklarını da seslendiriyor.) Türevin genel denklemi.				1
04:29	A	Hı! Hı!	6			
04:29	Y	(Başlığı yazıyor ve araştırmacıya bakıyor.)				1
04:38	A	Hı! Hı!	6			
04:43	Y	$F(x)$'in türevi f. ($F'(x) = f$ yazıyor.)				1
04:48	A	Hı! Hı!	6			
04:50	Y	E! (Mırıldanma)				1
05:00	A	Hani şu limitli bir şey vardı ya ondan bahsediyorum.	6			
05:06	Y	Limitli vardı. f… E! Limit…				1
05:10	A	Hı! Hı!	6			
05:15	Y	h…				1
05:16	A	Hı! Hı!	6			
05:17	Y	Sıfıra giderken…				1
05:19	A	Hı! Hı!	6			
05:22	Y	$f(x+h)$…				1
05:24	A	Hı! Hı!	6			
05:25	Y	- $f(x)$…				1
05:32	A	Hı! Hı!	6			
05:33	Y	Bölü h		2	2	2
						
05:36	A	Güzel. Şu fonksiyonun türevini şununla bulabilir miyiz? (Dairenin alan formülü işaret ediliyor.)	1			
05:45	Y	Şu fonksiyonun türevini şunla bulabilir miyiz, bulabiliriz.				2
05:49	A	Deneyelim.	6			
05:52	Y	Eşit falan mı yazayım?				2
05:53	A	Yok yok. Bu, bu önbilgi. (Genel türev denkleminin etrafı kalemle işaretleniyor.)	6			
05:54	Y	Tamam.				2
05:56	A	Şimdi, şunun türevini şuradan bulalım. (Sırasıyla dairenin alan fonksiyonu ve genel türev denklemi işaret ediliyor.)	6			
06:01	Y	Şuradan mı? (Genel türev denklemi işaret ediliyor.)				1
06:02	A	Hı! Hı!	6			
06:10	Y	Limit h sıfıra giderken…				2
06:11	A	Hı! Hı!	6			

06:12	Y	Şurada… E! $x + h$'tı.				2
06:17	A	Hı! Hı!	6			
06:19	Y	Bunu da…				2
06:20	A	Şurada ne diyeceğiz? (Alan fonksiyonu işaret ediliyor.)	6			
06:22	Y	f… E! $(r + h)$ diyeceğiz.				2
06:26	A	Güzel. Hı! Hı!	6			
06:27	Y	Yani, şunu diyorduk hocam, $r + h$…				2
06:32	A	Hı! Hı!	6			
06:33	Y	Artı… (üstünü çiziyor) Eksi…				2
06:36	A	Hı! Hı!	6			
06:40	Y	$f(r)$.				2
06:41	A	Hı! Hı!	6			
06:42	Y	Bölü h'tır.		1	2	2
06:44	A	Hı! Hı!				
06:45	Y	I! Devamını getireyim.				2
06:47	A	Getir.	1			
06:48	Y	Limit… Limit h sıfıra giderken…				2
06:54	A	Hı! Hı!	6			
06:55	Y	Bu π zaten sabittir.				2
06:57	A	Hı! Hı!	6			
06:58	Y	$\pi(r + h)$'ın karesi eksi $f(r)$ de zaten πr^2'dir.				2
07:12	A	Hı! Hı!	6			
07:16	Y	Bölü…				2
07:17	A	Hı! Hı!	6			
07:18	Y	h'tır.				2
07:19	A	Tamam. Eşittir yaz. (Limit ifadesinin önü işaret ediliyor.)	6			
07:20	Y	Eşittir devamı.		1	2	2
						
07:23	A	Hı! Hı! Peki, bu limitin sonucu sence ne çıkar? Öngörün var mı?	1			
07:28	Y	Limitin sonucu…				2
07:29	A	Hı! Hı!	6			
07:30	Y	E! Bence sabit bir sayı çıkar.		1	3	2
07:32	A	Nasıl yani?	2			
07:33	Y	(Kısık sesle) Limit… (Sessizlik)		1	1	2
07:38	A	Bu limiti niye alıyorsun?	1			
07:41	Y	Limiti niye alıyorum?				2
07:42	A	Hı! Hı!	6			
07:43	Y	I! h'ı yok etmek için.		1	1	2
07:46	A	Yani bu limit bu denklem neyin denklemiydi? (Türev denklemi işaret ediliyor.)	1			1
07:53	Y	Türevin genel denklemi.		2	2	2
07:55	A	Tamam. Peki, bu limiti hesaplarsan neyi bulmuş olursun? Bir öngörün var mı? (Türev denklemi işaret ediliyor.)	1			1
08:00	Y	I! Öngörüm... Herhalde hız değişimini bulurum.		1	1	2
08:06	A	Neyse, devam edelim bakalım ne çıkıyor.	2			
08:15	Y	Şuradan, limit h sıfıra giderken bunu π parantezine alıp…				2
08:18	A	Hı! Hı!	6			
08:21	Y	Şundan, bunu açarsam $r^2 + 2hr + h^2$…				2
08:32	A	Hı! Hı!	6			
08:33	Y	$-r^2$…				2
08:38	A	Hı! Hı!	6			
08:39	Y	Bölü h… I!				2
08:43	A	Hı! Hı!	6			
08:44	Y	Devam edeyim mi?				2
08:46	A	Hı! Hı! Devamını getir.	6			
08:48	Y	Buradan… E! r^2'ler bir birini götürür.				2
08:51	A	Hı! Hı!	6			

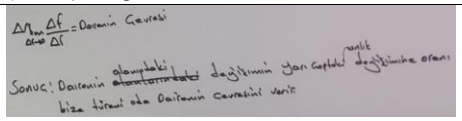
08:53	Y	E! Eşittir limit h 0'a giderken. Birde h parantezine alırsam…h parantezine aldığımda $h\pi$ oluyor. Burada bir π'yi almıştık. Burada $2r$ olur.				2
09:14	A	Hı! Hı!	6			
09:15	Y	E! $+h$ olur.				2
09:20	A	Hı! Hı!	6			
09:21	Y	Bölü h olur.				2
09:24	A	Tamam.	6			
09:25	Y	E! Buradan h'ları sadeleştirirsek…				2
09:29	A	Tamam.	6			
09:31	Y	E! h'ı da sıfırla… Yani yerine yazarsak				2
09:34	A	Hı! Hı!	6			
09:35	Y	Eşittir $2\pi r$ olur.		1	2	2
						
09:43	A	Bu nedir? Sonuç nedir?	1			
09:45	Y	Dairenin çev… Çevresine.		1	3	2
09:50	A	Yani şu fonksiyonun neyini buldun sen? (Alan fonksiyonu işaret ediliyor.)	1			
09:52	Y	Bu fonksiyonun türevini buldum.		1	2	2
09:55	A	Demek ki öngörümüz neymiş? Şu limiti hesapladığımız zaman? Neyi bulmakmış?	1			
10:01	Y	Dairenin çevresini.		1	2	2
10:04	A	Dairenin çevresi de yani bu fonksiyonun neyini bulmaya yarıyor bu limit?	1			
10:07	Y	Türevini.				2
10:08	A	Türevini bulmaya yarıyor.	6			
10:09	Y	Dairenin alanının türevini aldığımızda bize dairenin çevresini veriyor.		1	2	2
10:14	A	Veriyor.				
10:15	Y	Veriyor.				2
10:18	A	Tamam. Bunu bir şekil çizerek yazacak olsaydık acaba nasıl bir şekil çizerdin? Yani şekil çizerek bunu açıklamaya çalışırsak nasıl bir şekil çizmemiz gerekir?	1			
10:35	Y	Yani nasıl bir şekil? Neyle ilgili şekil? Dairenin, daire ile ilgili şekil mi yoksa grafik tarzı.				2
10:44	A	Daire ile ilgili bir şekil.	6			
10:47	Y	(Mırıldanma)		1	3	2
10:55	A	Peki, şu ne anlam ifade ediyor, $\pi(r+h)^2$?	1			
11:00	Y	πr?				1
11:01	A	πr …πr^2 ne anlam ifade ediyor? (Kalem ile genel türev denkleminin payındaki πr^2 işaret ediliyor.)	6			
11:05	Y	Dairenin alanını.				1
11:08	A	Nasıl bir daire? Yarıçapı ne?	6			
11:11	Y	Yarıçapı r olan bir daire.		1	2	2
11:13	A	Şu neyi ifade ediyor? (Kalem ile genel türev denkleminin payındaki $\pi(r+h)^2$ işaret ediliyor.)	1			
11:14	Y	Yarıçapı $r+h$ olan bir dairenin alanı.		1	2	2
11:20	A	Tamam. İki tane daireyi bir çizsene. Merkezleri aynı olsun.	1			
11:25	Y	Merkezleri aynı olsun.				2
11:26	A	Büyük çiz. (Katılımcı bir çember çiziyor.) Bunun yarıçapı ne?	6			
11:31	Y	Bunun yarıçapı r olsun.				2
11:34	A	Tamam.	6			
11:36	Y	Bu daha büyük olsun.		1	2	2
11:42	A	Niye daha büyük oldu?	1			
11:43	Y	Çünkü $+h$'tır.				2
11:44	A	Hı! Hı!	6			
11:45	Y	Yarıçapı daha büyüktür.				2
11:46	A	Tamam!	6			
11:48	Y	Bu da yarıçapı $r+h$'tır.		1	2	2
						
11:51	A	Tamam. Bu iki daireyi merkezleri çakışacak şekilde üst üste oturtursan.	1			
11:57	Y	Yazayım?				2
11:58	A	Hı! Hı! Yeni bir şekil çıkar ortaya değil mi?	6			
12:01	Y	Evet.				2
12:02	A	Hı! Hı!	6			

12:08	Y	Şu r yapıçaplı olsun.				2
12:10	A	Hı! Hı!	6			
12:15	Y	Şu da devamını getireyim mi?				2
12:22	A	Yok, yok çiz. Yani, fark etmiyor nasıl rahat çiziyorsan.	6			
12:26	Y	$r + h$'tır.		1	2	2
12:30	A	Tamam. Peki, şu neydi? (Genel türev denkleminin pay kısmındaki $\pi(r+h)^2$ ifadesi işaret ediliyor.)	1			
12:33	Y	$r + h$. Büyük… I! Dairenin alanıdır.				2
12:38	A	Alanıdır. Aradaki işaret? (Genel türev denkleminin pay kısmındaki eksi işareti işaret ediliyor.)	6			
12:39	Y	Küçük dairenin alanıdır.				2
12:41	A	Aralarındaki işaret?	6			
12:42	Y	Eksidir.				2
12:42	A	Tamam. Bu nedir? (Genel türev denkleminin pay kısmındaki πr^2 ifadesi işaret ediliyor.)	6			
12:43	Y	Küçük dairenin alanıdır.				2
12:44	A	Tamam. Yani ne yapmışız burada? (Genel türev denkleminin pay kısmı işaret ediliyor.)	6			
12:47	Y	Büyük… I! Dairenin alanından küçük dairenin alanını çıkartmışız.		1	2	2
12:52	A	Nasıl bir alan kalır?	1			
12:53	Y	Şu…				2
12:53	A	Şunla, mavi ile, mavi ile yaz.	6			
12:54	Y	Mavi ile…				2
12:55	A	Hı! Hı!	6			
12:59	Y	Şöyle bir alan… (Taramaya başlıyor.)				2
13:02	A	Devam et.	6			
13:08	Y	Şöyle bir alan… (Taramaya devam ediyor.)				2
13:10	A	Tamam.	6			
13:12	Y	Şöyle bir alan kalmış olur.		1	2	2
						
13:13	A	Tamam. Kalemin ucunu alayım ben. Peki, Yavuz! Bu h'ın 0'a gitmesi durumunda... Pardon şeyi sorayım. Günlük hayatta neye benziyor bu? Bu alan neye benziyor? Nasıl bir nesneye benziyor?	1			
13:30	Y	Alan neye benziyor?				1
13:32	A	Hangi, nasıl bir nesneye benziyor?	6			
13:35	Y	Arabaların tekerleklerine.		1	2	2
13:37	A	Tekerleklerine. E! Tekerleğin kalınlığı ne?	1			
13:41	Y	h'tır.		1	2	2
13:43	A	Tamam. Peki, şurada ne yapmışız biz? (Genel türev denkleminin $\lim_{h\to 0}$ kısmı işaret ediliyor.)	1			
13:50	Y	E! Tekerleğin kalınlığını sıfır almışız.		1	2	2
13:52	A	Sıfıra götürmüşüz. Peki, tekerin kalınlığını sıfıra götürürsek o şekil nasıl değişir?	1			
13:59	Y	Şekil bir şey gibi olur… Bir çember gibi bir şey olur.				2
14:02	A	Hangi çember gibi olur?	6			
14:04	Y	Şöyle r çemberi gibi.		1	2	2
14:06	A	Tamam.				
14:07	Y	Çizeyim mi çemberi?	4			2
14:08	A	Yok. O şekil üzerinde göster. Oklarla göster.	6			
14:13	Y	Yani şekil şöyle bir şey olur.				2
14:20	A	Dış mı genişliyor? İç mi genişliyor? Şuraya mı yaklaşıyor. Yani şu şuraya mı yaklaşıyor. Bu mu bura yaklaşıyor? (Çemberlerden hangisinin hangisine yaklaştığı sorgulatılırken çemberler işaret ediliyor.)	6			
14:32	Y	Bu, şuraya yaklaşır. ("Dıştaki içtekine yaklaşıyor" demek istiyor.)				2
14:34	A	Ok ile göster. Şöyle göster. Şuradan göster. Biraz daha alttan göster. Ha, tamam.	6			
14:45	Y	Şuraya yaklaşıyor.		1	2	2
14:47	A	Tamam. Peki, o alan gitgide neye dönüşür o zaman? O durumda?	1			
14:52	Y	Gitgide dairenin alanına dönüşür.				2
14:55	A	Hangi dairenin?	6			
14:57	Y	r yarıçaplı dairenin alanına dönüşür.		1	1	2
14:59	A	r yarıçaplı dairenin… Şimdi bu, şu alandan bahsediyoruz. (Halka işaret ediliyor.)	1			
15:12	Y	Şu alan?				2

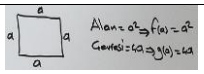
15:13	A	Hı! Hı!	6			
15:14	Y	Şu alan gittikçe sıfır olur.				2
15:15	A	Sıfır olur.	6			
15:16	Y	Çünkü çember olur sadece bir çizdiğimiz çember olur.		1	1	2
15:23	A	Paşam, sen elini kolunu şey yapmışsın. (Araştırmacı, kalemden masaya akmış olan mürekkebi siliyor.)				
15:25	Y	Bir şey olmaz.				2
15:30	A	E! Bir daha sorayım. Şimdi, h sıfıra gittiği zaman ne demiştin sen? Ne neye yaklaşıyordu?	1			
15:42	Y	E! Büyük… I! Bu çember… I!				2
15:46	A	Tamam.	6			
15:46	Y	r'ye yaklaşıyordu.				2
15:47	A	Küçüğe yaklaşıyordu.	6			
15:49	Y	He! Büyük küçüğe yaklaşıyordu. Yani büyük küçük oluyordu.		1	2	2
15:53	A	Tekerleğin kalınlığı nasıl değişir bu süreç içerisinde?	1			
15:58	Y	Gittikçe sıfır oluyor.				2
16:01	A	Gittikçe sıfır oluyor. Sıfır olduğu zaman o alan neye dönüşür?	6			
16:08	Y	Alan çemberin… I! Dairenin çevresine dönüşür.		1	2	3
16:13	A	Çevresine dönüşür.				
16:14	Y	Evet.				3
16:15	A	Günlük hayattan bir örnekle açıkla.	1			
16:17	Y	Günlük hayattan bir örnekle açıkla…				3
16:20	A	Hı! Hı! Mesela arabanın tekeri gibi. Arabanın tekeri yol yaptıkça azalır. Kalınlığı azalır.	6			
16:28	Y	Kalınlığı incelir.				3
16:29	A	He!	6			
16:30	Y	Yani bezen kesiyorlar öyle.				3
16:32	A	İçinde hava yok. Plastik gitgide azalıyor. Nereye kadar azalabilir?	6			
16:41	Y	Sıfıra kadar azalabilir diyeceğim, değil.				3
16:45	A	Yani o kalınlıktan bahsediyorum. Plastik. Plastiğin alanı nereye kadar azalabilir?	6			
16:51	Y	Sıfıra kadar azalabilir.				3
16:52	A	Tamam, sıfıra kadar azaldığı zaman ne olur?	6			
16:56	Y	Patlar.				3
16:58	A	İçinde hava yok.	6			
17:01	Y	Hava yok… İçinde hava yoksa delik olur herhalde.				3
17:05	A	Yani şey var ya… Tekerin bir jantı var.	6			
17:07	Y	Evet.				3
17:08	A	Metal kısmı bir de dışında da bir plastik var.	6			
17:10	Y	Aynen öyle. Evet.				3
17:11	A	Plastik gitgide azalırsa?	6			
17:14	Y	Şey… O… Demir onunla aynı olur.				3
17:19	A	Demir olanın neyiyle aynı olur.				
17:21	Y	Çevresiyle.		1	2	3
17:22	A	Çevresiyle aynı olur. Güzel. Demek ki şu işlemi yaptığımız zaman… Evet? (Türevin genel denklemi ve açılımı işaret ediliyor.)	2			
17:29	Y	Bu işlemi yaptığımız zaman… I! Büyük çember				2
17:34	A	Hı! Hı!	6			
17:35	Y	I! Küçük çemberin üzerine gelecek şekilde				2
17:37	A	Hı! Hı!	6			
17:38	Y	Küçülüyor. Yani küçük çember oluyor.		1	1	2
17:40	A	Ve gitgide neye dönüşüyor?	1			
17:42	Y	Sıfıra dönüşüyor.		1	1	2
17:44	A	Sıfır dediğin… Aslında tam olarak sıfır olmuyor. Ne oluyor? Alan neye dönüşüyor?	1			
17:48	Y	Alan küçük çemberin alanına dönüşüyor.		1	1	2
17:51	A	Çemberin alanına?	1			
17:52	Y	Dairenin alanına dönüşüyor.		1	1	2
17:53	A	Küçük dairenin alanına. Küçük dairenin alanı nedir?	1			
17:56	Y	πr^2		1	1	2
17:57	A	πr^2 'ye mi dönüşür, şu alan? (Halka işaret ediliyor.)	1			
18:03	Y	π …I! Dairenin çevresine dönüşür.		1	2	3
18:07	A	Gitgide dairenin çevresine dönüşür.				
18:08	Y	Dairenin çevresine dönüşür, evet.				3

18:09	A	Tamam. Şimdi tekrar söyle ki hani ben tam olarak olup olmadığını anlayayım. Kelimelerle ifade et.	1			
18:18	Y	Büyük çember gitgide küçülüyor.				3
18:22	A	Hı! Hı!	6			
18:23	Y	Küçük çemberin… Küçük çembere dönüşüyor. Alanı da küçük çemberin… I! Çevresine dönüşüyor.				3
18:28	A	Çevresine dönüşüyor. Tamam. Güzel.	6			
18:30	Y	Çünkü bir çizgi oluyor. Alan artık.		1	2	3
18:33	A	Tamam. Çok güzel. Burada sen nelerin farkını almışsın. (Genel türev denkleminin pay kısmı işaret ediliyor.)	1			2
18:38	Y	Büyük… I! Dairenin alanından küçük dairenin alanı çıkarmışım.		1	2	3
18:44	A	Tamam. Onu delta olarak fark değil mi? Değişim. Arada bir fark var. Delta nedir bu? Bu nedeki değişimdir? Pay kısmı?	1			
18:58	Y	r'deki değişimdir.		1	1	2
19:00	A	Paydaki. Pay r'yi mi temsil ediyor yoksa başka bir şeyi mi temsil ediyor?	1			
19:07	Y	h'taki değişimi. h'taki değişimdir.		1	1	2
19:11	A	Pay neyi ifade ediyordu? Şekil üzerinde göstermiştin ya.	1			
19:15	Y	Hı! Büyük dairenin alanından küçük dairenin alanı çıkarmayı.				2
19:18	A	Tamam. O zaman neyle neyin farkı?	6			
19:21	Y	Alanlar farkı.				2
19:22	A	Alanlar farkı. Tamam. O zaman delta bir şey yaz. Delta alan. Alan S de veya f de. Alan olarak f şey yaptık ya.	6			
19:36	Y	Hı! Hı! Ayrı yazayım.				3
19:38	A	Hı! Hı!	6			
19:39	Y	Bu delta… Evet.		1	2	3
19:39	A	Peki, bu h nedeki değişimdir?	1			2
19:47	Y	r'deki değişimdir.		1	2	3
19:48	A	Tamam. Bölü Δr… Δr. Neyi sıfıra götürüyorsun sen burada? ($\frac{\Delta f}{\Delta r}$ ifadesi işaret ediliyor.)	1			
19:57	Y	h'ı sıfıra götürüyorum.				2
20:00	A	Yani şurada ne sıfıra gider? ($\frac{\Delta f}{\Delta r}$ ifadesi işaret ediliyor.)	6			
20:03	Y	r sıfıra gider.				3
20:04	A	Tamam. O zaman limit delta r sıfıra giderken yap başına.	6			
20:10	Y	Limit Δr sıfıra giderken.		1	2	3
20:14	A	Bu neyi verir bize?	1			
20:16	Y	I! Bu bize büyük… I! Dairenin alanından küçük dairenin alanı çıkardığımızda arada kalan alanı veriyor.		1	1	2
20:25	A	Böldük ve Δr'yi sıfıra götürdük. Δr'yi sıfıra götürdüğümüz zaman o alan neye dönüşüyor.	1			
20:34	Y	Δr 'yi sıfıra... No… Bir nokta gibi bir şey oluyor.				2
20:38	A	Yani?	6			
20:39	Y	Sıfır oluyor.		1	1	2
20:40	A	Sıfır olmuyor da ne oluyor? Küçük dairenin?	1			
20:46	Y	Küçük dairenin. Bir nokta gibi küçülüyor, nokta oluyor.		1	1	2
20:50	A	Yok, yok şeyi soruyorum. Yani biz bu işlemin sonunda neyi bulduk? (Genel türev denklemi açılımı işaret ediliyor.)	1			
20:57	Y	Dairenin çevresini bulduk?				2
21:00	A	Dairenin çevresini o zaman bu dairenin çevresine eşittir.	6			
21:02	Y	Evet.				3
21:03	A	Eşittir dairenin çevresi yaz.	6			
21:05	Y	Eşittir πr yazayım.				3
21:07	A	Tamam, sözel olarak da yazabilirsin. Nasıl hoşuna gidiyorsa.	6			
21:17	Y	Tamam.		1	2	3
						
21:18	A	Şimdi değişim oranı cinsinden bunu ifade edecek olsaydın nasıl ifade ederdin?	1			
21:27	Y	Değişim oranı...		1	1	3
21:30	A	Ya da öncesinde ne dedik? Dairenin alanının türevi neyi veriyor bize? Dairenin…	1			
21:38	Y	Çevresini veriyor.		1	2	2
21:39	A	Çevresini veriyor. Tamam. Bunda sıkıntı yok. Şimdi biz bunu, şu değişim oranı cinsinden ifade edelim.	1			

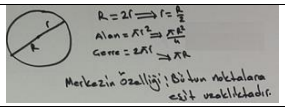
21:53	Y	Yazdığımızda, bunu değişim olarak ifade ettiğimizde…				2
21:57	A	Sözel olarak.	6			
21:58	Y	Bize şeyi veriyor. I! Bu arada kalan… I! Alanı veriyor.				2
22:03	A	Bu aslında türev. ($\lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta r}$ ifadesi işaret ediliyor.)	6			
22:04	Y	Türev dedik. Türevini almış oluyoruz.				2
22:07	A	Neyin neye oranı türevi veriyor bize?	6			
22:10	Y	I! Fonksiyonun… Fonksiyonun değişiminin…				2
22:14	A	Hı! Hı!	6			
22:14	Y	E! Yarıçapın değişimine oranı.				2
22:17	A	Fonksiyon ne fonksiyonu? Hangi fonksiyon?	6			
22:21	Y	Dairenin alanının fonksiyonu.				2
22:24	A	Alanındaki...	6			
22:24	Y	Değişim. Alanındaki değişimin fonksiyonunun…				3
22:27	A	Tamam.	6			
22:28	Y	I! Yarıçaptaki değişime oranı.				3
22:31	A	Neyi verir?	6			
22:33	Y	E! Bize türevi verir.				3
22:36	A	Yani? Türevi neyi veriyordu?	6			
22:39	Y	Türevi?				3
22:40	A	Türevi neye eşit oluyordu?	6			
22:42	Y	Türevi… I! Dairenin… I! Çevresine eşit oluyordu.		1	2	3
22:44	A	(Katılımcıdan az bir süre farkıyla katılımcının dediği tekrarlanıyor.) Çevresine eşit oluyordu, tamam. Tekrar bir toplarla. Böyle bir güzel bir ifade olsun.	1			
22:53	Y	Δf… I! Alanların…				2
22:57	A	Hı! Hı!	6			
22:58	Y	I! Değişimleri oranı…				2
23:01	A	Hı! Hı!	6			
23:02	Y	Alanlarının değişiminin… I! Yarıçaplarının değişimine… I! Oranı bize dairenin çevresini veriyor.				2
23:09	A	Tamam. Normalde bu türevde sanal bir $(r + h)$'lık bir şey ekledik ya o aslında sanal bir daire. $(r + h)$'lık bir daire ekledik ya bu aslında sanal bir daire. Şu şekilde. Alanlarını değil, alanları olmuyor o zaman. Alanındaki!	6			
23:24	Y	Alanındaki değişimin yarıçaptaki değişimine oranı.				3
23:35	A	Tamam.	6			
23:36	Y	Alanındaki değişimin… I! Yarıçaptaki değişimine oranı.				3
23:40	A	Neyi verir?	6			
23:41	Y	I! Çevresini verir. Dairenin çevresini verir.		1	2	3
23:44	A	Tamam. Onu sözel olarak yazabilir misin? Şöyle. (Araştırmacı çalışma kağıdında boş bir yer gösteriyor.) Sonuç yaz. Sonuç yaz.	1			
23:52	Y	(Yazmaya başlıyor. "Sonuç: Dairenin alanlarındaki" yazıp duruyor.) Devam mı edeyim?				2
24:12	A	Hı! Hı! Devam et. Nasıl rahat hissediyorsan, sıkıntı yok.	6			
24:17	Y	(Kaldığı yerden devam ediyor. "Sonuç: Dairenin alanlarındaki değişimin yarıçaptaki değişime oranı" ifadesini yazıyor.)				2
24:44	A	Buradaki anlık değişimini diyelim. (Katılımcının yazdığı ifadedeki "değişimine" kelimesinden öncesi işaret ediliyor.) Ortalama değişim değil türev, anlık değil mi?	6			
24:50	Y	(Katılımcı ok çizip işaret edilen yere "anlık" yazıyor.)				2
24:55	A	Hı! Hı!	6			
24:55	Y	Anlık…				3
24:56	A	Hı! Hı! Değişime oranı…	6			
24:58	Y	(Yazmaya devam ediyor.) Bize türevi…				3
25:06	A	Yani?	6			
25:07	Y	Türevi… O da… I! (Yazmaya devam ediyor.) Dairenin çevresini verir.				3
25:12	A	Tamam.	6			
25:12	Y	(Yazmaya devam ediyor ve bitiriyor. Yazılan ifade: "Dairenin alanlarındaki değişimin yarıçaptaki anlık değişime oranı bize türevi o da Dairenin çevresini verir." Şeklindedir.)		1	2	3
25:23	A	Güzel. Tamam. Oku bakalım.	1			
25:28	Y	Dairenin alanlarındaki değişiminin…				2
25:31	A	Sıkıntı yok mu?	6			
25:39	Y	Dairelerin alanındaki…				2
25:41	A	Kaç tane daire var?	6			
25:43	Y	İki tane var.				2

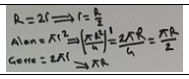
25:44	A	Bir tanesi neydi?	6			
25:45	Y	Bir tanesi sanaldır.				2
25:47	A	Sanaldır. O zaman "lar"a gerek var mı?	6			
25:51	Y	Yoktur.				2
25:53	A	Ne diyeceğiz o zaman?	6			
25:55	Y	Dairenin alanındaki.		1	2	3
25:57	A	Alanındaki. O zaman o kelimelerin üzerini komple çiz üzerine yaz.				
26:01	Y	(Yazmış olduğu metindeki "alanlarındaki" kelimesinin üstünü çizip "alanındaki" yazıyor.)				
						
26:08	A	Yani, defalarca söylettiriyorum ve yazdırıyorum ki tam olarak bir…				
26:12	Y	Anlaşılsın.				
26:13	A	Anlaşılsın. Yani böyle bir, tam olarak otursun. Tamam. Teşekkürler Yavuz. Birinci oturum buydu.				
26:20	Y	Ben teşekkür ederim hocam.				
26:21	A	Peki, hiç böyle bir şeyle karşılaşmış mıydın?				
26:26	Y	Hiç aklıma bile gelmemişti.				
26:27	A	Aklına bile gelmemişti.				
26:29	Y	Sadece biz… I! İşte dairenin alanı $\pi r^{2\prime}$dir. Çevresi $2\pi r$'dir.				
26:36	A	$2\pi r$'dir. Niye?				
26:37	Y	Nasıl gelmiş nerden gelmiş orasını (karşılıklı gülüşneler) bilmiyordum. Belki bize söylenmiştir de… Genel matematikte belki görmüşüz. Olabiliriz diye şey yaptım ama… Genel olarak hatırlamıyorum, öyle bir şeyi.				
26:52	A	Bunu çoğu hoca da bilmiyordur.				
26:54	Y	Hah! İşte onu bilmiyoruz. Ama bu formülü biliyordum. Genel formülü biliyorduk. Unutmuşuz arada unutuyoruz işte.				
27:11	A	Peki, bu ilişki nasıl bir ilişki?				
27:17	Y	Güzel bir ilişkidir. Yani hemen bir dairenin alanını biliyorsan ikincisini bilmene gerek yok zaten kendisi çıkıyor.				
27:18	A	Ya da çıkartabiliyorsun				
27:19	Y	He! Ya da ikincisini bilsen diğerini çıkartabilirsin.				
27:24	A	Evet.				
27:24	Y	O yüzden yani birini bilmek güzeldir. Birini bilmek iki şey bilmek demektir.				
27:30	A	Türeve farklı bir bakış açısı. Türeve de farklı bir bakış açısı getiriyor.				
27:38	Y	Ne olarak, nasıl?				
27:39	A	İşte o şekilde...				
27:40	Y	Ha! Şekil! Günlük hayatla insan ilişkilendirebiliyor. Bu da zaten daha kalıcı olmasını sağlıyor.				
27:49	A	Evet. Teşekkürler Yavuz.				

EK-3: Yavuz 2. Oturum (Karede Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi)

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
00:02	A	Şimdi, dostum… Buraya ikinci oturum yazalım. (Araştırmacı resim defterini düzeltiyor. İkinci sayfasını açıp "2. Oturum" yazılacak yeri yani sağ üst köşeyi işaret ediyor.) Buraya Y.2 yaz. Şimdi, geçen hafta biz… Ne oldu? Mürekkep mi akıtıyor? (Katılımcı kaleme bakıyor.)				
00:35	Y	Sanki bu mürekkep…				
00:39	A	Mürekkep akıtıyorsa kalemi değiştir. Şimdi. Geçen hafta dairede alan çevre türev ilişkisini kurduk.	1			
00:54	Y	Aynen. Alanın… Dairenin alanının türevini aldığımızda…				3
00:58	A	Hı! Hı!	6			
00:58	Y	Bize dairenin çevresini veriyordu.		1	2	3
01:01	A	Çevresini veriyordu. Şimdi bu hafta uğraşacağımız şey şu: karenin alanıyla çevresi arasında böyle bir ilişki var mıdır?	1			
01:13	Y	Karenin çevresiyle…				2
01:14	A	Hı! Hı!	6			
01:15	Y	Alanı arasında böyle bir ilişki var mıdır?				2
01:17	A	Varsa bulabilir miyiz?	6			
01:21	Y	I! (Mırıldanma)				2
01:25	A	Denemek lazım.	6			
01:26	Y	Kareyi yazayım… Çizeyim mi bir kare?				1
01:27	A	Evet.	6			
01:28	Y	(Bir kenar uzunluğu a olan bir kare çizmeye başlıyor.) Karenin dış kenarı a'dır.				1
01:41	A	a'dır	6			
01:42	Y	a'dır. $Alanı = a^2$ dir.				1
01:52	A	Hı! Hı!	6			
01:53	Y	Çevresi $4a$'dır.				1
02:01	A	Hı! Hı!	6			
02:13	Y	(10 saniye kadar düşünme ve sessizlik.) Bunu fonksiyon halinde yazsak…				2
02:15	A	Hı! Hı!	6			
02:18	Y	$f(a) = a^2$ $g(a) = 4a$ olur. (8 saniye sessizlik.) Türevi almak lazım.				2
02:48	A	Hı! Hı!	6			
02:49	Y	(Kısık sesle) Türevi limite uygularsak… (9 saniye sessizlik, ardından kısık sesle mırıldanma.) Limit…				2
						
03:03	A	Yok: Yok. Gerek yok. Türevini alıp direkt hesaplayabilir misin? $f(a)$'nın türevi nedir?	6			
03:07	Y	Direkt mi alayım?				2
03:09	A	Hı! Hı!	6			
03:11	Y	$f\ldots a^2$'nin türevi $2a$'dır.				2
03:14	A	Çevre?	6			
03:16	Y	Çevre de $4a$'dır				2
03:19	A	Eşit midir?	6			
03:20	Y	Değildir. Çevre, şeyin dört katı… İki katıdır.		1	2	2
03:26	A	Peki, o zaman alan çevre türev ilişkisi var diyebilir miyiz?	1			
03:40	Y	Alan, çevre… (Mırıldanma ve sessizlik) Vardır. Diyebiliriz.				3
03:42	A	Neye dayanarak vardır diyorsun?	6			
03:45	Y	Çünkü biz çevreyi a cinsinden yazdık ya…				3
03:51	A	Hı! Hı	6			
03:52	Y	Misal $4a$ dedik.				3
03:53	A	Hı! Hı	6			
03:54	Y	E, bunu biz kalkıp b yazsak bile yani b yazsak, c yazarsak fark etmez. Her defasında a^2, b^2, c^2 olacak.				3
04:01	A	Hı! Hı	6			
04:03	Y	Çevre ise yani $4a, 4b, 4c$ gibi olacak.				3
04:07	A	Hı! Hı!	6			

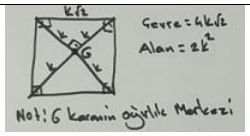
04:08	Y	E, zaten biz karedir ya biz türev aldığımızda bu $2a$ olacak $2b$ olacak $2c$ olacak bu da 4a'dır 4b'dir 4c'dir. Arada sanki $\frac{1}{2}$'lik bir oran vardır.		1	2	3
04:26	A	Mesela dairede neydi? πr^2'ydi türevini alıyorduk $2\pi r$…	1			
04:32	Y	$2\pi r$ oluyordu.				3
04:33	A	Direkt eşit çıkıyordu. $\frac{1}{2}$'sine eşit çıkmıyordu.	6			
04:36	Y	Aynen öyle eşit çıkmıyor. Burada $\frac{1}{2}$'sine eşit çıkıyor.		1	2	4
04:44	A	Tamam. Peki, dairede çapa göre deneyelim. Dairede hani çapa göre alanı ve çevreyi hesaplasaydık acaba olur muydu?	1			
04:53	Y	Çapa göre?				2
04:54	A	Hı! Hı!	6			
04:57	Y	Bunu nasıl yapacağız?				2
05:01	A	Çapa büyük R de.	6			
05:03	Y	Tamam. Bir şey çizeyim.				2
05:05	A	Hı! Hı!	6			
05:06	Y	(Çizmeye başlıyor.) Şu küçük r olsun.				1
05:17	A	Hı! Hı!	6			
05:19	Y	Bu büyük R olsun.				1
05:22	A	Tamam. Büyük R ile küçük r arasında nasıl bir ilişki var?	6			
05:29	Y	Büyük R, küçük r'nin iki katıdır.				1
05:32	A	Yaz. Alanı neydi?	6			
05:44	Y	Alan πr^2'ydi.				2
05:47	A	Çevre?	6			
05:50	Y	Çevre $2\pi r$				2
05:54	A	Tamam. Şimdi küçük r'leri büyük R cinsinden yaz. Alan ne olur?	6			
05:59	Y	Buradan bir ok çizsem… (İse işareti yapıyor.)				2
06:02	A	Hı! Hı! Alan ne olur ve çevre ne olur? (Katılımcı yazmaya başlıyor.) Ha!	6			
06:06	Y	$r = \frac{R}{2}$ olur.				2
06:09	A	Hı! Hı!	6			
06:11	Y	I! Şu… (Alan) Eşittir $\frac{\pi R^2}{4}$ olur.				2
06:23	A	Hı! Hı!	6			
06:25	Y	I! Şu da (Çevre) πR olur.				2
06:30	A	Hı! Hı!	6			
06:33	Y	πR olur.				2
06:35	A	Türevini alırsan? Alanın türevi çevreyi veriyor mu?	6			
06:42	Y	Dur bakayım, verir mi? Vermez.				
06:45	A	Vermiyor.	6			
06:50	Y	Alırsak bu (alanın türevi) $\frac{\pi R}{2}$ olur. Bu (çevre) da πR'dir. Yani $\frac{1}{2}$ gibi bir şey olur.		1	2	2
07:00	A	Peki, I! Dairede o küçük r dediğimiz şey nedir? Yarıçap dediğimiz şey nedir?	1			
07:10	Y	Yarıçap! Çemberin yarıçapıdır.				1
07:19	A	Yarıçap nedir? Yarıçapın tanımı nedir? Daha doğrusu çemberin tanımı nedir?	6			
07:28	Y	Çemberin tanımı…				1
07:29	A	Hı! Hı!	6			
07:30	Y	Sabit bir noktaya…				1
07:31	A	Hı! Hı!	6			
07:31	Y	Eşit uzaklıktaki noktalar kümesidir.		1	2	1
07:34	A	Sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktalar kümesi, o zaman yarıçap dediğimiz şey ne oluyor?	1			
07:43	Y	Sabit bir noktadan noktalara eşit uzaklıktır.		1	2	1
07:50	A	O sabit noktanın adı ne?	1			
07:51	Y	Hı?				1
07:52	A	Sabit noktanın adı ne, çemberde?	6			
07:54	Y	Merkezdir.		1	2	1
07:55	A	Tamam. Merkezin neye olan uzaklığı, o zaman, yarıçap?	1			
08:02	Y	Merkezin… E! Yaya… E! Yaya olan uzaklığı.		1	2	1
08:08	A	Tamam. Merkezin yaya olan uzaklığı olarak tanımladığımızda, modellediğimizde alan çevre ilişkisi oluyor mu?	1			
08:15	Y	Evet oluyor.		1	2	4
08:16	A	Oluyor. Ama… I! Çap olarak tanımladığımızda oluyor mu?	1			
08:21	Y	Olmuyor.		1	2	4

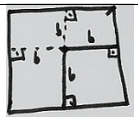
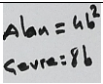
08:22	A	Olmuyor. Merkezin özelliği nedir dairede? Nasıl bir özelliği var?	1			
08:29	Y	Merkezin...				1
08:31	A	Hı! Hı!	6			
08:32	Y	Bütün noktalara eşit uzaklıktadır.				1
08:34	A	Bütün noktalara eşit uzaklıktadır. Yazalım merkezin özelliği.	6			
08:40	Y	(Önce yazıyor, sonra okuyor.) Merkezin özelliği bütün noktalara eşit uzaklıktadır.				1
						
09:14	A	Tamam. Merkezin özelliği buymuş. Tamam. Başka ne özellikleri var merkezin?	6			
09:29	Y	(Kısık sesle) Merkezin başka ne özellikleri var? (15 saniye sessizlik) Merkez açı. Merkeze uygun açı…				1
09:49	A	Hı! Hı!	6			
09:50	Y	Yaya eşit oluyor. Başka da… (Mırıldanma) Başka da hatırlamıyorum.		1	2	1
10:02	A	Peki, yukarıdaki şekil ile aşağıdaki şekil yani kare ile daire arasında nasıl bir ilişki kurabilirsin? Nasıl bir benzer model üretebiliriz?	1			
10:16	Y	Benzer model…				4
10:18	A	Hı! Hı!	6			
10:20	Y	Benzer model üretebilir miyiz? (Mırıldanma ve 9 saniye sessizlik) Burada kenar uzunluğu vardır.				4
10:34	A	Hı! Hı!	6			
10:35	Y	Burada da yarıçap uzunluğu vardır.				4
10:38	A	Kenar uzunluğu ile yarıçap mı birbirine bezer? Kenar uzunluğu ile çap mı birbirine benzerdir?	6			
10:44	Y	Kenar uzunluğu ile çap birbirine benzer.				4
10:47	A	Peki, biz çapa göre yaptığımızda model uymuyor.	6			
10:50	Y	Çapa göre yaptığımızda… I! Karenin… Alan çevre ilişkisi ile çevrenin… I! Alan çevre ilişkisi birbirine benzer çıkıyor.		1	2	4
11:00	A	Birbirine benzer çıktı.	6			
11:00	Y	Hı! Hı! Evet.				4
11:02	A	Yani çapa göre olmayacak.	6			
11:03	Y	Hı?				4
11:04	A	Çapa göre yapmayacağız.	6			
11:06	Y	Çapa göre yaparsak benzer çıkıyor.				4
11:09	A	Yani benzer çıkıyor dediğin zaman hani benzer çıkanda da olmuyor?	6			
11:13	Y	Evet. Olmuyor.				4
11:14	A	Yani çapa göre yaptığımızda olmuyor? O zaman karede neye göre yapmamız lazım? Neye göre yapabiliriz?	1			
11:26	Y	Karede kenara göre yapıyoruz.		1	2	4
11:29	A	Tamam, kenar çap. Çapa göre oluyor mu?	1			
11:33	Y	Olmuyor.		1	2	4
11:34	A	Gerçekten kenara göre mi?	1			
11:38	Y	Kenar yarıçapa göre yaparsak.				2
11:40	A	Hı! Hı! Nasıl olacak bu iş?	6			
11:44	Y	O da bir… Aynı çıkmıyor.				2
11:46	A	Nasıl yani?	6			
11:48	Y	Çünkü biz buradan yarıçapa göre yaptığımızda alan çevrenin iki katıdır. Türevini aldığımızda yani $2\pi r$ gibi.		1	2	4
11:57	A	Hı! Hı! Alan çevreye eşit çıkıyor.	1			
11:59	Y	He! Eşit çıkıyor. Ama biz karede yaptığımızda türevini aldığımızda eşit çıkmıyor. ½ çıkıyor. Yani modele uymuyor.		1	2	4
12:13	A	Çapa göre… Ama bak! Şurada çapa göre yaptığımızda oluyor muydu?	1			
12:16	Y	Çapa göre yaptığımızda oluyor.		1	1	2
12:18	A	Şurada. (Dairenin çapa göre alan formülü işaret ediliyor.) Bunun türevi nedir?	1			
12:20	Y	Türevi aldığımızda $\frac{2\pi R}{4}$ …				2
12:23	A	Büyük R'ye göre	6			
12:24	Y	He! Büyük R'ye göre yazayım mı? .				2
12:26	A	Hı! Hı!	6			
12:27	Y	$\frac{2\pi R}{4}$'dir türevi. O da eşittir $\frac{\pi R}{2}$ çıkıyor.				2
12:44	A	Şunu şey yapsana türev diye göstersene parantez içinde.	6			
12:46	Y	Şunu mu?				2

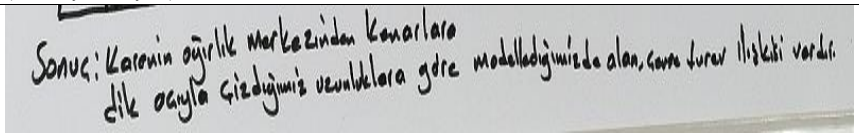
12:48	A	Şunu, şöyle. Karışmasın. (Araştırmacı kalemi alıp $\frac{\pi R^2}{4}$ ifadesini paranteze alıyor ve türev sembolünü parantez dışına koyuyor.) Peki, bu (dairenin çapa göre alanının türevi) buna (dairenin çapa göre çevresi) eşit mi? Bu çevreye eşit mi?	6			
						
13:06	Y	Değil çevreye eşit değil. Çevrenin yarısıdır.		1	2	4
13:09	A	Çevrenin yarısıdır. Burada? (Kenar uzunluğuna göre karenin alan ve çevresi arasında kurulmaya çalışılan türev ilişkisi işaret ediliyor.)	1			
13:11	Y	Burada da aynıdır.				4
13:11	A	Burada da aynıdır.	6			
13:12	Y	Şimdi birbirine benziyor.		1	2	4
13:14	A	Birbirine benziyor.				
13:15	Y	Hı! Hı!				
13:16	A	Demek ki çapla… O zaman ne yazacağız? Çapla?	1			
13:20	Y	Çapla… I! Kenar ilişkilidir				4
13:22	A	Kenar arasında bir benzerlik var. Aynı model aynı sonuç çıkıyor.	6			
13:26	Y	Aynı sonuç çıkıyor. Aynen. Hı! Hı!		1	2	4
13:29	A	Tamam. O zaman karede nasıl bir şey… Dairede nasıl yaparsak peki sağlıyordu?	1			
13:36	Y	Yani çap olarak yaptığımızda…				
13:39	A	Bir daha söyle.	6			
13:40	Y	I! Çapı kullandığımızda.		1	1	2
13:42	A	Çapı kullandığımızda sağlıyor muydu?	1			
13:44	Y	Sağlıyor.		1	1	2
13:45	A	Çap dediğimiz büyük R mi küçük r mi?	1			
13:47	Y	Büyük R büyük R'yi kullandığımızda kare ile çember arasında çevre ile alan arasında bir ilişki, benzerlik var.		1	3	4
13:55	A	Yok, yok. Türev ilişkisi çemberde nasıl sağlıyor? Dairede nasıl, hangi şartlarda sağlıyor dairede?	1			
14:00	Y	Dairede küçük r. Yani… I!				2
14:03	A	Küçük r.	6			
14:04	Y	πr…		1	2	2
14:04	A	Karede… Karede ne yaparsak o zaman sağlar?	1			
14:08	Y	Büyük R yaparsak sağlar. Yani kenar...		1	1	4
14:14	A	Bizim amacımız karede alan çevre türev ilişkisini kurabilmek.	1			
14:19	Y	O zaman… I!				4
14:26	A	Amacımız ne? Amacımız nedir?	6			
14:28	Y	Amacımız kare alan çevre ilişkisini…				4
14:33	A	Türev açısından kurmak.	6			
14:34	Y	Türev açısından kurmak ve şeye benzetmektir.				4
14:37	A	Benzetmek değil.	6			
14:38	Y	Benzerlik olup olmadığını…				4
14:39	A	Benzetmek değil sadece dairedeki o modeli alıp kareye aktarırsak acaba sağlar mı sağlamaz mı ona bakacağız. Çünkü kare bizim için ön bilgi. Ön bilgi önemlidir. Kare bildiğimiz bir şey. Şey pardon daire, daire bizim için bildiğimiz bir şey. Bakalım oradaki bilgilerimizi transfer edebilecek miyiz? Karede nasıl şey yapabiliriz bu durumda?	6			
15:18	Y	Biz… I! Karede… I! Bir kenarla, karenin bir kenarıyla… I! Yani yarıçapın dairenin… I! Yarıçaplarının türevlerini baz dersek bu… I! Uymuyor bir birine. Yani… I! Alan ve çevre ilişkisinde benzerlik… I! Olmuyor. Ama… I! Kenar yarıçap yani büyük Rdediğimizde birbirinin benzeri çıkıyor. O zaman biz iki… I! Zaten $k$üçük $a = k$üçük r dersek bir benzerlik yok. Ama… I! Büyük $R = 2a$ dersek bir benzerlik sanki bulabiliyoruz.		1	2	4
16:05	A	Yapalım şuraya şöyle.	1			
16:09	Y	Şimdi, biz… I! $f(a)$'ya $2a^2$ dersek… I! Bu bize şeyi verebiliyor.				2
						
16:25	A	Şekil üzerinden git.	6			
16:26	Y	Şekil üzerinden…				2
16:28	A	Hı! Hı!	6			
16:34	Y	(6 saniye kadar sessizlik) Şekil üzerinden nasıl gidebiliriz?		1	1	2
16:41	A	$f(a)$'yı niye $2a$ diyorsun?	1			
16:44	Y	$f(a)$'ya… Küçük $r = a$ diye kabul ettiğimizde				4

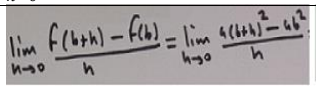
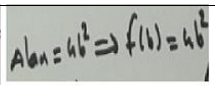
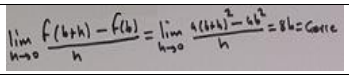
16:52	A	Hı! Hı!	6			
16:53	Y	Bir benzerlik çıkmıyor. Ama… I! Biz *k*üçü*k a*'yı...		1	1	4
16:58	A	Şimdi tamam. Benzerliği boş ver. Benzerliği boş ver. Sen benzerliği bulmaya çalışınca… Benzerlik orada tıkanabiliyor.	6			
17:07	Y	Tamam.				
17:09	A	I! Yarıçapa göre sağlıyor dairede.	1			
17:12	Y	Evet, dairede yarıçapa göre sağlıyor.		1	2	3
17:14	A	Tamam. Karenin yarıçapı nedir?	1			
17:17	Y	Karenin yarıçapı...				4
17:20	A	Karede bir yarıçap uydursak demek ki sağlayacak.	6			
17:23	Y	(Kısık sesle) Yarıçap uydurursak sağlayabiliyor.				4
17:26	A	Yarıçap uydurabilmek için ne olması lazım karenin?	6			
17:33	Y	Ne olması lazım…				4
17:34	A	Karenin neyinin olması lazım?	6			
17:43	Y	Köşegenleri mi olması lazım? Çevrel çember çizsek… (Mırıldanma) Çevrel çember yardımıyla zaten…				4
17:53	A	Çiz. Şekil çiz. Alta bir şekil çiz şöyle.	6			
17:58	Y	(Çizmeye başlıyor.) Şöyle bir şekil yaptığımızda…				2
18:16	A	Hı! Hı!	6			
18:17	Y	Zaten biz buraya a demiştik. a demiştik. Şurada köşegen yarıçap olur.				2
18:31	A	Hı! Hı!	6			
18:32	Y	Yani çapı olur. Bu da $a\sqrt{2}$ olur. Ama işte nasıl bir benzerlik bulabiliriz? Bir, o var. O biraz sıkıntılı. (15 saniye sessizlik)		1	1	2
						
18:59	A	Merkez daire için nasıl bir özellik taşır?	1			
19:01	Y	Hı?				1
19:02	A	Merkez daire için nasıl bir özellik taşır?	6			
19:05	Y	Merkez?				1
19:07	A	Daire için nasıl bir özellik taşır?	6			
19:11	Y	Bütün… I! Merkez dairenin bütün noktalarına eşit uzaklıktadır.				1
19:15	A	Bütün noktalarına eşit uzaklıktadır ve?	6			
19:25	Y	(8 saniye sessizlik) Yarıçaptan… I! Me… I! Yaylara çizdiğimiz… Yarıç… Eşit oluyor. Uzunluklar eşit oluyor.				1
19:32	A	Tamam. Ve?	6			
19:39	Y	(6 saniye sessizlik ve ardından kısık sesle) Ve bu ne ya?		1	2	1
19:41	A	Şöyle düşün. Daireye bir örnek ver.	2			
19:50	Y	Daireye bir örnek... Araba tekerlekleri.				1
19:52	A	Araba tekerlekleri. Hı! Hı! Araba tekerleğinin merkezinde ne var?	6			
20:00	Y	Bilye gibi bir şeyler.				1
20:01	A	Tamam.	6			
20:02	Y	Demir var o demirden...		1	2	1
20:04	A	Tamam. O bilyeyi niye oraya koymuşlar?	1			
20:06	Y	Bilye?				1
20:06	A	Hı! Hı!	6			
20:07	Y	Destek için.				1
20:09	A	Tamam da niye başka yere değil de orya niye koymuşlar.	6			
20:13	Y	I! Çünkü tüm şeye eşit uzaklıktadır, merkezdir.				1
20:20	A	Merkezdir. Ne merkezidir?	6			
20:26	Y	Tekerlerin merkezi.				1
20:08	A	Ne merkezidir ama?	6			
20:30	Y	Nasıl ne merkezidir?				1
20:36	A	Çevrel çember merkezi midir? İç teğet çember merkezi midir? Kenarortay merkezi midir? İç teğet çember merkezi midir? Dikliklerin kesişim merkezi midir? Orta center mıdır nedir?	6			
20:47	Y	Çevrel çember.				1
20:53	A	Hı! Hı!	6			
20:53	Y	Çevrel çemberin merkezi.		1	1	1
20:55	A	Peki karenin merkezi nedir?	1			
20:57	Y	Karenin merkezi?				1

20:58	A	Bir kare çiz. Yani bir kare çiz.	6			
21:01	Y	Şöyle çizeyim. (Çizmeye başlıyor.)				1
21:03	A	Hı! Hı!	6			
21:11	Y	Karenin merkezi… (İşaretliyor.) Zaten köşeler diktir. Karenin merkezi iki köşegenin…				1
21:24	A	Hı! Hı!	6			
21:27	Y	İki köşegenin kesiştiği yerdir. Burası.				1
21:33	A	Karenin ne merkezidir bu?	6			
21:36	Y	Ağırlık merkezidir.		1	2	2
21:37	A	Ağırlık merkezidir.				
21:38	Y	Evet.				2
21:39	A	Tamam. Oraya o zaman o noktayı işaretle.				
21:43	Y	Noktaya G diyeyim.				2
21:44	A	Hı! Hı! (Katılımcı işaretlemeyi yapıyor.) Not yaz.				
21:48	Y	Şuraya mı? (Çizimin sol tarafını gösteriyor. Ancak yeterli boş yer yok ve sayfanın kesme izinin olduğu yere denk geliyor.)				2
21:50	A	Şuraya yaz, şuraya. (Karenin altı işaret ediliyor.) Fazla o tarafa gitme. Şurası kesilir ya. Kesilirse gider.				
21:56	Y	Not. G …				2
22:00	A	G ağırlık merkezi				
22:01	Y	G karenin… (yazıyor.)				2
22:15	A	O zaman, merkezin bir şeye uzaklığına a ya da x ya da k dememiz lazım. Burada merkezin şeye… I! Dışa uzaklığına ne demiştik? (Daire çizimi işaret ediliyor.) r demiştik.	1			
22:33	Y	r demiştik. Merkeze de zaten M demiştik.		1	2	2
22:36	A	Hı! Hı! I! Karede ne diyeceğiz? G'nin nereye uzaklığına bir şey dememiz lazım?	2			
22:41	Y	G'nin köşelere.				2
22:42	A	Köşelere uzaklığına mı?	6			
22:43	Y	Hı! Hı!				2
22:44	A	Tamam. Diyelim, ne diyelim?	6			
22:46	Y	Bilmem.				2
22:49	A	k mı diyelim, p mi diyelim, r mi diyelim, t mi diyelim , l mi diyelim ne diyelim?	6			
22:53	Y	k diyelim.				2
22:54	A	k diyelim.				
22:55	Y	k, bir. Hepsi eşittir. Zaten burası k'dır.		1	2	1
23:01	A	Aradaki açılar kaçtır?	1			
23:05	Y	k'dır. Aradaki açılar, 90^0'dir.				1
23:07	A	Tamam.	6			
23:07	Y	Bu da diktir…		1	3	1
23:12	A	Yavuz, güzel. O zaman şu uzunluk (karenin bir kenarını işaret ederek) ne olur?	1			
23:15	Y	$k\sqrt{2}$ olur.		1	3	2
23:17	A	Tamam. Çevresi?	1			
23:20	Y	$k\sqrt{2}$… (Yazıyor.)				2
23:22	A	Hı! Hı!	6			
23:22	Y	Çevresi de $4k$…				2
23:25	A	$\sqrt{2}$	6			
23:26	Y	$\sqrt{2}$'dir.		1	3	2
23:27	A	Yazadur. Hı! Hı!				
23:28	Y	Alan… Şuraya mı?				2
23:29	A	Şuraya yaz, şuraya.				
23:31	Y	Çevre yazayım?				2
23:32	A	Hı! Hı!				
23:36	Y	$k\sqrt{2}$ olur.				2
23:38	A	Tamam.				
23:39	Y	Alan?	4			2
23:40	A	Alan?				
23:40	Y	(Yazmaya başlıyor.) Alan $4k^2$ol... $4k^2$olur. Hayır, $2k^2$ olur.		1	3	2

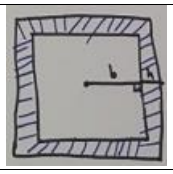
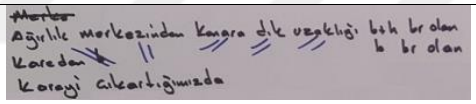
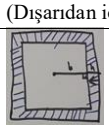


23:53	A	Hı! Hı! Nasıl hesapladın?	2			
23:55	Y	İki kenarın, iki dik kenarın çarpımı.				2
23:58	A	Şu dik üçgenin alanından 4 tane var diye de hesaplayabilir miyiz?	6			
24:03	Y	Ya da köşegenleri de çarpabiliyoruz. çarpıp yarısını alırsak o da olur.				2
24:06	A	Köşegenleri çarpıp yarısını alabiliriz.	6			
24:07	Y	(Eş zamanlı konuşma) Yarını alırız. Çarpar… Çarparsak o da olur.				2
24:10	A	Çarpıp yarısını alırsak…	6			
24:11	Y	Yarısını alırsak o da olur.		1	2	2
24:13	A	$2k^2$ sonucu olur. Peki, karenin türevi, çevreyi veriyor mu?	1			
24:20	Y	Vermiyor.		1	3	4
24:22	A	Vermiyor. O zaman başka bir… Merkezin başka bir uzaklık… Yani başka, başka bir uzaklığını alacağız. Ağırlık merkezinin köşelere uzaklığını almıyormuşuz demek ki.	2			
24:35	Y	Başka bir şey, ne olabilir ki?				4
24:41	A	Bir tane daha kare çiz.	6			
24:45	Y	(En altta az bir alana çizmeye çalışıyor.)				2
24:46	A	Şuraya… Tamam, oraya çiz.	6			
24:47	Y	(Bir kare çizimi yapıyor.)				2
24:55	A	Merkezi işaretle.	6			
24:57	Y	(Köşegenleri çizmeye yelteniyor.)				2
24:58	A	Orayı değil merkezi işaretle.	6			
25:00	Y	Yani, şu mu? (Ağırlık merkezini işaretliyor.)				2
25:01	A	Hı! Hı! Şimdi köşegeni çizsen köşegeni çizdik olmadı.	6			
25:04	Y	Tamam.				2
25:05	A	Nereye? Başka nereye uzaklıklarını… Uzaklığını alabiliriz?	6			
25:11	Y	Mesela şu kenara uzaklığını alabiliriz.		1	2	4
25:12	A	Kenara uzaklığını alabilir miyim?	2			
25:15	Y	Kenara uzaklığını… Bunu nasıl alabilirim?				2
25:16	A	Hı! Hı!	6			
25:17	Y	Bunu nasıl alırız? I! Şuna göre hesaplarsak.				2
25:24	A	Yap. Kenarın uzaklığını çiz.	6			
25:26	Y	Şu kenara… (Sol kenara dikme indiriliyor.) Dik kesiyor dedim.				2
25:34	A	Diğer kenara da. Noktalı çiz. Nokta, nokta, nokta... Nokta, nokta, nokta... Ha bu uzunluğa ne diyek? Kenara olan uzaklığa?	6			
25:54	Y	b diyek.				2
25:55	A	Tamam b de.	6			
25:58	Y	(Her bir uzaklığa b yazıyor.) b diyek. b diyek.		1	3	2
						
26:04	A	Alanı ne olur?	1			
26:06	Y	I! Alan ne olur…				2
26:08	A	Hı! Hı!				
26:10	Y	E! 4 E! b^2 olur.		1	3	2
26:13	A	Yazalım.				
26:15	Y	(Yazıyor.)				2
26:20	A	Çevre?	1			
26:23	Y	(“Çevre” yazıyor.) Çevre? E! Bu da… (Bir kenarı işaret ediyor.) 2… $8b$ olur.		1	3	2
						
26:38	A	Hı! Hı!				
26:40	Y	I! Şim… (Kısık sesle deyip duruyor.)	4			4
26:43	A	Ne oldu?				
26:44	Y	I! Şimdi tam oldu.		1	3	4
26:47	A	Cuk oturdu sanki.				
26:50	Y	Oldu, oldu.				4
26:51	A	(Kısık sesle gülümseme)				
26:52	Y	Şimdi oldu.				4

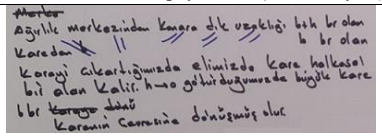
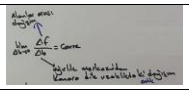
26:53	A	(Araştırmacı, işaret parmağı ve baş parmak açıklığı ile dairenin çapını gösteriyor. Sonra ilk çizilen karenin bir kenar uzunluğunu gösteriyor. Ardından dairenin yarıçapını ve ilk çizilen karenin ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığını işaret ediyor. Gösterim bittikten sonra konuşuyor.) Evet.				
27:06	Y	Şimdi alanın… (Gülümseme) İlginç bir şey oldu.				4
27:10	A	İlginç bir şey oldu, değil mi? Tamam. Tamam				
27:16	Y	Gerçekten ilginç oldu.				4
27:17	A	(Araştırmacı ilk denemelerin olduğu kısmı mavi kalemle ayırıyor.) Bunun açıklamasını yapalım. Bu hangi noktaydı? Bu noktanın özel adı neydi? (Ağırlık merkezi işaret ediliyor.)	1			
27:27	Y	Ağırlık merkeziydi.		1	3	2
27:28	A	Ağırlık merkezi…				
27:28	Y	(Araştırmacının sözünü kesiyor.) Ağ! Ağırlık merkezinden kenarlara çizdiğimiz uzaklıklar.	4			
27:35	A	Uzaklık ama nasıl uzaklık?	6			
27:36	Y	Eşit uzaklık.		1	1	2
27:37	A	Yo, yo. Nasıl uzaklık? Hangi açı ile ilgili?	1			
27:40	Y	Dik açıyla.		1	2	2
27:45	A	Yaz o zaman. Karede de. Sonuç de.	1			
27:50	Y	Sonuç. Şoktayım da…				4
27:51	A	(Gülümseme) Bir şey keşfettik değil mi? (Gülümseme ve yumruklar havaya kaldırılarak başarı işareti yapılıyor.)	6			
27:55	Y	(Gülerek) Nasıl çıktığını bilmiyorum da burada oluyor. (Ciddi ve yüksek bir sesle) Sonuç yazacağız.				4
27:59	A	(Gülümseyerek) Sonuç yaz.	6			
28:03	Y	(Yazmaya başlıyor) Sonuç!				4
28:04	A	Hı! Hı!	6			
28:05	Y	I! Karenin… Ağırlık… I! Ağırlık merkezinden… Merkezinden… I! Kenarına… Kenarlara…				4
28:31	A	Hı! Hı!	6			
28:32	Y	Devam edeyim. Dik açıyla çizdiğimiz uz… I! Uzunluklar… (Yazmaya devam ediyor.) Dik açıyla… (Yazmaya devam ediyor.)				4
28:52	A	(Araştırmacı gülmeye başlıyor.) Daha da şaşırıyorsun değil mi? Yazarken diyorsun Süphanallah!	6			
29:01	Y	Dik açıyla çizdiğimiz uzan… Uzunluk…				4
29:03	A	Uzaklıklara göre…	6			
29:04	Y	Uzunluk… Uzunluklara göre, olabilir mi?				4
29:07	A	Modellediğimiz zaman alan, çevre, türev ilişkisi sağlıyor.	6			
29:10	Y	(Yazmaya devam ediyor.)				4
29:15	A	Modellediğimizde… Alan… Çevre… Türev… İlişkisi… Sağlıyor… (Katılımcının yazması için kelimeler söylenirken aralıklarla söyleniyor.)	6			
29:25	Y	Alan… Çevre, türev… İlişkisi vardır.				4
29:43	A	Hı! Hı!	6			
29:45	Y	(Yazmayı bitiriyor.)Vardır da nasıl vardır! Nasıl olur!		1	2	4
						
29:48	A	Garip! Peki, bunu bir şekil çizerek açıklayacak olsaydın. Dairede bir şekil çizmiştik ya. Dairede nasıl bir şekil çizmiştik?				
30:05	Y	Dairede?				4
30:06	A	Hı! Hı!				
30:07	Y	Ama… I! Biz kenara a… a dedik ya…	4			4
30:10	A	Hı! Hı!	6			
30:11	Y	Acaba biz kenara $2a$ deseydik, hiç denemedik. Keşke denemiş olsaydım. $2a$ deseydik farklı bir sonuçla karşılaşır mıydık?				4
30:22	A	Kenara $2a$ deseydik ne olurdu? $4a^2$ olurdu. Türevini alsak $8a$. $8a$'da çevresidir. Değişim oranı cinsinden ileriki aşamalarda sıkıntı olurdu. Açıklama yaparken sıkıntı olurdu.	6			
30:38	Y	Çünkü ama gerçi biz genelleme yapamadık. Çünkü karenin bir kenarı her zaman ikili bir şey olacak diye bir şey yoktur.		1	3	4
30:49	A	İleriki aşamalarda problem yaşardın. Birazdan sana yaşatacağım o problemden sıkıntı yok. (Gülümseme) Dairede nasıl bir şekil çizmiştik? Bir önceki seferde?	1			
31:02	Y	Bir şekil çizmiştik. Dairenin… I! Dairenin alanının türevini aldığımızda bize çevresini veriyordu.				2
31:09	A	Hatırlıyorsun değil mi o şekli?	6			
31:10	Y	Evet, hatırlıyorum.				2

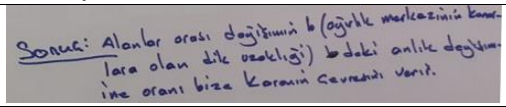
31:11	A	O şekli nasıl çizmiştik?	6			
31:13	Y	Çizebilirim o şekli.				2
31:14	A	Tamam. Bundan sonrasını açıkla bakalım. Bir açıklama yapmaya çalış bakalım.	6			
31:19	Y	Şurada çizeyim.				2
31:20	A	Hı! Hı!	6			
31:21	Y	Şu şekil. Şöyle bir şekil çizmiştik. Şöyle bir şekil çizmiştik.				2
31:27	A	Hı! Hı!	6			
31:28	Y	Şurası merkeziydi. Yarıçap r demiştik.				2
31:33	A	Hı! Hı!	6			
31:34	Y	Yarıçapa r demiştik. I! Alanı...		1	2	2
						
31:41	A	Tamam. Tamam. Dur, dur. O kadar detaya girmeye gerek yok. Genel türev denkleminden limit denklemine gitmeyi, şunu (Alan ve çevre formülleri işaret ediliyor.) yazmaya çalışsana. Şunun (Alan fonksiyonu işaret ediliyor.) türevini hesaplamaya çalışsana.	1			
31:56	Y	Türevini…				2
31:58	A	Hı! Hı!	6			
32:03	Y	Limit… (Sayfanın altında sıkışık bir kısma yazmaya çalışıyor.)				2
32:04	A	(Araştırmacı sayfanın sağ üst tarafındaki boşluğu işaret ediyor.) Şuraya yap. Şuraya…	6			
32:09	Y	(Yazmaya başlıyor.) $\lim_{h\to 0}$				2
32:14	A	Hı! Hı!	6			
32:16	Y	f… E! Şey hocam... f… I! $f(b+h)$…				2
32:24	A	Hı! Hı!	6			
32:25	Y	... $(b+h)-f(b)$ ...				2
32:31	A	Hı! Hı!	6			
32:32	Y	Bölü h…(Katılımcının yazdığı ifade $\lim_{h\to 0}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$ şeklindedir.) Tamam. Tabi şunu da fonksiyon olarak yazmamız gerekiyor. (Alan formülünü işaret ediyor.)				2
32:38	A	Yaz. Hı! Hı!	6			
32:41	Y	Fonksiyon olarak… $f(b)=4b^2$... (Türevin genel denklemine dönüş yapıyor.) Eşittir, $\lim_{h\to 0}$ … $\lim_{h\to 0} 4(b+h)^2-4b^2$'dir. $4b^2$'dir. Bölü… Bölü h'tır. (Yazdığı ifade $\lim_{h\to 0}\frac{4(b+h)^2-4b^2}{h}$)		1	2	2
		 				
33:25	A	Bunun sonucu ne olur?	1			
33:27	Y	Bunun sonucu…				2
33:28	A	Hı! Hı!				
33:29	Y	Bunun sonucu $8b$ olacak.		1	3	2
33:35	A	$8b$ olacak. Neye dayanarak bunu söyledin?	2			
33:39	Y	I! Neye dayanarak bunu söyledim. Çünkü türevini aldığımızda o… I! Eksi… Yani $4b^2$ ile $-4b^2$ birbirini götürecek.				2
33:53	A	Tamam, türevle ilgili bir şey.	6			
33:54	Y	Türevle ilgili. He! Türevle ilgili.				2
33:55	A	Zaten bunun türevini aldığımız zaman bu (Çevre formülündeki $8b$ işaret ediliyor.) çıkıyor.	6			
33:57	Y	Aynen. Türevini aldığımızda zaten…				2
33:58	A	Bu (Limit ifadesi işaret ediliyor.) da eşittir çevre yaz.	6			
34:01	Y	(Yazıyor sonra seslendiriyor.) Çevre.				2
						
34:06	A	Çevreydi değil mi?	6			
34:07	Y	Evet çevreydi.		1	3	2
34:09	A	Şimdi şu ne anlam ifade ediyor? (Genel türev denkleminin payında bulunan $f(b)$ ifadesinin üstünü mavi kalemle çizerek işaret ediyor.)	1			
34:14	Y	Bu… I! Bu karenin… I! Alanını…		1	3	2
34:20	A	Tamam.				
34:21	Y	Alanının fonksiyon şeklinde yazılışı.				2
34:24	A	Tamam. b dediğimiz şey neydi? (Genel türev denkleminin payında bulunan $f(b)$ ifadesindeki b işaret ediliyor.)	1			
34:26	Y	b dediğimiz şey… I! Ağırlık merkezinden…				2

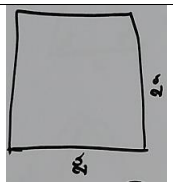
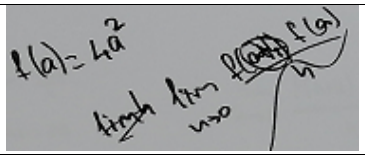
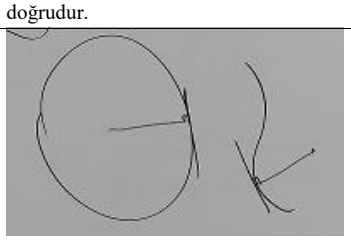
34:29	A	Hı! Hı!	6			
34:30	Y	Bir kenara dik uzak… I!				2
34:32	A	Uzaklık…	6			
34:33	Y	Dik… I! Uzaklığıydı.		1	2	2
34:35	A	(Genel türev denkleminin payındaki $f(b)$ işaret ediliyor.) Bir kenar… Ağırlık merkezinden bir kenara uzaklığı, dik uzaklığı b olan bir karenin alanı. Bu neyin alanı? (Genel türev denkleminin payındaki $f(b+h)$ işaret ediliyor.)	1			
34:46	Y	Bu da… I! Bir kenar… I! Ağırlık merkezi… Ağırlık merkezinden				2
34:53	A	Hı! Hı!	6			
34:53	Y	$b+h$…				2
34:54	A	h…	6			
34:55	Y	Uzaklıktaki, dik uzaklıktaki…				2
34:57	A	Bir kare…	6			
34:58	Y	Bir karenin alanıdır.		1	2	2
34:59	A	Alanıdır. Tamam. O kareleri çizelim bakalım. Şöyle geniş çiz.	1			
35:04	Y	Kareleri çizelim…				2
35:05	A	Hı! Hı!	6			
35:05	Y	Şuraya çizelim.				2
35:07	A	Hı! Hı! Geniş çiz. Büyük çiz.	6			
35:11	Y	(Tereddüt ederek anlaşılmayan bir şey söylüyor.)				2
35:14	A	Şurada büyük çiz.	6			
35:16	Y	Tamam çizeyim. (Çizmeye başlıyor.) Çizdim. Şurası ağırlık merkezi olsun. (Bir kare çizip duruyor.)				2
35:37	A	Hı! Hı!	6			
35:38	Y	Ağırlık merkezi olsun. İçine mi dışına mı çizeyim? Onu düşünüyorum.				2
35:46	A	Merkezleri çakıştır. Şunun merkezi ile şunun merkezini çakıştır. (Genel türev denkleminin payındaki $f(b)$ ve $f(b+h)$ işaret ediliyor.)	6			
35:51	Y	Aynı, merkezleri aynı olacak zaten. (Çizim yapmaya devam ediyor.) Şöyle dışına çizmiş olayım. (Ağırlık merkezleri çakışık iç içe geçmiş kare şeklini çiziyor.) I! Bu şeydir. Bu bizim… I! b… (İçteki karenin ağırlık merkezinden kenara dik uzaklığı çiziyor.)				2
36:16	A	Hı! Hı!	6			
36:17	Y	Ağırlık merkezinden dik… I! Uzaklık… b birim dik uzaklıktaki…				2
36:23	A	Hı! Hı!	6			
36:24	Y	I! Karemiz… Şu da… Çizmeyi unuttum				2
36:29	A	Dışarı çiz.	6			
36:30	Y	Çizeyim. Hı! Hı! Şu fark da… (İki kare arasındaki fark işaret ediliyor.)				2
36:33	A	Hı! Hı!	6			
36:34	Y	I! h olsun. Hadi be… Bu merkezin tamamı ise				2
36:39	A	$b+h$…	6			
36:40	Y	I! $b+h$…				2
36:42	A	Tamam.	6			
36:42	Y	Uzaklıktaki…				2
36:43	A	Şimdi bu bir alandı değil mi? (Genel türev denkleminin payındaki $f(b+h)$ işaret ediliyor.)	6			
36:44	Y	Evet.				2
36:45	A	Alandan neyi çıkartmışsın?	6			
36:47	Y	I! Alandan… I! Küçük… I! Karenin alanını çıkartmışım.				2
36:52	A	Tamam. Kalan kısmı tarayabilir misin?	6			
36:55	Y	Tabi, tarayayım. Tekerlek gibi bir şey çıkar.		1	2	2
37:00	A	Hı! Hı!				
37:02	Y	(Taramaya başlıyor.)				2
37:06	A	Ne gibi?				
37:08	Y	(Taramaya devam ediyor.) Çizmiştik ya, tekerlek gibi. Herhalde türevin kurallarıdır böyle şeyler. (Gülümseme) Bir şeyden bir şey çıkartıyorsun.				2
37:23	A	(Katılımcı taramayı bitiriyor.) Hı! Hı!				
37:25	Y	Birazcık şekil vereyim.				2
37:26	A	Güzel çıktı değil mi?				
37:27	Y	Şekil vereyim. Biz her halükarda da güzel şekiller çıkartırız (Gülümseme)				2

						
37:29	A	Hı! (Gülümseme) Böyle bir kare mi, şey… Tekerlek mi olur, ya? Sana araba aldığımızda böyle tekerlekleri olsun. (Gülümseme) Şimdi, Yavuz açıklamayı yapsana bana.	1			
37:45	Y	Açıklamayı?				3
37:46	A	Beni uğraştırma, sen açıklamayı yaparsın. Dairede nasıl bir açıklama yaptıysan benzer bir açıklamayı da burada yaparsın.	6			
37:56	Y	Sonuç olarak mı yazayım? Yoksa?				3
37:58	A	Sözel olarak ifade et. Önce.	6			
38:05	Y	I!				4
38:06	A	Hı! Hı!	6			
38:11	Y	(Yazmaya başlıyor.) Merkezden… (Yazdığının üstünü karalıyor ve yeniden yazmaya başlıyor.)Yanlış yaptım. Ağırlık merkezinden… Ağırlık… I! Ağırlık merkez… Ağırlık merkezinden… I! Kenara dik… Dik uzaklığa $b+h$ birim olan… I! Kareden… Kareden b… b birim uzaklıktaki olan kareyi çıkardığımızda diyeceğim?				4
39:14	A	Hı! Hı! Üç nokta yaz. Üç nokta yaz. Ya da şöyle yapalım. Dur. Seni o zahmetten kurtaralım. (Araştırmacı denden işareti yapıyor.) Ha! Şimdi şuraya yaz. (Gülümseme)	6			
39:29	Y	b… I! Birim…				4
39:31	A	Hı! Hı! Olan…	6			
39:33	Y	Olan… I! Alanı çıkarttığımızda…				4
39:37	A	Kareyi çıkarttığımızda…	6			
39:38	Y	Kareyi çıkarttığımızda…				4
39:40	A	Hı! Hı!	6			
39:40	Y	(Yazmaya devam ediyor.) Çıkarttığımızda… I! Kalan… Kalan… Kalan bize çevreyi verir. (Katılımcı "Ağırlık merkezinden kenara dik uzaklığı $b+h$ br olan kareden ağırlık merkezinden kenara dik uzaklığı b br olan kareyi çıkarttığımızda" yazıp duruyor.)		1	2	4
						
40:08	A	(3 saniye sessizlik) Ya, doğrudan bize çevreyi mi verir, kalan alan?	1			
40:10	Y	(2 saniye kadar sesizlik)				4
40:11	A	Hı! Hı!				
40:11	Y	(1 saniye kadar sesizlik)				4
40:12	A	Kalan alan doğrudan çevreyi mi verir? (Katılımcı yine cevap vermiyor.) Mesela şurası, şurası b. Şu alana bakalım. $2b.h$… $2b.h$ da burada var. $2b.h$ burada var. $2b.h$ burada var. Bir tane b^2 burada var. Bir tane b^2 burada var. Bir tane de b^2 burada var. (Karsel halkanın alanı hesaplanıyor.)	6			
40:34	Y	(8 saniye sessizlik) Bize alan, çevreyi vermez tabi ki.		1	2	4
40:45	A	Şimdi doğrudan çevreyi vermiyor işte.	6			
40:49	Y	Neyi veriyor?	4			4
40:52	A	Şurada ne yaparsın? (Genel türev denklemindeki $\lim_{h\to 0}$ ifadesi işaret ediliyor.)	6			
40:55	Y	Limit h… I!				4
40:58	A	Şimdi, h'ı sıfıra götürdüğün zaman ne olur?	6			
41:00	Y	h'ı sıfıra… h'ı sıfıra götürdüğümüzde				4
41:02	A	Evet?	6			
41:03	Y	Şey olur… (4 saniye sessizlik) Bizim... I! Şu alanı sıfıra götüreceğim. Şu tarafa götüreceğim. (Karesel halka bölgenin kalınlığını dıştan içe doğru işaret ediyor.)				4
41:12	A	Hangisi hangisine yaklaşır?	6			
41:15	Y	Büyük küçüğe yaklaşır.				4
41:16	A	Okla göster.	6			
41:19	Y	(Dışarıdan içeriye bir ok çiziyor.)		2	2	4
						
41:20	A	Tamam. Peki, ok… Okla gösterdiğin büyük küçüğe yaklaştığı zaman, bu alan ne olur?	1			
41:29	Y	Alan küçülür.				2
41:31	A	Git gide?	6			

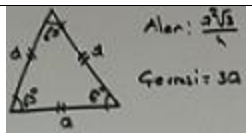
41:31	Y	Daralır.				2
41:32	A	Daralır, azalır. Nereye kadar daralabilir?	6			
41:38	Y	(Kısık sesle) Nereye kadar daralır? b'ye kadar daralabilir.		1	1	2
41:43	A	b'ye kadar daralabilir. Alan kaç boyutludur?	1			
41:48	Y	Alan tek boyutludur.		3	1	1
41:50	A	Alan için bir şeyle bir şeyi çarpıyorsun.	1			
41:54	Y	Çift boyutludur.		3	2	1
41:55	A	İki boyutludur değil mi?	2			
41:56	Y	Hı! Hı!				1
41:57	A	Neyle neyi çarpıyorsun. h'la bir şeyi çarpıyorsun.	6			
41:59	Y	h'la bir şeyi çarpıyoruz. Ya da..				1
42:01	A	Dolayısıyla iki boyutludur.	6			
42:03	Y	İki boyutludur.		3	2	1
42:03	A	Daralttığın zaman boyut ne oluyor?	1			
42:07	Y	Tek boyut mu?		1	2	2
42:09	A	O tek boyut neye eşit oluyor? Alan neye dönüşmüş oluyor?	1			
42:11	Y	(4 saniye sessizlik) Alan çevreye dönüşmüş oluyor.		1	2	4
42:17	A	Alan çevreye dönüşmüş oluyor. Şimdi, anladığın şekliyle bana anlat.	1			
42:27	Y	I! h'ı sıfıra götürdüğümüzde				4
42:29	A	Hı! Hı!				
42:30	Y	I! Büyük… I! Kare, küçük kareye yaklaşıyor.				4
42:34	A	Hı! Hı!				
42:35	Y	E! b olduğundan h sıfır oluyor zaten.				4
42:40	A	Hı! Hı!				
42:41	Y	I! Çift boyutludur alan.				4
42:43	A	Boş ver boyutları, anlat. Hı! Hı! Tamam.	6			
42:46	Y	Tek boyutlu oluyor. Bu da bize çevreyi veriyor.				4
42:48	A	Alan neye dönüşmüş oluyor?	6			
42:49	Y	Çevreye dönüşmüş oluyor.				4
41:51	A	Uzunluğa dönüşür.	6			
42:52	Y	Uzunluğa…				4
42:53	A	Alan uzunluğa dönüşüyor.	6			
42:53	Y	Alan uzunluğa dönüşüyor. Yani çevre de zaten uzunluktur.		1	2	4
42:56	A	Tamam, açıklamanı yaz o zaman.	1			
42:59	Y	I! Çıkar…				4
43:00	A	I! (Gülümseme)				
43:03	Y	(Gülümseme. Daha önceden yazdığı "Ağırlık merkezinden kenara dik uzaklığı $b+h$ br olan kareden ağırlık merkezinden kenara dik uzaklığı b br olan kareyi çıkarttığımızda" ifadesinde kaldığı yerden devam ediyor.) Çıkarttığımızda… I! (2 saniye kadar sessizlik)				4
43:06	A	Elimizde bir alan kalır.	6			
43:08	Y	h sıfıra falan yazayım mı?				4
43:09	A	Elimizde bir alan kalır, de ki cümleyi bitir. Yoksa sen cümleyi uzatacaksın. Devam edeceksin. (Gülümseme)	6			
43:13	Y	(Yazmaya başlıyor.) Elimizde…				4
43:18	A	Kare halkasal bir alan…	6			
43:18	Y	(Yazıyor.)				4
43:20	A	Kare halkasal.	6			
43:20	Y	(Yazıyor.)				4
43:25	A	Halkasal.	6			
43:25	Y	(Yazıyor.) Bir alan kalır.				4
43:29	A	Hı! Hı!				
43:29	Y	(Yazıyor.)		1	2	4
43:38	A	Tamam. Şimdi devamını sen getir.	1			
43:40	Y	Devamını getireyim.				4
43:42	A	Hı! Hı!				
43:46	Y	h'ı… (Yazıyor) h'ı sıfıra… I! h'ı sıfıra götürdüğümüzde… I! Büyük… I! Kare… I! Büyük kare b birimlik… I! b birimlik kareye dönüşmüş olur.				4
44:36	A	Kareye mi dönüşür? Karenin?	6			
44:38	Y	Çevre… Karenin çevresine… dönüşür.				4
44:40	A	Karenin çevresine…	6			

44:41	Y	Karenin… Karenin çevresine dönüşür. Olur.				4
45:03	A	Tamam.				
45:04	Y	Bu da bize zaten çevreyi vermiş olur.		1	2	4
45:07	A	Tamam. Şimdi değişim oranı cinsinden yazalım. Şurası aslında neler arasındaki farktır?(Genel türev denkleminin pay kısmı işaret ediliyor.)	1			
						
45:17	Y	Kenarlar arasındaki farktır.		1	1	2
45:19	A	Bu? (Genel türev denkleminin pay kısmı işaret ediliyor.)	1			
45:19	Y	Şey… I! Merkezlere uzaklıkları arasındaki farktır.		1	1	2
45:24	A	f nedir f?	1			
45:26	Y	f… I! (5 saniye sesizlik) Fonksiyondur.				2
45:33	A	Tamam, neyin? Ne fonksiyonudur?	6			
45:34	Y	(Öksürük)				2
45:35	A	Helal! Helal! Helal!				
45:38	Y	Neyin fonksiyonu? Karenin alanının fonksiyonudur.		1	2	2
45:39	A	Ara verelim mi? Su getireyim mi?				
45:40	Y	Karenin… I! Şeyin… Yok, yok gerek yok. Bitirelim gitsin. Karenin… I! Alanının fonksiyonudur.				2
45:49	A	Fonksiyonudur.				
45:49	Y	Evet.				2
45:49	A	Tamam. Bu bir alan, bu bir alan. (Sırasıyla genel türev denkleminin payındaki ($f(b+h)$ ve ($f(b)$ işaret ediliyor.) Bu nelerin farkı olur o zaman?	1			
45:53	Y	Alanların farkı.		1	2	4
45:54	A	Tamam. Δf diyelim buna. Δf diyelim. Bu f dediğimiz şey nedir?	1			
45:58	Y	Δ…				4
45:59	A	Hı! Hı!				
46:01	Y	Δf bölü…				4
46:03	A	Bölü… Tamam. Bu Δf dediğimiz nedir?				
46:08	Y	Alanlar arasındaki değişim.		1	2	4
46:09	A	Alanlar arasındaki değişim. Tamam. Yaz oraya, alanlar arasındaki değişim. (Araştırmacı Δf'ten yukarı doğru ok çekiyor, katılımcı okun ucuna yazıyor.)				
46:22	Y	(Katılımcı yazdığı ifadenin son kelimesini okuyor.) Değişim…				4
46:26	A	Tamam. h neler arasındaki farktır?	1			
46:30	Y	I! h da uzunluklar arası.				4
46:32	A	Tamam. Hangi uzunluk b'deki uzunluk değil mi?	6			
46:35	Y	Evet, Δb'deki uzunluk…Δb				4
46:35	A	Delta b yaz. Delta b yaz. Delta b nedir? b nedir?	6			
46:44	Y	Ağırlık merkezinden...				4
46:45	A	Tamam, yaz şöyle. Ok çek. ($\frac{\Delta f}{\Delta b}$ ifadesinin pay kısmından aşağı doğru ok çekilmesi isteniyor.)	6			
46:47	Y	(Ok çizip yazmaya başlıyor.) Ağırlık merkezinden kenara dik uzaklık… ("Ağırlık merkezinden" yazıp duruyor.)				4
47:00	A	Kenara dik uzaklıktaki…	6			
47:03	Y	(Yazmaya yeniden başlıyor.) Kenara dik uzaklıktaki değişim. (Son kelime vurgulu)		1	2	4
47:12	A	Hı! Hı! (Katılımcının yazma işi bitince araştırmacı $\frac{\Delta f}{\Delta b}$ ifadesinin solunu işaret ediyor.)Tamam, $\lim_{\Delta b \to 0}$ … (Katılımcı limit ifadesini yazdıktan sonra) Eşittir ne olur?	1			
47:30	Y	Eşittir $8b$ olur.				4
47:32	A	Yani?	6			
47:33	Y	Çevre olur.		1	2	4
47:34	A	Eşittir çevre olur. Tamam. Şimdi bunu cümle olarak yazalım. Bunu cümle olarak yazalım. ($\lim_{\Delta b \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta b}$ ifadesi işaret ediliyor.)	1			
						
47:50	Y	Şuraya…				4
47:51	A	Hı! Hı! İstersen mavi kalemle yaz. Sonuç yazalım, dur, şuraya. Genellemeye ineceğiz inşallah.				
48:06	Y	Sanki… Alanlar… I! Arası değişimin...				4

48:11	A	Hı! Hı!				
48:11	Y	(Yazmaya devam ediyor.) Alanlar arası değişimin... I! Ama limiti yazmayı...				4
48:31	A	Limiti yazmak için şuraya anlık yazsan yeterlidir. Limit anlamına gelir. (Değişim kelimesinden öncesi işaret ediliyor.)	6			
48:36	Y	E! Uzunluktaki anlık değişim…				4
48:38	A	Değişim…				
48:42	Y	Anlık… E! Alanlar arasındaki				4
48:44	A	Delta b'yi sıfıra götürüyorsun ya.	6			
48:47	Y	Hım! Hı! Hı! (Kısık sesle) Şekilleri nasıl değişir? Şey yaparım? Alanlar arası değişimin.				4
48:51	A	Değişimin…				
48:52	Y	E! Ağırlık merkezindeki, kenara uzaklıktaki…				4
48:57	A	Tamam b de parantez aç. Parantezin içine şeyi yaz, açıklamasını yaz. b'nin ne olduğunu yaz.	6			
49:06	Y	Alanlar arası değişimin b yazayım.				4
49:09	A	b…				
49:10	Y	b…				4
49:11	A	Parantez aç, b'nin ne olduğunu yaz.	6			
49:14	Y	I! Ağırlık… I! Ağırlık… I! Ağırlık merkezi… (Susuyor)				4
49:23	A	Merkezinin…	6			
49:25	Y	Ağırlık merkez… (Susuyor ve yazmaya devam ediyor.) Merkezinin… I! Kenar. Kenara				4
49:39	A	Olan.	6			
49:42	Y	Dik.				4
49:43	A	Hı! Hı!				
49:43	Y	(Yazıp duruyor.)				4
49:45	A	Uzaklık.	6			
49:46	Y	Dik… Dik uzaklığı.				4
49:53	A	Parantezi kapat. b'deki... (Yazılan ifadede parantez sonrasına "deki" ifadesinin eklenmesini işaret ediyor.)	6			
49:57	Y	Alanlar arası değişimin…				4
49:59	A	b'deki				
50:00	Y	(Yazıyor.) b'deki				4
50:04	A	b'yi yazmışsın zaten şurada.	6			
50:07	Y	b'deki değişimine...				4
50:08	A	Anlık değişimine.	6			
50:10	Y	b'deki anlık değişimine oranı.				4
50:19	A	Oranı.				
50:19	Y	Oranı.				4
50:23	A	Hı! Hı! Bize…	6			
50:26	Y	Bize neyi verir?				4
50:26	A	(Senkron şekilde) Bize neyi verir?				
50:28	Y	Karenin çevresini.		1	2	4
						
50:31	A	Karenin çevresini verir. Tamamdır, teşekkürler. Gerçekten de bu h, b'deki değişim midir? (Karesel halkanın kalınlığı işaret ediliyor.)	2			
50:49	Y	Evet.				4
50:50	A	b'yi h kadar arttırmış oluyoruz değil mi?	6			
50:52	Y	Evet. b'yi				4
50:53	A	b'yi, h kadar arttırmış.	6			
50:54	Y	b artı h eklemişiz.		1	2	4
50:56	A	Evet. (Araştırmacı yeni bir sayfa açıyor.) Şimdi şey olsaydı kenara $2a$ deseydik. Hani 'Niye $2a$ demedik?' dedik ya. (Araştırmacı şekil çiziyor.)	2			
51:07	Y	Evet.				2

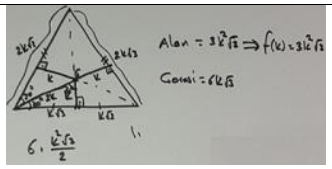
						
51:09	A	Şuraya $2a$ şuraya da $2a$. Şimdi kenarı ne kadar arttırmamız lazım?	6			
51:16	Y	Kenarı?				2
51:17	A	Hı! Hı!				
51:17	Y	(3 saniye sessizlik)				2
51:20	A	Normalde bunun türevi nedir? Bu $f(a) =$ nedir? $4a^2$ dir. Doğru mudur?	6			
						
51:28	Y	Doğrudur.				2
51:29	A	Tamam. Limit... Türevini alırsan… $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{}$ bölü ne olacak?	6			
51:44	Y	h.				2
51:45	A	h olacak. Şimdi a'yı h kadar arttırdığın zaman, kenar ne olur?	6			
51:53	Y	$2h$ kadar artar.				3
51:55	A	$2h$ kadar artar. Gerçi orada da sağlıyor.	6			
51:58	Y	Sağlıyor bence de.				3
52:00	A	Orada da sağlıyor da şey oturmuyor. Model oturmuyor.	6			
52:05	Y	Model oturmuyor.		1	2	3
52:06	A	Ama ağırlık merkezi güzel bir şey. Teşekkür ederim Yavuz.				
52:10	Y	Rica ederim hocam.				4
52:11	A	Bugünü de burada kapatmış olduk. Biraz ilginç bir şey oldu değil mi?	3			
52:16	Y	Çok ilginç bir şey oldu.				4
52:19	A	(Gülme)				
52:20	Y	(Gülme) Şimdi biz kenara a diyoruz sağlamıyor. Ağırlık merkezinden kenarlara dik uzaklıkları… I! Onlara değer vererek… Verdiğimizde bize türevin... I!		1	3	4
52:37	A	Aslında dairede de öyle değil mi? Ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığıdır.	1			
52:42	Y	Kenara dik uzaklığıdır da...				1
52:43	A	Mesela… (Araştırmacı bir daire ve teğet çizip yarıçapı teğete dik indiriyor.)	6			
52:43	Y	O yarıçap olarak... (Araştırmacının çizimi bitince) Hı! Aynen hocam. Teğet çektiğimizde doğrudur.				1
						
52:52	A	I! Normal denklemin mesela... Şöyle bir fonksiyon düşün. (Araştırmacı, bir eğri çiziyor ve teğet-normal çizimi yapıyor.) Şunun şuraya dik uzaklığını bulabilmen için şuradan bir teğet çekersin… şöyle.	6			
53:04	Y	Aynen öyle.		1	2	1
53:04	A	Normalini çizersin. Gibi… (Araştırmacı defteri kapatıyor.) Dairede hemen hemen böyle. (Gülümseme) Ama çok iyiydi ya. Yüzünde böyle bir garip bir gülümseme vardı.				
53:14	Y	(Gülümseme) Bunun devamı var mıdır? İlişkilerin?				
53:16	A	Hı?				
53:17	Y	Devamı? Merak ediyorum devamını.				
53:20	A	Devamını kurarız, ya!				

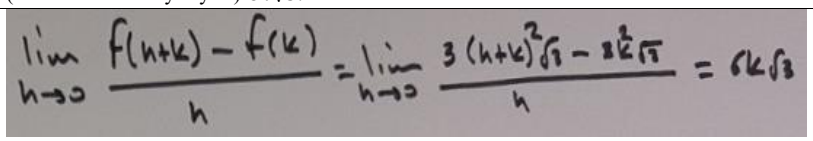
EK-4: Yavuz 3. Oturum (Eşkenar Üçgende Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi)

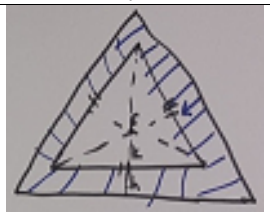
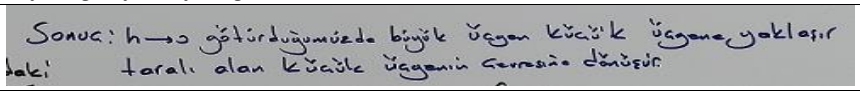
			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
00:00	A	(Konu dışı konuşma ve çalışma defterinin açılması) Y3 yazalım şuraya. Belli olsun.				
00:24	Y	(Çalışma sayfasının sağ üst köşesine Y3 yazıyor.)				
00:37	A	(Hazırlıklar devam ediyor.) Şimdi dostum seninle ne yaptık biz önceki haftalarda?	1			
00:41	Y	Önceki hafta, ilk hafta şey yaptık. I! Çemberin... I! Dairenin alanının…				2
00:47	A	Hı! Hı!				
00:47	Y	I! Çevresi olduğunu… Türevini alındığımızda çevresi… Çevresine eşit olduğunu gördük.				3
00:53	A	Sonra kare...	6			
00:54	Y	Sonra karenin… I! Ağırlık merkezinden kenarlarına dik çizdiğimiz				4
00:59	A	Hıh! Ağırlık merkezinden.	6			
01:00	Y	He! Dik çizdiğimiz uzaklıkların… I! Türevini aldığımızda bize...				4
01:06	A	Ona göre alanı oluşturup türevi aldığımızda.	6			
01:08	Y	He! Ona göre alanı oluşturup türevini aldığımızda bize çevresini veriyor.		1	2	4
01:11	A	Evet, aynen öyle. Şimdi eşkenarı deneyeceğiz. Eşkenar üçgen.	1			
01:16	Y	Eşkenar üçgen.				2
01:17	A	Evet.				
01:18	Y	Bir eşkenar üçgen çizelim.				1
01:19	A	Olmasa çizelim. Ne yapalım. Dikkat et! Kolun çarparsa kolunu şey yapar. I! Boya yapar. (Kalemlerden birinin ucu açık ve masada katılımcı tarafında duruyor.)				
01:25	Y	Olmaz.				1
01:29	A	Meydan, meydan senin.				
01:29	Y	Eşkenarı çizelim.				1
01:33	A	Evet.	6			
01:36	Y	(Çizmeye başlıyor.) Şöyle bir eşkenarımız olsun.				1
01:44	A	Hı! Hı!				
01:45	Y	Bütün kenarları eşittir zaten.				1
01:49	A	Hı! Hı!				
01:50	Y	E! Açısı 60'tır, onu yazmaya gerek var mıdır?				1
01:55	A	Sen ve vicdanın. Yazmak istiyorsan yaz. (Gülümseme) 60 derece olur yalnız.	6			
01:59	Y	(Açılara derece işareti koyuyor.) 60 derece…				1
02:04	A	Tamam. (Sonrasında sessizlik)				
02:09	Y	Bir kenar uzunluğuna (sessizlik) a diyelim.				1
02:13	A	Diyelim.				
02:14	Y	Kenar uzunluğu a olsun. (Tüm kenarlara uzunluklarını yazıyor.) a olsun. (Sessizlik) Bunun… I! Çevresi ve alanı arasındaki ilişkiye bakacağız. (Sessizlik) Alanı şeydir. (Yazmaya başlıyor.) Alan… I! Direkt formülünü mü yazayım yoksa...				2
02:48	A	Sen bilirsin. Varsa, formülünü biliyorsan direkt yaz.	6			
02:52	Y	(Yazmaya başlıyor.) Formülü $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.				2
02:58	A	Tamam.				
02:58	Y	Çevresi				2
03:00	A	Hı! Hı!				
03:01	Y	Zaten $3a$'dır.				2
						
03:04	A	Hı! Hı!				
03:06	Y	$3a$'dır. (Sessizlik) Arasında nasıl bir ilişki kuracağız. Alanla çevre arasında.	6			2
03:14	A	Türevini aldığımızda çevreyi veriyor mu?				
03:16	Y	Vermiyor.		1	2	2
03:17	A	Vermiyor. Karede de vermiyordu.	1			

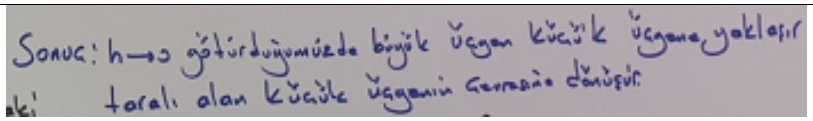
03:19	Y	Biz… Karede de vermiyordu. Biz şey yapıyorduk. Ağırlık merkezinden kenarlara dik…				4
03:26	A	İndiriyorduk.	6			
03:27	Y	He! Dik… He! Dik indiriyorduk. Dik uzaklık… Şurada yapabilir miyiz? (İlk çizdiği şekil üzerinde çalışmak istiyor.)		1	2	4
03:33	A	Yeni bir şekil çiz.	1			
03:34	Y	Yeni bir şekil.				2
03:35	A	Biraz daha büyük çiz. Cimri olma ya. Antep sofrasında büyümüş bir adamsın sen. Öyle cimri olmak sana yakışmıyor.	6			
03:44	Y	Doğru söylüyorsunuz.				2
03:45	A	Bir de arkadaşımın kuzenisin yani.				
03:50	Y	Şuradan… Ağırlık merkezi, zaten şöyle çizdiğimizde… Nokta, nokta… Nokta, nokta… Hepsinin kesişmiş olduğu nokta ağırlık merkezi. Yani şurası G dersek… I! Dik, dik midir? O var. Dik midir? (Eşkenar üçgenin köşelerinden başlayıp ağır merkezinden geçerek karşı köşede sonlanan doğru parçalarının kenar ile dik kesişip kesişmediğini sorguluyor. Söz konusu doğru parçaları, kenarortaydır. Eşkenar üçgende de kenarortay aynı zamanda dikme ve açıortaydır.)				1
04:19	A	Ağırlık merkezinden ne geçer?	6			
04:23	Y	Köşegenler geçer.				1
04:26	A	Üçgende köşegen var mı? (Gülümseme)	6			
04:29	Y	Üçgende köşegen yoktur. Dikmeler geçer, ağırlık merkezinden.				1
04:36	A	Dikmelerde eşkenar üçgen olduğu için geçer.	6			
04:39	Y	Dikmedir zaten. Çizdiğimiz şey dikmedir. Aynı zamanda diktir.				1
04:43	A	E! Eşkenar üçgenin kenarortayları ağırlık merkezinden geçer. Yani daha doğrusu üçgende ağırlık merkezi demek kenarortayların kesişim merkezi demektir.	6			
04:53	Y	Kesişim merkezi.				1
04:54	A	İşte, eşkenar olduğu için bu, aynı zamanda kenarortay aynı zamanda?	6			
04:58	Y	Dikme olur.				1
04:59	A	Aynı zamanda? (Katılımcı cevap vermeyince) Açıyı da iki eşit parçaya…	6			
05:02	Y	Açıyı da eşit keser.				1
05:03	A	Açı… Açının da ortayı olur.	6			
05:04	Y	Açıortayı olur.				1
05:06	A	Evet. O zaman dik olur.	6			
05:08	Y	Bu dik olur. Dik olur.				1
05:10	A	O şeyleri, bir… Hangi uzunluklar olduğunu… Orayı bir kalın yapsana. Tamam, neyse sen bildiğin gibi devam et. Hı! Hı!	6			
05:18	Y	Bildiğim gibi…				1
05:18	A	Hı! Hı! Tamam.				
05:19	Y	Bu şeydir. Buna… I! Ağırlık merkezinin kenar uzunluğuna biz k dersek.				2
05:24	A	Tamam. O k diyeceğin yeri kalın çiz. Nokta, nokta olmasın. Çiz.	6			
05:28	Y	Şuraya (çiziyor) k dersek…				2
05:32	A	Diğer taraflara da.	6			
05:34	Y	Bu… Şu taraf… Şuraya? Çizeyim, çizeyim mi?				2
05:38	A	Hı! Hı! Orayı da kalınlaştır.	6			
05:40	Y	Kalınlaştır.				2
05:41	A	Belli olsun.				
05:42	Y	k. (Üçgenin ağırlık merkezinden kenara indirilen dikmeleri noktalı çizgiden düz çizgiye çevirip k değerlerini yazıyor.)				2
05:43	A	Hı! Hı!				
05:43	Y	Şurası da… Diktir, bu da diktir.				2
05:49	A	Hı! Hı! Tamam.	6			
05:50	Y	Bu da diktir.				2
05:51	A	Tamam. Açıları yazabilir misin?	6			
06:00	Y	Yazabilirim.				2
06:01	A	Yaz.	6			
06:02	Y	Tamam, 60 ile 30, 30.				2
06:04	A	Tamam, 30, 30.	6			
06:07	Y	Şimdi şura 30°'dir. 30°'dir.				2
06:13	A	Hı! Hı!				
06:14	Y	Tek üçgen üzerinden mi?				2
06:17	A	Sen biliyorsun.				
06:18	Y	Tek üçgen… (Mırıldanma) Şurası zaten… (60° yazıyor.)				2

06:21	A	60°.	6	
06:21	Y	60°'dir. 30'un karşısı k ise 90'ın karşısı $2k$'dır.		2
06:29	A	Hı! Hı!		
06:31	Y	Şunu çizeyim, şu üçgeni çizeyim.		2
06:33	A	Hı! Hı!		
06:34	Y	Şurası da $2k$'dır. Şurası da zaten $k\sqrt{\ }$...		2
06:40	A	Hı! Hı!		
06:41	Y	3'tür. (Eşkenar üçgenin tabanının yarısına $k\sqrt{3}$ yazıyor.)		2
06:42	A	Tamam.		
06:42	Y	Zaten şurayla şurası eşit oluyordu. (Ağırlık merkezinden inen dikmenin tabanı iki eşit parçaya ayırmasından bahsediliyor.)		2
06:46	A	Hı! Hı!		
06:46	Y	Eşit iki parçaya bölüyordu.		2
06:48	A	Hı! Hı!		
06:48	Y	Aynı zamanda kenarortaydı. Bu da $k\sqrt{3}$'tür. (Eşkenar üçgenin tabanının diğer yarısı)		2
06:53	A	Hı! Hı!		
06:54	Y	I! Bir kenarı $2k\sqrt{3}$'tür.		2
06:57	A	Hı! Hı!		
06:58	Y	I! Bütün kenarları $2k\sqrt{3}$'tür.		2
07:00	A	Hı! Hı!		
07:01	Y	Şuraya da yazabiliriz. Burası da $2k\sqrt{3}$'tür.		2
07:06	A	Hı! Hı!		
07:07	Y	Şurası da $2k\sqrt{3}$'tür.		2
07:11	A	Hı! Hı! Çevresi ne olur?	6	
07:18	Y	Çevresi… I! $6k\sqrt{3}$ olur.		2
07:19	A	Güzel		
07:20	Y	Çevresi bakalım bir şey çıkar mı?		2
07:23	A	İnşallah-ü teala aleyhi ve sellem. (Katılımcı yazıyor.) Bakalım. Deneyeceğiz. Denemek bedava.	6	
07:31	Y	(Çevre formülünü yazarken kısık sesle mırıldanıyor.) $6k\sqrt{3}$'tür.		2
07:33	A	Ne demişti? Attım beyine, attım hafızaya, attım hafızaya… (Gülümseme)		
07:36	Y	(Gülümseme) Evet.		2
07:38	A	Alanı nasıl hesaplayacağız?	6	
07:40	Y	Alanı nasıl hesaplayacağız?		2
07:41	A	Evet.		
07:42	Y	Alanı formülden de hesaplayabiliriz.		2
07:44	A	Hı! Hı!		
07:45	Y	Ya da bir, iki… (Üçgenin ayrıldığı eş üçgensel bölgeleri sayıyor.) Eşit… I! Eşit… I! Ya da bir… I! Karenin… Küçük karenin… I! Küçük… I! Üçgenin alanını biliyoruz.		2
07:59	A	Hı! Hı!		
07:59	Y	Onu… Zaten bu altı eş üçgenler oluşur.		2
08:01	A	Hı! Hı!		
08:02	Y	6 ile çarparsak aynı şey olur.		2
08:05	A	Alan bulacağız değil mi? Hesapla.	6	
08:06	Y	(Yazmaya başlıyor.) Alan… Şuraya yazayım. Alan… Buranın alanı $k^2\sqrt{\ }$… I! $\frac{3}{2}$ dir. Hani, $k^2\sqrt{\frac{3}{2}}$'dir. Tamamı da 6 tane…		2
08:25	A	Hı! Hı!		
08:25	Y	6 tane, 6 taneden oluştuğu için 6 ile çarparsak…		2
08:28	A	Hı! Hı!		
08:29	Y	Bu da…		2
08:29	A	Şuraya yaz.		
08:30	Y	Eşittir… I! $3k^2\sqrt{\frac{3}{2}}$ olur.		2

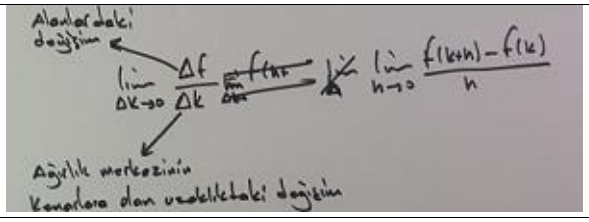


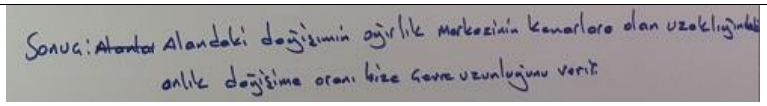
08:36	A	Hı! Hı!				
08:37	Y	Şimdi bunun… I! Karesini… Bunun türevini aldığımızda… I! Bize çevresini verir.		1	2	2
08:43	A	Veriyor.				
08:44	Y	Evet veriyor.				2
08:45	A	İnşallah verir. Açıklamasını yapalım.	1			
08:48	Y	Açıklamasını nasıl yapayım? Türev… Genel türev şeyi değil mi?=				2
08:53	A	Hı! Hı!				
08:56	Y	Limit…				2
08:57	A	Şurdan yap.				
09:01	Y	Limit h… I! Sıfıra giderken… Bunun şeyini de yazsam? ($\lim_{h\to 0}$ yazıp duruyor.)				2
09:08	A	Fonksiyonunu yaz.	6			
09:09	Y	Fonksiyonunu yazsam… I! f… I! k $(k) = 3k\sqrt{3}$.				2
09:14	A	Hı! Hı!				
09:15	Y	Eşittir $3k\sqrt{3}$'tür. (İfade etmese de $3k^2\sqrt{3}$ yazmış.)				2
09:20	A	Tamam.				
09:22	Y	(Genel türev denkleminin pay kısmını yazmaya başlıyor.) Bu f… $f(h+$…				2
09:31	A	Hı! Hı!				
09:32	Y	k'dır. Eksi $f(k)$'dır. (Kesir çizgisini çekip paydasına yazıyor.) h'tır. (Böylece genel türev denklemini $\lim_{h\to 0}\frac{f(h+k)-f(k)}{h}$ şeklinde yazmış oluyor.)				2
09:43	A	Hı! Hı!				
09:44	Y	Eşittir limit h sıfıra giderken… Biz burada 3… k yerine $h+k$ yazacağız.				2
09:57	A	Hı! Hı!				
09:58	Y	Bunun karesi… $\sqrt{3}$ … Eşittir. Fonksiyonun kendisini yazıyoruz. $3k^2\sqrt{3}$… Bölü (kesir çizgisini çekiyor.) h… (Yazdığı ifade $\lim_{h\to 0}\frac{f(h+k)-f(k)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(h+k)^2\sqrt{3}-3k^2\sqrt{3}}{h}$				2
10:13	A	Hı! Hı!				
10:14	Y	Şu… (Mırıldanma)				2
10:15	A	Tamam sonucunu ne çıkar tahmini olarak?	6			
10:18	Y	Tahmini olarak sonucu $6k\sqrt{3}$.				2
10:21	A	Direkt yaz. Niye? Çünkü?	6			
10:25	Y	I! Alanın türevini aldığımızda çevrenin uzunluğunu verir.				2
10:31	A	Bu türev, genel türev denklemi	6			
10:32	Y	Türev, genel türev denklemi.				2
10:35	A	Direk yazalım hiç uğraşma.	6			
10:36	Y	(Katılımcı sonucu yazıyor.) $6k\sqrt{3}$.		1	2	2
						
10:39	A	Tamam. Devam et.	1			
10:47	Y	Neyi devam edeyim?				2
10:49	A	Bu ne anlama geliyor? Bunu şekil çizerek anlatabilir misin? (Genel türev denkleminin pay kısmı işaret ediliyor.	6			
10:55	Y	Bunu şekil çizerek anlatabilir miyim? Anlatabilirim herhalde.				2
11:00	A	İnşallah.				
11:02	Y	(Çizim yaparken ara ara konuşuyor.) Şöyle bir üçgenimiz vardır.				2
11:05	A	Hı! Hı!				
11:10	Y	Üçgenimiz vardır. Bunun şurası desek…(Ağırlık merkezini işaretliyor.) Ağırlık merkezi de şurası desek… (Ağırlık merkezinden geçen dikmeleri çiziyor.				2
11:24	A	Hı! Hı!				
11:25	Y	I! Zaten eşkenardır.				2
11:27	A	Hı! Hı!				
11:27	Y	I! Ona göre… Eşkenardır…				2
11:31	A	Hı! Hı!				
11:32	Y	I! Aynı zamanda k'dır burası. Kenara uzunluğu…				2
11:40	A	Hı! Hı!				

11:41	Y	Ağırlık merkezinin kenara uzunluğu… Şöyle becerebilirsek… (Üçgenin dışına, ağırlık merkezleri çakışık olacak şekilde bir üçgen daha çiziyor.) Şöyle bir üçgen daha çizebilirsek… Şöyle üçgen çizebilirsek… (Mırıldanma) Bu k'dır. Ağırlık merkezinin kenara uzunluğu k'dır.				2
12:05	A	Hı! Hı!				
12:06	Y	Bunu uzatsak şurası da h olur.				2
						
12:09	A	Hı! Hı!				
12:10	Y	Bu da büyük üçgenimiz olur. İkisi de eşkenar üçgendir. Ağırlık merkezi, ikisinin de G'dir.				2
12:15	A	Çakışıktır evet.	6			
12:16	Y	Evet, çakışıktır. I! Şurdan fonksiyondan bulduğumuz… I! $f(h+k)$ I! Büyük üçgenin alanıdır. (Genel türev denkleminin pay kısmındaki $f(h+k)$ işaret ediliyor.)		1	2	2
12:26	A	Hı! Hı!				
12:27	Y	I! $f(k)$ ise küçük üçgenin alanıdır.	4			4
12:30	A	Hı! Hı!				
12:30	Y	Biz büyük üçgenin alanından küçük üçgenin alanını çıkardığımızda… (Mavi kalemi alarak tekrar ediyor.) Büyük üçgenin alanından küçük üçgenin alanını çıkardığımızda bize şu… (Üçgensel halka bölgeyi tarıyor.) Kalan alan şudur.				4
12:43	A	Hı! Hı!				
12:53	Y	(Tarama işlemi 10 saniye daha devam ediyor. Bitince konuşmaya başlıyor.) İşte alan şudur.				4
12:54	A	Hı! Hı!				
13:02	Y	(Kalemi bırakıp elini çenesine götürerek 8 saniye kadar düşünüyor. Konuşmaya başladığı anda araştırmacı "tamam" diyor ancak katılımcı konuşmaya başlayınca araştırmacı susuyor.) Biz h'ı… h'ı sıfıra götürdüğümüzde…				4
13:05	A	Hı! Hı!				
13:06	Y	Yani… I! h'ı sıfıra götürdüğümüzde zaten büyük üçgen, üçgenin biz küçük… Küçük üçgene yaklaştırıyoruz. Yani küçük üçgen oluyor				4
13:17	A	Hı! Hı!				
13:18	Y	E! Bunun alanı bir yani çevre oluyor, artık.				4
13:24	***A***	***Alan ne oluyor?***				
13:26	Y	Alan çevreye dönüşüyor.				4
13:27	A	Tamam.				
13:28	Y	Alan çevreye dönüştüğü için biz bulduğumuz alan zaten… I! Küçük üçgenin çevresine döner.		1	3	4
13:35	A	Çok güzel. Bunu sözel olarak söyledin. Bir de yazılı yaz. Açıklama yaz.	1			
13:40	Y	İnşallah yaparım.				4
13:43	A	Yapsan iyi olur. Hoş olur.				
13:45	Y	Bakalım (mavi kalemi eline alıp) sonuç mu yazayım?				4
13:49	A	Sonuç yaz.				
13:50	Y	Açıklama olsun.				4
13:51	A	Yaz. Sonuç yaz. Sonuç yaz neyse bir şey yaz. Bir şey yaz bakalım.				
13:57	Y	Sonuç. (Yazıyor.) h'ı sıfıra götürdüğümüzde… ($h \to 0$ yazıp) $h = 0$ böyle yazsam olur mu?				4
14:07	A	Hı! Hı!				
14:08	Y	Götürdüğümüzde… Sıfıra götürdüğümüzde…				4
14:19	A	Hı! Hı!				
14:20	Y	I! Büyük üçgen, büyük eşkenar üçgen yazasam olmuyor mu? Büyük…				4
14:26	A	Keyfine göre yaz, keyfine göre.				
						
14:27	Y	Büyük… Büyük üçgen… I! Küçük üçgene dönüşmüş olur **(Emin olmadığı için yazının devamını getirmiyor)**. Yani onun çevresine dönüşmüş olur.				4
14:37	A	Hı! Hı! Biri birine yaklaşır mı? Yoksa nasıl yok oluyor?	6			
14:40	Y	Hı?				4

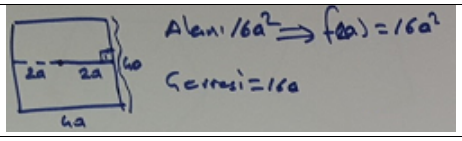
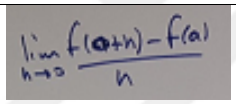
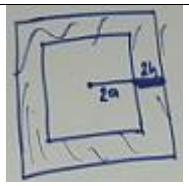
14:41	A	Biribirine yaklışıyor mu? Biri birinden uzaklaşıyor mu? Yoksa alan nasıl yok oluyor? Nasıl uzunluğa dönüşüyor?	6			
14:48	Y	E! I! h'ı sıfıra götürdüğümüzde… I! Büyük üçgen...				4
14:54	A	Okla göster.	6			
14:55	Y	Büyük üçgen… (dıştaki üçgenden içteki üçgene ok çizerek) Şöyle göstereyim. Büyük üç…				4
14:58	A	Tamam.				
14:59	Y	Büyük üçgen, üçgen küçük üçgenin çevresine eşit olmuş oluyor.				4
15:02	A	Tamam yazalım.				
15:05	Y	(Mırıldanma) Büyük üçgen…				4
15:06	A	Hı! Hı!				
15:08	Y	Küçük… (Kısık sesle)				4
15:09	A	Büyük üçgen küçük üçgenin çevresine eşit olmuyor. (5 saniye sessizlik. Araştırmacı büyük üçgeni elle göstererek) Büyük üçgen komple bir bütün olarak değil…	6			
15:21	Y	İşte büyük üçgen yaklaştırdığımızda bu arada kalan…				4
15:26	A	Tamam. Taralı alan.	6			
15:27	Y	He! Taralı alan…				4
15:27	A	Hı! Hı!				
15:28	Y	(Ellerini bir birine yaklaştırıyor.) I! Sıfır… I! Yani taralı alan… I! Küçük üçgenin çevresine eşit olur.				4
15:33	A	Büyük üçgen küçük üçgene yaklışır… ("Sonuç:$h \to 0$ götürdüğümüzde büyük üçgen" yazıp takıldığı için araştırmacı yazının devamında anlamlı bir bütün oluşması için yönlendirme yapıyor). Büyük üçgen küçük üçgene yaklaşır.	6			
15:36	Y	Büyük üçgen… (Yazmaya başlıyor.)				4
15:47	A	Hı! Hı!				
15:50	Y	Büyük üçgen küçük üçgene yaklaşır. I! Taralı alan…				4
15:56	A	Hı! Hı!				
15:57	Y	(Yazıyor.) Taralı alan… I! Taralı alan… ("taralı alan yazıp duruyor.) Küçük üçgenin çevresine eşit olur.				4
16:12	A	Aynen öyle. (Katılımcı "…küçük üçgenin" yazdıktan sonra) Çevresine döner.	6			
16:21	Y	Çevresine dönüşür.				4
16:23	A	Hı! Hı!				
16:24	Y	(Yazdıktan sonra) Çevresine dönüşür.		1	2	4
						
16:33	A	Veleddalin. Amin. Şimdi bunu… I! Değişim oranı cinsinden ifade edebilir misin?	1			
16:39	Y	Değişim?				2
16:40	A	Değişim oranı... Delta bir şeydi.	6			
16:43	Y	Δh…				2
16:45	A	Hı! Hı!				
16:46	Y	Δh değişimi…		1	1	2
16:48	A	Şimdi burda neyi neye oranlamışsın? (türevin genel denklemini göstererek).	1			
16:52	Y	Burda…				2
16:53	A	Hı! Hı!				
16:53	Y	Kenar uzunluklarının… (3 saniye sessizlik.) Bu…		1	1	2
16:57	A	(Genel türev denklemi göstererek) Şu neyin neye oranıdır? Şurada?	1			
16:59	Y	Orda. (3 saniye sessizlik) Alanın kenara oranıdır.				2
17:08	A	Alandaki değişimin.	6			
17:09	Y	Kenar… (Düzeltip) Uzunluktaki değişime oranı.				2
17:11	A	Tamam. Yazalım. Δ… Şuraya (boş yer göstererek) Δ… Deltanın ne olduğunu biliyorsun değil mi? Üçgen.	6			
17:18	Y	Δ değişim.				2
17:19	A	Hı! Hı!				
17:19	Y	Δh		1	1	2
17:20	A	Hı! Hı! Δh'daki neyin… Yukarıda neyin değişimi var? (Genel türev denkleminin pay kısmı işaret ediliyor.)	1			
17:27	Y	Yukarıda… I! Alanın değişimi. Alandaki değişim.		1	2	2
17:30	A	Alanı hangi fonksiyonla, neyle ifade etmiştik?	1			
17:35	Y	k ile.		1	1	2

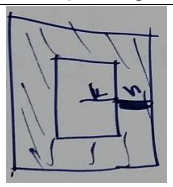
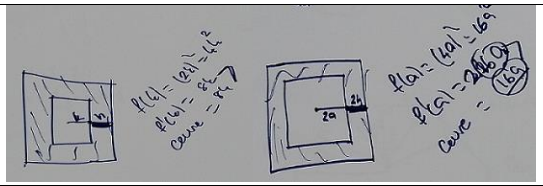
17:36	A	Çık!	1			
17:36	Y	f ile.				
17:37	A	f ile Δf	6			
17:38	Y	Δf bölü…				
17:39	A	Hı! Hı!	6			
17:41	Y	Δh.		1	1	2
17:44	A	Δh değil. h neydeki değişimdir? (Genel türev denkeminin payda kısmındaki h'ı göstererek).	1			
17:47	Y	I! Kenardaki değişim.		1	1	2
17:49	A	Kenardaki mi?	2			
17:50	Y	(Mırıldanma)				2
17:52	A	Kenar dediğin göstersene kenarı bana, şekilde. (Üçgensel halka işaret ediliyor.)	6			
17:57	Y	(Şekle odaklanıp) Kenar… I! Δh nedir? Ağırlık merkezinin…				2
17:58	A	Hah! Δk.	6			
17:59	Y	He! Δk.				2
18:00	A	Tamam. Δk. I! Limit (limit ifadesini unuttuğu için) $\Delta k \to 0$.	6			
18:05	Y	(Yazıyor.) Limit $\Delta k \to 0$.				2
18:10	A	Ya, mesela $(k+h)$'tan k'yı çıkartmıştın değil mi? (Üçgensel halkanın ağırlık merkezinin kenarlara uzaklıkları işaret ediliyor)	6			
18:13	Y	Aynen. $(k+h)$'tan k'yı çıkartmışım.				2
18:15	A	$k+h$'tan k'yı çıkartıp h kalır, burda aslında. (Genel türev denkleminin paydasındaki h'ı göstererek) I! Bu nedir?($\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta k}$ ifadesi işaret ediliyor.) Eşittir yaz.	6			
18:22	Y	I! Eşittir.				2
18:24	A	Bu. (Genel türev denklemi işaret ediliyor.)	6			
18:26	Y	Onun aynısınımı mı yazayım.				2
18:26	A	Hı! Hı! Aynısını yaz.	6			
18:31	Y	Peki h…				2
18:32	A	Limitini de yaz.	6			
18:33	Y	Limit Δh… Δk şey…				2
18:36	A	Dur dur şöyle. (Yanlış yazılan ifadenin üstünü çiziyor.) Limit… Şunun aynısını yaz. (Genel türev denklemi işaret ediliyor.)	6			
18:43	Y	Limit…				2
18:47	A	h sıfıra giderken.	6			
18:51	Y	(Yanlış yazdığı ifadenin üstünü çiziyor.) Limit h, sıfıra giderken f… I! $(k+h)$…				2
18:59	A	Hı! Hı!				
19:00	Y	Eksi $f(k)$ bölü h. (Katılımcının yazmayı tamamladığı ifade $\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta k} = \lim_{h \to 0} \frac{f(k+h)-f(k)}{h}$ şeklindedir.)				2
19:05	A	Yani şu, şuna eşit aslında. ($\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta k} = \lim_{h \to 0} \frac{f(k+h)-f(k)}{h}$ eşitliğiğ işaret ediliyor.)	6			
19:07	Y	Evet. Aynen.		1	2	2
19:08	A	Farklı notasyon. Bu neydi? Böyle bir ok çek. Yaz yanına. ($\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta k}$ ifadesinin payı işaret ediliyor.)	1			
19:14	Y	(Ok çiziyor. Yazmaya başlıyor.) Alanlardaki değişim.				4
19:19	A	Hı! Hı!				
19:19	Y	(Yazmaya devam ediyor.)		1	2	4
19:27	A	Bu neydi. ($\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta k}$ ifadesinin paydası işaret ediliyor.)	1			
19:29	Y	(Ok çiziyor.) Bu da… I! Ağırlık merkezinin kenarlardaki… Kenarlara uzaklığı… (Araştırmacı ile senkron bir şekilde) Kenarlara olan uzaklığı.				4
19:33	A	Kenarlara olan uzaklığı. Hı! Hı! Yaz.				
19:36	Y	(Yazmaya başlıyor.) Kenara uzak… Kenarlara uzaklıktaki değişim. (Yazmayı bırakıyor.)				4
19:54	A	Olan uzaklığı. Olan uzaklığındaki…	6			
19:59	Y	(Yazmaya devam ediyor.) Olanan… Olan uzaklığındaki değişim.				4
20:07	A	Değişim.				
20:07	Y	(Yazımaya devam ediyor.)		1	2	4



20:11	A	Tekrardan bi sonuç yazalım. (Çalışma sayfasında boş bir alan işaret ediliyor.)	1		
20:22	Y	(Kalemi değiştirdikten sonra "Sonuç:" yazıyor.)			4
20:25	A	Hı! Hı!			
20:26	Y	Sonuç… Al… Al… Alanlardaki değişimin…			4
20:33	A	Hı! Hı!			
20:34	Y	(Yazıyor.)			4
20:38	A	Alandaki değişimin.	6		
20:40	Y	(2 saniye bekleyip "Alanlar" ifadesinin üstünü çiziyor.) Alandaki			4
20:43	A	Çünkü tek alan… Tek alan…	6		
20:44	Y	(Araştırmacının sözünü keserek) Tek alandır diğeri hayali şeydir.			4
20:47	A	Alandaki… (Katılımcının yazmaya devam etmesi için)			
20:51	Y	(Yazmaya başlıyor.) Alandaki… (Yazmaya ara veriyor.) Alandaki değişimin…			4
20:55	A	Hı! Hı!			
20:56	Y	E! Ağırlık merkezindeki… (Söylediğini düzeltiyor.) Ağırlık merkezinin kenara olan…			4
21:02	A	Hı! Hı!			
21:03	Y	(Yazmaya başlıyor.) Değişimin ağırlık… (Yazmaya ara veriyor.)			4
21:07	A	Şurada yapmışsın zaten. ($\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta k}$ ifadesinin pay ve paydasına oklar çekilerek yazılanların tamamı işaret ediliyor.)	6		
21:11	Y	Onu nasıl şey yaptık, kısa olarak.			4
21:13	A	Kısaltma. Uzat. (Gülümseme) Bir şey olmaz.	6		
21:16	Y	(Yazmaya başlıyor.) Ağırlık merkezinin… (Yazmaya ara veriyor.) Ağırlık merkezini kenarlara…			4
21:26	A	Hı! Hı!			
21:27	Y	Olan… Ağırlık merkezinin… (Yazmaya başlıyor.) Kenarlara olan… (Yazmaya ara veriyor.) Uzak… Uzaklığındaki değişim.			4
21:39	A	Uzaklığındaki? Tamam. Uzaklığındakini yaz.	6		
21:42	Y	(Yazmaya başlıyor.) Olan.			4
21:43	A	Uzaklığındaki…			
21:47	Y	Uzaklığındaki anlık değişim. ("Anlık" ifadesi vurgulu.)			4
21:48	A	Hah! Anlık değişim.			
21:49	Y	(Yazmaya başlıyor.) Anlık değişim.			4
21:50	A	Çünkü şu limit Δk'yı sıfıra götürüyorsun. ($\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta k}$ ifadesi işaret ediliyor.)			
21:55	Y	Uzaklığındaki anlık değişim.			4
21:56	A	Hı! Hı!			
21:56	Y	(Yazmaya devam ediyor.)			4
22:00	A	Değişime. (Araştırmacı yazılan ifadenin düzgün olması için düzeltiyor.)	6		
22:02	Y	Anlık değişime…(Yazmaya devam ediyor.)			4
22:04	A	Oranı.	6		
22:05	Y	(Yazmaya devam ediyor.) Değişime…			4
22:08	A	(Katılımcı yazmaya ara veriyor.) Oran demek bölüm demek.	6		
22:10	Y	Bölüm.			4
22:10	A	3/5 demek 3'ün 5'e oranı demek.	6		
22:14	Y	Oranı bize… I! Çevre… (Yazmaya devam ediyor.) Oranı bize çevre uzunluğunu verir.			4
22:23	A	Tamamdır.			
22:31	Y	(Yazmayı bitiriyor.) Verir.		1 2	4
					
22:32	A	Tamamdır. Bu da böyle.			
22:38	Y	Bitti.			4
22:39	A	Sıkıntı var mı?			
22:40	Y	Yok. Biraz öğrenmişim galiba.			4
22:43	A	Biraz öğrenmişsin galiba değil baya öğrenmişsin. Nasıl faydalı mı?	2		
22:50	Y	Bence çok faydalı. Hatta düşündüm: dedim acaba, bu ağırlık merkez… Merkezinden kenarlara çizdiğimiz…			2
22:57	A	Hı! Hı!			
22:57	Y	Bütün şeyler… I! Uzaklıkları aldığımızda acaba türevin… Türevini aldığımızda alan… Mesala bir karede diyelim. Biz karede almıştık. a dedik çıkmadı, kenara. Ama ağırlık merkezinden a… b yazdığımızda bize vermişti. Ağırlık merkezinden kenarlara dik uzaklığına biz b dediğimizde.			2

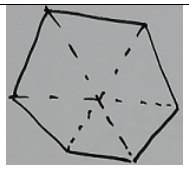
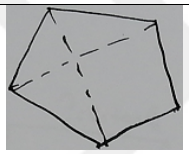
		Acaba dedim: hani kendim düşünerek düşünür müyüm acaba biz 3 desek 1,5 deseydik de çıkar mıydı? Yaptım çıkıyordu 1,5 desek de çıkıyor. 3 desek de çıkıyor. 3 dersek.				
23:32	A	Mesela k demişsin.				
23:33	Y	Hı! Hı!		1	2	2
23:35	A	Peki şey… I! Karede denedin değil mi?	1			
23:41	Y	Karede denedim.				2
23:42	A	Sayılar vererek denedin?				
23:44	Y	Sayılar vermedim. 3 dedim misal.				2
23:47	A	$3k$ mıdır? $3a$ mıdır?				
23:48	Y	$3a$ dedim. Ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığına diyelim ben $3k$… $3a$ dedim.				2
23:53	A	Hı! Hı!				
23:54	Y	Bir kenarım kaç olmuş oluyor? I! $6a$ olmuş oluyor.				2
23:59	A	Hı! Hı!				
24:00	Y	Toplamı 24… $24a$ olmuş oluyor.				2
24:03	A	Hı! Hı!				
24:04	Y	I! Şeyi ne oluyor? $3a$ dedik ozaman… I! $6x6 = 36$ diye bir şey çıkıyor.				2
24:13	A	3, 6, 36 tamam				
24:15	Y	$36a^2$ çıkıyor				2
24:17	A	Tamam 72 yapar.				
24:18	Y	72 yapar.				2
24:19	A	72 mi yapar?	6			
24:25	Y	Valla bir şey yapar ama şurda acaba yapsak daha. (Mevcut çalışma sayfası gösteriliyor.)				2
24:27	A	(Boş bir sayfayı göstererek) Şuraya yapalım.				
24:31	Y	Şöyle… Şöyle karemiz olsun. (Kare çizmeye başlıyor.)				2
24:37	A	Hı! Hı!				
24:39	Y	Şurası ağırlık merkezimizdir.				2
24:41	A	Hı! Hı!				
24:42	Y	I! Biz şu… Şu ağırlık merkezinden dik uzaklığa $2a$ diyelim.				2
24:48	A	Hı! Hı!				
24:50	Y	E, zaten şurdan uzaklığı da eşit olduğu için burası da $2a$ olur.				2
24:55	A	Tamam.				
24:56	Y	Bir kenar $4a$ olmuş oluyor.				2
24:58	A	Tamam.				
24:59	Y	Bütün kenarlar zaten $4a$'dır.				2
25:01	A	Hı! Hı! (Sessizlik) Çevresi?				
25:04	Y	I! Çevresi $16a$'dır.				2
25:07	A	Hı! Hı!				
25:08	Y	(Yazıyor.) Çevresi $16a$'dır.				2
25:13	A	Hı! Hı!				
25:18	Y	(Yazmayı bitirip konuşmaya devam ediyor.) I! Şey olur. Bunu da… I! Alanını aldığımızda…(Kenar uzunluklarını işaret ediyor.) $4a$. Şurası da $4a$. $4a$… I! Ne olmuş oluyor. Alan… Nedense bir çelişkiye düşmüş olduk. Alan $16a^2$ oluyor.				4
25:39	A	Hı! Hı! (4 saniye sessizlik)				
25:43	Y	$16a^2$ oluyor. $16a^2$… Biz bunun türevini aldığımızda bize vermiyor çevresini.		1	2	4
25:50	A	Dur. Fonksiyon cinsinden yaz.	1			
25:55	Y	Alanı?				2
25:56	A	Hı! Hı!				
25:57	Y	Fonksiyon cinsinden… Bu $f(a) = 16a^2$.		1	3	2
26:05	A	Tamam. Buradaki bağımsız değişken ne?	1			
26:07	Y	a'dır.		1	3	2
26:08	A	a'dır. Ama neye göre yazman gerekiyor senin o ilişkiyi oluşturabilmen için?	1			
26:16	Y	İlişkiyi?				2
26:17	A	İlişkiyi oluşturabilmen için neye göre yazman gerekiyor? (Sessizlik) Ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı.	6			
26:25	Y	Ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı.		1	2	2
26:27	A	Tamam. Sen ağırlık kenara… Ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığına göre mi oluşturmuşsun?	1			
26:31	Y	Kenara göre oluşturmuşum.				2
26:34	A	Şu $2a$ dediğin şey ağırlık merkezinin kenara uzaklığı $2a$. (Kare şekli işaret ediliyor.)	6			
26:38	Y	Hı! Hı!				2
26:38	A	Ama sen fonksiyondaki bağımsız değişken $2a$ değil. (Fonksiyonun parantez içi işaret ediliyor.)	6			

26:45	Y	(4 saniye sessizlik) Onun $2a$ olması mı gerekiyor?				2
26:48	A	Parantez içinde $2a$ yazman gerekiyor.	6			
26:50	Y	Tamam. $2a$ yazarsak.				2
26:51	A	Hı! Hı!				
26:52	Y	$2a$ yazdım. (Fonksiyondaki "(" ile "a" arasında "2" sembolunu şıkıştırıyor.)		1	2	2
						
26:57	A	Şimdi türevini alsan ne yapar?	1			
27:00	Y	$32a$ yapar.		1	1	2
27:03	A	Şimdi. I! Tamam. Limit ifadesini de yaz. Yani genel, genel türev yap. Bakalım bu şekilde nasıl bir bozukluk çıkaçak.	1			
27:17	Y	Limit h sıfıra giderken				2
27:19	A	Hı! Hı!				
27:22	Y	$f(2a)$	6			2
27:25	A	Ya da a demiştin ya a'ya göre yap.				
27:29	Y	a'mı?				2
27:30	A	Hı! Hı!				
27:30	Y	(Yazıyor ve yazdıklarını mırıldanıyor)				2
27:33	A	Hı! Hı! Şimdi sen bunun içini düzeltmeye çalıştın dışını düzeltemedin. (Yazılan fonksiyon işaret ediliyor.) Tamam $a + h$…	6			
27:38	Y	$f(a + h)$ eksi $f(a)$'dır.				2
27:41	A	Hı! Hı!				
27:42	Y	bölü h.				2
						
27:44	A	Tamam. Şekle nasıl yansır?	6			
27:49	Y	(Sessizlik) Şekle nasıl yansır?				2
27:51	A	Hı! Hı!				
27:52	Y	Yani, Şeklimizin kenarına $4a$ dedik. a dersek… Şunda biraz h büyüklüğünde bir birşey çizmemiz lazım.				2
28:00	A	Tamam kaç h büyüklüğünde?	6			
28:04	Y	$2h$ büyüklüğünde.				2
28:05	A	$2h$ o tarafa $2h$	6			
28:08	Y	$2h$ diğer tarafa.				2
28:09	A	Çiz.				
28:10	Y	(Çizmeye başlıyor.) Şöyle çizeyim. Şuraya biz a diyelim. Böyle işimiz kolaylaşır sanki. (Ağırlık merkezinin kenara uzaklığına a diyor.)				2
28:24	A	Bu $2a$'dır. $2a$ dediysen $2a$ demeye devam edeceksin. (Gülümseme)	6			
28:32	Y	$2a$ tamam, $2a$. Şöyle… $2a$ şöyle h da şurasıdır. Karesel halkanın kalınlığını h kadar artırıyor.)				2
28:41	A	h kadar mı artar orası?	6			
28:42	Y	Yani h derken $2h$.				2
28:44	A	$2h$ kadar.	6			
28:45	Y	$2h$ da şurasıdır.				2
28:47	A	Tamam. Normalde bu. Taralı alan şu çıkar. (Araştırmacı karesel halkayı tarıyor.)	6			
28:50	Y	Aynen öyle.				2
28:51	A	Doğru mu?	6			
28:51	Y	Doğru.		1	2	2
						
28:54	A	(Araştırmacı yeni bir şekil çiziyor.) Bizim ilişkiyi oluşturduğumuz şekildeyse biz şuraya k demiştik dimi?	1			
29:01	Y	Hı! Hı!				2

29:01	A	Şuraya ne demiştik?	6		
29:03	Y	h demiştik.			2
29:03	A	h demiştik. Doğru mudur? (Şekli tarıyor.)			
					
29:06	Y	Doğrudur.			2
29:08	A	Şu halkanın alanıyla şu halkanın alanı arasında nasıl bir ilişki var? Fark var? (İki farklı karesel halka arasındaki fark sorgulatılıyor.)	6		
29:16	Y	I! Fark. Biri $2a$… Birinin kena… Şeye uzaklığı $2a$'dır. Diğeri...			4
29:21	A	Yo, Yo. Şu kalınlık bakımından.	6		
29:26	Y	İki katıdır.			4
29:27	A	İki katı değil mi?	6		
29:28	Y	Aynen.			4
29:28	A	Tamam. Mesela, normalde şurayı (ilişkinin kurulduğu şekil işaret ediliyor.) yaptığımız zaman $f(k)$ ne çıkıyordu? $(2k)^2 = 4k^2$ değil mi? ($f(k) = (2k)^2 = 4k^2$ yazıyor.)	6		
29:38	Y	Hı! Hı!			4
29:39	A	f'in türevi yani $f'(k)$ ne çıkıyordu? $8k$.	6		
29:47	Y	Hı! Hı!			4
29:48	A	Çevre zaten $8k$'ydı.	6		
29:48	Y	$8k$'ydı			4
29:50	A	Tamam. Eşit çıkıyor. (Alanın türevi ile çevre, oklar ile birleştiriliyor. Sonra çelişki oluşturan yani ağırlık merkezinin kenara dik uzaklı $2a$ olarak tanımlanan şekle dönülüyor.) Burada $f(a)$ dediğimiz şey ne oluyordu? $4a$'nın karesi $16a$… (Konuşurken ifade etmese de a^2 yazıyor.) I! $f'(a)$ ne oluyor burda?	6		
30:05	Y	$32a$. (Senkron bir şekilde.)			4
30:05	A	32 ya da 2 çarpı $16a$. (Yazılanlar $f(a)= (4a)^2 = 16a^2$ ve $f'(a) = 2.16a$ şeklindedir.)	6		
30:09	Y	$16a$.			4
30:10	A	Çevre $16a$. Doğru mu?	6		
30:15	Y	Çevre $16a$.			4
					
30:16	A	Arada nasıl bir ilişki var? (3 saniye sesizlik. Ardından ilişkinin sağlandığı model işaret edilerek) Burada doğrudan kendisini verdi. Alan…	6		
30:22	Y	Alanın türevi çevreyi verdi. (Senron bir şekilde)			4
30:23	A	Alanın türevi çevreyi verdi. (Çelişki oluşturan model işaret edilerek) Burada ne oldu?	6		
30:26	Y	Burada iki katı.			4
30:27	A	İki katı. Niye iki katı? (Çelişki oluşturan modeldeki halkanın kalınlığı işaret ediliyor.)	6		
30:30	Y	Biz… I! h'ı iki katı aldığımız için.			4
30:34	A	İki katı. Kalınlığı arttı.	6		
30:35	Y	Kalınlığı arttırdığımız için.			4
30:37	A	Kalınlığı arttırdığımızda değişim oranın değeri değişir. Ona göre ağırlık merkezinin kenara uzaklığına bir değişken atamamız lazım.	6		
30:40	Y	He! Tamam. (Kafa sallıyor.)			4
30:45	A	(4 saniye kadar sesizlik ardından senkron gülme) Tamam. Ona göre…Ona göre… (Ciddileşmeye çalışarak) O yüzden ağırlık merkezinin kenara uzak… Uzaklığına bir değişken atamamız lazım.			
30:51	Y	O değişkene göre değişiyor.		1 2	4
30:53	A	O değişkene göre fonksiyon oluşturuyoruz. Teşekkürler Yavuz.			
31:00	Y	Rica ederim.			

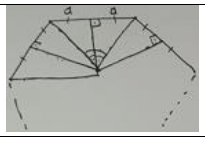
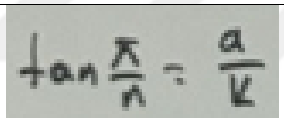
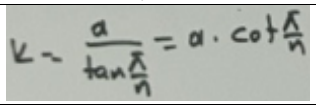
EK-5: Yavuz 4. Oturum (Düzgün n-gende Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi)

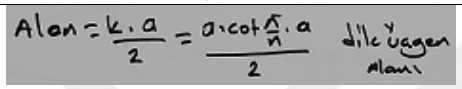
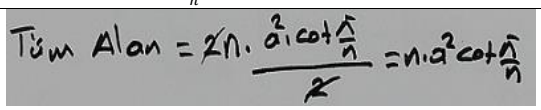
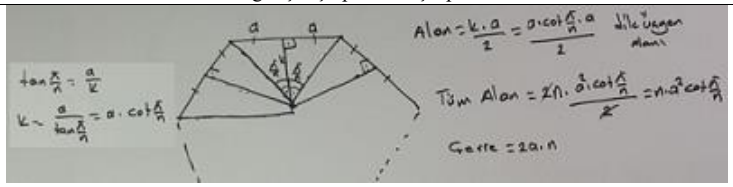
			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
00:00	A	(4 saniye hazırlık.) Ama bugün çok eğleneceğiz Yavuz.				
00:07	Y	(Katılımcı yanlış bir sayfaya Y4 yazıyor.)				
00:10	A	(Araştırmacı doğru bir sayfa açıyor.) Dur, dur.				
00:16	Y	(Kısık sesle)Yanlış yere mi yazdım.				
00:18	A	Sıkıntı yok. Şuraya yazalım. Bu kalemi kullan. (Katılımcı kalemi deniyor.) Neyse tamam sıkıntı yokmuş. Şimdi Yavuz. Dairede alan çevre türev ilişkisi kurduk. (Sol elinin serçe parmağını işaret ediyor.)	1			
00:41	Y	Kurduk evet. Karede kurduk.				4
00:44	A	Hızımızı alamadık karede kurduk. (Sol elinin yüzük parmağını işaretliyor.)	6			
00:46	Y	Hızımızı alamadık eş kenar üçgende kurduk.				4
00:47	A	He! (Sol elin orta parmağını da işaretliyor.) Ne oldu? E! Bunlarda kurmanın yolu neydi? Mesela dairede… Şey! Karede önce olmuyordu.	6			
00:54	Y	Evet olmuyordu.				2
00:55	A	Neye göre kurduk?	6			
00:57	Y	I! Ağırlık merkezinin kenarlara dik…				4
00:59	A	Uzaklığına göre. (Senkron bir şekilde)				
00:59	Y	Uzaklığına göre aldığımızda				4
01:01	A	He!				
01:02	Y	O, sağladı.		1	2	4
01:03	A	Düzgün bir çokgen… Kenar sayısına n diyelim.	1			
01:10	Y	Evet, n diyelim.				4
01:10	A	n…Bunda sağlar mı? Bir genelleme yapacağız. Matematikçi üçgen için dörtgen için, beşgen için, altıgen için ongen için, on sekizgen için çalışılmaz.	6			
01:22	Y	Genel.				4
01:23	A	Genel bir çözüm yapacağız.	6			
01:24	Y	Bilmiyorum ki sağlar mı ki acaba?				4
01:25	A	Denemek lazım.	6			
01:27	Y	Deneyeceğiz ama bilmiyorum ki?		1	1	4
01:29	A	Benim yeğenim… Bilgisayar bozuktur diyorum. Bilgisayarla oynamak istiyor. Diyor ki denemeden bilemeyiz ki? Diyor elini vuruyor bilgisayar açılıyor. (Kahkaha)				
01:38	Y	(Kahkaha)				4
01:43	A	I! En az üç kenar çizelim geri kalanına nokta, nokta, nokta koyalım. Düzgün bir çokgen olsun.	1			
01:49	Y	(Mırıldanma.)				2
01:50	A	Yaz. Biraz alttan. Tamam. Büyük çiz yani. Kenar…	6			
01:57	Y	Büyük çizeyim.				2
01:57	A	Uzunluklarını büyük çiz. He.	6			
01:59	Y	(3 kenarı belirli bir düzgün çokgen çizmeye başlıyor.) Şöyle çizeyim. Şöyle çizeyim.				2
02:01	A	Hı! Hı!				
02:02	Y	Bir tane de şöyle olsun.				2
02:04	A	Tamam.				
02:05	Y	Diğerine… (4. Bir kenar çizmeye çalışıyor. Mırıldanma)				2
02:06	A	Böyle nokta, nokta bıraksan…	6			
02:08	Y	(Diğer kenarları noktalarla belirlemeye başlıyor.)Nokta.				2
02:09	A	Caizdir. Tamam.				
02:11	Y	Artık nereye kadar gidiyorsa.				2
02:13	A	Mesela n10 ise 10…				
02:14	Y	Evet.				2
02:15	A	20 ise..				
02:16	Y	20.		1	2	2
02:16	A	20. N-gen. Ne yapacağız?	1			
02:20	Y	Ağırlık merkezini bulmamız gerekiyor.		1	3	5

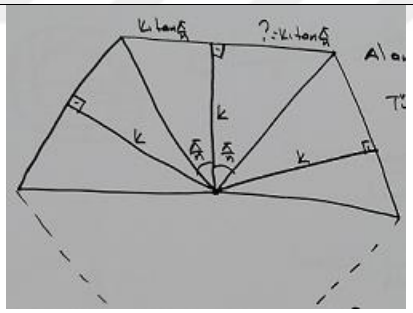
02:21	A	Tamam, bul.	1			
02:23	Y	Ağırlık merkezi de köşelerden, köşeleri birleştirirsek... (Köşegenleri çizmeye başlıyor.)				1
02:27	A	Köşeleri birleştirirsek… Mesela şöyle…	6			
02:31	Y	Köşegen.				1
02:31	A	Beşgen çizsene.	6			
02:33	Y	Beşgen. (Altıgen çiziyor.)				1
						
02:44	A	O altıgen oldu. Neyse, tamam. Altıgen olsun. Tamam. Köşegenleri birleştir bakayım.	6			
02:51	Y	Böyle gelecek.				2
02:54	A	Şuradan şuraya da çizebilirsin.				
02:58	Y	(Mırıldanma) Şöyle çizdiğimizde ağırlıklar… O üç köşegenin kesiştiği nokta olmaz mı?				2
03:09	A	Bir beşgen çiz.	6			
03:11	Y	Bir beşgen… Şöyle çizeyim. Beşgen. (Mırıldanma)				1
03:21	A	Şuradan alıp şuradan uzat, birleştir. (Köşegenleri tarif ediyor.)	6			
03:24	Y	Şöyle bir şey mi? Şunu da uzatalım, şöyle. Şunu da… Olmuyor. Sanki bir dengesizlik var. Olmuyor.				2
						
03:37	A	Olmuyor. (Gülümseme)	6			
03:38	Y	(Gülümseme) Evet, olmuyor.				2
03:39	A	Köşegen…	6			
03:39	Y	Çizsek köşeden, kenarın herhalde ortasına denk gelir. (Gülümseme)				2
03:43	A	Köşegenlerin kesim merkezi değilmiş ama.	6			
03:46	Y	Değilmiş.		1	2	2
03:47	A	E! Olabilir de olmayabilir de.	2			
03:50	Y	O zaman bir…		1	3	2
03:51	A	Sadece karede sağlar.				
03:52	Y	Karede sağlar. O zaman… I! Biz kenara…	4			2
03:57	A	Hı! Hı!				
03:58	Y	Bir… I! Misal: diyelim şuraya G dersek… G'den kenara bir… I! Dik uzaklık çizersek o şey olmaz mı?				2
04:07	A	Bir dakika. Ses camlardan gelmiyor. Dışardan geliyor. (Dış ses rahatsız edici düzeyde olduğu için araştırmacı dış sesi kesebilmek için sesin kaynağını arıyor. Camları kapatıyor.) Ne dedin, deneyek? Dediğin şeyi bir deneyelim bakalım.				
04:28	Y	Dediğim şeyi deneyelim. Mesela şuradan alıp… Şurası olsun bilmiyoruz. (Düzgün n-genin ağırlık merkezi işaret ediliyor.)				2
04:34	A	He! Hı! Hı!				
04:35	Y	I! Şurası olsun.				2
04:36	A	Hı! Hı!				
04:37	Y	Şurası olsun. Buradan kenara. (Ağırlık merkezinden kenara dikme indiriyor.)				2
04:41	A	Hı! Hı!				
04:42	Y	Çizdiğimiz… I! Dik uzaklık... Şurası dik olsun.				2
04:45	A	Hı! Hı!				
04:46	Y	I! Şuradan da şuraya çizdiğimiz dik uzaklık, bunların hepsi eşit olmaz mı?				2
04:57	A	Sence?				
04:59	Y	Bence sanki olabilir. Çünkü… I! Buradan çizdiğimiz… I! Dik uzaklık aynı zamanda şeyi ikiye bölüyor.				2
05:13	A	İkiye bölüyor.				
05:14	Y	Kenarı ikiye bölüyor. Yani şöyle… Şuradan çizdiğimiz de ikiye bölüyor. Zaten çizdiğimiz şey… I! Düzgün çokgendir.				2
05:22	A	Hı! Hı!				

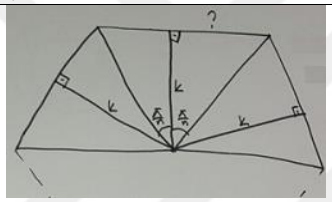
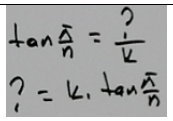
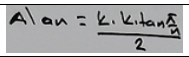
05:23	Y	Bu da aynısı. I! Şurası da aynısı. (3 kenarı çizilmiş olan düzgün n-genin ağırlık merkezinden her bir kenara inen dikmelerin bu kenarları iki eşit parçaya ayırdığını ve bu dikme uzunluklarının da eşit olduğunu ifade ediyor.)		1	3	2
						
05:28	A	Peki, şu merkezle ilgili ne söyleyebilirsin? (Ağırlık merkezi işaret ediliyor.)	1			
05:32	Y	A… Ağırlık merkezidir.				2
05:33	A	Tamam. Ağırlık merkezinin dışında nedir? Nasıl bir özelliği var?	6			
05:37	Y	Nasıl bir özelliği var? I! Nasıl bir özelliği olabilir? (8 saniye kadar sesizlik)				2
05:52	A	Peki, şurayı şuralara birleştirsen şöyle. (Ağırlık merkezi ile düzgün n-genin köşelerini birleştirecek olan doğru parçalarından bahsediliyor.	6			
05:55	Y	Birleştirsem dik üçgen olur.				2
05:58	A	I! I! (Hayır anlamında) Birleştir. Köşeleri birleştir.	6			
06:03	Y	Nokta, nokta mı?				2
06:04	A	Hı! Hı!				
06:04	Y	Direkmen çizeyim?				2
06:05	A	Yo. Nokta, nokta. Deneme yapıyoruz şu anda. Mesela şu uzunluk… Şurayı da birleştir. (Ağırlık merkezinden köşelere doğru parçaları çizmesi teşvik ediliyor.) Nasıl üçgenler çıktı? Mesela şu üçgen… (Katılımcı söze giriyor.)				
06:18	Y	Eş… Eşit üçgenler çıktı.		1	2	2
06:20	A	Eşit. Mesela şu uzunlukla şu uzunluk arasında nasıl bir ilişki var? (Ağırlık merkezinden ardışık iki köşeye çizilen doğru parçaları işaret ediliyor.)	1			
06:25	Y	Eşittir.				2
06:26	A	Şu uzunlukla şu uzunluk? (Ağırlık merkezinden diğer ardışık iki köşeye çizilen doğru parçaları işaret ediliyor.)	6			
06:28	Y	O da eşittir.		1	2	2
06:30	A	Tamam. (4 saniye sesizlik) Çevrel çember diye bir şey biliyor musun?	1			
06:37	Y	I!				1
06:38	A	Duydun mu?				
06:38	Y	Çevrel çemberi duymuşumdur. İç teğet çember olarak da…				1
06:44	A	Hı! Hı!				
06:44	Y	Çevrel çemberi duymuşumdur. Şöyle çizdiğimizde bir çember çiziyoruz. Şey oluyor. Yarıçap oluyor. (Eliyle düzgün n-genin köşelerinden geçen hayali bir çember çiziyor.)		1	3	1
06:51	A	Çemberde biliyorsun. Hatırlıyor musun? Şöyle bir şey vardı. Bir tane kiriş, kirişe indirilen dikme, şurayı (kirişi) iki eşit parçaya ayırır. Çünkü şuralar nedir? r yarıçaptır. (Araştırmacı konuşurken şekil de çiziyor.)	1			
						
07:03	Y	r . Yarıçaptır. (Araştırmacı ile senkron şekilde.)				1
07:04	A	Tamam. Şu kiriş uzunluğunu şuraya taşırsan, yine indirdiğin dikme ikiye ayırır. Şu açılarda birbirine eşit olur.	6			
07:16	Y	Aynen.				1
07:18	A	Demek ki ağırlık merkezi neymiş aynı zamanda?	6			
07:23	Y	Ağırlık merkezi, yarıçap.				1
07:25	A	Çevrel çemberin merkezidir.	6			
07:27	Y	Merkezi. Yarıçap. Hı! Hı! Merkezidir.				1
07:29	A	Tamam.				
07:29	Y	Çevrel çember olduğunda zaten böyle çiziyorduk. (Eliyle düzgün n-genin köşelerinden geçen hayali bir çember çiziyor.)				1
07:31	A	Köşelerden.	6			
07:32	Y	He! Köşelerden geçecek şekilde çember çiziyorduk.		1	2	1

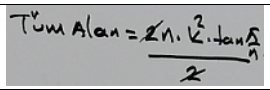
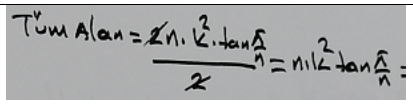
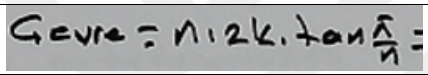
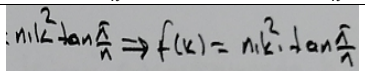
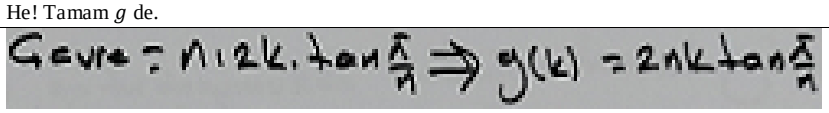
07:34	A	Tamam. O zaman şu şeyleri nokta noktaları belirgin hale getir. (Ağırlık merkezi ile köşeleri birleştiren doğru parçaları işaret ediliyor. Katılımcı çizmeye başlıyor. 17 saniye sonra) Ağırlık merkezini biraz böyle üsturupsuz çizmişiz. (Katılımcı çizmeyi bitiriyor. 3 doğru parçasını çizmesi 22 saniye sürüyor.) İstersen yeni bir şekil çiz. Daha rahat çalışırsın.				
08:07	Y	Bu şekil güzel.				2
08:08	A	Tamam, şeklin güzelse tamam.				
08:10	Y	Yeni bir şekil çizsek daha kötü çizeriz. (Kahkaha)				2
08:11	A	(Kahkaha) Şimdi alan formülü, çevre formülü vesaire falan. Bunlar da böyle biraz çetrefilli. I! Formüllerden gitmeyeceğiz biz kendimiz oluşturacağız.	1			
08:26	Y	Hı! Hı! Formül zaten biz… Değer vererek mi? Nasıl?				2
08:31	A	Neye ne diyelim. Çıkart, çıkart söyle. (Katılımcının yüz ifadesinden fikrinin olduğu tahmininde bulunuyor.)	6			
08:35	Y	Acaba bir kenara uzaklığa… (Emin olmadan kısık sesle konuşuyor.)				5
08:37	A	He!	6			
08:39	Y	k, a cinsinden bir şey dersek bulabilir miyiz? Zor gibi. (Katılımcı düşünce süreçlerinde elini çenesinin altına koyduğu için dedikleri tam anlaşılmıyor.)		1	2	5
08:42	A	De bakayım.	1			
08:46	Y	Şuraya mesela a diyelim. (Düzgün n-genin kenar uzunluğunun yarısı işaret ediliyor.)				2
08:50	A	Hı! Hı!				
08:51	Y	Şurası da a olur.				2
08:52	A	Hı! Hı!				
08:54	Y	a olur. (3 saniye sessizlik) a olur. I! Zaten burası da $2a$'dır. Gerçi biz büyük üçgeni bulsak tamamdır.				2
09:05	A	Tamam.				
09:05	Y	Hepsine uyarlayabiliriz.		1	3	2
09:06	A	Açılar hakkında bir fikrin var mı?	1			
09:08	Y	Açılar hakkında bir fikrim var mı?				2
09:10	A	Tepe açılar.				
09:11	Y	I! Bu açılar zaten eşittir. (n-genin köşesi, ağırlık merkezi ve kenara dikme inen nokta arasındaki açı işaret ediliyor.) Şu açıyla şu açı.				2
09:19	A	Bu açının ölçüsü hakkında bir fikrin var mı? Kaç tane o eşit açıdan oluşur?	6			
09:23	Y	E! Kaç tane eşit açıdan oluşur?				2
09:26	A	Yani şu noktanın etrafında kaç tane o eşit açıdan oluşur. (Ağırlık merkezi işaret ediliyor.)	6			
09:29	Y	Onu bilmiyorum ama kaç… I! Kenarlıysa 360 bölü o kenar sayısıdır.				2
09:35	A	Mesela n kenarlıysa?	6			
09:38	Y	360 bölü n'dir. n.		1	1	2
09:41	A	360 bölü n derece şu mudur? (n-genin köşesi, ağırlık merkezi ve kenara dikme inen nokta arasındaki açı işaret ediliyor.)	2			
09:45	Y	Evet.				2
09:47	A	Niye n diyorsun?	6			
09:48	Y	n o değildir. n tane kenar şeyi var.				2
09:50	A	Tamam. O zaman hangi açı 360 bölü n'dir.	6			
09:54	Y	Hangi açı?				2
09:56	A	360 bölü n… (Katılımcı sözü kesiyor.)				
09:56	Y	Tamamı.				2
09:58	A	Yani?				
09:58	Y	Yani şunun tamamı. Şuraya bir... (düzgün n-genin bir kenarına ait birinci köşe, ağırlık merkezi ve diğer köşenin oluşturduğu açı işaret ediliyor.)		1	2	2
10:01	A	E, tamam. O zaman şurası 180 bölü. π bölü. (n-genin köşesi, ağırlık merkezi ve kenara dikme inen nokta arasındaki açı işaret ediliyor.)				
10:05	Y	$\frac{\pi}{n}$ (Dış sesten kaynaklı anlaşılmayan konuşma.)				2
10:07	A	(Dış sesten kaynaklı anlaşılmayan konuşma) $\frac{\pi}{n}$ yaz. Şu, şuraya yaz. (n-genin köşesi, ağırlık merkezi ve kenara dikme inen nokta arasındaki açı işaret ediliyor.)				
10:13	Y	(Yazıyor.) $\frac{\pi}{n}$				2
10:17	A	Tamam, şuraya da $\frac{\pi}{n}$ yazalım. (Diğer açı işaret ediliyor.)				
10:19	Y	(Yazıyor.) $\frac{\pi}{n}$ Tamam.				2

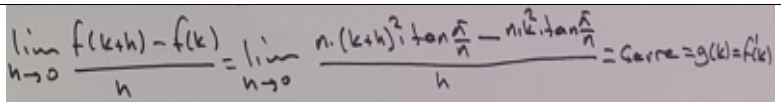
						
10:22	A	Açıyı bulduk. Hemen hemen. Dik üçgen var. Açı var. Bir kenarı biliyorsak? (Dış sesten kaynaklı anlaşılmayan konuşma.)	2			
10:32	Y	Diğer kenarını da bilsek olmaz değil mi?				2
10:38	A	Nasıl bulabiliriz?	6			
10:45	Y	Nasıl bulabiliriz? Çünkü kenara olan dikmeyi bulmamız lazım. Dik uzaklığı bulmamız lazım. Şey alanı bulabilmek için				2
10:53	A	Dik uzaklığı şu açı ve şu cinsinden yazabilir misin?	6			
10:58	Y	Dik açıyı… (Dış sesten kaynaklı anlaşılmayan konuşma)				2
11:00	A	Dik uzaklığı.				
11:01	Y	Dik uzaklığı…				2
11:03	A	Hı! Hı!				
11:05	Y	Hım! Yazabiliriz herhalde.				2
11:07	A	Nasıl?				
11:08	Y	I! tan…I! π… $tan\,\pi$ bölü… I! n dersek…				2
11:14	A	Hı! Hı!				
11:15	Y	Karşı bölü komşu olur. Bu da yarar herhalde.				2
11:17	A	Yaz. Dene bakayım.	6			
11:19	Y	Şurda yazayım.				2
11:20	A	Hı! Hı!				
11:22	Y	$tan\frac{\pi}{n}$ … (yazıp söylüyor.) Şuraya (ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığına) k diyelim.				2
11:28	A	Hı! Hı!				
11:31	Y	eşittir a bölü…				2
11:34	A	Hı! Hı!				
11:35	Y	k'dır.				2
						
11:36	A	Hı! Hı!				
11:36	Y	I! k'yı çekersek				2
11:38	A	Hı! Hı!				
11:40	Y	$k = \frac{a}{tan\frac{\pi}{n}}$ olur.		1	2	2
11:49	A	$\frac{1}{tan\,\alpha}$ nedir?	1			
11:52	Y	Hı?				1
11:53	A	Tanjant nedir?	6			
11:55	Y	Tanjant, karşı bölü komşudur.				1
11:57	A	Kotanjant?	6			
11:58	Y	I! Komşu bölü karşıdır.				1
12:00	A	Bir bölü tanjant yerine kotanjant yazalım. k eşittir, o da eşittir…	6			
12:07	Y	Eşittir…				2
12:08	A	$a.cot$ bir şey… İşini kolaylaştırsın diye söylüyorum.	6			
12:11	Y	a çarpı?				2
12:12	A	a çarpı…	6			
12:13	Y	a çarpı bir bölü…				2
12:14	A	Yok, kotanjant, kotanjant… Bir bölü tanjant ,kotanjanta eşittir.	6			
12:17	Y	Bir bölü… $\cot\frac{\pi}{n}$		1	2	1
						
12:21	A	Tamam. Yani sadece işini kolaylaştırsın diye söylüyorum.				
12:26	Y	Kepçeyi bulduk. O zaman… I! Alanı bulabiliriz.	4			2
12:29	A	Ne buldun?				
12:30	Y	Alanı bulabiliriz. I! a çarpı… Alan… (“Alan=” yazıyor.) k çarpı…				2
12:48	A	Hı! Hı!				

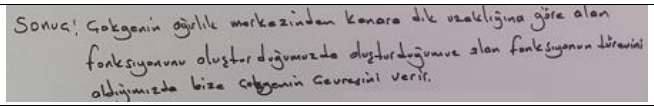
12:50	Y	I! a bölü 2 o da eşittir...				2
12:56	A	Hangilerinin alanı $\frac{k.a}{2}$'dir?	6			
12:59	Y	Üçgenin alanı.				2
13:00	A	Hangi üçgen?	6			
13:01	Y	I! Şu üçgen. (Köşe noktaları ağırlık merkezi, kenara inen dikmenin kenarı kestiği yer ve kenara ait köşe olan üçgeni eliyle işaret ediyor.) Şu üçgen… Şu üçgenin alanı…(Mırıldanma) Dik üçgenin alanı.				2
13:12	A	Tamam. Bize ama tüm, hepsinin alanı lazım.	6			
13:16	Y	Bir tane bulursak… Hani… E! Zaten biz bir tanesini bulursak diyelim kenar sayısı n'dir ya.				2
13:23	A	Hı! Hı!				
13:23	Y	Aslında biz ona $2n$ diyeceğiz. Çünkü…				2
13:26	A	Tamam.				
13:26	Y	Yarısını almış oluyoruz ya. İki katını				2
13:29	A	Tamam. O zaman komple alanı… Tamam. Tamam. (Araştırmacı, katılımcını yarım bıraktığı ifadeyi bitirmesini eliyle işaret ediyor.)				
13:34	Y	Bu da a çarpı… I! $\cot\frac{\pi}{n}$… I! Çarpı a bölü 2. (Katılımcı $\frac{a.\cot\frac{\pi}{n}.a}{2}$ yazıyor.) Dik üçgenindir.		1	2	2
						
13:52	A	Hı! Hı!				
13:52	Y	(Yazmaya yeniden başlıyor.) Alanı.				2
14:00	A	Tüm alan?	1			
14:02	Y	I! Tüm alan da… I! Biz n dedik, kenar sayısına n dedik.				2
14:06	A	Hı! Hı!				
14:06	Y	I! n dediğimiz için… I! Bir kenarın yarısını aldığımız için ona $2n$ diyeceğiz. Bir dik üçgenimiz kenarın yarısına geldiği için…				2
14:17	A	Tamam, tüm alanı yaz o zaman.	6			
14:18	Y	I! Tüm alan. (Yazmaya başlıyor.) Tüm alan… I! $2n$... I! Çarpı a çarpı cot…				2
14:35	A	Şunu a^2 diye yaz. İki tane a var ya.	6			
14:37	Y	a^2… I! π… n… Bölü...				2
14:44	A	2.	6			
14:45	Y	2'dir. Zaten ikiler birbirini götürür.				2
14:48	A	Hı! Hı!				
14:49	Y	Yani eşittir $n.a^2.\cot\frac{\pi}{n}$ olur.		1	2	2
						
14:57	A	Hı! Hı! Çevre?	1			
14:59	Y	I! Çevre… I! Çevre de şey olur. Çevre, tüm çevre, herhalde çevre de tüm çevre olur. Çevre… Çevre de bir kenarı… I!				2
15:18	A	$2a$.	6			
15:18	Y	$2a$ ise… Bir de n kenar olduğu için çarpı n'dir. Çarpı n'dir.		1	2	2
						
15:27	A	Tamam. Türev ilişkisi var mı?	1			
15:31	Y	Türev ilişkisi var mıdır? Mutlaka vardır. Çünkü…				6
15:37	A	Şu anda bunun (alanın) türevini aldığında bunu (çevreyi) veriyor mu?	6			
15:40	Y	Veri… Vermiyor.		1	2	2
15:43	A	Niye vermiyor sence?	1			
15:46	Y	(Mırıldanma) Niye vermiyor?				2
15:50	A	Vermesi için... Pardon niye vermedi? Soruyu düşün biraz.				
16:00	Y	Niye vermedi? Acaba şey… I! tan bilmiyorduk, ondan olabilir mi? cot…		1	1	2
16:06	A	Çık! (4 saniye sessizlik) Peki, vermesi için… Mesela karede vermesi için biz neye göre oluşturduk alan formülünü, çevre formülünü?	1			

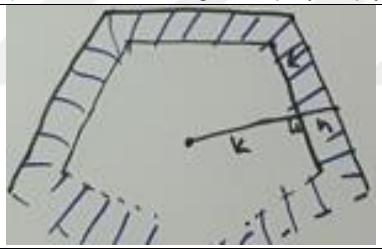
16:18	Y	Biz şeye göre… I! Ağırlık merkezinden…				4
16:22	A	Hı! Hı!				
16:23	Y	Kenarlara dik uzaklığı.				4
16:25	A	Uzaklığa göre.				
16:26	Y	Göre yaptık.				4
16:27	A	Mesela eş kenar üçgende ne yapmıştık? Ağırlık merkezinin…	6			
16:30	Y	Ağırlık merkezinden… kenarlara dik uzaklık				4
16:31	A	Kenara (eş zamanlı konuşma) dik uzaklığa göre oluşturduk alan ve çevre formüllerini doğru mudur?				
16:31	Y	Kenarlara dik uzaklık… Evet, aynen öyle. Doğrudur.		1	2	4
16:36	A	Burada neye göre oluşturduk?	1			
16:38	Y	Burada neye göre oluşturduk? (4 saniye sessizlik) Burada biz kenara göre mi oluşturduk?		1	2	4
16:46	A	Kenar sayısı… n dediğimiz şey... Ha! Kenar… Han… Kenar hangi şey, hangi sembol?	1			
16:54	Y	a'dır.		1	2	2
16:55	A	a'dır. a'ya göre oluşturduk. Mesela karede a'ya göre oluşturduğumuz zaman sağlıyor muydu?	1			
17:00	Y	Yok. Biz b'ye göre oluşturduğumuzda sağladı.				4
17:01	A	Eşkenar üçgende? Eşkenar üçgende sağlıyor muydu?	6			
17:05	Y	Sağlamadı.				4
17:06	A	Sağlamıyor. (Gülümseme) O zaman...	6			
17:09	Y	O zaman k ile ilgili bir şey yapmak lazım...				5
17:10	A	k'ya göre.				
17:11	Y	k'ya göre.		1	2	5
17:12	A	Evet. k'ya göre oluşturacağız. Tamam. Sıkıntı yok. Yeni bir şekle geçelim. Caiz midir? (Yeni bir sayfa açıyor.)	1			
17:20	Y	Geçelim.				
17:25	A	Şekli çizersek.				2
17:27	Y	Şekil çizersek. (Çizmeye başlıyor.)				
17:30	A	Şuradan başla. (Sayfanın sol üst köşesi işaret ediliyor.) Aşağıdan başlayıp yukarıya çizeceğini zannettim. Sonra da yukarıdan başlayıp aşağıya çiziyormuşsun.				
17:39	Y	(Çizmeye devam ediyor.) Şöyle bir şeklimiz olsun.				2
						
17:44	A	Hı! Hı! Noktaları da koy. Şöyle, noktalar. Tamam.				
17:54	Y	Sanki bu şekil daha güzel değil mi?				2
17:56	A	Bu daha güzel oldu.				
17:57	Y	Tamam.				2
17:58	A	Hani sen dedin daha kötü çizerim de daha güzel çizdin. Vay üçkâğıtçı. (Gülümseme)				
18:03	Y	(Gülümseme) Devamı kötü geliyor.				2
18:05	A	Geliyor. Ağırlık merkezini seç.	6			
18:09	Y	Ağırlık merkezi şurası olsun.				2
18:11	A	Biraz daha aşağıdan al.	6			
18:13	Y	Şurası.				2
18:13	A	Tamam.				
18:14	Y	Şurası olsun.				2
18:16	A	Dikmeni çek?	6			
18:18	Y	Dikme de çekeyim içeriye.				2
18:20	A	Evet.	6			
18:33	Y	Şöyle de çekeyim.				2
18:40	A	Köşeleri de birleştir. (Katılımcı yaptığı çizimin güzelliğinden endişe ediyor.) Kadı kızı bile bu kadar güzel olmazdı. Boş ver. Tamam.	6			
19:06	Y	Ne diyek? k diyek. Şuraya k mı desek? $2k$ desek. k desek. (Ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığına değer ataması yapılıyor.)				2

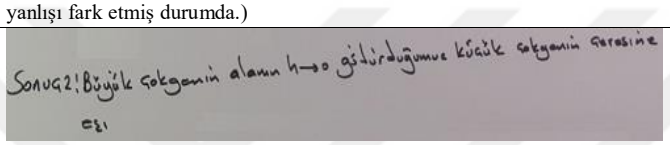
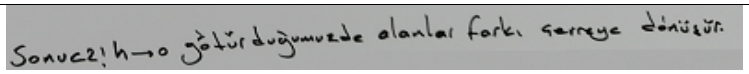
19:12	A	k de.	6			
19:13	Y	k.		1	2	2
19:14	A	Karede $2k$ dediğimiz zaman oluyor muydu? Ya da $3k$ dediğimiz zaman ağırlık merkezine uzaklığı? Bir önceki oturumda son beş dakika daha konuşmuştuk ya.	1			
19:27	Y	$2k$ dediğimizde $2h$ artıyordu kalınlık 2 kat artıyordu.				4
19:31	A	Kalınlık yarım kat artıyordu. Yo iki kat mı artıyordu?	6			
19:34	Y	İki kat.				4
19:34	A	İki kat artıyordu.	6			
19:35	Y	He! a dediğimizde h diyorduk. $2a$ dediğimizde $2h$ diyorduk.				4
19:40	A	He! Oluyor muydu?	6			
19:41	Y	Olmuyordu. İki katı oluyordu.				4
19:42	A	He! İki katı oluyordu.	6			
19:43	Y	İki çarpı çevre…		1	2	4
19:44	A	k dememiz lazım.				
19:45	Y	k dersek… Şuraya da k diyelim.	4			2
19:47	A	Hı! Hı!				
19:48	Y	Hepsine k diyelim bir şey çıkar.				2
19:51	A	Açıları da yaz.	6			
19:52	Y	Açıları… Şurası $\frac{\pi}{n}$'dir.				2
20:01	A	H! Hı!				
20:02	Y	$\frac{\pi}{n}$'dir.				2
						
20:04	A	Şimdi şurayı şunun cinsinden bulabilir misin? (Kenar uzunluğunun yarısını, ağırlık merkezinin kenara uzaklığı cinsinden) Şuraya soru işareti bırak. (Kenar uzunluğunun yarısı işaret ediliyor.) Ya da şuraya soru işareti bırak. (Kenar uzunluğunun diğer yarısı işaret ediliyor.) Tamam, bir yere soru işareti bırak. Karşı bölü komşu muhabbetleri… Komşu bölü karşı muhabbetlerinden şurayı bulabilir misin? (Kenar uzunluğunun yarısı işaret ediliyor. Hani, biraz önce k'yı a cinsinden yazdın ya. Şimdi soru işaretini k cinsinden yazmaya çalışacağız.	6			
20:30	Y	Bulabiliriz. Şuraya tanjant dersek…				2
20:33	A	Hı! Hı!				
20:34	Y	Şuraya. (Yazmaya başlıyor.) I! Tanjant… I! π bölü n eşittir soru işareti bölü				2
20:44	A	Hı! Hı!				
20:45	Y	I! k'dır. ($tan\frac{\pi}{n} = \frac{?}{k}$ denklemini yazıyor.) O da… I! Soru işareti eşittir… I! k çarpı tanjant π bölü n'dir. (Katılımcı $? = k.tan\frac{\pi}{n}$ yazıyor.)				2
						
20:56	A	Yazalım şuraya. (Çokgenin kenar uzunluğunun yarısı gösteriliyor.)				
21:01	Y	(Şekil üzerine değerleri yazıyor.) Bu şöyle. Tamam. Böyle.				2
21:12	A	Hı! Hı!				
21:14	Y	I! Şimdi?		1	2	2
21:18	A	Alanını bul.	1			
21:19	Y	Alanını bulayım. Alan. Alan… I! k^2 yazayım mı?				2
21:24	A	Hı! Hı!	6			
21:25	Y	(Yazmaya başlıyor. Yazdıklarını kısık sesle mırıldanıyor.) Alan eşittir… I! k çarpı k… π bölü n bölü ikidir. (Yazılan ifade "$Alan = \frac{k.k.\tan\frac{\pi}{n}}{2}$" şeklindedir.)				2
						
21:41	A	Nerenin alanı?	6			
21:42	Y	I! Küçük üç… Üçgenin alanı. Şu üçgenin alanı. (Eliyle köşe noktaları ağırlık merkezi, kenarın ortası ve köşesi olan dik üçgeni işaret ediyor.)				2
21:45	A	Dik üçgen.	6			

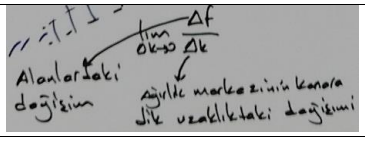
21:46	Y	Dik üçgenin alanı.			2
21:47	A	Tüm alan?	6		
21:48		I! (Yazmaya başlıyor.) Tüm alan… Tüm alan… Tüm alan $2\,n$ çarpı k^2 tanjant π bölü n bölü 2.			2
	Y	Zaten ikiler gider. (Yazdığı ifade "Tüm Alan $= \frac{2n.k^2.\tan\frac{\pi}{n}}{2}$" şeklindedir.)			
					
22:14	A	Hı! Hı!			
22:15	Y	Tüm alan da böyledir.	6		2
22:17	A	Eşittir düzenli yaz.			
22:19	Y	Eşittir n çarpı k^2 tanjant π bölü n. (Katılımcının yazdığı ifade "$= n.k^2.\tan\frac{\pi}{n}$" şeklindedir.)		1 2	2
					
22:29	A	Tamam.			
22:31	Y	Çevre.	4		2
22:32	A	Hı! Hı!			
22:35	Y	(Yazıyor.) Çevre n çarpı…			2
22:39	A	Hı! Hı!			
22:41		$2k$ tanjant… I! π bölü n'dir. (Yazdığı ifade "Çevre $= n.2k.tan\frac{\pi}{n}$" şeklindedir.) Çevre… Hıh!		1 3	2
	Y	Sanki, sanki, sanki… Sanki bir ilişki çıkıyor gibi.			
					
23:02	A	Nasıl bir ilişki?	1		
23:05	Y	Biz… I! k'ya göre almıştık. O zaman bağımsız değişkenimiz k'dır.			5
23:10	A	Hı! Hı!			
23:10	Y	Fonksiyon olarak yazdığımızda… Ya da onu direkt men eşittir fonksiyon olarak da yazabiliriz.			2
23:14	A	Tamam, yaz.	6		
23:16	Y	Eşittir fonksiyon… Fonksiyona mı eşitleyeyim yoksa?			2
23:20	A	İse işareti ile göster.	6		
23:22	Y	Hı! Hı! İse f… (Yazmaya devam ediyor.)			2
23:24	A	k			
23:25	Y	I! $n.k^2.\tan\frac{\pi}{n}$'dir. ($f(k) = n.k^2.\tan\frac{\pi}{n}$ ifadesi yazılıyor.)			2
					
23:35	A	Hı! Hı! Bu… (Çevre formülü.)	6		
23:36	Y	Şunu da yazayım.			2
23:38	A	$Ç(k)$ de ona da. $Ç(k)$ diye bir fonksiyon üretelim.			
23:42	Y	Tamam. G, g diyim.			2
23:47	A	He! Tamam g de.			
					
23:49	Y	$g(k) = 2$… I! $n\ k\ \pi$ bölü n'dir. ($g(k) = 2nktan\frac{\pi}{n}$ ifadesini yazıyor. Şimdi oldu! Kesin oldu.		1 2	6
24:03	A	Kesin oldu. Niye oldu? Nasıl oldu?.	2		
24:05	Y	I!			6
24:06	A	Çok hoş oldu.			
24:07	Y	Tüm alanın… I! Yani genel alanın…			6
24:10	A	Hı! Hı!			
24:11	Y	I! Türevini aldığımızda bize fonksiyonu veriyor. Yani… I! Çokgenin çevresini veriyor.		1 2	6
24:18	A	Vay be maşallah!			
24:19	Y	Nasıl olduysa. İşte oluyor.			6
24:21	A	Süphan Allah! (Gülümseme)			
24:22	Y	(Gülümseme) Oldu, oldu.			6
24:23	A	Tamam, o zaman açıklamasını yaz.			
24:25	Y	Genel şeyi de yapım?	4		6

24:30	A	(Araştırmacı çalışma sayfasının sağ üst köşesine Y4 yazdıktan sonra konuşuyor.) Bütün açıklamaları yapacağız şimdi.	6			
24:32	Y	Bütün açıklamaları?				6
24:33	A	Evet. Hı! Hı!				
24:41	Y	Bunu… I! Sonuç yazayım. Türevin genel şeyini yazmaya?				2
24:48	A	Yavuz artık senle şerefin ha! (Bu ifade katılımcının yaşadığı bölgede kullanılan bir deyim olup "gönlünden ne koparsa" gibi bir anlam barındırmaktadır.)				
24:50	Y	Genel şeyini mi yazayım?				2
24:56	A	Tamam yazalım.	6			
24:58	Y	(Coşkulu bir şekilde) Yazalım!				2
24:59	A	Hadi yazalım.				
25:01	Y	(Yazmaya başlıyor.) Limit... Limit h sıfıra giderken… I! $f(k+h)$				2
25:11	A	Hı! Hı!				
25:12	Y	Eksi $f(k)$ bölü h. ($\lim_{h\to 0}\frac{f(k+h)-f(k)}{h}$ ifadesi yazılıyor.)				2
25:17	A	Hı! Hı!				
25:19	Y	Eşittir limit h sıfıra giderken… I! Şuradan… I! Yazdığımızda… (2 saniye kadar sessizlik) Yazdığımızda ne çıkacak? Neyse yazalım. (Yazmaya kaldığı yerden devam ediyor.) n çarpı $k+h$'ın karesi tanjant π bölü n. Eksi… $n.k^2.\tan\frac{\pi}{n}$				2
25:50	A	Hı! Hı!				
25:52	Y	Eksi n çarpı k kare tanjant π bölü n. Bölü bir de h. ($\lim_{h\to 0}\frac{n.(k+h)^2.\tan\frac{\pi}{n}-n.k^2.\tan\frac{\pi}{n}}{h}$ ifadesi tamamlanıyor.)		1	2	2
26:09	A	Hı! Hı! Ne çıkar bunun sonucu?	1			
26:13	Y	Ya! Bunun sonucu… I! 2… I! n k tanjant… I! π bölü n çıkacak.				6
26:21	A	E, yani çevre olur.				
26:22	Y	Çevre olacak.				6
26:22	A	Çevre yaz işlemini de yapmaya gerek yok.				
26:24	Y	Eşittir çevre mi olur?				6
26:27	A	Hı! Hı! Çevre yaz gitsin. Türev, çevre, $g(k)$ yaz. Ne yazarsan.				
26:32	Y	Eşittir çevre.				6
26:33	A	O da eşittir $g(k)$.	6			
26:35	Y	Eşittir $g(k)$. (Senkron bir şekilde) O da eşittir…				6
26:37	A	(Katılımcı yazarken araştırmacı seslendiriyor.) O da eşittir $f'(k)$.	6			
26:43	Y	k.		1	2	6
						
26:44	A	Hepsi de zaten eşit.				
26:45	Y	He! Eşit.				6
26:45	A	İşlemleri yaptığımızda aynı şey çıkacak uğraşmanın anlamı yok.				
26:48	Y	Yani				6
26:49	A	Bu ne, ne denklemi? Şu ne denklemi? (Genel türev denklemi işaret ediliyor.)	1			
26:54	Y	Alan.				2
26:55	A	Yo. Şu, şu. Ne denklemi?	6			
26:56	Y	I! Türevin genel…				2
26:58	A	Genel türev denklemi.				
26:59	Y	Genel türev denklemi. (Senkron konuşma)		1	2	2
26:59	A	Genel türev denklemi bize neyi verir? (2 saniye sessizlik) Fonksiyonun?	1			
27:03	Y	Fonksiyonun türevini verir.		1	2	2
27:04	A	Türevini verir. Fonksiyonun türevi nedir?	1			
27:06	Y	Fonksiyonun türevi de… I! (Yazdığı ifadeleri işaret ediyor ancak ifade edemiyor.)				6
27:07	A	Budur.				
27:08	Y	Odur. Aldığımız da çevresini verir.		1	2	6
27:11	A	Evet. (Devam et anlamında) Tamam.				
27:15	Y	I! Sonuç yazıyorum.	4			7
27:16	A	Hı! Hı!				
27:17	Y	I! Sonuç… (Yazmaya başlıyor ve kısık sesle kesikli olarak yazdıklarını seslendiriyor.) Çokgenin ağırlık… (Yazmayı bırakıp) Çokgenin ağırlık merkezinden kenara… (Yazmaya yeniden başlıyor.)				7

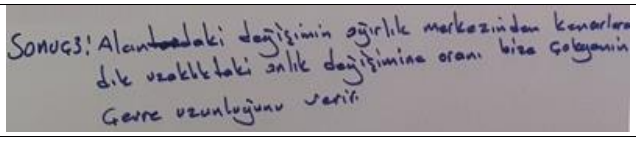
		Dik uzaklığını… (Yazmayı bırakıyor ve 9 saniye sessizlik oluyor. Katılımcının bu ana kadar yazdığı ifade "Sonuç: Çokgenin ağırlık merkezinden kenara dik uzaklığını" şeklindedir.)			
28:11	A	Çokgenin ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığını… (Yazılı ifade işaret edilerek) Bozukluk oluyor. Neyse önemli değil. Ne demek istiyorsun?	6		
28:21	Y	Yani kenarın… I! Ağırlık merkezinde kenara dik uzaklık…			7
28:26	A	Tamam.			
28:27	Y	Demek istiyorum herhalde.			7
28:27	A	Tamam. Devamını nere, neye bağlayacaksın? (3 saniye sessizlik)	6		
28:34	Y	İşte devamını nasıl bağlayacağım? (4 saniye sessizlik) I! Ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığını aldığımızda...			7
28:47	A	Hı! Hı!			
28:48	Y	I! I! Alan… I! Alanı oluşturduğumuzda			7
28:54	A	Hı! Hı!			
28:54	Y	Alanın türevini aldığımızda, bize çevreyi veriyor.			7
28:57	A	Yaz.	6		
28:58	Y	İşte…			7
28:59	A	(Katılımcı yanlış yazmaktan çekiniyor.) Bir şey olmaz yaz gitsin.	6		
29:01	Y	Söylüyorum ama işte yazması biraz sıkıntılı.			7
29:03	A	(Katılımcının yazmış olduğu "Çokgenin ağırlık merkezinden kenara dik uzaklığını" ifadesinin son kelimesi işaret edilerek) Uzaklığına göre.	6		
29:04	Y	Uzaklığına. (Son hece yanlışı düzeltircesine vurgulu)			7
29:07	A	Na göre.			
29:07	Y	(Yazmaya kaldığı yerden devam ediyor.) Na göre. (Yazmayı bırakıyor.) Alanını aldığımızda			7
29:13	A	Alan fonksiyonunu oluşturduğumuzda ya da alanını aldığımızda.	6		
29:18	Y	(Yazmaya kaldığı yerden devam ediyor.) Alan… Oluşturduğumuzda... ("Çokgenin ağırlık merkezinden kenara dik uzaklığına göre alan fonksiyonu oluşturduğumuzda" ifadesini yazıp duruyor.)			7
29:34	A	Hı! Hı!			
29:35	Y	Türevi aldığımızda…			7
29:36	A	Hı! Hı!			
29:37	Y	Oluşturduğumuz fonksiyonun türevini aldığımızda…			7
29:39	A	Hı! Hı!			
29:39	Y	(Yazmaya yeniden başlıyor. "Çokgenin ağırlık merkezinden kenara dik uzaklığına göre alan fonksiyonu oluşturduğumuzda oluşturduğumuz fonksiyonun" yazıp duruyor ve soru soruyor.) Normal türev değil miydi?			7
30:08	A	Türevini aldığımızda.	6		
30:09	Y	(Yazmaya yeniden başlıyor.)Türevini aldığımızda bize…			7
30:20	A	Hı! Hı!			
30:20	Y	(Yazmaya kaldığı yerden devam ediyor.) Çokgenin çevre… Çevresini verir.			7
30:23	A	Çevresini verir.			
30:25	Y	(Yazmaya kaldığı yerden devam ediyor.) Verir. (Yazmayı bitirdiği ifade "Çokgenin ağırlık merkezinden kenara dik uzaklığına göre alan fonksiyonu oluşturduğumuzda oluşturduğumuz alan fonksiyonunun türevini aldığımızda bize çokgenin çevresini verir." şeklindedir.)		1 2	7
					
30:37	A	Böyle bir şekil çiziyorduk ya. Şekil üzerinden anlat.	1		
30:47	Y	(3 saniye sessizlik ardından kısık sesle.) Şekil?			7
30:47	A	(Genel türev denklemi işaret edilerek) Bunun ne demek olduğunu ya da bu türevin ne demek olduğunu bir şekil üzerinden anlat.	6		
30:52	Y	Anladım. Küçük bir şekil çizersek herhalde sıkıntı olmaz. (Şekil çizmeye başlıyor.) Ağırlık merkezimiz şurası olsun.			2
31:18	A	Hı! Hı!			
31:18	Y	(Çizmeye devam ediyor. Kısık sesle anlaşılmayan ifadeler kullanıyor. Halka çizerken önce dıştaki çokgeni sonra içteki çokgeni oluşturuyor.) Şurası k di. Burası da h idi. (Çizmeye ara verip konuşmaya başlıyor.) I! Yani büyük… I! Çokgenden… Büyük çokgenin alanından…			2
32:02	A	Hı! Hı!			
32:02	Y	Küçük çokgenin alanını… Aslında büyük çokgen şeydir hayali bir çokgendir de...			2
32:07	A	Hı! Hı!			
32:07	Y	Ondan. I!		1 2	2

32:09	A	Neyi hayal ettiğimizde o büyük çokgen oluşuyor, çıkıyor ortaya?	1			
32:14	Y	Neyi hayal ettiğimizde?				2
32:16	A	Yani neye dayanarak h ekliyoruz?	6			
32:18	Y	Biz artı… I! Yani ağırlık merkezinden kenara… I! Dik uzaklık k diyoruz onu biz $k+h$ dediğimizde…				2
32:26	A	Hı! Hı! Niye $k+h$ dedin?	6			
32:29	Y	Niye $k+h$ diyoruz? Şimdi orda sıkıntı… (Kısık sesle anlaşılmayan bir şeyler söylüyor.)				2
32:39	A	Sen niye… Niye h kadar artırma gereği hissettik?	6			
32:47	Y	(5 saniye sessizlik ve ardından kısık sesle konuşma) Niye h kadar… Niye h kadar… (Yüksek sesle) Hı! Niye… I! h kadar artırıyoruz…				2
32:57	A	Hı! Hı!				
32:58	Y	I! Sonra türevini aldığımızda…				2
33:02	A	Hı! Hı!				
33:03	Y	I! Çevresini veriyor.		1	1	2
33:04	A	Türevini nerde aldın? h… Türevini almak için h kadar artırmak mı lazım?	1			
33:10	Y	(Kısık sesle) h kadar artırmak mı lazım? (Gür sesle) Türevin genel formülünde biz $k+h$ diyoruz ya!				2
33:16	A	Hah! Türevin genel formülünde…	6			
33:17	Y	He! Genel formülünde. O yüzden h kadar artırıyoruz.		1	2	2
33:20	A	Tamam.				
33:21	Y	$2k$ deseydik $2h$ kadar artırmış olacaktık.	4			4
33:23	A	Tamam.				
33:24	Y	Onu demek istedim ama (katılımcı gülmeye başlıyor, araştırmacı eşlik ediyor.) bir türlü söyleyemedim. (Katılımcıya çokgensel halka bölgeyi taraması için mavi keçeli kalem veriliyor.) Büyük çokgenin alanından küçük çokgenin alanını çıkardığımızda bize şurası… (Taramaya başlıyor.) Şu alan kalır.				4
33:38	A	Tamam.				
33:47	Y	(Taramanın sonuna doğru konuşmaya başlıyor.) Şöyle… Şu alan kalır işte.		1	2	2
						
33:49	A	Hı! Hı! Tamam. I! (Araştırmacı sayfada boş bir yer göstererek) Sonuç 2	1			
33:57	Y	Sonuç 2				2
33:58	A	Yani şu şekli açıkla.				
34:09	Y	(Kalemi değiştirdikten sonra yazmaya başlıyor.) Sonuç iki. (“Sonuç 2:” yazıp duruyor.)				2
34:14	A	Hı! Hı!				
34:20	Y	I! Limiti… I! Limit h'ı sıfıra götürdüğümüzde…				2
34:24	A	Hı! Hı!				
34:25	Y	I! Büyük çokgenin alanı…				2
34:29	A	Hı! Hı!				
34:29	Y	I! Şeye dönüşüyor… I! Küçük üçgenin çevresine dönüşmüş oluyor.		1	1	2
34:36	A	Bir daha söyle.	1			
34:39	Y	h'ı sıfıra götürdüğümüzde…				7
34:40	A	Hı! Hı!				
34:41	Y	Yani şöyle, şunu çizeyim. (Dıştaki çokgenden içteki çokgene doğru bir ok çiziyor.) Bunu sıfıra götürdüğümüzde yani biz… I! Bunun kenarları…				7
34:50	A	Hı! Hı!				
34:51	Y	Küçük üçgenin…				7
34:52	A	Küçüğün?	6			
34:53	Y	Yani küçük çokgenin…				7
34:54	A	Ha!				
34:55	Y	Küçük çokgenin… I! Tam onun kenarları üstüne geliyor.				7
34:58	A	Hı! Hı!				
34:59	Y	Yani bu alan…				7
35:00	A	Hangi alan?	6			

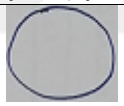
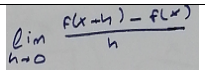
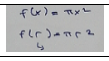
35:02	Y	I! Şu çizdiğimiz alan. (Çokgensel halkayı işaret ediyor.)				7
35:05	A	Çizdiğimiz? (Katılımcı kalemle işaret edince) Ha! Taralı.	6			
35:06	Y	He! Ta… Taralı alan. Taralı alan… I! Çevre oluyor.				7
35:10	A	Çevreye…	6			
35:11	Y	Çevreye eşit oluyor.				7
35:12	A	Yaz. Seni zorlayayım biraz. (Kahkaha)				
35:15	Y	(Kahkaha) Büyük… Büyük çok… Aslında bu… I! Büyük çokgen diyeceğim de bu hayali bir şey.		1	2	7
35:23	A	Tamam, yap. Nasıl istiyorsan öyle yaz. Ben karışmıyorum. Bugün sana karışmıyorum.	2			
35:27	Y	Büyük çokgen (Katılımcı güldüğü için anlaşılmayan konuşma). Büyük çokgenin (anlaşılmayan konuşma).				7
35:30	A	Hı! Hı!				
35:31	Y	(Katılımcı yazmaya başlıyor ve yazarken çoğunlukla sessiz kalıyor. "Sonuç 2: Büyük çokgenin" yazıp duruyor.) Büyük çokgenin sanki… Oldu ama cümleyi nasıl kuracağım. (Tekrardan yazmaya başlıyor.) Büyük çokgenin alanını h'ı sıfıra götürdüğümüzde… h'ı sıfıra götürdüğümüzde… E! h'ı sıfıra götürdüğümüzde küçük çokgenin… Küçük… Küçük çokgenin…				7
36:22	A	Hı! Hı!				
36:23	Y	I! Çevresine… Çevresine… I! Eşit oluyor. (Katılımcı "Sonuç 2: Büyük çokgenin alanını $h \to 0$ götürdüğümüzde küçük çokgenin çevresine eşi" yazıp duruyor. Cümlenin gidişatındaki olası yanlışı fark etmiş durumda.)				7
						
36:39	A	Cümleyi… (Katılımcı konuşmaya başladığı için araştırmacı susuyor.)				
36:39	Y	Küçük çokgenin çevresine… I! (Kısık sesle) h'ı sıfıra götürdüğümüzde küçük çokgenin… (Normal ses tonu ile) h'ı sıfıra götürdüğümüzde, türevini aldığımızda…		1	1	7
36:55	A	Büyük çokgenin alanı mı küçük çokgenin çevresine eşit oluyor?	1			
37:01	Y	Çık!		1	1	2
37:03	A	Toparlayamadın. En iyisi sen onun üstünü çiz.				
37:06	Y	Evet. Çiz.				2
37:08	A	Yeniden yaz. Ya da yeniden yaz. Yeniden yaz.	1			
37:10	Y	(Yazmaya başlıyor.) Sonuç iki. ("Sonuç 2:" yazıp duruyor.)				7
37:14	A	Hı! Hı!				
37:23	Y	Ne diyeyim? h… h… h'ı sıfıra götürdüğümüzde… (Yazmaya başlıyor.) h… h'ı sıfıra… (Yazmaya ara veriyor.) h'ı sıfıra götürdüğümüzde arada kalan alan… (Avuç içleri bir birine bakacak şekilde konumlanmış durumda. Alanlar farkını temsil eder gibi.)				7
37:44	A	Hı! Hı!				
37:48	Y	Alanlar farkı… I! Çevreye dönüşür. (Yazmaya yeniden başlıyor.) Alanları farkı çevreye dönüşür. (Yazmaya ara veriyor.) Sanki biz anlık manlık bir şey yazıyorduk ama…(Yazmaya devam ediyor.) Çevreye dönüşür. (Yazmayı bitiriyor. Yazılan ifade "Sonuç 2: $h \to 0$ götürdüğümüzde alanlar farkı çevreye dönüşür.) Bu sefer herhalde doğru mu yazdım?		1	1	7
						
38:17	A	Değişim oranı cinsinden ifade et.	1			
38:20	Y	I! Götürdüğümüzde sıfıra dönüşür. (Son yazdığı ifadenin sonuna nokta koyuyor.) I! Değişim… Yeni bir şey yazıyorum. Değişim delta...				7
38:26	A	Hı! Hı!				
38:27	Y	(Yazmaya başlıyor.) Delta. I! Delta… Fonksiyondur. Fonksiyondaki… Fonksiyondaki değişimin…				2
38:34	A	Ne fonksiyonu?	6			
38:35	Y	Alan fonksiyonu.				2
38:36	A	Hı! Hı! Alan fonksiyonu.				
38:37	Y	(Yazmaya devam ediyor.) Ya da… Bi de ağırlık merkezinden kenara dik uzaklığı o da k idi. k'daki değişim… Delta k…				5
38:46	A	O burada neye denk geliyor? (Δk ifadesi ile genel türev denklemi arasındaki ilişkiye dikkat çekiliyor.)	6			
38:50	Y	I! Δk mı?				2
38:51	A	Hı! Hı!				
38:53	Y	I! h'a denk geliyor.				2
38:54	A	Şekil üzerinden neye denk geliyor?	6			

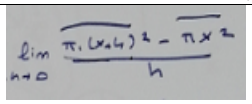
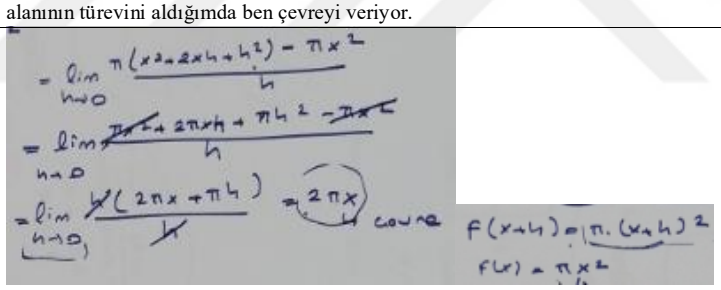
39:00	Y	Şekil üzerinde?				2
39:02	A	h'a denk geliyorsa şekil üzerinde de bu h'tır. (Çokgensel halkanın kalınlığı işaret ediliyor.)	6			
39:04	Y	h'a denk geliyor. He!				2
39:05	A	Tamam.				
39:05	Y	Değişim... (Buraya kadar yazdıkları "$\frac{\Delta f}{\Delta k}$" ifadesidir.) Şunu açıklayayım.				7
39:11	A	Hı! Hı!				
39:12	Y	Burada mı açıklayayım? Şurada mı açıklayayım? Başka bir şey yazacak mıyız?				7
39:17	A	Bunu sözel olarak da ifade edeceğiz.	6			
39:20	Y	Şunu şöyle şuraya alayım. ("$\frac{\Delta f}{\Delta k}$" ifadesinin payından bir ok çiziyor. 3 saniye sonra konuşuyor) Fonksiyonların alanlarındaki değişim. (3 saniye sessizlik. Emin olmadığı için okun ucuna yazmıyor.)				7
39:34	A	Hı! Hı! Fonksiyonların alanları mı?	6			
39:38	Y	Fonksiyondaki değişimin… Biz alan… Alanlardaki değişimin aslında.				7
39:45	A	Alanlardaki değişim… (Katılımcı konuşmaya devam ettiği için araştırmacı susuyor.)				
39:45	Y	Biz alanı fonksiyon şeklinde yapmıştık.				2
39:47	A	Alanlardaki değişim				
39:47	Y	("$\frac{\Delta f}{\Delta k}$" ifadesinin pay kısmından çizdiği okun karşısına "Alanlardaki değişim" yazıyor. Sonra payda kısmından ok çiziyor. İkici okun karşısına ne yazacağını kısık sesle sesli düşünüyor.) Değişimdeki değişim… (Normal bir sesle) Ağırlık merkezinin kenarlara dik uzaklıktaki değişimi.				7
40:08	A	Hı! Hı!				
40:08	Y	("$\frac{\Delta f}{\Delta k}$" ifadesinin pay kısmından çizdiği okun karşısına "Ağırlık merkezinin kenara dik uzaklıktaki değişimi" yazıyor. Bitirince son kelimeyi seslendiriyor.) Değişimi.		1	2	7
40:38	A	Limiti ne yaptın?	1			
40:43	Y	Limit?				2
40:44	A	Hı! Hı!				
40:47	Y	Limiti ne yaptım? (5 saniye sessizlik.) He! Limitini aldığımızda… h'ı sıfıra götürdüğümüzde... Ağırlık merkezinin kenara dik uzaklıktaki…				2
41:11	A	Önceki bilgilere bak. (Araştırmacı önceki çalışma sayfalarını geri geri çevirebilmesi için defterin üzerindeki kalemleri kenara çekiyor.)	6			
41:14	Y	Önceki bilgilere...				4
41:15	A	Ya da hatırlamaya çalış. Nasıl istiyorsan. (18 saniye sessizlik ardından) Daha önceki bilgilere bak.				
41:37	Y	Biz… I! Ağırlık merkezinin kenarlara dik uzaklıktaki… I! h'ı sıfıra... Limit olarak h'ı sıfıra götürdüğümüzde anlık değişim… (Katılımcı hatırlamayınca önceki çalışma sayfalarını geri çeviriyor ve üçgen ile ilgili çalışma sayfasını açıyor.) Değişimi falan yazmışım. Ama anlık yazmamışız. (Katılımcı çalıştığı sayfaya geri dönüyor ve "$\frac{\Delta f}{\Delta k}$" ifadesinin başına "$\lim_{\Delta k \to 0}$" ifadesini ekliyor.)		2	2	4
						
42:23	A	Niye limit Δk'yı sıfıra götürüyorsun?	1			
42:28	Y	Delta k… k'daki değişimdir. Hani… (Avuç içleri bir birine bakacak şekilde konumlanmış durumda. Alanlar farkını temsil eder gibi.)				2
42:32	A	k'daki değişimi neye denk geliyor şekil üzerinde?	6			
42:35	Y	I! k'daki değişim… I! h'a denk geliyor.		1	2	2
42:38	A	h'a denk geliyor. Tamam. Aslında Δf ne demektir? ("$\frac{\Delta f}{\Delta k}$" ifadesinin pay kısmı işaret ediliyor.)	1			
42:44	Y	Alanlar… I! Fonksiyon… Alanlar…(Bu arada araştırmacı genel türev denkleminin pay kısmını işaret ediyor.)	6	1	2	2
42:48	A	Δk ne demektir? ("$\frac{\Delta f}{\Delta k}$" ifadesinin payda kısmı işaret ediliyor.)	1			
42:49	Y	I! Kenarlar, kenarlardaki değişim.				2
42:51	A	Şura eksi şura. (Ağırlık merkezinin dışardaki çokgenin kenarı ile içerdeki çokgenin kenarına dik uzaklıkları işaret ediliyor.)	6			
42:54	Y	Şura eksi, tamamı eksi…		1	2	2
42:56	A	Tamamı eksi şura. O da ne kadar oluyor?	1			
42:59	Y	h kadar.		1	2	2
43:00	A	h kadar oluyor. Tamam, bunu sözel olarak ifade edelim.	1			
43:05	Y	Bunu sözel olarak ifade edelim. Alanlardaki değişimin...				2

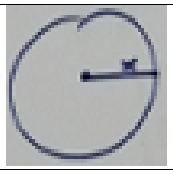
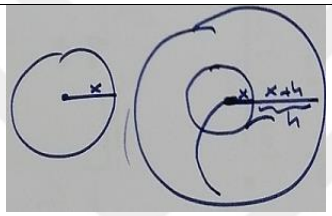
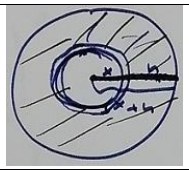
43:10		Hı! Hı! Sonuç 3. (Katılımcının "Sonuç 3" yazmasını istiyor. Katılımcı yazmaya başlamadan hemen önce mavi kalem uzatılıyor.) Mavi kalemle çalış. Şuradan başla sıkıntı olmasın. (Katılımcıya çalışma kâğıdındaki boş yer gösteriliyor.)				
	A					
43:23	Y	(Katılımcı "Sonuç 3:" yazıyor.) Sonuç 3.				2
43:31	A	Hı! Hı!				
43:40	Y	Alanlardaki değişimin… (Yazmaya başlıyor.)				2
43:42	A	Hı! Hı!				
43:54	Y	Alanlardaki diyorum da alandaki değişim mi oluyor?				2
43:58	A	Hı! Hı!				
43:59	Y	Neyse. Alanlardaki değişimin…		1	1	2
44:09	A	Alanlar mı? Alan mı?	1			
44:11	Y	Alan olması lazım. Çünkü o diğeri hayali olduğu için		1	3	2
44:14		O zaman o "lar"ın üzerini çiz. Arada bir "lar" var ya. Üstünü çiz. (Katılımcı çoğul ekinin üstünü çizince) Hı! Hı!				
	A					
44:20	Y	Alandaki değişimin…				7
44:23	A	Hı! Hı!				
44:24		Alandaki değişimin… I! Çok… Kısalt… Uzat… Uzatıyor muyum? I! Ağırlık merkezinden kenarlara, ağırlık merkezinden kenarlara…				7
	Y					
44:34	A	Hı! Hı!				
44:34		(Katılımcı yazmaya yeniden başlıyor.) Ağırlık merkezinden kenar… Kenarlara dik… Dik uzaklıktaki… (Yazmaya ara veriyor.) I! Dik uzaklıktaki… I! Dik uzaklıktaki değişimine… I! Limit… (Kısık sesle anlaşılmayan konuşma) Limit kullanmak gerekiyor.				7
	Y					
45:20	A	Hı! Hı!				
45:27	Y	(7 saniye sessizliğin ardından) Dik uzaklıktaki anlık değişimine.				7
45:30	A	Limiti kullandın mı, anlık değişim diye?	1			
45:34	Y	Limiti kullanmak lazım çünkü limit…				2
45:37	A	Anlık değişim demek, ne demektir? Ne, ne anlam ifade ediyor?	6			
45:40	Y	Türev. (4 saniye sessizlik) Türev değil mi anlık değişim?				2
45:46		(Araştırmacı "$\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta k}$" ifadesinin sırasıyla pay ve paydasını işaret ediyor.) Bak şimdi değişimin	6			
	A	değişime oranı.				
45:49	Y	Hı! Hı!				2
45:50		Değişimin değişime oranı dersen sadece şurası anlaşılır. (Araştırmacı "$\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta k}$" ifadesinin "$\lim_{\Delta k \to 0}$"	6			
	A	kısmını eliyle kapatıyor ve sadece kesir kısmının görünmesine izin veriyor.)				
45:53		Hı! (5 saniye sessizlik ve sonrasında) Dik uzaklıktaki o zaman limiti sıfıra götürür. Limit h'ı sıfıra		1	1	2
	Y	götürür.				
46:01	A	Limit demiyoruz. Limit demiyoruz. Sözel açıklama yapıyoruz. Uzaklıktaki neye?	1			
46:11	Y	(Kısık sesle) Uzaklıktaki...				2
46:14	A	Anlık dedin biraz önce.				
46:15	Y	Evet. Anlık değişim mi dedin, anlık türev mi dedin?				2
46:18	A	Anlık değişim mi dedin? Anlık türev mi dedin?	6			
46:21	Y	(Kısık sesle) Anlık değişim… (Yüksek sesle) Anlık türev...				2
46:24	A	Geri gel bakayım öncekilerde ne demişiz?	6			
46:27	Y	Anlık değişim… (Üçgen konusundaki çalışma sayfalarına geri dönüyor.) Anlık değişim oranı.				4
46:38	A	Anlık değişimine oranı. Tamam.				
46:41		Anlık değişime oranı bize… (Mevcut çalışma sayfasına geri gelip yazmaya kaldığı yerden devam ediyor. O ana kadar yazılmış ifade "Sonuç 3: Alandaki değişimin ağırlık merkezinden kenara dik		2	2	7
	Y	uzaklıktaki" şeklindedir.) Dik uzaklıktaki anlık... Anlık…				
46:49	A	Anlık. Niye anlık diyoruz?	2			
46:51	Y	Türevi aldığımız için.		1	3	2
46:54		("$\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta k}$" ifadesinin "$\frac{\Delta f}{\Delta k}$" kısmı işaret ediliyor.) Mesela değişimin değişime oranı. Anlık	1			
	A	dediğimizde ekstradan ne ekliyoruz oraya?				
47:00	Y	Türev ekliyoruz.				2
47:02		Çık! ("$\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta k}$" ifadesinin "$\Delta k \to 0$" kısmı işaret ediliyor.) Delta k'yı sıfıra götürmek eklenir.	6			
	A					
47:06	Y	Anladım.		1	2	2
47:07		Eklenir çok küçücük minnacık. (Çokgensel halka bölgenin kalınlığı işaret ediliyor.) Hani sen bu	1			
	A	h'ı sıfıra götürüyorsun ya… Delta k'yı sıfıra götürmek…				
47:13	Y	h'ı sıfıra götürmek				2
47:14	A	h'ı sıfıra götürmek…				
47:15	Y	Anlık. (Eş zamanlı konuşma)				2

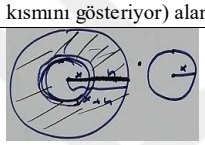
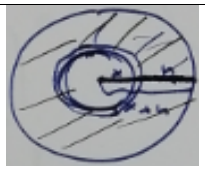
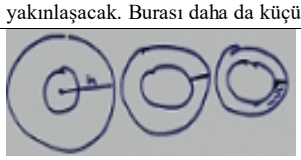
47:15	A	Anlık dediğimiz sıfır yapmak. Sıfıra en iyi yaklaşımı yapmak.	6			
47:27	Y	(6 saniye sessizlik sonrası yazmaya kaldığı yerden devam ediyor.) Anlık				7
47:28	A	Hı! Hı!				
47:30	Y	(Yazmaya devam ediyor.) Anlık değişime... (Yazmayı bırakıyor.) Bize çokgenin çevresini verir.				7
47:37	A	Değişimine oranı.	6			
47:39	Y	(Yazmaya kaldığı yerden devam ediyor.) Anlık değişimine oranı… Anlık değişimine oranı bize… Bize çokgenin…				7
47:55	A	Hı! Hı!				
47:56	Y	(Yazmaya devam ediyor.) Çevre uzunluğunu verir. Uzunluğunu verir. (Yazılan ifadenin tamamı "Sonuç 3: Alandaki değişimin ağırlık merkezinden kenarlara dik uzaklıktaki anlık değişime oranı bize çokgenin çevre uzunluğunu verir." şeklindedir.)		1	2	7
						
48:08	A	(Katılımcı yazmayı tamamlıyor.) Şimdi, tamam. (Katılımcının "Sonuç 3" olarak yazdığı ifadenin tamamı işaret ediliyor.) Bu ifadedeki… I! (Yazılı ifadedeki kelimler sırasıyla işaret ediliyor.) Değişim, değişim, anlık neye denk geldiğini bana bir anlatabilir misin? Mesela anlık demeseydik ne olurdu?	1			
48:28	Y	(2 saniye sessizlik sonrasında konuşma) Anlık demeseydik. I! Anlık demeseydik sanki değişim şey olurdu. Ya… I! (Halka model işaret ediliyor.) Şurası da olabilirdi. Tamamı da değişim olabilirdi. Kısa süre…				2
48:42	A	Niye anlık diyoruz?	6			
48:44	Y	O andaki değişime.				2
48:47	A	O andaki değişime. Yani bu ifadede neye denk geliyor?	6			
48:50	Y	Burada mı? (Halka model işaret ediliyor.)				2
48:51	A	Şu limit ifadesinde bir şeyler var ya…	6			
48:54	Y	(Halka modelin kalınlığı işaret edilerek) Ş! Şuradaki değişimine denk geliyor. h'daki değişimine denk geliyor.		1	1	2
48:59	A	("$\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta k}$" ifadesi işaret ediliyor.) Şu ifadede neye denk geliyor?	1			
49:02	Y	Şu ifadedeki mi?				2
49:03	A	Hı! Hı!				
49:10	Y	(5 saniye sessizlik) Çevreye denk geliyor.		1	1	2
49:10	A	Niye limit demedik? (Sonuç 3 işaret ediliyor.) Mesela şurada niye limit demedik? Limit ifadesini karşılayan bir kelime var mı? Bu sonuç için.	1			
49:18	Y	I! A… Anlık değişim.				7
49:21	A	Anlık değişimi… (Katılımcı konuşmaya başlayınca araştırmacı susuyor.)				
49:21	Y	Değişime oranı. Anlık değişime oranı.				7
49:23	A	Anlık dediğimiz de limiti karşılar.				
49:24	Y	Limiti karışır. Aynen. (Kısık sesle dile getirildiğinden dolayı anlaşılmayan ifade.) İyi… İyi anladım. Anlık değişim.		1	2	7
49:32	A	Teşekkürler Yavuz.				
49:33	Y	Rica ederim hocam. Biraz uğraştırdık sizi ama.				
49:37	A	Bugün biraz seni uğraştırdım ama hakkını helal et. (Gülme)				
49:41	Y	Helal olsun ama sıfır elde var sıfır. (Gülme)				
49:44	A	Nasıl yani?				
49:46	Y	Şunu aslında. I! Sıkıntı oluyor. Söylerken sıkıntı oluyor.				
49:51	A	I! Sen normalde derslerde not tutuyor musun?				
49:54	Y	Tutuyorum. Baya tutuyorum.				
49:56	A	Yazarak çalışıyor musun peki?				
49:58	Y	Aynen,				
49:59	A	Yazarak çalışıyorsun.				
49:59	Y	Yazarak çalışıyorum. Yazım zaten kötüdür. Diyorum yazım biraz güzelleşsin. (Gülme) Bir türlü olmuyor.				
50:06	A	(Gülme) Yazarak çalış. Daha… (Katılımcı konuşunca araştırmacı susuyor.)				
50:08	Y	Baştan sona kadar çalışıyorum zaten. Her çalışmamada böyle 20-30 şey gidiyor.				
50:13	A	Yazarak özet çıkartarak falan çalış ama şeyin fena… (Video kaydı kapatılıyor.)				

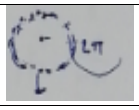
EK-6: Gaye 1. Oturum (Dairede Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi)

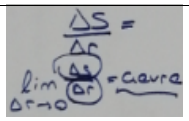
			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
00:03	A	Şimdi… Basit bir soruyla başlayalım. Soru şu: Dairenin alan formülü nedir?	1			
00:23	G	Dairenin... Hocam formülleri unutmuş olabilirim ama πr..				1
00:27	A	πr^2	6			
00:33	G	Yazayım.		2	2	1
00:34	A	Dairenin alanı diye yaz.				
						1
00:40	A	Tamam. Çevre formülü nedir?	1			
00:43	G	$2\pi r$		1	3	1
00:52	A	Tamam. Şimdi bu ikisi arasında nasıl bir ilişki, ilişki var mı?	1			
00:55	G	Evet.				2
00:57	A	Nasıl bir ilişki var?				
00:59	G	Türevini aldığında çevreyi veriyor.		1	3	2
01:01	A	Türevini aldığın zaman çevreyi veriyor. Peki, bu tesadüf müdür? Yoksa böyle...	1			
01:08	G	Tesadüf olduğunu zannetmiyorum.		1	3	2
01:11	A	Yani diyorsun bir sebebi hikmeti vardır.	1			
01:13	G	Evet bir sebebi vardır.		1	3	2
01:15	A	Peki nasıl bir sebebi olabilir sence?	1			1
01:20	G	Dairenin alanı... Şimdi türev deyince benim anladığım eğim geliyor. Teğet... teğetin eğimi geliyor. Bununla nasıl bir bağlantı kurabilirim diye düşünüyorum. Bilmiyorum hocam bunu. (Bir çember çizerek) Çevre... Bilmiyorum hocam.		1	1	2
						
01:50	A	Peki genel türev denklemi nedir? Nasıl bir şeydir? Hatırlıyor musun?	1			
01:55	G	Hıı! Limit h sıfıra giderken... $h - f(h_0)$ mıydı? ($\lim_{h\to 0}$ – yazıp bekliyor. (Dış teşvik beklemekte.)				2
02:07	A	$f(x+h) - f(x)$ Tamam.	6			
02:12	G	$-f(x)$		2	2	2
						
02:15	A	Tamam. Peki, dairenin alanını bir fonksiyon olarak belirtecek olsaydın nasıl bir fonksiyon olurdu?	1			
02:26	G	Nasıl yani?				2
02:28	A	Bir fonksiyon olarak belirtecek olsaydık dairenin alanını?				
02:35	G	$f(x) = \pi x^2$ gibi mi? (Yazıyor.)				2
02:38	A	Evet. $f(r) = \pi r^2$	6			
02:40	G	Evet. (Yazıyor.)		1	2	2
						
02:45	A	Bağımsız değişken hangisidir burada?	1			
02:46	G	r.		1	3	2
02:48	A	r'dir. r'ye bağımlı olarak ne değişiyor?	1			1
02:50	G	$f(r)$ değişiyor.		1	3	2
02:51	A	$f(r)$ de değişiyor. $f(r)$ nedir o?	1			1
02:58	G	$f(r)$ mi? Alan.		1	3	2
03:02	A	Tamam. Şimdi genel türev denkleminde yerine koyarsak nasıl bir şey olur?	1			
03:08	G	Burada mı?				2
03:09	A	Hı! Hı!	6			

03:10	G	O zaman "r" gördüğüm yere "$x+h$" yazacağım. $\pi(x+h)^2$ olacak. $f(x)$ de πx^2 olacak. Bunu da limitte yerine yazarsam $\lim_{h\to} \frac{\pi(x+h)^2-\pi x^2}{h}$ olacak.	1	2	2
					
03:38	A	Peki bunun ne çıkacağı ile ilgili bir öngörün var mı?	1		
03:42	G	Bu... burayı açabilirim. O zaman bu.		1	3	2
03:47	A	Şeyi soruyorum burada neyi bulacaksın?	1		
03:50	G	Burada mı? Türevini bulacağım.		1	2	2
03:52	A	Peki türeviyle ilgili bir öngörün var mı? Ne çıkacağı ile ilgili bir öngörün var mı? Nasıl bir sonuç çıkar sence.	1		
04:01	G	$2\pi h$ gibi bir şey çıkacak buradan. h'lar birbirini götürecek.		1	3	2
04:06	A	Neyse devam et bakalım ne çıkacak.	1		
04:09	G	$$\lim_{h\to 0}\frac{\pi(x+h)^2-\pi x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\pi(x^2+2xh+h^2)-\pi x^2}{h}$$ $$=\lim_{h\to 0}\frac{\pi x^2+2\pi xh+\pi h^2-\pi x^2}{h}$$ Buradan πx^2 ler bir birini götürecek.		1	3	2
04:39	A	Tamam	1		
04:40	G	$2\pi xh+\pi h^2$ kalır. h parantezine alabilirim.		1	2	2
04:48	A	Hı! Hı!	1		
04:50	G	$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2\pi x+\pi h)}{h}$ kalır.		1	2	2
04:58	A	Hı! Hı!	1		
04:59	G	h' lar da bir birini götürür.		1	2	2
05:00	A	Hı! Hı!	1		
05:01	G	Sonra h gördüğüm yere sıfır yazarsam $2\pi x$ kalır. Bu da bana çevreyi veriyor. Yanı dairenin alanının türevini aldığımda ben çevreyi veriyor.		1	2	2
					
05:18	A	Bunu zaten 2'yi öne getirdiğimiz zaman buluyoruz. Peki, genel türev aldığımız zaman şunu getirdin şuraya yazdın. Şunu getirdin şuraya yazdın. Bu ne anlam ifade ediyor. Şu ne anlam ifade ediyor? (Genel türev denkleminde $f(x+h)$ ve $f(x)$ ifadelerinin farkı sorgulatılıyor.)	1		
05:35	G	Mırıldanıyor. Düşünüyor.		1	1	2
05:47	A	Peki bir şekil çizecek olsaydın eğer nasıl bir şekil çizerdin?	1		
05:50	G	Bununla ilgili mi?		1	1	2
05:52	A	Hı! Hı! Mesela şu ne demektir?	1		
05:55	G	πx^2		1	2	2
05:59	A	Neyi bulmuş olursun?	1		
06:01	G	Alanını.		1	2	2
06:02	A	Neyin alanını? ($f(x)$ işaret ediliyor.)	1		
06:02	G	Dairenin alanını.		1	2	2
06:03	A	Yarıçap nedir?	1		
06:04	G	Bu yarıçap x'tir.		1	2	2
06:05	A	Tamam. Şurada? ($f(x+h)$ işaret ediliyor)	1		
06:06	G	Demek o zaman burada yarıçap $x+h$'tır.				2
06:09	A	Tamam.	6		
06:11	G	Çizeyim mi?				2
06:11	A	Hı! Hı!	6		
06:12	G	Bu benim dairem. Burası yarıçap $x+h$'tır. (Yarıçapı $x+h$ olan bir daire çiziyor)		1	2	2
06:19	A	Şu neymiş?	1		

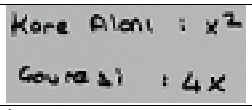
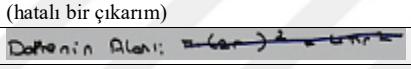
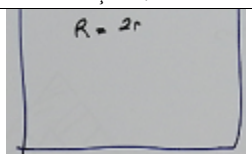
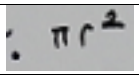
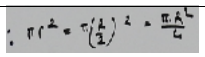
06:21	G	x. O da başka bir dairenin. Şurada başka bir daire alsam şöyle x olur.	1	2	2
					
06:32	A	Peki, şurada ($\lim_{h\to 0}\frac{\pi(x+h)^2-\pi x^2}{h}$ ifadesi gösteriliyor) yaptığın işlem ne?	1		
06:35	G	İki alanı birbirinden çıkarmak.		1	2	2
06:37	A	Tamam. İki alanı birbirinden çıkardığımız zaman nasıl bir şey çıkar ortaya? Şekil üzerinde göster.	1		
06:46	G	Bunlardan mı?				2
06:48	A	Hangisini hangisinden çıkarıyorsun?	6		
06:49	G	Büyük olandan küçük olanı çıkarıyorum. Yani şöyle bunu da burada çizsem. Nasıl çizebilirim? Çizemiyorum.		1	2	2
07:05	A	Merkezleri aynı olacak.	1		
07:11	G	O zaman şöyle bir şey olacak. Burası x olacak. Şu kalan kısım h olacak.		1	2	2
					
07:18	A	Daha düzgün bir şekilde ifade edebilir misin?	1		
07:20	G	Bu küçük olan dairem. Burası x oluyor. Buranın tamamı $x+h$'ı veriyor. Burası h'ı veriyor.		1	3	2
07:35	A	Tamam. Peki, nasıl bir alan kalır? Siyah kalem ile tarayabilir misin?	1		
07:45	G	Şu kısım kalıyor.		1	3	2
					
07:50	A	Peki günlük hayatta neye benziyor bu?	1		
07:54	G	Nasıl neye benziyor?				2
07:56	A	Bu şekil günlük hayata neye benziyor?	6		
08:02	G	Simite benziyor.		1	2	2
08:04	A	Kahvaltı yapmadın herhalde. Tamam. Şurada şu h'ın sıfıra gitmesi ne demektir?	1		
08:13	G	Şeklin sıfıra gitmesi ne demektir?		1	1	2
08:15	A	Şekle nasıl yansır?	1		
08:17	G	Yani burayı (halkanın kalınlığını göstererek) kabul etmiyorum. Sıfır olarak kabul ediyorum. O zaman iki daire birbirine eşit oluyor.		1	2	2
08:26	A	O alan neye dönüşür?	1		
08:28	G	πx^2'ye dönüşür. Yani burayı (Yukarıdaki halka kalınlığı işaret ediliyor) sıfır kabul edersem burası olmayacak. Sadece bu daire kalacak. O zaman alanı sadece πx^2		1	3	2
08:40	A	Taralı alan neye dönüşür? Yani şu ifadedeki taralı alan. Burası taralı alan dimi? h'ı mesela bir seçsen. Ya da şöyle söyleyeyim simidin kalınlığı ne kadar?	1		
09:03	G	h kadar.		1	2	2
09:06	A	h'ı bir seçsen kalınlığı ne olur?	1		
09:08	G	1 olur.		1	2	2
09:11	A	Yarım seçsen?	1		
09:12	G	0,5 olur.		1	2	2
09:15	A	Kalınlığı 0,5 olur ve alan nasıl değişir?	1		

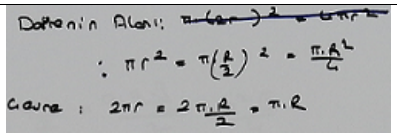
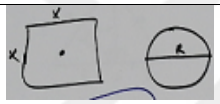
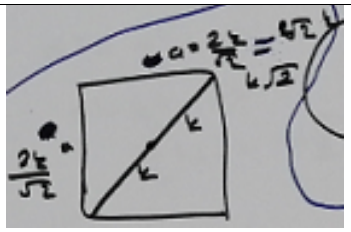
09:20	G	Alan küçülür.		1	2	2
09:22	A	0,001 seçsen.	1			
09:24	G	Daha da küçülür.		1	2	2
09:26	A	Peki git gide sıfıra yaklaştırsan?	1			
09:29	G	O zaman alan git gide küçülecek.		1	2	2
09:31	A	O h'ı sıfır yaptığında o alandan artık bahsedebilir miyiz?	1			
09:38	G	Hayır. Noktaya dönüşecektir.		1	2	2
09:40	A	Nasıl noktaya dönüşür?	1			
09:41	G	Yani o kadar küçülecek ki alandan bahsedemeyecek kadar küçülecek o zaman.		1	2	2
09:48	A	Şu şekil üzerinde göster.	1			
09:50	G	Yani şöyle bu daire ile çok yakın olmuş olacak.		1	2	2
09:55	A	Çok yakın olursa, nasıl bir durum sergiler? Yani sıfır olursa nasıl bir daire kalır?	1			
10:02	G	Teğetliğe mi döner çünkü yakın bir birine?		4	1	2
10:03	A	Yok. Teğet... belki bilmiyorum. Yani çok çok yakın olursa o kalınlığı mesafeyi 0 yaparsan o alan nasıl bir durum alır?	1			
10:20	G	Burası sıfır olursa tek dairem kalır o zaman. Yani bu daire sıfır olduğunda sadece bu kalmış olur. Merkezi x olan.		1	2	2
10:33	A	Alan neye dönüşüyor burada? Bu şekilden bu şekle geçerken buradaki (Aşağıdaki şeklin sol kısmını gösteriyor) alan burada neye dönüşüyor?	1			
						
10:41	G	πx^2'ye dönüşüyor.		1	3	2
10:42	A	πx^2 dediğin şey ne?	1			
10:52	G	Bunun alanı. (Mırıldanma)				2
10:55	A	Yani h'ı sıfıra götürdüğümüz zaman bu alan gitgide azalıyor.	6			
11:00	G	Hı tamam karıştırdım hocam. $x + h$ 'tı bunun yarıçapı h'ı sıfır aldığımda sadece x kalmış oluyor. O zaman πx^2 oluyor.		1	3	2
11:11	A	Şimdi baştan alalım. Niye şurayı (Aşağıdaki şekil işaret ediliyor) taradık?	1			
						
11:16	G	Bu kısmı mı?				1
11:17	A	Niye iç kısmı taramadık da dış kısmı taradık?	6			
11:20	G	Çünkü çıkardık birbirinden.		1	2	1
11:25	A	Tamam. Çıkardığımızda oranın simit gibi içi boş. İçerde bir alan yok.	1			
11:30	G	Evet, içerde bir alan yok.				2
11:31	A	Ne var sadece?	6			
11:32	G	Sadece h var.		1	1	2
11:34	A	İçerde bir alan yok. Tamam. Sadece etrafta bir şey var değil mi? O kalınlığı azalttığın zaman	1			
11:45	G	Kalınlığı azalttığım zaman şöyle...				2
11:50	A	Simitin kalınlığının azaltıldığını düşün. İçe doğru.	6			
12:04	G	Burası böyle olsun. Burası h'tı. Bunu gitgide küçülteceğim. Bu sabit kalacak. Gitgide daha da yakınlaşacak. Burası daha da küçülecek. Burası gitgide sıfıra yaklaşacak o zaman.		1	2	2
						
12:22	A	O açıklık sıfıra yaklaşacak. O açıklık sıfıra yaklaşırken şu alanlar neye dönüşür?	1			
12:28	G	Alanlar gitgide küçülecek. O zaman alan sıfıra dönüşecek.		1	3	2
12:40	A	Alan sıfır mı olur? Peki, burada ($\lim_{h\to 0} \frac{\pi(x+h)^2-\pi x^2}{h}$ ifadesi gösteriliyor) alandaki değişim neye oranlıyoruz?	1			

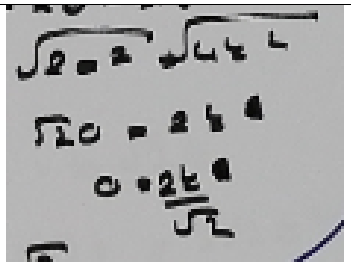
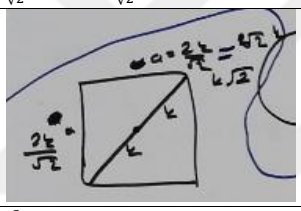
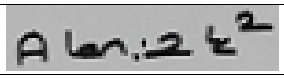
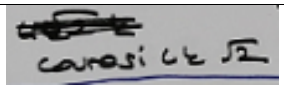
12:47	G	h'a oranlıyoruz.		1	2	1
12:50	A	h'a oranlıyoruz. Yani kalınlığa oranlıyoruz. Değişime oranlıyoruz. Peki, o oran neye dönüşür?	1			
13:02	G	Oran... Yani büyüklük küçüklük açısından mı?		4	1	1
13:06	A	Problemimiz neydi? Başlangıç problemimiz neydi?	1			
13:15	G	En baştaki soru mu? Buydu. Yani dairenin alanı ve çevrenin alanı... Bunları büyüklük küçüklük...				1
13:24	A	Başlangıç problemini bir daha ifade eder misin? İlk başta sana ne sordum?	6			
13:35	G	Türevle bunun arasında ne gibi bir ilişki var onu sordunuz.				1
13:38	A	Zarf kullanmadan açıkla.	6			
13:40	G	Bunlar arasında ne gibi bir ilişki olabilir.				1
13:43	A	Bunlar dediğin?	6			
13:47	G	Dairenin alanı ile dairenin çevresi arasında nasıl bir ilişki var diye.		1	2	1
13:50	A	Tamam, sen ne dedin?	1			
13:51	G	Ben de dedim ki türevini alarak bulabiliriz dedim.		1	2	1
13:54	A	Burada ne yaptık?	1			
13:56	G	Türevini uyguladık. Türevinin genel denklemini yazdık.		1	2	2
13:58	A	Tamam. Bu şekil ne?	1			
14:01	G	Bu şekil, işte bir küçük... Bu şey...				2
14:06	A	O şekle nerden geldik?	6			
14:22	G	Unuttum hocam. πx^2. Ha genel denklemini yerine yazdığımızda bunları (limit üzerine yapılan cebirsel işlemler işaret ediliyor) elde etmiştik. Bunların ne ifade ettiğini sormuştunuz. Ben de bu iki tane daireyi (alan farkı h olan daire çizimleri) çizdim. Yarıçapları x'e $x+h$ olan. Bunları buradan elde ettik.		2	2	2
14:37	A	Tamam, onları oradan elde ettik. Şurada bir fark oluşuyordu. Şuradaki farkı düşüyorduk. Simit gibi bir halka bölge oluşuyordu. O halka bölgenin şurada h'ı ne yapıyoruz? Sıfıra götürüyoruz. Sıfıra götürdüğümüzde o halka bölgenin alanı neye dönüşüyor?	1			
14:57	G	Halka bölgenin alanı şurayı yani...				2
						
15:00	A	Yani git gide küçültüyoruz.	6			
15:01	G	Evet git gide küçülüyor. Bana göre o zaman hocam gitgide küçülüyorsa orada bir alan kalmaz.		1	2	2
15:07	A	Tamam, alan neye dönüşür?	1			
15:08	G	Çembere dönüşür.				2
15:09	A	Çemberin neyine dönüşür?	6			
15:12	G	Çemberin çevresine dönüşür.		1	2	3
15:15	A	Çemberin çevresine dönüşür. Nasıl dönüşür çemberin çevresine?	1			1
15:22	G	Çünkü hocam şey oluyor hani alan gitgide küçüldüğü için sadece noktalar (aşağıdaki şekli çiziyor) kalıyor. Çemberde bir noktaya eşit uzaklıkta olan noktalar kümesiydi. O zaman ben çemberin çevresini elde etmiş oluyorum. Yani ben burada da türev aldığımda o zaman çemberin çevresini bulmam gerekiyor.		1	2	3
						
15:46	A	Tamam. Peki, şimdi bu ilişki kafanda bir şeyler canlandırdı mı? Bunu bana açıklayabilir misin? Özetleyebilir misin?	1			2
15:56	G	Türev mi? Yani hocam biz dairenin alanından çevresini elde edebiliriz. Bir dairenin çevresinden de çemberin çevresini elde edebiliyoruz. Yani şöyle bir şey oluyor. Bunu alanla ilişki kurarsak gitgide küçülterek mesela türevde biz noktasal olarak çalışıyorduk. Bunları git gide küçülterek türev yardımıyla ben hem çevreyi hem de çemberin çevresini bulabiliyorum.		1	2	3
16:26	A	Çemberin çevresi ile dairenin çevresi aynı şey.	1			
16:29	G	Evet. Aynı şey.		1	2	1
16:31	A	Şuradaki şu işlemle bu şekilleri böyle bir izah eder misin bana?	1			
16:37	G	Buradaki bu işlemler mi? Tekrar mı?				1
16:39	A	Yani bir daha o süreci bir daha bana anlatır mısın? Ne yaptığını anlatır mısın?	6			
16:45	G	Tamam. Şimdi türevin genel denklemini $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$'tı. Ben şey πx^2 benim fonksiyonumdu. Onu götürüp $f(x+h)$'ın yerine yazıyorum, fonksiyonda. $\pi(x+h)^2$'ni elde ediyorum. $f(x)$'i de		1	2	3

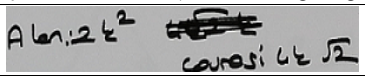
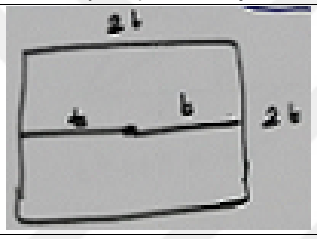
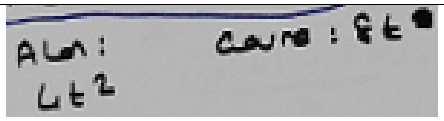
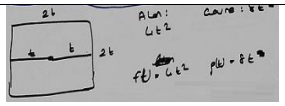
		yerine yazıyorum. πx^2 oluyor. Sonra bunları çıkarıyorum. Çıkarmak için öncelikle şurayı ($\pi(x+h)^2$) açıyorum. π'leri dağıtıyorum. Sonra πx^2'ler birbirini götürüyor. Daha sonra h parantezine alıyorum. Burada $2\pi x + \pi h$ kalıyor. h'ı sıfır olduğu için yerine götürüp yazdığımda $2\pi x$'i elde ediyorum.				
17:30	A	Peki, bu $2\pi x$ denilen şey... Bu süreç bu yaptığın süreç şu işlem (genel türev denklemi gösteriliyor), şekil üzerinde neye tekabül ediyor? Şekiller çizdin ya şekil üzerinden neye tekabül ediyor?	1			1
17:43	G	Ha! Bunu (iç içe geçmiş çember çizimindeki küçük çemberi işaret ediyor) çıkardığımda da şeyi elde ediyorum. Şu halkayı elde ediyorum. Buradaki bu simiti elde ediyorum. Sonra da bunun alanını bulmaya çalışıyorduk. Bu yüzden de h sıfıra gidiyor. Yani h'ı sıfıra yaklaştırmaya çalışıyoruz. Dolayısıyla git gide küçülerek sadece elimizde çember kalıyor. Yani daire..		1	2	3
18:12	A	Çemberin neyi kalıyor?	1			
18:14	G	Çevresi kalıyor.		1	2	3
18:15	A	Çevresi kalıyor. Tamam. Bunu değişim oranı cinsinden nasıl şey yaparsın? Şimdi biz neredeki değişimi nereye oranladık?	1			
18:29	G	Neredeki değişimi?				2
18:31	A	Hı hı. Bu ne? (genel türev denklemi gösteriliyor)	6			
18:36	G	Bu?				2
18:37	A	Bu kullandığın formül. Bu neyi ifade ediyordu?	6			
18:43	G	Türevin genel denklemini. Yani $f(x+h)$ benim alan formülüm.		1	2	2
18:49	A	Şu yukarıdaki payda dediğin pay dediğin şey?	1			
18:52	G	Ha iki şeyin dairenin alanının farkı.				2
18:55	A	Tamam alandaki?	6			
18:57	G	Alandaki değişimin?		1	2	2
18:59	A	Değişim. ΔS yaz oraya. ΔS'i sen neye oranladın aslında burada?	1			
19:07	G	h'a oranladım.				2
19:08	A	h dediğimiz şey nedir burada?	6			
19:09	G	h dediğimiz şey şu kalınlığı.		1	2	2
19:13	A	Tamam. O kalınlığı nereye eklemiş oluyoruz biz?	1			
19:18	G	Nereye eklemiş oluyoruz? x'e mi?		1	2	2
19:24	A	x dediğimiz şey ne?	1			
19:25	G	x dediğimiz küçük dairenin yarı çapı.		1	2	2
19:27	A	Yarıçapı. Tamam. O zaman d diyelim. $\frac{\Delta S}{\Delta r}$. Biz burda şu ikisinin oranına ($\frac{\Delta S}{\Delta r}$ işaret ediliyor) baktık. Tamam. Ama ne durumda? Delta Δr'yi sıfıra götürecek şekilde. Limit Δr sıfıra giderken. $\frac{\Delta S}{\Delta r}$ bu bize neyi veriyormuş?	1			
						
19:58	G	Bu bize çevreyi veriyormuş.		1	2	3
20:01	A	Çevreyi veriyormuş. Eşittir çevre yaz o zaman. Tamam. Buraya kadar geldiğimiz nokta iyi bir nokta. Türeve geldik. Bunu bir sözel olarak ifade edebilir misin?	1			
20:17	G	Alandaki değişimin yarıçaptaki değişime oranı.				3
20:20	A	Neyi verir?	6			
20:21	G	Çevresini verir.		1	2	3
20:25	A	Çevreyi verir. Tamam. Teşekkürler. İlk problemimiz buydu. Daha önceden böyle bir şey aklına gelmiş miydi?				
20:38	G	Yok. Yani bazı sorularda türev almamız gerektiğini kullanıyorduk. Ama hiç bu şekilde şey yapmamıştık.				
20:46	A	Şekil olarak böyle bir anlam ifade ettik vs?				
20:50	G	Hı! ilk kez burda çizerek şey yaptım uyguladım.				
20:55	A	Hı! Hı! Anladım. Peki, sence nasıl bir ilişki bu?				
21:01	G	Türevle mi?				
21:03	A	Yani kolay fark edilebilecek bir ilişki mi yoksa?				
21:07	G	Yani ilk kez gördüğümde belki kendim şey yapamazdım. Sizin yönlendirmenizle yani kolay oluyor.				
21:18	A	Tamam. Teşekkürler ilk oturum buydu. Gördüğün gibi basit bir şekilde hallettik. Ne kadar sürdü? Fazla sürmedi.				

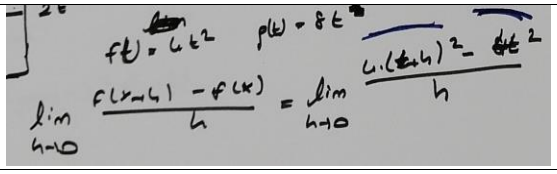
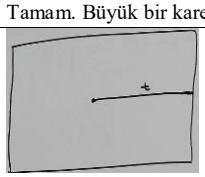
EK-7: Gaye 2. Oturum (Karede Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi)

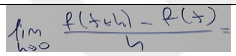
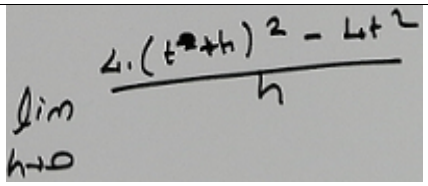
			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
00:01	A	Tamam. Gaye sana bir şey soracağım. Geçen hafta biz ne yaptık?	1			
00:10	G	Geçen hafta dairenin alanıyla çevresi arasındaki türev ilişkisine baktık.		1	3	3
00:15	A	Türev ilişkisine baktık. Tamam. Şimdi aynı problemi bu sefer şey için çalışacağız. Kare için çalışacağız. Karenin alanını biliyor musun?	1			
00:24	G	Kare. Evet. x^2.		1	3	1
00:33	A	Tamam. Çevresi?	1			
00:33	G	$4x$ yapıyor hocam. Şimdi türevle bağlantı kurayım.		1	3	1
00:35						
00:42	A	İlişki var mı?	1			
00:46	G	Kesin vardır. Şimdi türevle bağlantı kurayım. Türevin 2 katı gibi görünüyor. (Gülümseme)		1	3	2
00:58	A	Peki. Dairede biz ne yapmıştık? Yarıçapa göre mi bakmıştık? Çapa göre mi?	1			
01:03	G	Yarıçapa göre bakmıştık.		1	3	3
01:06	A	Tamam. Çapa göre deneyelim dairede.	1			
01:08	G	Dairede çapa göre.				2
01:09	A	Hı hı!	6			
01:10	G	O zaman formülünü mü yazayım?				2
01:12	A	Hı hı! Dairenin.	6			
01:15	G	Dairenin alanı πr^2'ydi. Çapa göre alırsam $2r$ olacak. Bunun $\pi.(2r)^2$'si olacak o da $4\pi r^2$ olacak. (hatalı bir çıkarım)		3	1	2
						
01:32	A	Tamam. Yarıçapı, çap cinsinden yaz. Şuraya şöyle yarıçapı çap cinsinden yaz. $R = \ldots$	1			
01:43	G	Ha ben öyle düşünmemiştim. R= ... (Hatırlayamıyor)				1
01:50	A	Yarıçapın kaç katıdır?	6			
01:51	G	2 katı.				1
01:53	A	Tamam. İki tane…	6			
01:55	G	İki tane küçük r.		3	2	1
						
01:56	A	Tamam. İki tane küçük r. Tamam, o zaman şunu bi silelim biz. (yanlış yazılan ifadeyi siliyor) Şuraya yazalım. Küçük r cinsinden yaz alanı.	1			
02:05	G	πr^2				1
						
02:06	A	Tamam. Küçük r gördüğün yere ne yazman lazım?	6			
02:11	G	$\frac{R}{2}$ yazmam gerekiyor.				2
02:13	A	Tamam.	6			
						
02:14	G	$\pi(\frac{R}{2})^2$				2
02:18	A	Yani?	6			
02:19	G	Yani $\frac{\pi.R^2}{4}$ olacak.		3	2	2
02:24	A	Tamam. Dairenin çevresini büyük R cinsinden bulalım.	1			
02:29	G	Büyük R cinsinden normalde $2\pi r$ idi.				2
02:32	A	Çevre yazalım. (nereye yazılacağı işaret ediliyor)	6			
02:33	G	Çevre. 2πr idi. O zaman r gördüğüm yere yine $\frac{R}{2}$ yazacağım. $2\pi.\frac{R}{2}$ den πR olacak.		3	2	2

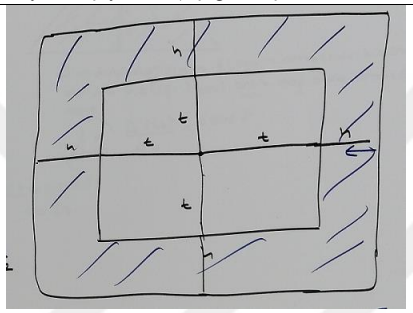
02:45	A	Bu arada bir türev ilişkisi var mı? (Alan ve Çevre formülleri gösterilerek)	1			
						
02:49	G	Bu arada... Türev alsam $\frac{\pi R}{2}$. Yani bunun yarısı mı hocam? (sesinin tonu çok düşük, emin değil)		1	2	2
03:00	A	Alan çevre türev ilişkisi olmuyor.	1			
03:02	G	Evet.				2
03:03	A	Burada da yarısı oldu. (Karenin kenar uzunluğuna göre kurulmaya çalışılan ilişki işaret edilerek)	6			
03:04	G	Evet.				4
03:05	A	Yani bir gariplik var.	6			
03:07	G	Hı hı!				4
03:10	A	Peki demek ki dairede çapa göre çalışmamak,	6			
03:16	G	Evet				4
03:17	A	… (dairede) yarıçapa göre çalışmak lazımmış. Karede o zaman?	6			
03:21	G	Karede de demek ki çevresinin.... (Mırıldanıyor) Burada çapa göre çalıştık... (İlişkiyi, zihninden kurmaya çalışıyor ancak emin değil ve yapamıyor.)		1	1	4
03:40	A	Bir tane kare çiz. Şu şekilde (kenar uzunluğuna göre) çalıştığımız zaman olmuyor.	1			
03:46	G	Evet.				4
03:47	A	Bir tane daire çiz. Çapını çiz komple. Büyük R dedik. Buna göre çalışsak da olmuyor.	6			
03:57	G	Evet.		1	2	4
04:01	A	Dairede neye göre çalışırsak oluyor?	1			
04:03	G	Yarıçapa göre çalışırsak.		1	2	4
						
04:04	A	Tamam. Altına bir tane daire çiz. Buna göre (dairede yarıçapa göre) çalışırsak oluyor.	1			
04:11	G	Evet.		1	2	4
04:12	A	O zaman karede ne olacak?	1			
						
04:14	G	Karede... Çevresine göre çalışmayacak mıyız? Yani tamamına göre çalışmayacak mıyız?		1	1	2
04:25	A	Şimdi bu nedir? Çemberin?	1			
04:29	G	Merkezi. O zaman bunun da mı merkezine göre çalışacağız?		1	2	2
04:33	A	Deneyelim bakalım. İkinci bir şekil çiz.	1			
04:43	G	Burası karenin merkezi olursa...				2
04:45	A	Hı hı!	6			
04:45	G	Ağırlık merkezi. Şöyle burası x burası x. (Kenar uzunluklarına x değişkenini atıyor.)		1	1	2
						
04:51	A	Yok. Bu durumda şuralara x demen lazım.	1			
04:53	G	Ha!				2
04:54	A	Ya da y de k de.	6			
04:58	G	Yeniden çizeyim mi hocam?				2
05:00	A	k de.	6			
05:01	G	Buralar da k k olur.				2
05:03	A	Şunları da silelim. O zaman alanı ne olur? Bir kenar uzunluğu ne olur?	6			
05:11	G	Burası mı?				2
05:12	A	Hı hı!	6			

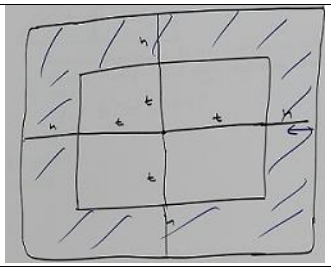
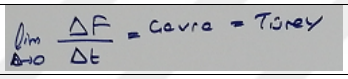
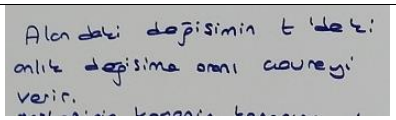
					
05:13	G	(Ağırlık merkezinin köşeye uzaklığı) Burası $2k$'ysa mesela buraları bilinmeyen olarak yazarsam a, a diyelim $a^2 + a^2 = (2k)^2$ olur.			2
05:26	A	$(2k)^2$ mi olur? Ha tamam $(2k)^2$ tamam tamam.			
05:30	G	$2a^2 = 4k^2$ olur. Kök içerisine alırsam da $\sqrt{2a} = 2k^2$olur. Yani $a = \frac{2k^2}{\sqrt{2}}$ olur. (Paydaya önce 2 sonra $\sqrt{2}$ yazıyor.)	1	2	2
					
05:48	A	Doğru yaptın mı buradan buraya geçişi?	2		
05:51	G	$\frac{2k^2}{2}$ olur.			2
05:53	A	k^2 kök dışına nasıl çıktı?	6		
05:57	G	k ah pardon şurası k olarak çıkacak.			2
05:59	A	Tamam. O cinsten yaz buraya. (Kenar uzunluğu işaret ediliyor.)	6		
06:01	G	$\frac{2k}{\sqrt{2}}$ burası da $\frac{2k}{\sqrt{2}}$. (Kenarları k cinsinden yazıyor.)			2
					
06:07	A	$\frac{2}{\sqrt{2}}$'de $\sqrt{2}$'dir. $k\sqrt{2}$ aslında.	6		
06:11	G	Evet.		1	2 1
06:12	A	Eşittir yaz şuraya şöyle. Çevresi ne olur? Alanı ne olur?	1		
06:30	G	Alanı $2k$ olur.		1	3 2
					
06:33	A	Nasıl yaptın?	2		
06:34	G	Normal iki kenarı çarptığımızda alanı da $2k$ olmuş oluyor.		1	3 2
06:41	A	Tamam. Çevresi?	1		
06:42	G	Çevresi de 4'le çarparım ee 2 ile çarparım burayı $4k$ olur.		1	1 2
06:46	A	$4k$ mı olur?	2		
06:48	G	Pardon 1 dakika... $2\sqrt{2}$... $4\sqrt{2}k$ olur.		1	3 2
					
06:53	A	$4\sqrt{2}k$. Alanı ne olur?	1		
06:57	G	2k olur.		1	1 2
06:59	A	2k mı olur? Nasıl buldun?	2		
07:01	G	İki kenarı çarptım.		1	3 2
07:03	A	Bir kenar uzunluğu ne?	1		
07:04	G	Bir kenar uzunluğu $\sqrt{2}k$			2
07:06	A	$\sqrt{2}k$ mı $k\sqrt{2}$ mi? (Matematiksel ifade edilişteki hatanın düzeltilmesi isteniliyor. Çünkü hesaplama hatasına sebep olabilir.)	6		
07:11	G	Aynı şey değil mi?			1
07:13	A	Yani k kökün içinde mi? Dışında mı?	6		
07:15	G	Ha dışında.			1
07:17	A	O zaman $k\sqrt{2}$ diye yazarsan daha iyi olur. k sanki kökün içindeymiş gibi algılanıyor.	6		
07:22	G	Tamam. $k\sqrt{2}$ O zaman $k^2\sqrt{2}$ oluyor. Uf karıştırdım.		1	2 2

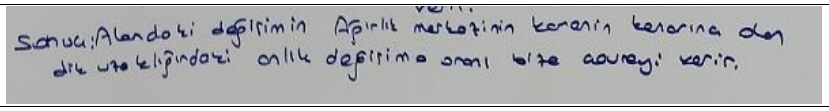
07:29	A	Tamam. Arada türev ilişkisi var mı?	1			
07:33	G	E burayı yanlış yazmışım. Burayı düzelmem gerekiyor. (Yanlış yazılan ifadenin üstünü çiziyor.) Çevresi o zaman… (Kenar uzunluğunu göstererek) $k\sqrt{2}$ ise $4k\sqrt{2}$… Dört… Yine olmuyor.		1	3	2
						
07:49	A	Yine olmuyor. Demek ki merkezi köşegen cinsinden yazarsan olmuyor.	1			
07:54	G	Olmuyor.		1	3	2
07:55	A	O zaman ne cinsinden yazacağız? Nasıl yapabiliriz? Başka ne yapabiliriz?	2			
08:03	G	Hım! Yok. Köşelerden çizsek olmuyor.				4
08:06	A	Hı! Yine bir kare çiz.	6			
08:07	G	(Kare çizip duruyor.)				2
08:12	A	Merkezi bul.	6			
08:13	G	(Ağırlık merkezini işaretliyor.)				2
08:14	A	Hı! Hı!	6			
08:15	G	Çizeyim mi k diye? (Ağırlık merkezinin köşeye uzaklığını eliyle işaret ediyor.)				2
08:16	A	Köşegenden çizdik olmuyormuş.	6			
08:19	G	Evet. Köşegenden olmuyor ama... (10 saniye sessizlik kalıyor, o arada eliyle şekil üzerinde denemeler yapıyor. Böylece ağırlık merkezinden nereye çizeceği konusunda karar vermeye çalışıyor. Emin olmadan karenin ağırlık merkezinden sol kenara bir dikme indiriyor.) Bura mı?		1	2	4
08:34	A	Evet. Orayı da çiz. t de oraya.				
						
08:37	G	t dersem…	4			2
08:41	A	Hı! Hı!	6			
08:44	G	… O zaman burası $2t$ olur.				2
08:48	A	Alan ne olur?	6			
08:49	G	$4t^2$ olur.				2
08:53	A	Şunlar karışmasın şöyle. Şurayı da daire içine alalım. (Önceki çalışmalar ile yeni çalışmaları ayıran bir çizgi çiziliyor.)				
09:03	G	Çevresi de...	6			2
09:04	A	Çevresi?				
09:05	G	$8t^2$ olur. (kare ifadesini yanlışlıkla yazıyor.)				2
						
09:07	A	Hı hı!	6			
09:10	G	Bu defa oldu. Yani türevi aldığımda çevreyi veriyor.		1	2	2
09:11	A	Bu defa oldu.				
09:12	G	Evet. Evet. Türevi aldığımda çevreyi veriyor.				2
09:15	A	Tamam. Modellemeyi demek ki bu şekilde yapıyorsak oluyor. Genel türev denkleminde yazarsak?	1			
09:20	G	O zaman önce türevin denklemini yazayım.		1	2	2
09:22	A	Fonksiyon cinsinden yaz istersen.	1			
09:27	G	Şey alanları mı yazayım?				2
09:30	A	Şuraya $f(t)$ olarak yaz.	6			
09:31	G	$f(t) = 4t^2$		1	2	2
						
09:34	A	Tamam. Neyse onu yazmana gerek yok, çevre ya da $g(t)$ diye yazarsın. $g(t) = 8t$ Kızım bu kare'yi niye yazdın sen buraya? Çevresi nedir?	1			
09:52	G	8t		1	2	2
09:54	A	Tamam.				
09:56	G	Yanlış yaptım. El alışkanlığı olarak…				2

10:00	A	Tamam. Yapalım. Genel türev denkleminden hatırlıyorsun.	1			
10:06	G	Evet. (bir yandan yazıp bir yandan da sözel olarak ifade ediyor) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tı. Şimdi o zaman burada t gördüğüm yere $x+h$ yazıyorum. Nereye yazayım? Şuraya mı yazayım?				2
						
10:21	A	Şuraya yaz devam et. Şuraya devam et.				
10:25	G	Limit h sıfıra giderken...				2
10:27	A	Biraz daha büyük yazabilirsin.				
10:30	G	4. $(x+h)^2$				2
10:35	A	x değil t diyelim artık ona. (Değişkenin t olarak değiştiğine dikkat çekiliyor.)	6			
10:37	G	t diyelim. Tamam. $-8t$ oluyor. Bölü h (Matematiksel ifadesi $\lim_{h\to 0}\frac{4.(t+h)^2-8t}{h}$)		1	2	2
10:43	A	Yani buradaki bağımsız değişken hangisi bu fonksiyonda? (Genel türev denklemi işaret ediliyor. Sebebi değişkenler arasındaki tutarsızlığı gidermek.)				
10:48	G	Burada x bağımsız değişken.				2
10:50	A	Tamam. Burada hangisi?				
10:52	G	Burada da t.				2
10:53	A	Tamam. t tamam o zaman x gördüğümüz yere t yazacağız. Tamam. Peki bunun sonucu ne çıkar? Öngörün nedir? ($\lim_{h\to 0}\frac{4.(t+h)^2-8t}{h}$ ifadesi gösteriliyor.)	1			
11:04	G	$8t$ çıkar.		1	2	2
11:05	A	$8t$ niye?	2			
11:06	G	Çünkü türevini alıyoruz burada.		1	2	2
11:07	A	Türevini alıyoruz. Tamam. Peki, bu ne anlam ifade ediyor? (Türevin genel denkleminde pay kısmında ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı $t+h$ olan karenin alanı anlamına gelen 4. $(t+h)^2$ifadesi gösterilerek)	. 1			
11:14	G	Bu kenarı $t+h$ olan				2
11:17	A	Kenarı mı $t+h$ olan?	6			
11:18	G	Bir kenarı $t+h$ olan karenin alanı		1	1	2
11:22	A	Şekle bak. Peki şu neyi ifade ediyor? (Genel türev denkleminin pay kısmındaki farklar işaret ediliyor. Ancak $\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4.(t+h)^2-8t}{h}$ ifadesinde $f(t)=4t^2$olması gerektiğinin ve $8t$ yazıldığının araştırmacı da katılımcı da farkında değil. Katılımcı orada $8t$ yazdığı ve çevre uzunluğu $8t$ olduğu için çevre cevabını veriyor.	1			
11:28	G	$8t$ yani çevresi		1	1	2
11:32	A	Tamam. O zaman tekrar sorayım şu neyi ifade ediyor? (Türevin genel denkleminde pay kısmında $f(t+h)$ ifadesinin açılımı olan 4. $(t+h)^2$ ifadesi işaret ediliyor.)	1			
11:36	G	Bu bunun alanını ifade ediyor. 4(t+h) ise… O zaman h , t'ye eşit mi oluyor? (İlk çizdiği kareyi gösteriyor.)		1	1	2
11:48	A	Hı?				
11:49	G	h , t'ye eşit mi oluyor?				2
11:53	A	h dediğimiz şey ne oluyor? Sen onu boş ver. Şu ne anlam ifade ediyor? (Türevin genel denkleminde pay kısmında $f(t)$ ifadesinin yanlış açılımı olan $8t$ ifadesi işaret ediliyor.)	1			
12:00	G	Çevreyi ifade ediyor.		1	1	2
12:01	A	Tamam. Büyük bir kare çiz şuraya. Şöyle suraya. t dediğimiz zımbırtı ne?	1			
						
12:11	G	t dediğimiz şöyle merkezi				2
12:15	A	O merkezin özelliği... Ne merkezidir o merkez?	6			
12:18	G	Çemberin.				2
12:19	A	Yo karenin.	6			
12:21	G	Karenin ağırlık merkezi				2
12:23	A	Ağırlık merkezinin kenara	6			
12:25	G	Evet t birimmiş				2

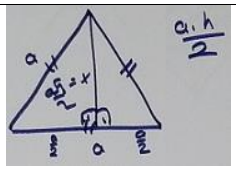
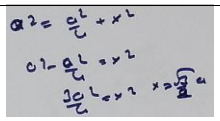
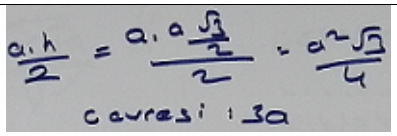
12:28	A	Kenara olan uzaklığı	6			
12:30	G	Hı hı! Evet.				2
12:31	A	Ama nasıl uzaklığı?	6			
12:33	G	Dik uzaklığı.		1	2	2
12:34	A	Dik uzaklığı. Tamam. Tamam güzel. Şimdi bu şunun alanını veriyor. Şu şunun alanını veriyor.(Türevin genel denkleminde pay kısmında $f(t)$ ifadesinin yanlış açılımı olan $8t$ ifadesi işaret ediliyor.)	1			
12:43	G	Alanını?		1	1	2
12:45	A	Kız sen niye $8t$ yazmışsın oraya.	1			
12:51	G	A! Hocam $4t^2$ mi yazacaktım dimi? Yanlış yazdım.				2
12:59	A	Hı hı!	6			
13:00	G	$4t^2$ yazacaktım. Yanlış yazmışım.		1	2	2
13:04	A	Tamam. Bu şunun alanı. ($f(t) = 4t^2$ ifadesi, ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı t olan karenin alanı olduğu fark ettirilmeye çalışılıyor.)	6			
13:09	G	Evet.	1			2
13:11	A	Peki şu ne olacak? (Genel türev denkleminin payındaki $f(t+h)$'ın karşılığı olan $4(t+h)^2$ işaret edilerek.)				
13:14	G	Bu?				2
13:19	A	$t+h$ olursa? Bunu şu şekilde yazalım mı? Evet şunu limit h giderken 0'a $\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ şeklinde yazalım. O da eşittir açılımını düzgün yaz şuraya çünkü burası karıştı. Limit h sıfıra giderken $f(t+h)$ ne olur? $f(t)$ hangi fonksiyondu? (Katılımcının iç içe geçmiş bir şekilde yazdığı ve yanlış ifadelerin üstünü çizerek karmaşık bir hale getirdiği matematiksel ifade, araştırmacı tarafından düzgün bir şekilde mavi kalem ile yazılıyor.)	6			
						
13:49	G	Buydu $4t^2$'ydi.		1	2	2
13:51	A	Tamam.				
13:52	G	Yerine mi yazıyoruz? $4t^2$ ($\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ ifadesinin açılımı yazıyor.)	4			2
13:58	A	$(t+h)^2$	6			
13:59	G	Öyleydi. (Yazmaya devam ediyor.)				2
14:02	A	Hı hı!	6			
14:02	G	$(t+h)^2$ (Yazmaya devam ediyor.)				2
14:04	A	Eksi.	6			
14:04	G	Eksi $4t^2$ bölü h.		1	2	2
						
14:07	A	Tamam. Açmaya gerek yok yani. Şimdi bu ya da şu şunun alanı. Şimdi, bu (pay kısmındaki $4t^2$) ya da şu (Genel denklemdeki $f(t)$) şunun (karenin) alanıdır.	6			
14:17	G	Evet.				2
14:18	A	Şu (Genel denklemdeki $f(t+h)$) ne anlam ifade eder? Ya da şu (pay kısmındaki $4(t+h)^2$) ne anlam ifade eder? $t+h$?	1			
14:20	G	(11 saniye kadar suskunluk)		1	1	2
14:31	A	Önceki konuya gelelim. Şu ne anlam ifade ederdi? Şurası... Şekil olarak ne anlam ifade ediyordu? (Daire konusundaki çalışma kâğıdına geri dönülüyor ve genel türev denkleminin pay kısmındaki $\pi(r+h)^2$ işaret ediliyor.)	1			
14:58	G	Şu mu?				2
14:58	A	Hı hı!	6			
14:59	G	Şu büyük dairemizdi. Bunun alanını ifade ediyordu. Bu da onun içindeki küçük dairenin alanının ifade ediyordu. (Katılımcı, dairede yapılan işlemlerde $\pi(r+h)^2$ ifadesinin yarıçapı h kadar artırılmış dairenin alanını ifade ettiğini ve πr^2 ifadesinin de yarıçapı r olan dairenin alanına denk geldiğini hatırlıyor.)		1	2	2
15:08	A	O zaman buraya, o bilgiyi buraya transfer edelim.	1			
15:14	G	O zaman bu da ondan büyük bir kare oluyor. Onun da merkezleri yine aynı olacak o zaman. Daha büyük bir kare mi çizeceğim?				2
15:28	A	Neyi artırmışsın sen?	6			

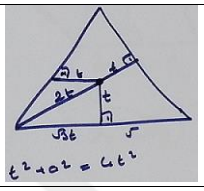
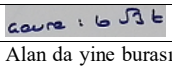
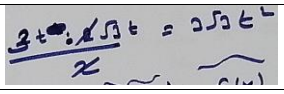
15:31	G	t'yi arttırmışım.				2
15:32	A	t'yi ne kadar arttırmışsın?	6			
15:34	G	h kadar arttırmışım.				2
15:35	A	t dediğin şeyi h kadar arttır.	6			
15:36	G	Evet. Mesela şöyle mi?				2
15:39	A	Arttır.	6			
15:41	G	Şu h olsun				2
15:42	A	Şurası da t'dir.	6			
15:46	G	Evet. Burası da t. O zaman burayı da h kadar arttırıyorum.				2
15:49	A	Tamam.	6			
15:50	G	Büyük bir kare çizeyim sonrasında.				2
15:55	A	Hı hı!	6			
15:59	G	Burası da t..				2
16:00	A	Hı hı!	6			
16:01	G	h kadar arttırıyorum.				2
16:03	A	Hı hı!	6			
16:13	G	Böyle bir şey oldu. (Aşağıdaki şeklin taranmamış ve ok olmayan halini çiziyor.)		1	2	2
						
16:18	A	Tamam. Bu neyi ifade ediyor? (Genel türev denkleminin ($\lim_{h\to 0}\frac{4(t+h)^2-4t^2}{h}$) pay kısmı işaret edilerek paydaki farkın şekil üzerinde ne anlama geldiğine dikkat çekilmeye çalışılıyor.)	1			
16:20	G	O zaman bu da t +... Yani bu büyük karenin alanını ifade ediyor. (Pay kısmındaki $4(t+h)^2$ olarak algılandı.)				2
16:25	A	Tamam. Ondan ne yapmıştın sen? Şu bütün olarak neyi ifade ediyor? (Araştırmacı parmaklarıyla pay kısmındaki $4(t+h)^2-4t^2$ fadesini gösteriyor. Ve farka dikkat çekmek istiyor.)	6			
16:30	G	Bütün olarak çevresini ifade ediyor o zaman.		1	1	2
16:35	A	Şey olarak değil. Şu şekilde. (Araştırmacı tekrar parmaklarıyla pay kısmındaki $4(t+h)^2-4t^2$ fadesini gösteriyor ve onun dışındaki yerleri diğer eliyle kapatıyor. Böylece farka dikkat çekmek istiyor.)	1			
16:37	G	Ha! Büyük kareden küçük kareyi çıkardığım kısmı ifade ediyor. Şu küçük kareyi çıkarırsam geriye şu kısım kalacak.				2
16:49	A	Tara. Güzel.	6			
16:54	G	Şöyle.		1	2	2
16:58	A	Peki orda h ne yapıyormuş? h'ın keyfi nasılmış? (Limit ifadesindeki $h \to 0$ kısmı işaret ediliyor.)	1			
17:06	G	0'a gidiyor.				2
17:08	A	0'a giderse...	6			
17:08	G	Yani yine gitgide sıfıra yaklaşacak o zaman elimde sadece bu karenin çevresi kalacak.				4
17:17	A	Hı hı! Biraz daha düzgün ifade et.	6			
17:19	G	Yani h sıfıra giderken bu karenin büyük kare ile küçük kare arasındaki mesafe gitgide azalacak sıfıra yaklaşacak. Sıfıra yaklaştığında en son çevresi kalacak şu küçük karenin çevresi kalacak.		1	2	4
17:37	A	Küçük karenin çevresi kalacak. Peki. Ne… Çevreye dönüşen şey ne?	1			
17:43	G	Çevreye dönüşen şey ne?				4
17:47	A	Şu taralı alan ne oluyor? Şu taralı alan h sıfıra gittiği zaman	6			
17:55	G	Çevreye mi dönüştü?				4
17:56	A	Taralı alan çevreye dönüştü.	6			
17:58	G	Evet. Taralı alan.		1	2	4
17:59	A	Hangisinin hangisine yaklaştığını ok işareti ile gösterir misin?	2			
18:03	G	Buradan mı?				4
18:04	A	Hı hı!	6			
18:06	G	Bu büyük kare şu taraftan küçük kareye doğru yaklaşıyor. (Şekildeki oku çiziyor.)		1	2	4

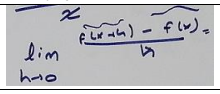
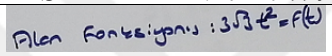
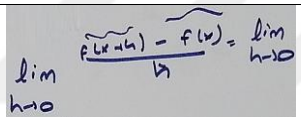
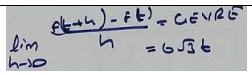
						
18:09	A	Hı hı! Yaklaşıyor. Tamam. Peki. Burada aslında ne yapmışız iki tane alan farkı. Bu h dediğimiz şey nedir aslında? Bu böyleyken böyle olmuş. (t iken $t+h$ olmuş)	1			
18:23	G	Hı hı! Evet.				4
18:24	A	h nedir? Neyin farkıdır?	6			
18:27	G	h şu iki kare arasındaki				4
18:30	A	Şu t'deki farktır.	6			
18:31	G	Hı hı! Evet.		1	2	4
18:33	A	O zaman bunu değişim oranı cinsinden yazabilir miyiz?	1			
18:37	G	Evet yazabiliriz. (Yazmaya başlıyor)				4
18:38	A	Delta...	6			
18:42	G	Bunda formül neydi?				2
18:44	A	f fonksiyonuydu.	6			
18:48	G	Bölü… Şunun değişimi olacak $t+h-h$ olacak değil mi?				4
18:54	A	Yani t'deki değişim.	6			
18:56	G	Evet. t'deki değişim Δt olacak o zaman.				4
18:59	A	$\lim_{\Delta t\to 0}$ bu bize neyi veriyormuş? (Katılımcı kesir çizgisinin önüne $\lim_{\Delta t\to 0}$ ifadesinin yazmayı unuttuğu için hatırlatma yapılıyor.	6			
19:07	G	Bu bize çevreyi veriyor.		1	2	4
						
19:08	A	Çevreyi veriyor. Tamam. Yazalım. Eşittir çevre ya da türev. Tamam. Şimdi f dediğimiz şey nedir?	1			
19:23	G	f dediğimiz şey alanlarımız bizim.				4
19:25	A	Hı hı! Alandaki değişimi …	6			
19:27	G	Alandaki değişimin...				4
19:28	A	Neydeki anlık değişime oranı?	6			
19:30	G	t'deki anlık değişime oranı.				4
19:32	A	Tamam yazalım. Sözel olarak yazalım.	6			
19:37	G	Alandaki değişime değil mi?				4
19:38	A	Hı hı!	6			
19:39	G	Alandaki değişimin t'deki anlık değişime oranı çevreyi verir.		1	2	4
						
19:56	A	Tamam. t dediğimiz şey nedir?	1			
19:59	G	t dediğimiz küçük karenin ağırlık merkezine olan uzaklığı.		1	2	2
20:06	A	Bir daha düzgün söyle bir daha söyle toparla.	1			
20:10	G	Ağırlık merkezinden... Kuramıyorum cümleyi. Ağırlık merkezine olan uzaklığı.				2
20:19	A	Ağırlık merkezinin nereye olan uzaklığı?	6			
20:20	G	Kareye olan küçük kareye olan… (Yazıyor.)				2
20:23	A	Karenin neyine olan?	6			
20:24	G	Karenin kenarına olan. (Yazıyor.)				2
20:25	A	Nasıl uzaklığı?	6			
20:27	G	Dik uzaklığı. (Yazıyor.)				2
20:28	A	Dik uzaklığı şimdi toparla.	6			
20:33	G	Ağırlık merkezinin karenin çevresine olan dik uzaklığı. (Yazıyor.)				4
20:37	A	Kenarına olan dik uzaklığı.	6			
20:38	G	Evet. Pardon kenarına olan dik uzaklığı. (Yazıyor.)				4
20:41	A	O zaman t yerine onu yazalım. Cümleyi biraz daha genişletelim. Şuradan başlayalım. Sonuç yaz sonuç yaz.	6			

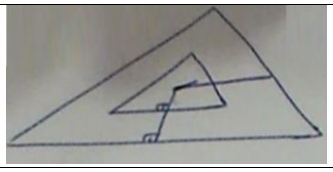
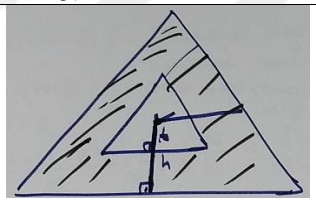
20:49	G	Alandaki değişimin…(Yazıyor.)				4
21:02	A	*t* neydi?	6			
21:07	G	Şey... (Yazıyor.)				4
21:08	A	Ağırlık merkezinin…	6			
21:11	G	Ağırlık merkezinin karenin kenarına olan dik uzaklığı… (Yazıyor.)				4
21:23	A	Dik uzaklığındaki, anlık değişime oranı	6			
21:28	G	Anlık değişime oranı… (Yazma işlemini bitiriyor.)		1	2	4
21:35	A	Güzel!				
						
21:41	A	Evet. Sonuç olarak buraya ulaştık. Demek ki ağırlık merkeziyle çalışınca karede türev ilişkisi oluşuyormuş. Teşekkür ederim, bugünlük bu kadar yeterli. Biraz zorlandık sanki?				
21:58	G	Hocam dikkatimi toplayamadım.				

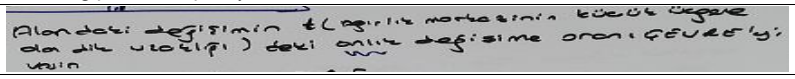
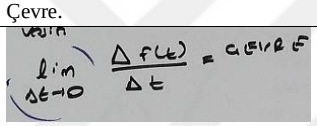
EK-8: Gaye 3. Oturum (Eşkenar Üçgende Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi)

			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
00:00	A	Tamam. Şimdi, ilk hafta ne yapık, Gaye?	1			
00:08	G	İlk hafta mı hocam? Daireyi çalıştık daire üzerinde onun türevinin çevreyi... şey... Alanının türevinin çevreyi verdiğiyle ilgili bir çalışma yapmıştık.				3
00:17	A	Tamam. Başka.				
00:18	G	Sonra kare üzerinde çalıştık. Köşegenler üzerinden aynı işi yapamadığımızı görmüştük.				4
00:25	A	Kenar üzerinden de yapamıyorduk?	6			
00:27	G	Evet.				4
00:28	A	Ama ne yaptığımızda oluyordu?	6			
00:30	G	Ne yaptığımızda oluyordu?				4
00:32	A	Geri gel. Sayfayı çevir. (Eski çalışma sayfasına bakması isteniyor)	6			
00:33	G	Ağırlık merkezi… (Eski çalışma sayfasına ihtiyaç duymadan bu ifadeyi kurmaya başlıyor.)				4
00:34	A	Yok, şey yap sayfayı çevir bakalım ne yapmışız.	6			
00:40	G	Karenin ağırlık merkezinin üzerinden çalışmışız. Burada. İşte küçük kare ile büyük kareyi çıkarmıştık yine işte küçüldükçe yine.		1	2	4
00:51	A	İlişki sağlamıştık. Neymiş? Ağırlık merkezinin karenin kenarına dik uzaklığı ona göre modellediğimizde oluyor. Şimdi eş kenar üçgende bakalım oluyor mu?	1			
01:05	G	Dün çok ..... Eşkenar üçgen mi?				2
01:09	A	Evet. Alanı nedir? Hı! Hı!	6			
01:20	G	Şöyle bir dikme indirsem… (Bir eşkenar üçgen çizip tepeden tabana bir dikme indiriyor.)				2
01:22	A	Hı! Hı!				
01:25	G	Taban. Taban çarpı... a olsun mesela burası... (a.)				2
01:29	A	Hı! Hı!				
01:30	G	Yükseklik bölü iki ($\frac{a.h}{2}$)				2
						
01:32	A	h ne olur? a cinsinden.	6			
01:35	G	Burası (eşkenar üçgenin sol kenarı) da a olacaktır. Burası (tabanın yarısı) da $\frac{a}{2}$ olacak. O zaman Pisagor uygulayalım. $x^2 = \frac{a^2}{4} +$ …Pardon! $a^2 = \frac{a^2}{4} + x^2$ yapsam $a^2 - \frac{a^2}{4} = x^2$ (işlemi yapıyor) $x^2 = \frac{3a^2}{4}$ (eşitliğin taraflarının karekökünü alıyor) $x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$				1
						
02:07	A	Hı! Hı! $\frac{a\sqrt{3}}{2}$				
02:09	G	Evet.				2
02:10	A	Tamam. O zaman alan ne olur?	6			
02:14	G	Alanı $\frac{a\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2}$ olacak.				2
						
02:19	A	Yani?	6			
02:20	G	Yani $a^2\sqrt{3}$				2
02:26	A	Bölü 4.	6			

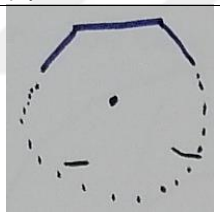
02:27	G	Bölü 4, evet.		1	2	2
02:29	A	Bir ikiye bölüyorsun bir daha ikiye bölüyorsun. Çevresi?	1			
02:33	G	Çevresi $3a$'dır.		1	3	2
02:40	A	Hı! Hı! (Araştırmacı, katılımcının yazmasını bekliyor.) İlişki var mı?	1			
02:42	G	Yok.		1	3	2
02:44	A	Tamam. Olmasını beklemiyorsun. Kenara göre karede denediğimiz de olmuyordu.	1			
02:46	G	Evet.				4
02:47	A	Neye göre yapmamız lazım?	6			
02:48	G	O zaman yine üçgenin ağırlık merkezine göre yapacağız.		1	2	4
02:52	A	Tamam. Ağırlık merkezine göre bir üçgen daha çiz. Çiz çiz elini korkak alıştırma şöyle çiz. (Katılımcı küçük bir çizim yapmaya çalışırken araştırmacı, işlemlerin daha kolay gösterilebilmesi ve değişkenlerin daha rahat yazılabilmesi için büyük bir şekil çizmeye teşvik ediyor.) Ağırlık merkezini belirle. Oradan ne yapacağız kenardan?	1			
						
03:03	G	Dikme indireceğiz.				2
03:05	A	Tamam. Dikmeye ne diyelim?	6			
03:07	G	Ne diyelim. t diyelim.		1	2	2
03:09	A	Tamam. t diyelim. t dedik. (Katılımcı ağırlık merkezinden tabana dik indiriyor.) Diğer tarafa, diğer kenara da indir. Kız o dik mi oldu? O nasıl bir dik oldu? (Ağırlık merkezinden üçgenin sol kenarına indirilmeye çalışılan dikme tabana paralel gibi durduğu için uyarı yapılıyor.) Tamam neyse diğerine de dik indir. t dedik. Tamam. Buraya (ağırlık merkezinin tabana dik uzaklığına) t dersek şurası (tabanın yarısı) ne olur?	1			
03:31	G	Burası mı?				1
03:32	A	Hı! Hı!				
03:33	G	Bilemedim.				1
03:34	A	Şu ikisini (üçgenin sol köşesi ile ağırlık merkezini yani $2t$'lik yeri) birleştir bakalım ne oluyor?	6			
03:36	G	Şöyle mi?				1
03:37	A	Hı! Hı! Açılarını… (Katılımcı konuşmaya başlayınca araştırmacı susuyor)				
03:40	G	$2t$ olacak burası (köşenin ağırlık merkezine uzaklığı).				1
03:41	A	Tamam. 2t olacak.				
03:43	G	Burası o zaman $t^2 + a^2 = 4t^2$ den $\sqrt{3}t$ olur. (Üçgenin sol köşesi, ağırlık merkezi ve ağırlık merkezinden indirilen dikmenin kenarı kestiği yerde oluşan dik üçgene Pisagor teoremini uyguluyor. Böylece kenar uzunluğunun yarısını buluyor.)		1	2	2
03:52	A	$\sqrt{3}t$ tamam. $\sqrt{3}t$ oldu. O zaman şurası (kenarın diğer parçasının uzunluğu) ne olur?	1			
03:58	G	Orası da $\sqrt{3}t$ olur.		1	3	2
03:59	A	Şurası ne olur? (kenarın diğer parçasının uzunluğu)	1			
04:00	G	Orası da $\sqrt{3}t$ ...		1	3	2
04:01	A	Şurası (üçgenin diğer kenarının uzunluğunun yarısı) ne olur? Şurası (üçgenin diğer kenarının uzunluğunun yarısı) ne olur? Çevresi ne olur?	1			
04:03	G	Hepsi$\sqrt{3}t$. Çevresi de $2\sqrt{3}t$ ... $6\sqrt{3}$		1	3	2
04:08	A	Tamam! Çevre $6\sqrt{3}t$. (Araştırmacı, parmağıyla katılımcının yazmasını teşvik ediyor. Alan?	1			
						
04:15	G	Alan da yine burası (üçgenin sol köşesinden sağ kenarına indirilen dikmenin toplam uzunluğunu göstererek) $2t$ ... $2t^2$ çarpı...				2
04:21	A	Niye $2t^2$?	6			
04:22	G	Pardon $3t$ Hocam. Çarpı bir tabanımız da ne kadardı? $2\sqrt{3}t$'ydi. Bölü 2 olacak. Buradan bu (ikileri sadeleştiriyor) $3\sqrt{3}t^2$ gelir.		1	2	2
						
04:34	A	Tamam. Türevini alırsak?	1			
04:37	G	Burayı, buranın (Alan formülünü gösteriyor.) türevini mi?				2
04:38	A	Türevini alırsak burayı (üçgenin çevre fonksiyonu işaret edilerek) veriyor mu?	6			

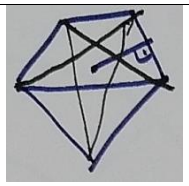
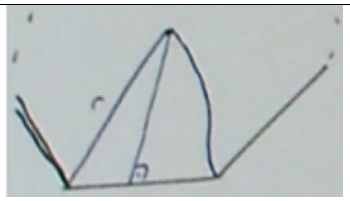
04:39	G	Evet. $6\sqrt{3}t$ geliyor.				2
04:41	A	Tamam.				
04:42	G	Dolayısıyla ağırlık merkezi çalışırsak oluyor.		1	2	4
04:45	A	Oluyor tamam. (3 saniye sessizlik sonrası araştırmacı devam ediyor. Çünkü katılımcı ne yapılacağı konusunda direktif bekler gibi duruyor.) Karede de öyle yaptık da öyle bırakmadık devamını getirdik. Devamını getir (gülümseme).	1			
04:53	G	Evet. Şimdi o zaman (gülümseme). Şey! Bunun türevini mi yazayım?				2
04:58	A	Hı! Hı!				
05:00	G	Ee! $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$'tı.				1
						
05:08	A	Hı! Hı!				
05:09	G	Şimdi! Benim ana formülüm… (Daha önce yazdığı $6\sqrt{3}t$ ifadesini işaret ediyor) $3\sqrt{3}t^2$		1	3	1
05:14	A	Alan fonksiyonu yaz. Alan fonksiyonu.	1			
05:15	G	$3\sqrt{3}t^2$. x^2 mi yazayım hocam?				2
05:28	A	t^2 . t demişsin t^2.	6			
05:30	G	t^2 Tamam! O zaman...				2
05:32	A	Bu (gösterilerek $3\sqrt{3}t^2$) eşittir $f(t)$ yaz.				
						
05:35	G	Hıh! $f(t)$. $f(x+h)$ 'ı buradan ($\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(x)}{h}$ ifadesi işaret ediliyor) yani çevresi gelecek bana türevini aldığımda.		1	2	2
05:43	A	Tamam! $\lim_{h\to 0}$ ... (Araştırmacı genel türev denkleminde yazılmış olan x bağımsız değişkeninin alan ve çevre fonksiyonlarındaki t bağımsız değişkeniyle değiştirilmesini istiyor.)				
05:48	G	Bunu (aşağıdaki ifadeyi yazıp duruyor) mu yazayım?	4			2
						
05:49	A	t'ye göre yazacaksın. $\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$	6			
05:55	G	$\frac{\dots-f(t)}{h}$.				2
05:56	A	Eşittir çevre diyeceksin. Tamam mı?	6			
05:59	G	Evet.				2
						
06:00	A	O da eşittir… Ne çıkar?	6			
06:05	G	Şey! $6\sqrt{3}t$.				2
06:06	A	Hı! Hı! Niye? Çünkü türev…	6			
06:10	G	Türevini alıyoruz evet.		1	2	2
06:11	A	Tamam! Tamam! Sonra?	1			
06:13	G	Sonra...				2
06:15	A	Ne yapmıştık?	6			
06:16	G	Bu iki alanı (genel türev denkleminin pay kısmındaki $f(t+h)-f(t)$ ifadesi işaret ediliyor) birbirinden çıkarmıştık.				2
06:18	A	Hı! Hı!				
06:19	G	Ee! O zaman nasıl olacak bu? Bundan (İlk çizdiği üçgen şeklini gösteriyor.) daha büyük bir...				2
06:23	A	Bir şekil çiz. Yeni bir şekil çiz.	6			
06:24	G	Buraya mı çizeyim?				2
06:25	A	Sen bilirsin.				
06:26	G	Daha büyük bir üçgen çizeceğim.				2
06:28	A	Hı! Hı!				
06:29	G	Şöyle mesela... Ağırlık merkezi burada olduğu için bir de burada (iç içe geçmiş üçgenden bahsedip çizmeye başlıyor) bir üçgen çizmem gerekiyor şimdi.				2

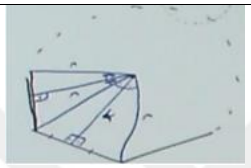
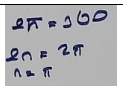
						
06:36	A	Tamam!				
06:37	G	Sonra ağırlık merkezi tamamı t				2
06:45	A	Dik olsun. Kız dik olsun o. Paralel oldu.	6			
06:49	G	Hocam bu yana çizeyim diyorum ama çizemiyorum.				2
06:53	A	Aşağıya çiz kızım o zaman.	6			
06:54	G	Gülüşmeler.				
06:54	A	Gülüşmeler. Yana dik çizmek istiyorsan şöyle (kalemin kapalı ucuyla dikmenin nasıl geleceğini işaret ediyor.) gelecektin.	6			
07:00	G	Tamam!				2
07:01	A	Göz var nizam var? (Karşılıklı gülüşmeler) Nereye t demiştik?				
07:06	G	Tamamına t demiştik.				2
07:07	A	Tamamına mı?	6			
07:09	G	Küçük üçgeni mi? Yok şurası mı t? Şimdi burada (İlk çizdiği şekli işaret ediyor) burası t. O zaman burası mı t olur? Bence tam tersi.		1	1	2
07:22	A	İki üçgen çizme gerekliliği fikrine nereden kapıldın sen?	2			
07:26	G	Çünkü alanları çıkarıyorduk ya. (Genel türev denklemi işaret ediliyor.)				2
07:28	A	Hangi alanı çıkarıyorsun?	6			
07:30	G	(Genel türev denkleminin pay kısmı işaret ediliyor.) Bunun $(f(t+h))$ alanından bunun $(f(t))$ alanını çıkarıyorum.				2
07:31	A	Tamam! (Genel türev denkleminin pay kısmı işaret ediliyor.) Büyük olan bu $(f(t+h))$ mu? Bu $(f(t))$ mu?	6			
07:34	G	(Genel türev denkleminin pay kısmı işaret ediliyor.) Bu $(f(t+h))$.				2
07:35	A	E, tamam! O zaman büyük olanının…	6			
07:37	G	(İç içe geçmiş üçgenler işaret ediliyor.) O zaman burası (içteki üçgenin ağırlık merkezinden kenara uzaklığı) t olur. Burası h olur.		1	2	2
						
07:40	A	Tamam! İşte bu kadar. Nasıl bir alan kalır? Tara.	1			
07:43	G	Nasıl bir alan kalır?				2
07:48	A	Neyse tamam! Farklı renk olsun da bariz olsun diye.				
07:50	G	Burası kalacak sadece.		1	3	2
07:54	A	Tamam!				
07:55	G	Şurası h yine h sıfıra gidiyor. h sıfıra gidince o zaman sadece bu küçük üçgenin çevresi kalacak.	4			4
08:03	A	Tamam! Yani alan neye dönüşmüş olacak?	6			
08:05	G	Çevreye.		1	2	4
08:06	A	Alan çevreye dönüşmüş olacak. Kalınlığını azaltıyorsun. Tamam. Değişim oranı cinsinden yazalım.	1			
08:13	G	Değişim oranı cinsinden… O zaman nasıl yazacağım? Çevrenin, yok. Alandaki değişimin…		1	1	2
08:21	A	Hı! Hı!				
08:29	G	(“Alandaki değişimin” yazıp duruyor.) Biz bunu nasıl ifade ediyorduk? h’daki değişime oranı... Kopya çekeyim mi Hocam?	4			2
08:37	A	Hı! Hı! Kopya çekeyim mi?				
08:41	G	(Kare üzerine yapmış olduğu çalışmaya ait sayfaya bakıyor.) t’deki anlık değişime oranı çevreyi verir. O zaman burada da yine alandaki değişimin h’daki anlık değişime oranı çevreyi verir.		2	1	2
08:54	A	Bir daha çek kopya.	1			
08:55	G	t’deki anlık değişime oranı. (sözel olarak ifade ediyor, yazmıyor.)				2
08:59	A	Tamam. t nedir?	6			
09:00	G	t dediğimiz, ağırlık merkezinin şu 3 kenara dik uzaklığı.				2
09:03	A	Tamam! t parantez içinde yazarsan.	6			
09:06	G	Yazayım mı hocam?				4

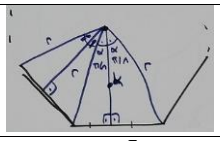
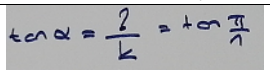
09:08	A	Hı! Hı!				
09:09	G	Ağırlık merkezinin 3 kenara uzaklığı… (Yazmaya başlıyor.)				4
09:25	A	"…de ki t'deki" olacak neyse. Hı! Hı! (Yazdığı ifadede parantezden sonraki kısım için)	6			
09:31	G	Anlık değişime oranı çevreyi verir.		1	2	4
						
09:43	A	Bunu limit delta bir şey, bir şey cinsinden yazabilir misin?	1			
09:47	G	Şey delta, hım! Alanı nasıl ifade edebilirim? $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ gibi mi?				2
09:53	A	Alan için bir fonksiyon yazdın sen.	6			
09:58	G	$f(t)\ldots$ $\frac{\Delta f(t)}{\Delta t}$				2
10:03	A	Δt'yi ne yapacaksın? Δt dediğin şey nedir? t'deki değişim.	6			
10:11	G	Şu ağırlık merkezinin küçük alana dik uzaklığı yani Δt. (sessiz ve kararsız kalıyor)				2
10:25	A	t'de ne kadar değişim yaptık?	6			
10:30	G	t'de h kadar.				2
10:31	A	Tamam! h kadar. Burada h'ı ne yapmışız? (Genel türev denklemindeki $h \to 0$ ifadesi gösteriliyor.)	6			
10:33	G	Sıfıra götürmüşüz.				2
10:34	A	Burada da o zaman neyi sıfıra götürmemiz lazım?	6			
10:37	G	t'yi sıfıra...				2
10:38	A	Δt 'yi.	6			
10:39	G	Δt'yi.				2
10:40	A	Limit Δt sıfıra giderken. Eşittir ne olur? (Katılımcının $\frac{\Delta f(t)}{\Delta t}$ ifadesinin başına limit yazması sağlanıyor.)				
10:46	G	Çevre.		2	2	4
						
10:49	A	Tamam! Zor muymuş?				
10:50	G	Yok, yok. Ama hocam değişik yani bilmiyorum delta ne bileyim bir yerde t var. Bir yerde h var.				4
11:03	A	Şimdi sen şurada şu t değil mi? (İç içe geçmiş üçgende t'ye denk gelen kısım işaret edilip mavi kalem ile kalınlaştırılıyor.)	1			
11:08	G	Evet.				2
11:09	A	t'yi ne kadar arttırıyorsun?	6			
11:10	G	h kadar artırıyorum.				2
11:12	A	Δt 'deki, Δt dediğimiz şey t'deki değişim. t'deki değişim ne kadarmış?	6			
11:18	G	h kadar.				2
11:20	A	h'ı ne yapmışız? (Genel türev denklemindeki $h \to 0$ ifadesi gösteriliyor) Sıfıra götürmüşüz. Bu ne? $(f(t+h)$ gösteriliyor.) Şunlar ne? (Genel türev denklemindeki $f(t+h) - f(t)$ işaret ediliyor.)	6			
11:26	G	Bunlar da alanlardaki değişim.				2
11:27	A	Alanlardaki değişim.				
11:28	G	Hı! Hı! Alanlardaki değişim.				2
11:29	A	Alanlardaki değişim. İşte onu ona oranladığımız zaman sıfıra götürdüğümüzde... Δt 'nin sıfıra götürülmesi demek ne demektir?	6			
11:38	G	Δt 'nin sıfıra gitmesi yani t'deki değişimin şu...				4
11:45	A	Şu yazıda ne demektedir?	6			
11:46	G	Burası. (Daha önce yazmış olduğu ifadedeki "…<u>anlık</u> değişime oranı…" belirtilen kısmın altını çiziyor.)				4
11:50	A	Şu kısmı mı?	6			
11:51	G	Anlık değişime.		1	2	4
11:53	A	Δt'yi sıfıra götürüyorsun ya anlık kısımlarıdır. Caiz midir hocam?				
12:01	G	Caizdir. (Araştırmacı ve katılımcının dâhil olduğu sınıflarda sıkça kullanılan bir diyalog)				
12:02	A	Zor muymuş?				
12:03	G	Yok.				
12:04	A	Tamam! Teşekkür ederim.				
12:05	G	Bu kadar mıydı hocam?				
12:06	A	Ne yapalım yani bu kadar. İstersen bir iki tane soru yazayım çöz. (Gülüşmeler)				
12:13	G	Matematik bu. Her yerde var.				
12:17	A	Her yerde yok. Yemek yaparken yok mesela.				

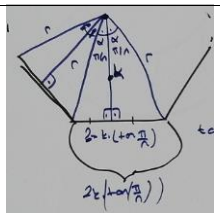
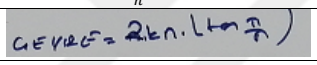
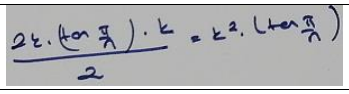
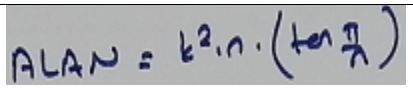
EK-9: Gaye 4. Oturum (Düzgün n-gende Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi)

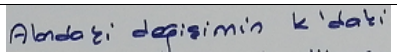
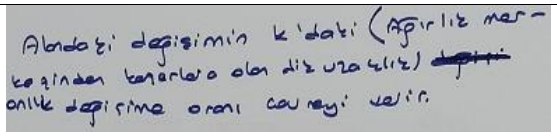
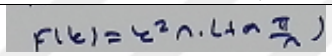
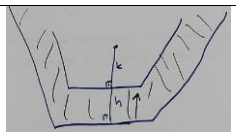
			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
00:02	A	Evet. Şimdi Gaye dairede alan çevre türev ilişkisi çalıştık.	1			
00:09	G	Evet.				4
00:10	A	Sonra?				
00:11	G	Karede.				4
00:12	A	Çalıştık.				
00:14	G	Üçgende çalıştık.		1	3	4
00:14	A	Eşkenar üçgende çalıştık. Şimdi düzgün çokgenlerde sağlar mı? Düzgün bir n-gen olan?	1			
00:24	G	Hocam ben demiştiniz ya… (gülerek konuştuğu için anlaşılmıyor)				2
00:30	A	Düzgün n-gen. Herhangi bir çokgen değil düzgün çokgen. Biz öyle yamuklarla uğraşmıyoruz. Yamuk yumuk şeylerle.	6			
00:38	G	Korkuyorum şimdi. Çokgen kaç gen mesela?				2
00:44	A	Üç dört tane kenarını çiz. Belli bir açıyla geri kalanına nokta nokta koy yani düzgün çokgen olduğu anlaşılsın.	6			
00:56	G	Şöyle, şöyle yapsam…				2
01:02	A	Diğer yerlerine nokta nokta koysan böyle yuvarlak gibi bir şey olsa bizi kurtarır.	6			
01:08	G	Şöyle mi?		1	2	2
						
01:19	A	Hı! Hı! Tamam! Bunun alan çevre formüllerini nasıl oluşturabiliriz? Yani elimizde standart formüller yok. O yüzden formülleri biz kendimiz oluşturacağız. Bu konuda rahat ol yani sıkıntı yok. Bildiğimiz şeyler.	2			
01:32	G	Bunun alanını nasıl oluşturacağız?				2
01:34	A	Hı! Hı!				
01:40	G	Hiç ezberimde yok, hocam bunların alanları.		2	1	2
01:43	A	İşte ezberlenecek şeyler değil. Yani normalde rahat bir şekilde çıkartılabilecek şeyler. Gerek yok yani ezberlemeye.				
01:58	G	… (Mırıldanma)				2
02:03	A	Şimdi! Öncelikle şunu sorayım: "üçgende ilk etapta sağlıyor muydu?"	1			
02:10	G	Yok sağlamıyordu.		1	3	4
02:12	A	Ne yapınca sağlıyordu?	1			
02:13	G	Ağırlık merkezinden tüm kenarlara dik indirdiğimizde.		1	3	4
02:17	A	Tamam! Düzgün çokgenin ağırlık merkezi neresi olur?	1			
02:21	G	Burası olur.		1	3	4
02:22	A	Tamam. Oranın özelliği nedir?	2			
02:29	G	Köşegenlerden geçen doğruların… (Mırıldanma)		2	1	1
02:32	A	Şimdi mesela beşgen olsa bir sürü köşegen geçiyor. Tüm köşegenler orada çakışmaz. Mesela beşgen çizsene. Köşegenleri çiz. Mesela şu, şu… (Alt köşeden üst iki köşeye köşegenleri araştırmacı çiziyor, geri kalını katılımcının çizmesini istiyor.)	1			

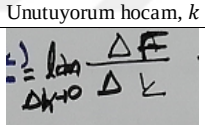
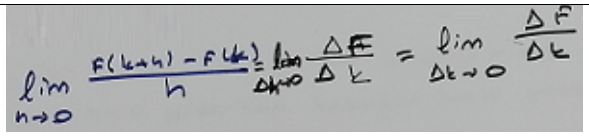
						
03:02	G	Bunların kesişim yerleri… Kesişim yerleri bir birinden farklı.				2
03:05	A	Burası köşegenlerin kesişim merkezi değil. Karede sadece köşegenlerin kesişim merkezi oluyor.	6			
03:11	G	Hı! Hı!		1	2	2
03:12	A	Başka ne özelliği var? Ne özelliği olabilir?	2			
03:23	G	Ağırlık merkezinin mi?				2
03:25	A	Hı! Hı!				
03:26	G	Acaba buranın kenara eşit uzaklıkta mı?				2
03:30	A	Evet! Hepsi eşit uzaklıkta olur. Niye?	6			
03:37	G	Bilmiyorum. Burada bir çember var hocam.				2
03:42	A	Çember var. Tamam güzel. Buna çevrel çember diyoruz.	6			
03:45	G	Evet.		3	2	2
03:46	A	Çevrel çember diyoruz. Şimdi beşgen değil tekrardan ana şeklimize dönelim. Ben biraz daha geniş çizeyim mi?				
03:51	G	Evet.				2
03:53	A	(Araştırmacı n-gen çiziyor.) Muhtemelen çizim yapmamışındır daha önce. Buralar büyük olsun. Merkezi belirliyorum. Tamam. Ne yapacağız?	2			
04:14	G	Dik indireceğiz kenarlarına? Şimdi alanı bulmak için bir şeyler yapacağım değil mi?				2
04:28	A	Hı! Hı!				
04:34	G	Bunu düzgün çizemeyebilirim. (Mırıldanma)				2
04:36	A	Sen çiz! Elini korkak alıştırma! Çiz boş ver.				
04:39	G	Düzgün olmazsa…		1	2	2
04:41	A	Olmuştur. Çok da ki yeni bir şekil çizeriz ne olacak?				
04:46	G	Şimdi bu çevrel çember var ya… Hani o zaman burası (ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığını işaret ediyor) yarıçap mı olur?	4			2
04:53	A	Çevre çember köşelerden mi geçer, kenarlardan mı geçer?	6			
04:57	G	Köşelerden.				1
04:58	A	Köşelerden geçerse yarıçap hangisi olur?	6			
05:02	G	Şu. (Ağırlık merkezi ile köşe noktayı birleştiren doğru parçası işaret ediliyor)		1	2	2
						
05:03	A	Şu, tamam! Ona (çevrel çemberin yarıçapına) göre mi yapacağız, yoksa şu yüksekliğe göre mi yapacağız?	1			
05:10	G	Yüksekliğe göre.				5
05:10	A	Niye?				
05:12	G	Çünkü alanı, yani yükseklik… (Mırıldanma)		1	2	5
05:15	A	Alan çevre ilişkisini kurmak için. Mesela karede köşegen uzaklıklarına göre mi yaptık. Kareyi bir açsana. Karede şöyle şu uzaklığa göre mi yaptık yoksa şuraya göre mi?	1			
05:32	G	İndirdiğimiz dikmelere göre.				5
05:34	A	İndirdiğimiz dikmeye göre. Evet.				
05:36	G	O yüzden burada da indirdiğimiz dikmeye göre yapmamız gerekiyor.		1	2	5
05:39	A	Tamam! O zaman ona bir harf atalım.	1			
05:43	G	a diyelim.				2
05:45	A	Tamam. k de daha iyi olur.	6			
05:46	G	Tamam.				2
05:50	A	Yani bir değişken olduğu anlaşılsın.				
05:59	G	Burada bir üçgen var. Buraya (Çokgenin kenar uzunluğunu işaret ediyor) da k dersem?		1	1	2
06:01	A	Açılar hakkında bir şey söyleyebiliyor musun?	1			
06:04	G	Yok. Buralar hakkında bir şey söyleyemiyorum.				2
06:09	A	Şuradan (Ağırlık merkezinden diğer bir köşeye) bir üçgen çizsek bakayım ne oluyor.	6			

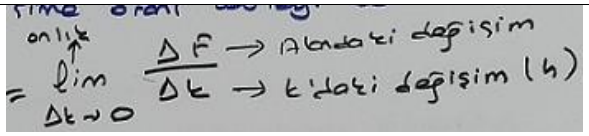
06:13	G	Şuraya da bir dikme inecek.				2
06:14	A	Hı! Hı!				
06:16	G	Tamam!				2
06:18	A	Şuraya r demiştin değil mi? (Ağırlık merkezinin köşeye uzaklığı)	6			
06:20	G	Evet. Şuraya r demiştim.				2
06:22	A	Başka nereleri r olur?	6			
06:24	G	Şurası da r olur (Ağırlık merkezinin diğer köşeye uzaklığı). Burada bir ikizkenar üçgen çıktı.				2
06:27	A	Şurası ne olur? (Ağırlık merkezinin diğer köşeye uzaklığı)	6			
06:29	G	Burası da r olur. İkizkenar üçgen, diklik varsa buralar da eşittir. (Dikmenin aynı zamanda kenarortay olduğunu ifade ediyor.)				2
06:33	A	Tamam.				
06:34	G	Aynı zamanda buraları da açıortaydır.				2
06:36	A	Tamam.				
06:38	G	Şöyle.				2
06:40	A	Şu açılar? (Solda kalan üçgenin yüksekliğinin aynı zamanda açıortay olduğu fark ettirilmeye çalışılıyor.)	6			
06:43	G	Açıların hepsi birbirine eşit.		1	2	2
						
06:44	A	Açıların hepsi mi birbirine eşit? Tamam! Peki, burada kaç tane nokta oluşur şöyle? (Ağırlık merkezinden köşelere çizilen doğru parçalarıyla kaç adet üçgen oluşturulacağı sorgulatılıyor, böylece oluşan ikizkenar üçgenlerin tepe açısının $2\pi/n$ olduğuna ve tepe açının yarısının $2\pi/n$ .olduğuna ulaşılmaya çalışılıyor. Nokta denilmesinin sebebi, gösterimde eş açılar nokta ile gösterilmiştir.)	1			
06:53	G	Burada ne kadar üçgen varsa…				2
06:55	A	n diyelim.	6			
06:55	G	n tane köşe varsa, n tane üçgen olur.				2
06:59	A	n tane nokta mı olur? (Nokta ile temsil edilen açıdan bahsediliyor.)	6			
07:02	G	Şu noktalardan mı? (Açıortayın ölçüsü sorgulatılıyor)				2
07:04	A	Hı! Hı!				
07:05	G	Yok. n x 2 yani $2n$.				2
07:08	A	$2n$ tane.				
07:09	G	Hı! Hı!		1	2	2
07:10	A	Tamam! $2n$ tanesinin toplamı kaç derece olur?	1			
07:14	G	360^0.				2
07:15	A	360^0 o zaman bir nokta kaça denk gelir?	6			
07:18	G	$180^0 \ldots 2n = 360$				2
07:21	A	2π de. 360^0 derece ya da 2π de. $2n = 2\pi$ de. 360^0 eşittir 2π ya.	6			
07:30	G	Tamam.				2
07:32	A	Tamam. π'lerle çalışırsak daha iyi olur.	6			
07:33	G	Tamam.				2
						
07:34	A	Tamam. $2n$ mi şeye eşit? Şu açı π derece mi olur. (Nokta ile sembolize edilen açı işaret ediliyor. Oran-orantı kurulamadı.)	6			
07:46	G	Yok. Yani bu noktalar...				2
07:49	A	O noktalara α de.	6			
07:51	G	α. Yani buradaki noktaların sayısına biz n demiştik.				2
07:57	A	$2n$ demiştik.	6			
07:59	G	$2n$ demiştik. O zaman π oluyor. π bölü… Burası $\frac{\pi}{n}$ mı? (Nokta açısını işaret ediyor.)				2
08:13	A	Hı! Hı!				
08:15	G	$\frac{\pi}{n}$		1	2	2

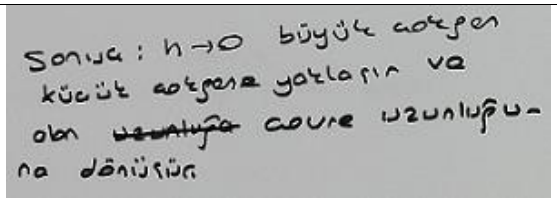
						
08:18	A	Diğer taraf da $\frac{\pi}{n}$. Tamam. Şimdi şu uzunluğu bulabilir miyiz? (Çokgenin çizime göre, alttaki kenar uzunluğu işaret ediliyor.)	1			
08:28	G	Yani Pisagor uygularsam küçükten büyüğe gidiyoruz… (Mırıldanma)		1	2	2
08:30	A	r ile yaptığımız zaman alan formülü alan çevre türev ilişkisini sağlayabilir miyiz?	1			
08:38	G	r'ye göre yaptığımız zaman mı?				5
08:39	A	Hı! Hı!				
08:40	G	Üçgende yine sağlamıyordu.				5
08:43	A	Karede?				
08:44	G	Hı karede sağlamıyordu. Üçgen… Hocam ağırlık merkezine dik indirerek yapmamız lazım.				5
08:51	A	Dike göre yapmamız gerekiyor. O zaman oluşturacağımız alan formülünde değişken olarak sadece ne olması lazım?	6			
08:57	G	Sessizlik. (k uzuluğunu işaret ediyor.)				5
09:01	A	k olması lazım.	6			
09:03	G	k olması lazım.		1	2	5
09:03	A	Tamam! Peki, şurayı k cinsinden bulabilir miyiz? Ya da o tek çizgiyi k cinsinden bulabilir miyiz? (Üçgende çizgi ile belirtilen uzunluk işaret ediliyor.)	1			
09:19	G	Bulamayız. Bulabilir miyiz? Bulamayız. Bulabilir miyiz? Ben Pisagor uygularım orda. Böyle bulmaya çalışırım.				2
09:26	A	Şimdi Pisagor uygularsan şurayı r ve k'ya bağlı olarak bulacaksın bu sefer.	6			
09:32	G	Evet. r ve k… k'ya bağlı olarak bulamayacağım.		1	3	2
09:36	A	Açı sana bir fikir veriyor mu?	2			
09:37	G	Açı?				2
09:38	A	Hı! Hı!				
09:39	G	Şey… (Mırıldanma) Hocam aklıma bir şey gelmiyor.		1	3	2
09:50	A	Trigonometrik fonksiyonlar.	1			
09:52	G	Ama yani tanjant, sinüs, kosinüs gibi mi?				1
09:55	A	Hı! Hı!				
09:59	G	O zaman yarısına tanjant alfa mı diyeceğim?				2
10:02	A	Hı! Hı! Diyelim bakalım.	6			
10:03	G	Tanjant α nedir? Karşı bölü komşudur.				1
10:07	A	Tamam. Şuraya soru işareti bırak. (Kenar uzunluğunun yarısı ya da üçgende çizgi ile belirtilen uzunluk işaret ediliyor.)	6			
10:10	G	Tamam. O zaman $\frac{?}{k}$ olur.				2
10:13	A	Hı! Hı!				
10:13	G	Tanjant α'm da π bölü...		1	2	2
10:17	A	Önemli değil. Orada soru işaretini ne bulursun?	1			
10:25	G	Bulamam ki orayı.		2	3	2
10:28	A	Orada bir eşitlik var.	1			
10:30	G	Evet, eşitlik var. Tanjant α'nın değerini bilmiyorum		2	3	2
10:32	A	Tamam! $tan\alpha$ yerine $\frac{\pi}{n}$ yaz. $tan\frac{\pi}{n}$ yaz.	1			
						
10:42	G	n neydi bilmiyorum.		2	3	2
10:44	A	Kenar sayısı.	1			
10:49	G	π tanjant π/n'in değerini bilmiyorum ki?		2	3	2
10:55	A	Önemli değil. Mesela beşgense, beş gibi bir şey olacak.	1			
11:00	G	$? = tan\frac{\pi}{n}.k$		1	2	2
11:03	A	Tamam! Şunu parantez içine alalım. ($tan\frac{\pi}{n}$ ifadesi işaret ediliyor.)				
11:05	G	Tamam.				2
11:07	A	n mesela beşgen olsa beş olacak. Ongen olsa on olacak. Yüzgen olsa yüz olacak. Mesela $y = ax + b$'deki a katsayısı gibi bir şey.				
11:20	G	Evet.				2
11:21	A	Hı! Hı! Tamam yazalım.				
11:27	G	Buraya mı?				2

11:28	A	k çarpı ama sen tamamını mı buldun? Yoksa yarısını mı buldun?	1			
11:32	G	Yok, sadece burayı buldum.				2
11:34	A	Tamam, tamamı nedir?	6			
11:34	G	Burası da aynı. Buranın alanı mı? $2k.(tan\frac{\pi}{n})$ Nereye yazayım?				2
11:44	A	Altına yaz istersen. Şöyle yaz. (Üçgenin taban uzunluğunun tamamını belirten parantezi araştırmacı çiziyor. Katılımcı, bu parantezin altına $2k.(tan\frac{\pi}{n})$ yazıyor.) Tamam.	6			
						
12:02	G	Şimdi k denilen şey budur. (Mırıldanma)		1	2	2
12:07	A	Alanı hesaplayabilir misin? Ya da çevreyi?	1			
12:11	G	Yani çevresi $(2r+2k)\frac{\pi}{n}$ (Üçgenin çevresini hesaplıyor.)				2
12:15	A	Çokgenin çevresi?	6			
12:17	G	Çokgenin. Burayı biliyorum. (Kanar uzunluğunu işaret ediyor.)				2
12:19	A	Hı! Hı!	6			
12:20	G	O zaman kaç tane kenar varsa.				2
12:23	A	n tane.				
12:24	G	n tane. $n.2k$ çarpı…				2
12:26	A	Tamam! Çevre yazalım buraya o zaman.	6			
12:36	G	$2kn$ çarpı $tan\frac{\pi}{n}$		1	2	2
						
12:42	A	Hı! Hı! Alanını bulabilir misin?	1			
12:45	G	Alanı şu üçgenlerin alanı kaç tane üçgen varsa o kadar olacak.				2
12:52	A	Hı! Hı! Tamam!				
12:53	G	Burada kaç üçgenim var n tane kenarı varsa n tane üçgenim olacak.				2
12:57	A	Tamam.				
12:58	G	Bunun alanını bulup n ile çarparım. (Çokgenin içindeki bir üçgeni gösteriyor.)				2
13:01	A	Tamam.				
13:02	G	O da ne oluyor? Şey şu bir kenarın $\frac{2k.(tan\,\pi/n).k}{2}$ yani $k^2.(tan\frac{\pi}{n})$ öyle değil mi? Yazayım mı?		1	2	2
						
13:19	A	Hı! Hı!				
						
13:21	A	Bununla bunu çarpın tamam sıkıntı yok. Türevini aldığında veriyor mu?	1			
13:35	G	Bunun türevini mi? (Eliyle alan denklemini işaret eder.)				6
13:36	A	Hı! Hı!				
13:37	G	Evet veriyor.		1	3	6
13:39	A	Evet, şimdi açıklamasını yapacağız.				
13:42	G	Ama Hocam şimdi burada benim değişkenim k değil mi?	4			2
13:44	A	Hı! Hı!				
13:44	G	Dolayısıyla bunun ($tan\frac{\pi}{n}$ ifadesini işaret ediyor.) türevini almama gerek yok sanki.		1	2	2
13:49	A	Hı! Hı! Beşse beştir. Onsa ondur. Şunun açıklamasını yapalım. Niye olması şaşırtıcı bir şey miydi?	1			
14:01	G	Yok. Değil.				6
14:02	A	Niye? Olacağını nerden öngördük? Neye dayanarak ön gördük?	6			
14:07	G	Çünkü alanın türevi genelde çevreyi veriyor.				6
14:09	A	Ama neye göre oluşturduğumuzda oluşuyor?	6			
14:11	G	Şey, e! ağırlık merkezinden kenarlara indirdiğimiz dikmeye göre.		1	2	6
14:15	A	Dikmeye göre. Tamam! Dolayısıyla bu ilişkinin ortaya çıkması bizim yaptığımız yoldan normal. Şaşırtıcı bir şey değil. Şimdi açıklamasını yapalım. Bakalım nasıl bir açıklama yapacağız?	1			
14:26	G	Türev mi diyeyim alandaki değişime?				7

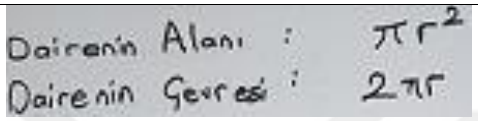
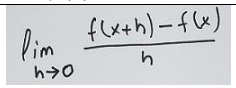
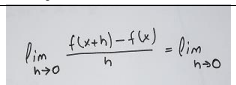
14:43	A	Hı! Hı!				
14:36	G	Şimdi alandaki değişimin k'daki değişime oranı k'yı direk k mı yazayım hocam?				7
						
14:44	A	k yaz, parantez aç, açıklamasını yaz.	6			
14:48	G	k'daki yani ağırlık merkezinin böyle mi yazacağım?				7
14:52	A	Hı! Hı!				
14:55	G	Ağırlık merkezinden kenarlara olan dik uzaklık. k'daki değişime oranı çevreyi verir.				7
15:10	A	Anlık değişim.	6			
15:11	G	Anlık değişime oranı çevreyi verir.		1	2	7
						
15:28	A	Niye anlık dedik?	1			
15:31	G	Çünkü anlık yani sürekli değişiyor. Küçülüyor mesela.		1	1	2
15:39	A	Tamam. Genel türev denkleminden böyle şekil mekil çizip açıklıyorduk ya onu bir yapsana.	1			
15:46	G	Şekil mi çizeceğim?				2
15:47	A	Hayır hayır. Genel türev denklemine dayanarak bir şekil çiziyorduk.	6			
15:50	G	Şey çıkarıyorduk alanları birbirinden.		1	2	2
15:53	A	Hı! Hı!				
15:53	G	Şimdi şey mi diyeceğiz limit $h \to 0$'a giderken.	4			7
15:56	A	Nasıl istiyorsan. Ben açıklama istiyorum sadece.	6			
15:59	G	Hıı. Şimdi $limit\ h \to 0$'a giderken benim formülüm bu fonksiyon (Alan fonksiyonunu gösteriyor.)				7
16:07	A	Hı! Hı! O fonksiyona bir k fonksiyonu diyelim ne diyelim?	6			
16:11	G	$f(k)$ eşittir olsun. $k^2 n.(tan\frac{\pi}{n})$ olsun.				7
						
16:16	A	Hı! Hı!				
16:17	G	E! $\frac{[f(k+h)-f(k)]}{h}$ olacak.				7
16:25	A	Tamam!				
16:26	G	Şimdi ben bunu yaptığımda zaten bana çevreyi verecek. Sıfıra giderken... yani ben burada ne yapıyorum k'ya h kadar ekliyorum.		1	2	7
16:39	A	Tamam! Şekli çiz.	1			
16:41	G	Hocam şekli nasıl çizeyim?				2
16:46	A	Çok hoş çizeksin.	6			
16:50	G	(Gülüşme) Bu ağırlık merkezi olsun. Bu, buna (ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı) ne diyeyim, k. O zaman bir de h kadar olacak böyle. Bir tane daha çizmem gerekiyor. Buranın tamamı (ağırlık merkezinin dıştaki çokgenin kenarına dik uzaklığını kastediyor) h oluyor.		1	1	2
17:22	A	Tamamı mı?	2			
17:23	G	Evet. Yok, pardon şurası (artırılan miktar) h oluyor. Şimdi h sıfıra giderken yani bu h'ın sıfıra gitmesi demek gitgide yaklaşması (Eliyle dıştaki çokgen çizimini içe doğru iter gibi hareket ediyor.) demek oluyordu. Mesela bunun (çokgeni işaret ediyor.) tamamı çizmedik ama bunları (içteki çokgeni işaret ediyor.) çıkardığımız da bu $f(k)$'ya eşit oluyordu. Yani bunu (içteki çokgeni işaret ediyor) çıkarmış oluyoruz. Bize şu (halka şeklindeki bölge) kısım kalıyor.				7
						
17:44	A	Kalan kısmı tara. Tamam!	6			
17:55	G	Bu h sıfıra yaklaştığında sadece şeyin bu çokgenin çevresi kalacak.				7
18:04	A	Yani çevresi mi kalacak yoksa alan başka bir şeye mi dönüşecek?	6			
18:08	G	Alan çevreye dönüşecek işte.				7
18:11	A	Yani alan uzunluğa dönüşecek.	6			
18:13	G	Uzunluğa dönüşecek. Evet.		1	3	7
18:16	A	Peki. Şunu delta cinsinden ifade edebilir misin? Eşittir.	1			
18:25	G	Alandaki değişimi ΔA yazayım.				7
18:28	A	ΔF dedik.	6			

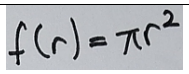
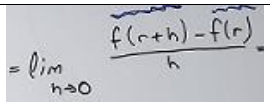
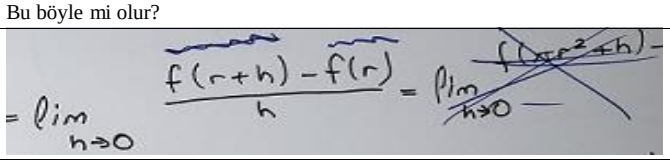
18:29	G	ΔF diyeyim ben buna. Δh		1	1	7
18:32	A	h mı?	2			
18:35	G	k				2
18:35	A	k mı?	6			
18:38	G	İkisinden birisi.		1	1	2
18:39	A	m değil mi?	1			
18:39	G	Hı?				2
18:40	A	m.				
18:40	G	Yo m bizim şeklimizde yok.		1	3	2
18:44	A	h neydeki değişim?	1			
18:45	G	h şey buradaki değişim işte. Dik olan dik uzaklığı, ağırlık merkezinin.				2
18:53	A	Değişken olarak neydeki değişim?	6			
18:56	G	Nasıl neydeki, hocam?				2
18:57	A	Hangi harfteki değişim, h?	6			
19:06	G	Hocam hangi harf derken, gerçekten anlamadım. (Mırıldanma)		1	1	2
19:08	A	Tamam! Harf… h nedeki değişim? Yani şu h nedir aslında? Bu (genel türev denkleminin pay kısmı işaret ediliyor) alandaki değişim. ΔF yazdık.	1			
19:15	G	Bu da işte ağırlık merkezinin ona olan uzaklığına göre olan değişim. Ama ifade edemiyorum hocam. Her defasında bunda sıkıntı yaşıyorum. (Mırıldanma)		1	2	2
19:25	A	Şimdi $f(k+h)$ değil mi?	1			
19:28	G	Evet.				2
19:29	A	$f(k+h), k+h$. $f(k)$, k. $(k+h)$'tan k'yı çıkartırsan geriye ne kalır? (Genel türev denkleminin pay kısmındaki $f(k+h)-f(k)$ ifadesi ve fonksiyonların içindeki $k+h$ ve k işaret ediliyor.)	6			
19:36	G	h kalır.				2
19:37	A	Yani şuradan (ağırlık merkezi ile dıştaki çokgen arasındaki mesafe) şurayı (ağırlık merkezi ile içteki çokgen arasındaki mesafe) çıkartırsan bu (çokgensel halkanın kalınlığı) kalır.	6			
19:41	G	Evet.				2
19:42	A	Dolayısıyla bu h nedeki değişim?	6			
19:44	G	k'daki değişim.		1	2	2
19:44	A	k'daki değişim. Limit nereye gitti?	1			
19:52	G	Unutuyorum hocam, k sıfıra, h sıfıra giderken..		1	1	2
						
19:59	A	Burada h yok. Şu ifadede ($\frac{\Delta F}{\Delta k}$ işaret ediliyor) h yok.	1			
20:02	G	k mı olacak?		1	1	2
20:03	A	k diye bir şey de yok. Mesela F sıfıra gitmez. ΔF sıfıra gider ama F sıfıra gitmez.	1			
20:13	G	Δk mı diyeceğiz o zaman?				2
20:16	A	Δk. Şimdi sen h dediğimiz şey ΔK.	6			
20:20	G	Hı! Hı!		1	2	2
20:21	A	Tamam. Bir açık yazsana şöyle.	1			
20:25	G	Açıklama mı olsun?				7
20:25	A	Böyle bir açık şöyle bir eşittir yaz o yazı okunmuyor şuanda.	6			
						
20:30	G	Limit Δk sıfıra giderken $\frac{\Delta F}{\Delta k}$		1	2	7
20:37	A	Δk sıkıntı yok. Şimdi bunun açıklamasını yazdık şöyle. (Daha önceden katılımcı tarafından yazılmış olan "Alandaki değişimin k'daki (ağırlık merkezinin kenara dik uzaklık) anlık değişime oranı çevreyi verir." İfadesi işaret ediliyor.)	1			
20:43	G	Evet. Alandaki değişimin k'daki anlık değişime oranı çevreyi verir.		1	2	7
20:48	A	Tamam, alandaki değişim dediğimiz şey, şu ifadede neye tekabül ediyor? ($\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta k}$ işaret ediliyor.)	1			
20:53	G	Bu ifadede?				7
20:57	A	Yukarıda. (Daha önceden katılımcı tarafından yazılmış olan "Alandaki değişimin k'daki (ağırlık merkezinin kenara dik uzaklık) anlık değişime oranı çevreyi verir." ifadesi işaret ediliyor)	6			
20:59	G	Buradan mı?				7
21:00	A	Yani şu alandaki değişimi dedik ya.	6			

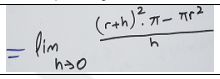
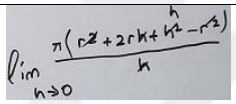
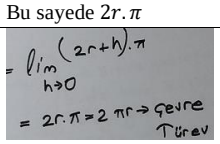
21:02	G	Evet.				7
21:03	A	Bu aşağıdaki ifadede neye tekabül ediyor. ($\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta k}$ işaret ediliyor.)	6			
21:05	G	Şuraya. ($\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta k}$ ifadesinin pay kısmı işaret ediliyor.)		1	2	7
21:06	A	Tamam! O zaman böyle bir ok çekelim alandaki değişim. Tamam. k'daki değişim neye tekabül ediyor?	1			
21:22	G	Burası o da. ($\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta k}$ ifadesinin payda kısmı işaret ediliyor.)				7
21:31	A	k'daki değişim yani h.	6			
21:32	G	Hı! Hı! Evet.		1	2	7
21:33	A	Parantez içinde h. Hı! Hı! Bu anlık neye tekabül ediyor?	1			
						
21:38	G	Anlık. ΔF mi? Anlık? Hı! Hı!				2
21:44	A	Hı! Hı!				
21:52	G	(Sessizlik ve mırıldanma) Limite mi?				2
21:54	A	Limit. Yani anlık hız hesaplamaya çalışırken aralığı sıfır alma imkânımız yok.	6			
22:07	G	Evet, aynen.				2
22:08	A	Ne yapıyoruz limit aracılığıyla yapıyoruz o işi.	6			
22:12	G	Hı! Hı!		1	2	2
22:13	A	Tamam! Sıkıntı yok. Sözel olarak hangisi hangisine yaklaşacaktı? Okla gösterebilir misin?	1			
22:27	G	Böyle mi Hocam? Böyle olur mu? (dıştan içe)				2
22:29	A	Şöyle olmaz mı? Şu şuna yaklaşmaz mı? (içten dışa)	6			
22:39	G	Böyle mi olur?				2
22:40	A	Bana niye soruyorsun ya? (Gülümseme)				
22:42	G	Bence olmaz, ayrıca bu ne? (Gülümseme)				2
22:43	A	Bana sordun, ben de öyle cevap verdim. Bana sorma. (Gülümseme)				
22:44	G	(Gülümseme)				2
22:48	A	Ben sana sordum. Hangisi hangisine yaklaşıyormuş?	6			
22:51	G	Bence bu buna yaklaşıyor. (Dıştaki içtekine) (Gülümseme)				2
22:52	A	Öyle mi?				
22:53	G	Siz onu sordunuz. (Gülümseme)				2
22:58	A	Tamam!				
22:59	G	Yanlış mı hocam?				2
23:00	A	Bilmem.				
23:01	G	Yani cevap vermeyeceksiniz. (Gülümseme)				2
23:06	A	Karede hangisi hangisine yaklaşırdı ya da üçgende?	6			
23:09	G	İlk bu buna (dıştaki içtekine) yaklaşıyor diye düşünüyorum. (Gülümseme)		1	2	2
23:11	A	Tamam! O ona yaklaşıyor. O ona yaklaşıyor zaten. Dış içe yaklaşacak. Aslında bu dışarıdaki çokgen sanal bir şey.				
23:22	G	Hı! Hı!				2
23:24	A	Bizim zihnimizin ürettiği bir şey. Aslında olan şey şu (içteki çokgen).				
23:27	G	Hepsi zihnimizde ürettiğimiz şeyler değil mi hocam?				2
23:29	A	Tabi tabi.				
23:30	G	(Gülümseme)				2
23:31	A	(Gülümseme) Tamam! Teşekkürler Gaye. Gaye bir son olarak da şu alan nasıl küçülüyor? Nasıl çevreye dönüşüyor onu bir yazsana. Yani şöyle bir yere sonuç yaz.	1			
23:48	G	Şimdi eeee sonuca ne diyim? h sıfıra giderken eee büyük çokgen,				7
24:00	A	Hı! Hı!				
24:06	G	Küçük çokgene yaklaşıyor.				7
24:08	A	Hı! Hı!				
24:09	G	Ve alan uzunluğa dönüşüyor.				7
24:17	A	Hı! Hı! Ne uzunluğuna?	6			
24:26	G	Çokgenin uzunluğuna.				7
24:28	A	Çokgenin uzunluğu yok ki.	6			
24:31	G	Çevresi.				7
24:32	A	Ha çevre uzunluğuna. Tamam. Çevre uzunluğuna demek istedin. Yazsan daha iyi olur çevre uzunluğu diye.	6			

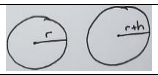
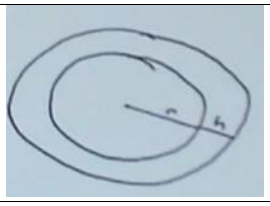
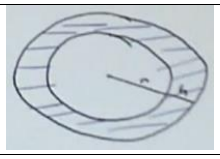
24:37	G	Tamam.	1	2	7
					
24:47	A	Teşekkür ederim Gaye, dördüncü oturumu da hallettik. Alan çevre türev ilişkisi bitmiş bulunmaktadır.			
24:53	G	Hocam, sekizgen mi gelecek ne olacak, korkuyorum.			
24:57	A	N-gen…			
24:58	G	Ama n tane olduğu için gerek yok.			

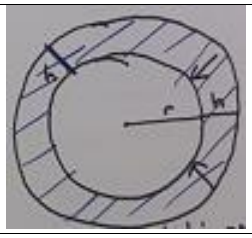
EK-10: Ömür 1. Oturum (Dairede Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi)

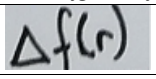
			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
00.01	A	Şimdi Ömür dairenin alanının formülünü biliyorsun değil mi?	1			
00.12	Ö	$3\pi r^2$ miydi acaba?				1
00.14	A	Daire, daire küre değil.	6			
00.16	Ö	πr^2 miydi?		2	2	1
00.18	A	πr^2 evet.				
00.20	Ö	yazayım mı?				1
00.21	A	Yaz. Yanına yaz dairenin alanı yaz. Dairenin çevresi?	1			
						
00.40	Ö	Dairenin çevresi…				1
00.57	A	$2\pi r$ Tamam. Bu arada kamera sadece defteri çekiyor. Ömür.	6			
01.16	Ö	Tamam. Fark etmez hocam.		2	2	1
01.20	A	Bu iki $2\pi r$ ile πr^2 arasında bir ilişki var mı?	1			
01.25	Ö	Evet var.				1
01.26	A	Nasıl bir ilişki var?				
01.32	Ö	İlişkisi, r^2 ye göre türevdir.		1	3	2
01.33	A	Türevidir. πr^2'nin türevini aldığımızda bu olur değil mi?				
01.35	Ö	Evet.				2
01.36	A	$2r$ oluyor, π zaten sabit. Bunun sebebi ne?	1			
01:42	Ö	Bilmiyorum, nasıl yani hocam?		1	1	2
01:45	A	Niye böyle bir ilişki var? Tesadüfi bir ilişki mi yoksa?	1			
01.50	Ö	Türevin kendi durumuna göre alanla çevre arasındaki bir ilişkisi olabilir. Tesadüfi değildir diye düşünüyorum. Çünkü π sabit bir şeydir. Ama r daireden daireye değişebilir.		1	3	2
02.08	A	Anladım. Daha önce hiç böyle bir şeyle karşılaştın mı?	1			1
02.12	Ö	Yeni fark ettim şimdi.		1	3	2
02.16	A	Onu bir sorgulayalım bakalım. Acaba tesadüfi bir şey mi? Değil mi? Matematiksel bir alt yapısı var mı, arka planda? İlginç bir durum birinin türevini alıyorsun çevreyi veriyor. Garip değil mi?	1			
02:30	Ö	Evet.		1	2	2
02:31	A	Limitin genel denklemini hatırlıyor musun? Türevin genel denklemi pardon.	1			
02.42	Ö	Türevin ki limit olarak yazılır..				1
02:43	A	Hı! Hı! Limit.	6			
02:44	Ö	Limit $f(x+h)$ eksi miydi?				1
02:54	A	Eksi.	6			
02:55	Ö	Eksi $f(x)$ bölü h, h da sıfıra giderken		2	2	2
						
03.08	A	Evet. Tamam! Şimdi Ömür, şey, bunu (dairenin alanını işaret ediyor) bir fonksiyon olarak yazarsan alanı. Nasıl bir fonksiyon olur?	1			
03.20	Ö	x'in yerine olarak mı yazayım? h'a göre yazarsak eğer limit h sıfıra giderken… Bunu direk yazsak şöyle?				1
03:34	A	Ne yazacaksın?	6			
03:37	Ö	πr^2 yi		1	1	2
						
03.39	A	Sana şunu soruyorum dairenin alan formülünü fonksiyon şeklinde ifade edebilir miyiz? Alan fonksiyonu.	1			
03:47	Ö	Türevin şeyi olarak limitten ifade edebiliriz.				1
03:49	A	Yok, yok. Şunu (genel türev denklemini) boş ver. Bunu (Dairenin alanı: πr^2) bir fonksiyon olarak ifade edebilir miyiz? Alan fonksiyonu…	6			

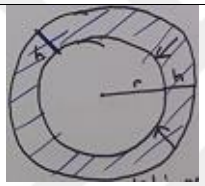
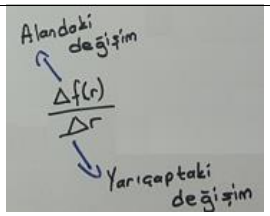
03.57	Ö	Söyleyebiliriz.				1
03.58	A	Yazalım. İfade edelim.	6			
03.59	Ö	$f(x) = \pi r^2$ 'dir.		1	1	2
04.01	A	$f(x) = \pi r^2$?	1			
04:04	Ö	Fonksiyon olarak.				1
04:05	A	Hı! Hı! Ama x var, r var.	6			
04:11	Ö	O zaman böyle olmaz.				1
04:12	A	Böyle olmaz. Bunu nasıl yazmamız lazım?	6			
04.18	Ö	$f(r)$ diye mi?				1
04.19	A	Hı! Hı! $f(r)$ eşittir şuraya yaz.	6			
04:27	Ö	$f(x) = \pi r^2$		1	2	2
						
04:28	A	Evet, tamam. Güzel. Peki burada bağımsız değişken hangisi. Şu fonksiyonda. Bağımsız değişken?	1			
04.42	Ö	Bağımsız değişken hiçbir şeyden etkilenmeyen…				1
04:46	A	Hı! Hı!	6			
04:47	Ö	Bağımlı değişkenler bağımsızın etkilemesi sonucu ortaya çıkanlardır. π bağımsız bir değişkendir.		1	1	2
04:54	A	Sabittir.	1			
04:55	Ö	Sabittir zaten				1
04.55	A	π değişken midir? Değişiyor mu?	6			
05.00	Ö	Hayır.				1
05.02	A	Geçen gördüm. Böyle bir değişmiş falan filan. (Gülümseme) Elinde de teşbih vardı. Dedim ayıp oluyor, değişme be kardeşim.	6			
05.13	Ö	(Gülümseme) O zaman r'yi sabitleyeceğiz herhalde. Verdiğimiz sayı sabittir mesela. Dairenin alanı değişiyor o zaman.		1	2	2
05.22	A	r bağımsız değişken r'ye bağlı olarak ne değişiyor?	1			1
05.25	Ö	Dairenin alanı değişiyor.		1	3	2
05.27	A	Değişiyor. Tamam. Güzel alan bağımlı bağımsız değişkeni anladık. Tamam, sıkıntı yok. O zaman bunu $x, f(r)$ cinsinden ifade et.	1			
05:38	Ö	Tamam. O zaman yeniden yazayım.				2
05:40	A	Yazmışsın zaten devamını getir. Limit h sıfıra giderken $f(r+\ldots$	6			
05:44	Ö	$\frac{f(r+h)-f(r)}{h}$		1	2	2
						
05:50	A	Güzel tamam. Açalım mı?	1			
05.54	Ö	Direk şey olarak mı, buraya yazdığımız gibi? ($f(r) = \pi r^2$ ifadesini işaret ediyor)				2
05:55	A	Hı! Hı!	6			
05:56	Ö	Limit h sıfıra giderken $\pi r^2 + f$'de mi diyoruz? $+h$		1	1	2
06.20	A	Bu böyle mi olur?	1			
						
06.23	Ö	Direkt böyle yazdım hocam.				1
06.25	A	Bu fonksiyon nasıl bir fonksiyon? Parantez içini ne yapıyor? ($f(r) = \pi r^2$ ifadesini işaret ediyor)	6			
06.29	Ö	Direkt kendi içine alıyor.		3	1	1
06.31	A	Parantez içinde ne var? Burada.	1			
06:33	Ö	r var.				1
06:34	A	r var. r'nin ne yapmış?	6			
06.37	Ö	πr^2		3	2	1
06.38	A	r'nin karesini almış…	1			
06:39	Ö	Evet.		3	2	1
06:40	A	…π ile çarpmış. Parantez içi cinsinden ifade edelim. Parantez içinin ne yapmış? Parantez içinin neyini almış?	1			
06.50	Ö	Karesini almış.				1
06.52	A	π ile çarpmış. Parantez içinin karesini alıp π ile çarpmış. Bu fonksiyon öyle bir fonksiyon.	6			
07.00	Ö	Komple karesini alıp π ile mi çarpmış?		2	2	1

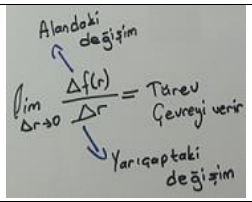
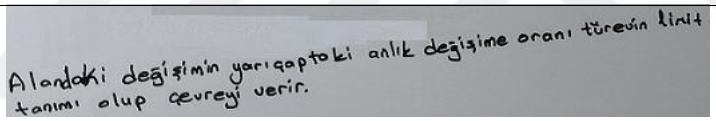
07.02	A	Burada parantez içinde ne var?	1			
07.04	Ö	$r + h$ var.		3	2	1
07.05	A	O zaman bunun ne yapacağız?	1			
07.08	Ö	Karesini alıp				1
07.09	A	Ne ile çarpacağız?	6			
07.10	Ö	π ile çarpacağız.		3	2	1
07.10	A	Tamam! O zaman şurası gitti şöyle önemli değil şuradan itibaren yaz. (yanlış yazılan ifadenin üstünü çiziyor.)	1			
07.19	Ö	Limit h sıfıra giderken… Im! Nasıl olacak?				1
07.27	A	Tamam. Şunu boş ver. (Katılımcı yanlış yazmış olduğu $\lim_{h\to 0} \frac{f(\pi r^2+h)-}{}$ ifadesine takıldığı için araştırmacı bu ifadenin üstünü tekrar çiziyor.) Şurası gitti. Burada gitsin. Şu! (Genel türev denkleminin payda kısmındaki $f(r+h)$ ifadesinin üstünü mavi kalem ile çizip katılımcının bu ifadeyi açmasını istiyor.)	6			
07.35	Ö	r çarpı… $r + h$'ın karesi çarpı π olacak.				2
07.46	A	Eksi…	6			
07.46	Ö	Eksi $f(r)$ yani $-\pi r^2$ bölü h olacak.		1	2	2
						
07.54	A	Devamını getirelim.	1			
07.55	Ö	Devamını getirirsek açılımın içerisini açarsak yine $r^2 + 2rh + h^2$ ...				2
08:07	A	Hı! Hı!	6			
08:08	Ö	π parantezine de alabilirsek eksi r^2'dir.				2
08:13	A	Hı! Hı!	6			
08:14	Ö	Altı da h olur. r^2'ler gitti.		1	2	2
						
08.19	A	Bir şey söyleyebilir miyim? Bu işlemin (genel türev denkleminin) sonucu ne çıkar, bir öngörün var mı?	1			
08.22	Ö	Evet.				1
08.24	A	Nedir?	6			
08.26	Ö	h zaten giderse...				2
08.27	A	Boş ver onu. (Katılımcının son yazdığı limit ifadesinin üstünü kapatıp genel türev denklemini işaret ediyor.) Şu işlemin sonucu ne çıkar?	6			
08.32	Ö	$2\pi r$ çıkar.				2
08.33	A	Niye?	6			
08.34	Ö	Türevini aldığımız için.		1	2	2
08.35	A	Türevini alıyoruz değil mi? Tamam! Devam et, o zaman.	1			
08.40	Ö	r^2'ler gitti h'lar da kendi aralarında gitti. Bir tane h kaldı. $r + h$ çarpı πr kaldı. h sıfıra giderken şeyleri yaptığımız için sadeleştirmesini h'ı yerine koyabiliriz.				2
09:00	A	Hı! Hı!	6			
09:01	Ö	Bu sayede $2r.\pi$		1	2	2
						
09:04	A	Evet. $2\pi r$				
09:05	Ö	Evet. $2\pi r$				2
09.07	A	Bu da neyi veriyor?	1			
09:08	Ö	Dairenin çevresini.		1	3	2
09:09	A	Çevreyi veriyor. Çevre yazalım. Aynı zamanda türev.	1			1
09:16	Ö	Aynen.		1	2	2
09:17	A	Türev de yazalım. Tamam! Peki, bu ne anlam ifade ediyor? Bunu bir şekille anlatmak isteydik nasıl bir şekil oluştururdu bu?	1			1
09.38	Ö	İlk önce alanı πr^2 olarak zaten bir formülü olacaktır. (Mırıldanma) Ama çevresini hesapladığımızda türeve göre aldığımızda $2\pi r$ yapıyor. Şekille anlatamadım.		1	1	2
09.59	A	Tamam. Peki bu demektir? $f(r+h), f(r)$ ne demektir? (türevin genel denklemi işaret ediliyor.)	1			
10.04	Ö	$f(r)$ πr^2dir.				1
10.06	A	Yani. πr^2 nedir?	6			

10.11	Ö	πr^2 dairenin alanıdır.				2
10.13	A	Nasıl bir dairenin alanıdır? Yarıçapı ne olan bir dairenin alanıdır?	6			
10.20	Ö	Yarıçapı r olan.		1	2	2
10.22	A	Peki bu? (Genel türev denklemindeki $f(r+h)$ işaret ediliyor.)	1			1
10.24	Ö	O da $r+h$ da dairenin yarıçapı $r+h$ olan…		1	2	2
10.31	A	Bir dairenin alanıdır. Tamam! İki tane daire çizelim o zaman.	1			1
10.35	Ö	Tamam.		1	2	2
						
10.42	A	Büyüklükleri aynı mı oldu bunların? (Merkez ve yarıçapları belirtmesini istiyor.)	1			
10.44	Ö	Değil.				2
10.45	A	Hangisi daha büyük?	6			
10.46	Ö	Bu daha büyük ondan. (Sağdaki yani yarıçapı $r+h$ olan daireyi işaret ediyor.)				2
10.48	A	Tamam.	6			
10.50	Ö	Buraya r deriz.				2
10:51	A	Hı! Hı!	6			
10:52	Ö	Buna da $r+h$.		1	2	2
10.58	A	Tamam! Bu neydi? (Genel türev denklemindeki $f(r+h)$ işaret ediliyor.)	1			
11.02	Ö	Yarıçapı $r+h$ olan…				2
11.05	A	Dairenin…	6			
11.08	Ö	Alanı.				2
11.09	A	Alanıydı. Güzel. Tamam. Biz aslında ne yapmışız. Bir alandan bir alanı çıkartmışız. Hangi daireden hangisini çıkartmışız.	6			
11.18	Ö	Büyük daireden küçüğü çıkartmışız.		1	2	2
11.19	A	Tamam. Aynı merkezli olacak şeklide bunları çizebilir misin? Eş merkezli olacak şekilde. (Öğrenci "çizebilirim" der)	1			
11:23	Ö	Çizebilirim.				2
11:24	A	Hı! Hı! Biraz daha büyük çiz. Elini korkak alıştırma. Ne demiş atalarımız korkanın çocuğu olmaz demiş. r.	6			
11.38	Ö	r dersek.				2
11.39	A	Bir, ikisine… Hı! Hı!	6			
11.42	Ö	Mesela şu r'yi hiç şey yapmadan iç içe mi yazayım?				2
11.46	A	Eş merkezli olurlarsa, aynı merkezli olurlarsa konumları nasıl olur?	6			
11.52	Ö	Biri daha büyük biri daha küçük olması lazım. İç içe çizilir.				2
11.56	A	Tamam!	6			
12.05	Ö	Burası da h olur.		1	2	2
						
12.06	A	Tamam güzel. Sıkıntı yok değil mi? Tamam hangi alandan hangisini çıkartmıştık.	1			
12.14	Ö	$r+h$'tan büyükten onu (eliyle içteki küçük daireyi işaret eder) çıkarttığımızda sadece…				2
12.18	A	Neresi kalır? Tarasana şununla tara. Güzel. Tamam. Bu çıktı değil mi?	6			
12.34	Ö	Evet.		1	2	2
						
12.34	A	Bu neye benziyor?	1			1
12.36	Ö	Tekerlek.		1	3	2
12.37	A	Tekerlek. Sensin tekerlek. (Gülüşme) Çok hoş bir tekerlek oldu, çok yakışıklı bir tekerlek oldu, bunu yapan adam öldü gözleri kör oldu. Peki, Ömür! Bu ne anlama geliyor, bu ne? (Genel türev denklemindeki $\lim_{h\to 0}$ ifadesi işaret ediliyor.)	1			
13.00	Ö	(Gülüşme) Limit h sıfıra giderken…				2

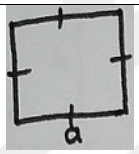
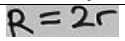
13.03	A	Bu olduğu (genel türev denklemindeki $\lim_{h\to 0}$) zaman bu (iç içe geçmiş daireler işaret ediliyor) ne olur?	6			
13.08	Ö	Limit h sıfıra giderken yani sıfır olur.		1	2	2
13.14	A	h'ı sıfıra götürdüğünde o şey, o tekerlek nasıl değişir orada? Şekil nasıl değişir?	1			
13.20	Ö	h sıfıra götürdüğüm zaman sadece bu (içteki dairenin çevresini işaret ediyor) mu kalır? İç kısmı mı kalır?		1	2	2
13.24	A	Yani o alan, alanı ne olur? Hangisi hangisine yaklaşır?	1			
13.30	Ö	Bu (dıştaki) buna (içteki) doğru gelmeye başlar.		1	2	2
13.31	A	Okla göster. Tamam! O ona doğru gelecek. Peki! Gitgide o alan nasıl olur?	1			
						
13.41	Ö	Küçülmeye başlar.		1	2	2
13.42	A	Ne kadar küçülebilir maksimum?	1			
13.45	Ö	Limite göre…				2
13.46	A	Sıfır olmaz.	6			
13.49	Ö	Yakına gelene kadar, yanaşır.		1	2	2
13.50	A	Tamam! Kalınlığı sıfıra yakın olur.	6			
13.53	Ö	Evet!				2
13.54	A	Ama alan kaybolur mu?	1			
13:55	Ö	Hayır.				2
13:56	A	Alan neye dönüşür?	6			
13.58	Ö	Küçülmeye başlar.		1	2	2
13.59	A	Neye dönüşür?	1			
14:00	Ö	(Sessizlik)				2
14:04	A	Yani gitgide küçülecek alan gitgide küçülecek. Küçülürse ne olur? Neye dönüşür? Nasıl bir şeye dönüşür?	6			
14.15	Ö	Küçülürse. Alan küçülürse gittikçe içine gelmeye başlar. Yani türevi de küçülmeye başlar. Sayısal değeri de küçülmeye başlar.		1	3	2
14.26	A	Problemimiz neydi?	1			
14.30	Ö	Problemimiz r'den		1	3	2
14.33	A	En baştaki problemimiz neydi? İlk başta neyi sormuştum?	1			
14.36	Ö	Dairenin alanını sormuştunuz.		1	2	1
14.39	A	Tamam. Alanını sonra çevreyi sormuştum.	1			
14.42	Ö	Çevreyi sormuştunuz.				2
14.43	A	Sonra.	6			
14.44	Ö	Sonra bunların arasında bu ikisi arasında ilişki var mı?		1	2	2
14.47	A	Sen ne demiştin.	1			
14.48	Ö	Var dedim.		1	3	2
14.49	A	Türev ilişkisi.	1			
14.50	Ö	Evet. Türev ilişkisi var.		1	2	2
14.51	A	Bizim şimdi yani ne, ne yaptığımız zaman neyin… (öksürük) O türev ilişkisi nasıl bir ilişkiymiş?	1			
15.00	Ö	Türev ilişkisi gittikçe küçülmesi.		4	1	2
15.02	A	Yok, yok. Alanın türevini aldığımız zaman neyi veriyor?	1			
15.06	Ö	Çevresini veriyor.		1	2	2
15.08	A	Çevreyi veriyor.	6			
15.09	Ö	Evet.				2
15.09	A	Acaba gerçekten alanın türevi çevreyi veriyor mu? Uğraştığımız şey o.	6			
15:12	Ö	Evet.				2
15:13	A	Şimdi geldiğimiz noktaya tekrar dönelim. Tekrar öne alalım. h'ı sıfır yaptığımız zaman taralı alan neye dönüşür?	1			
15.26	Ö	Yavaş yavaş küçülmeye başlar, alanı…				2
15.30	A	Sonuç ne oluyor? (Genel türev denkleminin devamındaki $= 2\pi r \rightarrow Çevre$ ifadesi işaret ediliyor.)	6			
15.32	Ö	$2\pi r$ oluyor. Çevre oluyor. Çevreye dönüşüyor.		1	2	3
15.39	A	Ne anladın?	2			

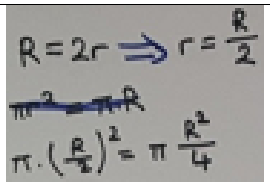
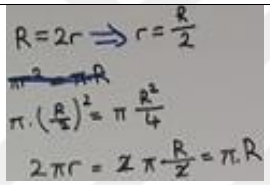
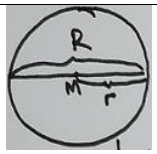
15.40	Ö	Gittikçe çevre oluyor. Alan çevreye dönüşüyor.		1	3	3
15.49	A	Mantıklı geliyor mu?	2			
15.51	Ö	Gelmiyor. Çok şey oldu. Alan küçüldükçe çevre, alan çevreye dönüşüyor. Alan… Çevre…		4	3	2
16.06	A	Bir insanı ne kadar aç bırakırsan bırak. Zayıflar. Yok olur mu?	1			
16.10	Ö	Hayır.				1
16.12	A	Olmaz. Bak böyle bir çöp adam olur. Ama yine olur. Çöp adamın neyi vardır. Hacmi var mıdır?	6			
16.19	Ö	Vardır.				1
16.21	A	Çöp adam. Cinaliler vardı ya. Bir şey var mı? Yüzey alanı var mı?	6			
16.30	Ö	Ufak da olsa var.				1
16.32	A	Ufak da olsa var. Ama orada çizginin kalınlığı ihmal edilebilir.	6			
16.35	Ö	O zaman şey olmaz yani bir etkisi yoktur.				1
16.35	A	Sadece alanı olmaz artık.	6			
16:39	Ö	Evet.				1
16:40	A	Neye dönüşür bu? Alan yoksa neye dönüşür bu?	6			
16.44	Ö	Çevreye dönüşür.		1	2	3
16.45	A	Çevreye değil. Uzunluğa dönüşür.	1			
16.47	Ö	Evet.		1	2	3
16.49	A	Alanın türevini aldığım zaman ne oluyormuş?	1			2
16.52	Ö	Çevreye dönüşüyormuş.		1	2	3
16.53	A	Çevreye dönüşüyormuş. İlginç değil mi?				
16.55	Ö	Evet.				2
16.58	A	O zaman sözel olarak ifade edecek olsaydın şu ifadeyi. Toparla bir tartışmayı biz ne yaptık?	1			
17.06	Ö	Dairenin alanı muhabbetinden $2\pi r^2$'den çevresine baktık. $2\pi r$ olarak bulduk. Bu türev olarak r'nin türevi olarak ortaya çıkıyor. $2\pi r$ olarak. Tabi π sabit bir sayı olduğu için direkt aynısı yazılıyor. Normal limitten türevin tanımını yaptığımızda da $\pi r^2, 2\pi r$ oluşturuyor. Bunu şey olarak da şekil olarak da çizdiğimizde h'a göre, türevin tanımından $r+h$ yarıçaplıdan r çaplı bir daireyi çıkarttığımızda alan gittikçe çevreye dönüşüyor. Bu da bir türev tanımını ortaya çıkartıyor.				2
17:56	A	Hı! Hı!				
17:57	Ö	Yani, dairenin alanı türeve göre dairenin çevresine dönüşmüş oluruz yani.		1	3	3
18.05	A	Tamam. Peki değişim oranı cinsinden ifade edecek olsaydık. Burada neler arasındaki fark bu? (Genel türev denkleminin pay kısmı işaret ediliyor.)	1			
18.16	Ö	$r+h$ yarı çaplı r yarı çaplı				2
18.20	A	Bunlar nelerin farkı? Şurası neyin farkı şurası? (Genel türev denkleminin pay kısmı işaret ediliyor.)	6			
18.29	Ö	(Mırıldanma)				2
18.32	A	Şu neyin farkı? (Genel türev denkleminin pay kısmı işaret ediliyor.)	6			
18.35	Ö	İki tane fonksiyonun.				1
18.37	A	Tamam. Ne fonksiyonu onlar?	6			
18.42	Ö	İki tane alanın.		1	2	3
18.43	A	İki alan farkı.				
18.44	Ö	Evet.				2
18.45	A	Tamam. O zaman şöyle bir delta şuraya yazalım. Delta alan diyelim.	1			
18:51	Ö	Delta?				2
18:52	A	Delta üçgen var ya. Üçgen alan, alan diye $f(r)$ diyelim.	6			
						
18.59	Ö	$f(r)$ mi?				2
19.00	A	$f(r)$. Parantez içinde, r. Peki, şu h nedeki fark? (genel türev denklemin payda kısmı işaret ediliyor.) Şekle bak.	6			
19.09	Ö	h da ikisinin arasındaki.				2
19.11	A	İkisi dediğin, hangi ikisi? Şekle bak, şekle.	6			
19.16	Ö	Şekle göre $f(r+h)$ büyük daire ile $f(r)$'nin küçük dairenin arasındaki farkın…				2
19.24	A	Neleri arasındaki fark? h dediğimiz şey neyin farkı, h tek başına nedir?	6			
19.31	Ö	En büyük dairenin. Şey sadece eeee büyüğün küçüğe göre farkı.				2
19.38	A	Tamam. Büyüğün küçüğe göre ne farkı? Çevresinin farkı mı? Alanının farkı mı?	6			
19.43	Ö	Alanının farkı.		1	3	2
19.44	A	Alanının farkı burasıdır (Genel türev denkleminin pay kısmı işaret ediliyor). Alanının farkı yukarısında.	1			
19.48	Ö	Uzunluğunun farkı.				2
19.49	A	Ne uzunluğunun?	6			
19.51	Ö	Çevre uzunluğunun.		1	3	2

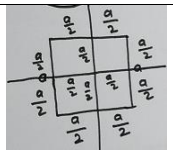
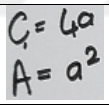
19.52	A	Çevre uzunluğunun. Peki, şunun yarıçapı kaç? (İlk çizdiği daire işaret ediliyor, bunun yarıçapı r kadar.)	1			
19.56	Ö	r		1	2	2
19.58	A	Şunun yarıçapı kaç? (İkinci çizdiği daire işaret ediliyor, bunun yarıçapı $r + h$ kadar.)	1			
19.59	Ö	$r + h$		1	2	2
20.01	A	Şunun kalınlığı ne kadar? (İç içe geçmiş daireler arasında taranmış olan halka işaret ediliyor.)	1			
20.03	Ö	h kadar. Daha büyük.		1	2	2
20.05	A	h neymiş o zaman? h kadar olduğunu nereden söyledin? Neye bağlı olarak söyledin?	1			
20.11	Ö	İkisinin arasındaki farka göre.		1	2	2
20.12	A	Tamam. Bu ikisi dediğin ne? Hangi ikisi? İkisi dediğin şeyler ne?	1			
20.18	Ö	İki fonksiyonun…		1	1	2
20.21	A	Tamam tekrarlayalım. Tekrar soralım. Şunun yarıçapı kaç? (İlk çizdiği daire işaret ediliyor, bunun yarıçapı r kadar.)	1			
20.25	Ö	r yarıçap		1	2	2
20.27	A	Bunun yarıçapı kaç? ? (İkinci çizdiği daire işaret ediliyor, bunun yarıçapı $r + h$ kadar.)	1			
20.28	Ö	$r + h$		1	2	2
20.30	A	Şunun kalınlığı ne kadar? (İç içe geçmiş daireler arasında taranmış olan halka işaret ediliyor.)	1			
20.32	Ö	h birim kadar.		1	2	2
20.33	A	Şuraya h yaz. (Şeklin sol üst köşesi işaret ediliyor. Araştırmacı, doğrusal olarak gösterilen r ve h uzunluklarının karıştığını ve bunun yarıçaplar arasındaki fark olgusunu ortaya koymadığını düşünüyor.)	6			
20.35	Ö	h birim kadar.				2
						
20.36	A	h , tamam.	6			
20.37	Ö	Evet.				2
20:38	A	Bu h dediğim şey aslında ne? Bunun kalınlığı.	1			
20:41	Ö	Evet.				2
20.43	A	Peki, bu h'ı neye bağlı olarak bulduk?	6			
20.48	Ö	Büyük olan, büyük olan daireden küçük olana göre.				2
20.52	A	Tamam. Ne? Neyi, nelerinin farktır o? Nelerinin farkıdır?	6			
20.59	Ö	Yarıçapların.		1	2	2
21.01	A	Hah! Yarıçapların farkıdır. Güzel. Bölü delta r yap. Bölü delta r .Şimdi bu alandaki değişim şurası. (Pay kısmı işaret ediliyor.)	1			
						
21.11	Ö	Evet.		1	2	2
21.13	A	Yaz alandaki değişim. Şu nedeki değişimdir? (Pay kısmı işaret ediliyor.)	1			
21.24	Ö	Yarıçaplar arasındaki değişim.		1	2	2
						
21.27	A	Yarıçaptaki değişim. Tamam! Yani, şurası (Genel türev denkleminin pay kısmı işaret ediliyor) alandaki değişim bölü yarıçaptaki değişim (Genel türev denkleminin payda kısmı işaret ediliyor.) Yarıçaptaki değişimi ne yapmamız lazım? Şurayı sıfıra götürmemiz lazım. Çünkü h'ı sıfıra götürüyoruz. Limit. Limit Δr sıfıra giderken. Δh dediğimiz şey Δr.	6			
21:54	Ö	Evet.				2
21:55	A	Tamam, bu bize neyi veriyor?	1			
22.01	Ö	Bu bize türevi.		1	2	2
22.02	A	Eşittir, türev dedik. Türev veriyor, bir.	6			
22.10	Ö	Türev.				2

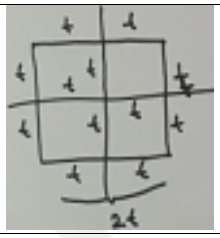
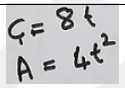
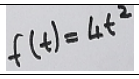
22.12	A	Başka neyi veriyor?	1			
22.16	Ö	Bize hem de ikisinin çevresini, çevresine ulaşmamızı sağlıyor.		1	2	3
						
22.21	A	Tamam, çevreyi veriyor. Peki, sözel olarak ifade edecek olsak.	1			2
22.35	Ö	İlk olarak alanların arasındaki farkın yarıçaplar arasındaki farka oranına baktığımızda zaten bu bir türev tanımı oldu. Hem de çevreyi verdi.		1	2	3
22.51	A	Tamam. Fark değil, değişim diyelim.	6			
22.55	Ö	Değişim.				2
22.56	A	Tamam. Alanları arasındaki değişimin...	1			
23.00	Ö	Yarıçaplar arasındaki değişime oranı hem türevin tanımını, limitle de türevin tanımını verir. Hem de çevreyi bize buldurur.		1	2	3
23.09	A	Cümle olarak yaz. (Katılımcı "alanlar… diye başladığı için araştırmacı düzeltiyor.) Alandaki değişimin. Alanlardaki değil. Bak bu aslında bizim sonradan eklediğimiz sanal bir şey, çember. Gitgide küçülen bir çember. Alan, alandaki değişimi diyelim.	1			
23.31	Ö	Alandaki değişimin yarıçaptaki…				2
2.39	A	Çaptaki.	6			
23.41	Ö	Çaptaki				2
23.41	A	Dur. Δr'yi sıfıra götürüyorsak eğer anlık demektir bu.	6			
23.48	Ö	Evet, anlık.				2
23.48	A	Anlık değişime	6			
23.56	Ö	Anlık değişime oranı türevin tanımı olup (sonradan türevin kelimesi ile tanımı kelimesi arasına ekleme yapıyor) limit, tanımı olup bize çevreyi verir.		1	2	3
						
24.24	A	Güzel. Sıkıntı var mı?				
24.25	Ö	Yok. Hayır.				
24.27	A	Nasıl?				
24.30	Ö	Daha basite indirgenmiş oldu. Ben yeni fark ettim.				
24.36	A	Yani genel olarak bu tartışma hakkında ne düşünüyorsun?				
24.40	Ö	Genel olarak mesela dairenin veya başka bir şeyin alanından çevreye geçmek istersem sabitler hariç yarıçapla yani diğer değişim alanlarına göre hareket edip çevreye ulaşabilirim artık.				
24.58	A	Daha önce hiç böyle bir şeyle karşılaşmış mıydın?				
25.00	Ö	Yok. Şimdi yeni fark ettim ben.				
25.04	A	Peki ne yani fark edince ne oldu?				
25.09	Ö	Fark ettim ki yani türevle… Türevde yani sadece kendi alanları ile başka alanlarda da, başka alanların içinde de bir katkısının olduğunu anladım.				
25.25	A	Garip bir şey dimi? İlginç.				
25.26	Ö	Evet.				
25.26	A	İlginç bir şey ben mesela ilk gördüğümde şaşırmıştım.				
25.31	Ö	Bende şimdi şuan… Yeni fark ettim.				
25.36	A	Teşekkür ederim, Ömür. Bu birinci oturum.				
25.39	Ö	Ben teşekkür ederim.				

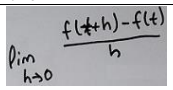
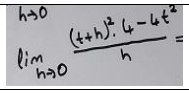
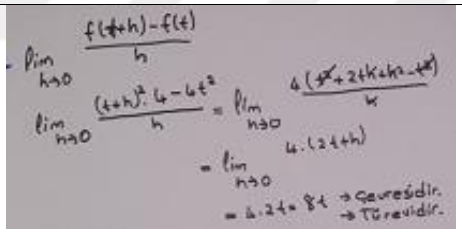
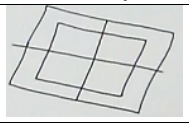
EK-11: Ömür 2. Oturum (Karede Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi)

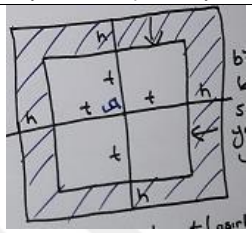
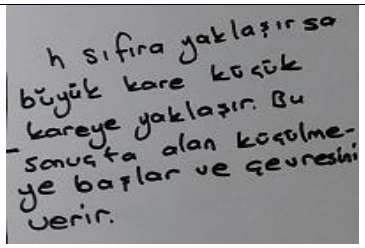
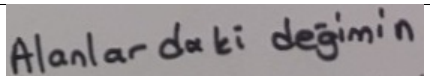
			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
00:01	A	Şimdi Ömür! Ben şeyi merak ediyorum. Bu şeyde sağlıyor mu? Çemberde dairede sağladı da. Bu acaba şeyde sağlar mı? Karede falan sağlar mı?	1			
00:18	Ö	Denemek lazım.				2
00:20	A	Deneyelim bakalım.				
00:21	Ö	Karenin alanı… (Sayfanın ortasına yazma girişimi var.)				2
00:23	A	Biraz daha öteden başla. Orası bize lazım olacak. (Sayfanın sol üst köşesine yazmasını söylüyor.)				
00:36	Ö	a^2'dir karenin alanı. Karenin çevresi, karenin çevresi ise $4a$ 'dır.				2
						
00:58	A	Hı! Hı!				
01:02	Ö	Sağlamadı.		1	3	2
01:03	A	Sağlamadı.				
01:04	Ö	Aynen.				2
01:06	A	Kare çizebilir misin? Aslında bu (Alan ve çevre fonksiyonlarını işaret ediyor.) nasıl bir kare? Bu kare nasıl bir kare?	1			
						
01:16	Ö	Her kenarı eşit.		1	3	1
01:17	A	Tamam! Kare dediğin genelde her kenarı eşit olur. (Gülüşme)				
01:21	Ö	(Gülüşme) Evet.				1
01:28	A	Alanını neye göre belirledin? Hangi uzunluğa göre belirledin?	1			
01:30	Ö	Bir kenarının, tek bir kenarının karesi.				1
01:32	A	Tamam! Bir kenar uzunluğu ne kadar o zaman?				
01:35	Ö	Bir kenarı hepsi a'dır. Şöyle çizeyim. (Çizimdeki dörtgenin kenar uzunluklarının eşit olduğuna yönelik çizgileri yerleştiriyor.)		1	2	2
01:43	A	a'dır. Eşittir. Peki! Dairenin çapıyla çevresi arasında nasıl bir ilişki var?	1			
01:51	Ö	Dairenin çapıyla çapı büyük R olur.				1
01:55	A	Hı! Hı!				
01:56	Ö	Çevresi, $2\pi r$ idi.				1
02:01	A	Yaz bakalım! Büyük $R =$ kaç tane var bunda…	6			
02:09	Ö	2 tanedir.		1	2	1
02:10	A	2 tane küçük r'dir. (Katılımcı yazıyor.) Tamam! Dairenin alanı neydi?	1			
						
02:16	Ö	πr^2'dir.		1	3	1
02:18	A	Yazalım.				
02:19	Ö	πr^2				1
02:21	A	O da eşittir, büyük R cinsinden yaz.	1			
02:27	Ö	πr 'dir. (Muhtemelen $R = 2r = r^2$ gibi bir karışıklık oldu.)				2
						
02:33	A	Kare demek iki tane r'nin çarpımı mı demek? $2.r$ midir? (Üst anlamında kare ifadesi kullanılıyor.)	6			
02:42	Ö	İki tane a… (Muhtemelen geometrik şekil olan kare anlaşılıyor.) Alanı, ım! Büyük R olarak $2r$'nin karesi ettiği için büyük R olur. Şimdi…				1
03:07	A	Tamam! Küçük r'yi büyük R cinsinden yazar mısın, yukarıdaki denklemde?	6			
03:14	Ö	Nasıl?				1
03:17	A	Küçük r eşit ise küçük $r =$	6			
03:24	Ö	Büyük R bölü 2.				2

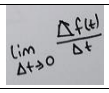
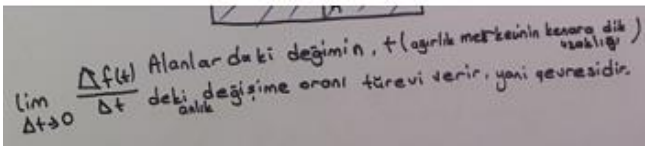
03:26	A	Tamam! Alan fonksiyonunda yerine yazarsan.	6			
03:35	Ö	$\pi(\frac{R}{2})^2$ dir.				2
						
03:41	A	O da eşittir?	6			
03:42	Ö	O da eşittir $\frac{\pi R^2}{4}$'tür.		3	2	2
03:48	A	Demek ki şu hatalı. (Şekildeki üstü çizilen yeri gösteriyor.) Sen karesini alınca sanki ikiyle çarpmış gibi oldun.				
03:56	Ö	Aynen				2
03:57	A	Şunu geçtik. (Yanlış yazılan ifadenin üstünü çiziyor.)				
03:59	Ö	Tamam.				2
04:00	A	Çevresi nedir?	1			
04:02	Ö	Çevresi, $2\pi r$.		1	3	1
04:04	A	Tamam! Yazalım.				
04:07	Ö	$2\pi r$ olur.				1
04:09	A	Büyük R cinsinden yazalım.	1			
04:14	Ö	$2\pi \frac{R}{2}$				2
04:19	A	O da eşittir?	6			
04:20	Ö	2'ler sadeleşir. πR olur.		1	2	2
						
04:27	A	Peki, türev ilişki sağlıyor mu?	1			
04:29	Ö	Evet.				2
04:30	A	Hı?	6			
04:31	Ö	Evet. Türev, sağlıyor.		1	1	2
04:33	A	Şunun türevi, şu mudur? (Sırasıyla dairenin çap değişkenine göre alanı ve çevresi işaret ediliyor.)	1			
04:36	Ö	Türev olarak mı?				2
04:37	A	Hı! Hı!				
04:38	Ö	İki… Hayır.		1	2	2
04:42	A	Demek ki dairede çapa göre aldığımız zaman sağlıyor mu?				
04:47	Ö	Hayır.				2
04:48	A	Bir tane daire çizer misin? Şu karenin altına.	1			
04:51	Ö	Tamam.				2
04:52	A	Hı! Hı!				
						
04:59	A	Çap dediğimiz şey nedir?	6			
05:02	Ö	Burasıdır. (Daire çiziminde çapı çizerek belirtiyor.)				2
05:05	A	Yarıçap dediğimiz?				
05:07	Ö	O da burasıdır. (Daire çiziminde yarıçapı çizerek belirtiyor.)	6			2
05:10	A	Şuna (Kalem ile yarıçap uzunluğu işaret ediliyor.) göre sağlarken şuna (Kalem ile çap uzunluğu işaret ediliyor.) göre?				
05:14	Ö	Sağlamıyor.		1	2	4
05:15	A	Sağlamıyor. Karede de şuna (kenar uzunluğu işaret ediliyor.) göre sağlamıyor.	1			
05:20	Ö	Anladım! Evet.		1	2	4
05:24	A	Bu nokta nasıl bir nokta? (Dairenin merkezi işaret ediliyor.)	1			
05:26	Ö	Merkezi nokta.		1	3	1

05:28	A	Merkezi nokta. Karede ne yapmamız lazım? Nasıl bir model oluşturursak acaba sağlar?	1			
05:37	Ö	İkiye mi bölelim karede?				2
05:39	A	Bölelim.	6			
05:40	Ö	Böyle ikiye bölmek daha kolay olur. (Eliyle ilk çizdiği kareyi bölme işareti yapıyor.)				2
05:42	A	İkiye böl, alta çiz. Biraz daha büyük çiz.	6			
						
05:53	Ö	İşte. Bunu ortadan ikiye bölsek $\frac{a}{2}$ olur. (Kareyi dikey eksende bölüyor ve alt kenarın sol uzunluğunu yazıyor.) Dolayısıyla burası da $\frac{a}{2}$ olur. (Alt kenarın sol uzunluğunu yazıyor.) Buralar a'dır. (Sol ve sağ kenar uzunluklarını belirtiyor.) Burayı da bölebiliriz. (Karenin yatay simetri eksenini eliyle işaret ediyor.)				2
06:14	A	Orayı da böl.	6			
06:15	Ö	Böleyim. Buralar da $\frac{a}{2}$'dir. (Karenin üst kenar uzunluklarının yarısını belirtiyor.) O zaman buraları da $\frac{a}{2}$ olur. (Karenin dikey kenarlarının yarılarını belirtiyor.)				2
06:40	A	Hı! Hı! Büyük dairede biz buraya büyük $\frac{R}{2}$ mi dedik? Küçük r mi dedik? (yarıçap uzunluğu işaret ediliyor.)	6			
06:51	Ö	Küçük r dedik, dairede.				4
06:55	A	Karede mesela şu şekil yaparsan sağlar mı? (Katılımcının çizdiği şekil işaret ediliyor.)	6			
07:01	Ö	Küçük $\frac{a}{2}$ yapsak. Yine sağlıyor. Çevresi olarak.		1	1	2
07:08	A	Çevresi kaç eder?	1			
07:10	Ö	Çevresi $\frac{4a}{2}$'den $2a$ eder.				2
07:16	A	$2a$ mı eder? Tamamının çevresi?	6			
07:18	Ö	A! Tamamının çevresi $4a$ yapar.		1	2	2
07:21	A	$4a$ yapar. Tamamının alanı?	1			
07:25	Ö	Tamamının $4a$ yapar çevresi. (Yazıyor.)				2
						
07:27	A	Alanı?	6			
07:30	Ö	Alanı a^2.		1	2	2
07:32	A	a^2 yapar. Yine sağlamadı.				
07:34	Ö	Yine sağlamadı, evet. Alanı…				4
07:36	A	Yani buraya $\frac{R}{2}$ mi dedik? (Yarıçap uzunluğu işaret ediliyor.)	1			
07:39	Ö	Hayır.				4
07:41	A	Ne dedik? Başka bir şey söyledik.	6			
07:43	Ö	Evet.				4
07:45	A	Karede de başka bir şey söyleyelim bakalım ne olur?	6			
07:48	Ö	(Mırıldanma) Yani?				4
07:50	A	Karede de yine aynı şekilde başka bir... $\frac{a}{2}$ değil de başka bir şey söyleyelim. t diyelim atıyorum.	6			
07:58	Ö	Tamam.		1	2	4
07:59	A	Hı! Hı!				
08:01	Ö	Gene çevresi...	4			2
08:05	A	Yaz, bir şekil çiz, bakalım ne oluyor?	6			
						
08:14	Ö	t desek.		1	1	2
08:17	A	Büyük kenara t demeyeceğiz. Büyük kenara ha t demişsin ha a demişsin.	1			
08:24	Ö	Yine aynı şey olacak.				4
08:25	A	Yine aynı şey olacak. $4t$ olacak, t^2 olacak. (Sırasıyla çevre ve alan işaret ediliyor.)				
08:29	Ö	t^2 evet.		1	2	4
08:30	A	O… Şu merkez, şu uzunluğa $\frac{a}{2}$ dediğimiz zaman sıkıntı oluyor. (İkinci çizdiği kare işaret ediliyor.)	1			

08:36	Ö	Evet.				4
08:37	A	Mesela buraya $\frac{R}{2}$ demedik. $\frac{R}{2}$ dediğimiz zaman sıkıntı olur.	6			
08:40	Ö	Evet. Evet.				4
08:41	A	Büyük $\frac{R}{2}$ demedik. Ne dedik başka bir şey söyledik.	6			
08:45	Ö	O zaman… Evet.				4
08:47	A	Burada da.				
08:50	Ö	Burada da t, t, t, t dersek. (Uzunlukları belirtiyor.)		1	2	4
08:55	A	Hı! Hı!				
08:56	Ö	t, t, t, t (Uzunlukları belirtiyor.)	4			2
09:04	A	Hı! Hı!.				
09:05	Ö	t olur. O zaman burası da $2t$ olur. (Alt kenar uzunluğu)		1	2	2
						
09:08	A	Hı! Hı! Çevre ne olur?	1			
09:13	Ö	Çevresi 4 çarpı $2t$'den $8t$ olur.		1	3	2
09:16	A	Tamam. Çevre $8t$.				
09:22	Ö	$8t$ olur.				2
09:23	A	Alanı?	1			
09:24	Ö	Komplesi.				2
09:25	A	Hı! Hı!	6			
09:27	Ö	$2t^2$ olur. O da $4t^2$ olur.		1	2	2
						
09:33	A	Türevi veriyor mu çevreyi?	1			
09:35	Ö	Evet, veriyor.		1	3	2
09:36	A	Alanın türevi çevreyi veriyormuş.				
09:40	Ö	Evet alanın.				2
09:42	A	Bu şekilde yaptığımız zaman sağlıyormuş.				
09:44	Ö	Evet sağladı.				2
09:46	A	Limitin genel denklemiyle yapalım bunu. Bunu bir fonksiyon olarak belirtebilir misin? Alan fonksiyonu…	1			
09:51	Ö	Belirtebilirim. Söyleyebilirim.				2
09:52	A	Hı! Hı!				
09:53	Ö	Söyleyebilirim.				2
09:54	A	Hı! Hı! Ne diyeceğiz?	6			
09:55	Ö	Limit f…				2
09:56	A	Limit değil, f …	6			
09:58	Ö	t olarak…				2
09:59	A	$f(t)$ eşittir?	6			
						
10:01	Ö	$4t^2$ diyebilirim.		1	2	2
10:04	A	Tamam! Şuradan itibaren şöyle gel. (Araştırmacı mavi kalemle ok çekip sayfanın neresinden itibaren devam edeceğini göstermektedir.)				
10:08	Ö	Tamam.				2
10:10	A	Limit, şeyi de yazalım.	1			
10:12	Ö	Limit olarak aldığımızda t'ye göre, h'a göre…				2
10:16	A	Hı! Hı!				
10:17	Ö	h sıfıra giderken $f(x + \cdots)$				2
10:22	A	t.	6			
10:22	Ö	t olarak alalım.				2
10:23	A	$t + h$	6			

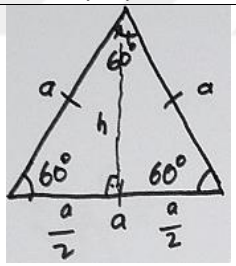
10:23	Ö	$\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ olur.		1	2	2
						
10:29	A	Tamam!				
10:30	Ö	Yerine yazdığımızda t ye göre aldığımızda $\lim_{h\to 0}\frac{(t+h)^2.4-4t^2}{h}$'tır.	4	1	3	2
						
10:54	A	Ne olur onun sonucu? Öngörün var mı?	1			
10:58	Ö	Ya, türev almanın tanımı olduğu için işte hemen türevi aldığımda cevabı bulabilirim $8t$ derim.		1	3	2
11:07	A	$8t$'ye eşit olur. Açıp yapmış da olabilirsin.				
11:11	Ö	Yapayım.				2
11:13	A	Yap, bakalım. Ne olacak?	2			
11:15	Ö	Tamam. Sıfıra giderken 4 parantezimize alıp da açtığımızda.				2
11:20	A	Hı! Hı!				
11:21	Ö	$\lim_{h\to 0}\frac{4(t^2+2th+h^2-t^2)}{h}$ burada t^2 gitti.				2
11:29	A	Hı! Hı!				
11:31	Ö	Buraya h'lardan da birer tane gittiğinde, limit h sıfıra giderken 4. $(2t+h)$ kalır. Sadeleştirmemizi yaptığımız için h'ları yerine koyabiliriz. Ordan da h sıfır olduğu için $4.2t$'dir. O da eşittir $8t$.		1	3	2
12:01	A	Neyi buldun?	1			
12:05	Ö	Çevresini buldum. (Ses tonu bir anda güvenle yükseliyor.)		1	3	2
12:06	A	Çevresini buldun. Yazalım.				
12:10	Ö	Çevresidir.				2
12:12	A	Aynı zamanda neyidir?	1			
12:15	Ö	Aynı zamanda türev tanımı olduğu için türevidir.		1	3	2
12:17	A	Türevidir.				
12:17	Ö	Türevidir.				2
						
12:24	A	Tamam! Sıkıntı yok değil mi?				
12:26	Ö	Hayır.				2
12:27	A	Tamam! Güzel. Şu ne anlam ifade ediyor? $f(t+h)$'tan $f(t)$'yi çıkartmak.	1			
12:40	Ö	E! Burada alanların (E!) çıkartılması şeklinde				2
12:49	A	Şimdi, beni uğraştırma. Dairede zaten sen bunu yaptın.	6			
12:53	Ö	Evet.				2
12:54	A	Benzer şekli burada bir aktar bakalım. Nasıl bir aktarım olacak. Nasıl bir şey olacak? Biraz büyük çiz.	6			
13:02	Ö	Tamam.				2
13:03	A	Elini korkak alıştırma.	6			
13:29	Ö	(Ağırlık merkezleri çakışık ve iç içe iki kare çiziyor. Kenar uzunluklarına değişken atanmıyor.) $2t$ olarak ifade edip de?				2
13:34	A	Şunlar şu şekilde yerleştirmeyi dene. (Katılımcının daha önce çizerek alan ve çevre arasında türev ilişkisini kurduğu şekildeki kenar uzunlukları işaret ediliyor.)	6			
13:37	Ö	Tamam! (yatay ve dikey simetri eksenleri çiziliyor.)				2
13:38	A	Uzatmana gerek yok. Şurada kesebilirsin. (Simetri eksenleri kastediliyor.)	6			
13:42	Ö	Tamam.				2
13:43	A	Tamam. Dikeyini de yap. Hı! Hı!	6			
						
13:52	Ö	Tamam. t burası…				2

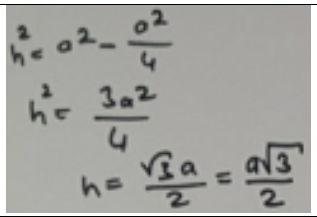
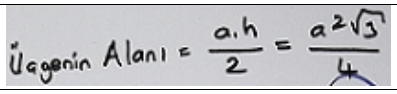
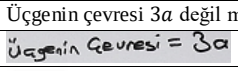
13:56	A	h	6			
13:57	Ö	h olur. Diğerleri de h, h, h, t, t olur.				2
14:06	A	Yani bu iki alanın neyiydi? (Genel türev denkleminin pay kısmı yani alanlar farkı anlamına gelen ifade işaret ediliyor.)	6			
14:09	Ö	$(t + h)$'ın alanı. Ama şu şekilde. Bu şekildedir. (Karesel halka bölgeyi tarıyor.)		1	2	2
14:27	A	Devam et devam et devam et. Bir şey olmaz. Kalem ucuz. Beyin bedava. (Gülüşme) Tamam. Devamını getir. Açıklamanı yap. (Tamamını taraması için teşvik ediliyor.)	1			
14:48	Ö	Açıklaması… giderek.				4
14:51	A	Giderek dediğin ne nereye doğru gidiyor?	6			
14:54	Ö	h, t'ye doğru giderken yani çıkarken yani sıfıra doğru giderken türev şeyine göre tanımladığımızda giderek yaklaşıyor. Ama...				4
15:05	A	Hangisi hangisine yaklaşır? Okla göster.	6			
15:07	Ö	Büyük kare küçük kareye doğru yaklaşmaya başlar.				4
						
15:16	A	Hı! Hı!				
15:17	Ö	Birbirlerine yapışmaya başlar.				4
15:22	A	Alan ne olur?	6			
15:25	Ö	Alan gitgide küçülmeye başlar. Azalmaya başlar.				
15:29	A	Nereye kadar?	6			
15:30	Ö	I! Tam sıfır… Yani tam yaklaşmaz. Yani tam sıfır olmaz ama çok yakınında olur.				
15:36	A	Tam sıfır olduğu zaman ne olur? Alan neye dönüşür? Bu taralı alan neye dönüşecek?	6			
15:40	Ö	Çevreye dönüşmeye başlayacak.		1	2	4
15:43	A	Tamam! Tamam!				
15:44	Ö	Fiziki şeyine dönüşecek.				4
15:45	A	Hı! Hı! O zaman bir açıklamasını yaz şuraya. De ki işte tam yaklaştığı zaman h sıfıra gittiği zaman yaklaşık falan fistan.	1			
15:52	Ö	h sıfıra yaklaşırsa büyük kare küçük kareye yaklaşır.				4
16:20	A	Tamam!				
16:21	Ö	Sonuçta alan küçülmeye başlar ve çevresini verir.		1	3	4
						
16:43	A	Tamam! Değişim oranı cinsinden ifade et.	1			
16:49	Ö	Değişim oranı.				4
16:52	A	Daireden kopya çek.	6			
16:54	Ö	Bakalım.				
16:55	A	Eğer açıklayamıyorsan. Gerek yok diyorsan. Ben kendi başıma yaparım diyorsan o da senin bileceğin iş.	6			
17:01	Ö	(Mırıldanma, eski çalışma kâğıdına bakmıyor.) Büyük $(t + h)$'ın… Bir dakika bakayım. (17:22'de eski çalıma kâğıdına bakıp okuyor.) Alanlardaki değişimin yarıçaptaki anlık değişime oranı türevin limit tanımı olup çevreyi verir. (Mevcut çalışma kağıdına geri dönüyor.) Alanlardaki delta t için…				3
17:35	A	Hı! Hı!				4
17:36	Ö	Alanlardaki değişimin…				
17:41	A	Limit cinsinden yazsana önce. Limit.	6			
17:47	Ö	Limit.				4
						

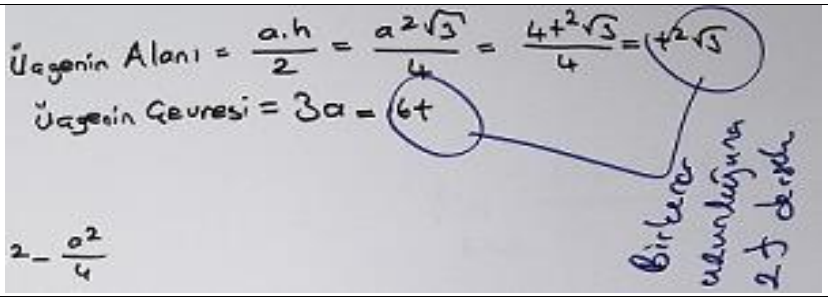
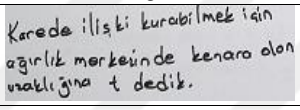
17:48	A	Δt	6			
17:49	Ö	Δt sıfıra giderken Δ alan… $\Delta Alan$ yazayım mı?				4
17:57	A	$f(t)$ yaz. Bölü,	6			
18:03	Ö	Δt				4
18:05	A	Hı! Hı!				
18:06	Ö	O alanlar arasındaki				4
						
18:08	A	Fark.	6			
18:09	Ö	Fark! Farkıyla alanlardaki değişimin				4
18:18	A	Hı! Hı!.				
18:23	Ö	Yarıçapların, buraya yazayım mı?		1	2	3
18:24	A	O yarıçap değil. Burası yarıçap değil. Bu nokta karenin hangi noktasıdır? (Ağırlık merkezi işaret ediliyor.)	1			
18:30	Ö	Merkezi noktasıdır		3	1	1
18:32	A	Merkezi nokta. Özel bir adı var?	1			
18:35	Ö	Odak noktası.		3	1	1
18:36	A	Ne merkezi?	1			
18:39	Ö	Karenin merkezi		3	1	1
18:41	A	Tamam! Ne merkezi oluyor ama?	1			
18:45	Ö	Tam ortası. Bu nasıl? (Mırıldanma)		3	1	1
18:50	A	Açıortayın merkezi mi bu merkezin adı ne?	1			
18:52	Ö	Dik! Dikliğin…		3	1	1
18:58	A	Tam olarak diklik değil. Tamam, diklik merkezi de oluyor özel olarak ama ağırlık merkezi.	6			
19:07	Ö	Ha! Tamam!				1
19:09	A	Ağırlık merkezinin… Bu t dediğimiz şey aslında nedir? Burası ağırlık merkezi. Şurası G.	1			
19:17	Ö	Evet.				2
19:18	A	Ağırlık merkezinin nereye uzaklığıdır t?	6			
19:26	Ö	Ağırlık merkezinin… Diğer kenar uzunluklarına kadar.				2
19:30	A	Kenara dik uzaklığıdır.	6			
19:33	Ö	Evet.		1	2	2
19:34	A	Tamam! Aladaki değişimin... Tamam! Devam et.	1			
19:39	Ö	Alanlardaki değişimin ağırlık merkezi...				4
19:42	A	(Katılımcı yazıyor.) t! t yaz. Parantez aç. Baya bir boşluk bırak, şöyle, şuraya kadar. Tamam! Şurada parantezi kapat. (Katılımcı yazıyor. ve araştırmacı katılımcının yazdıklarını söylüyor.) "…deki değişime oranı. t( )'deki anlık değişime oranı." (Katılımcı yazıyor.) Anlık yaz oraya. Anlık yazalım.	6			
20:04	Ö	Anlık değişime oranı, bize türevini veriyor.				4
20:12	A	Hı! Hı!				
20:16	Ö	Türevini verir. Yani çevresini verir.		1	2	4
20:23	A	Hı! Hı!				
20:23	Ö	(Yazıyor.)				4
20:31	A	Tamam. t dediğimiz uzunluk neydi aslında?	1			
20:35	Ö	t dediğimiz uzunluk… E! Karemizin ağırlık merkezinin kenarı kadar uzaklığı.				2
20:41	A	Kenara dik uzaklığı	6			
20:43	Ö	Kenara dik uzaklığı.		1	3	2
20:45	A	Yaz oraya: Ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı.				
20:49	Ö	Ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığıdır.				2
						
21:06	A	Tamam! Bu da böyle.				
21:10	Ö	Evet.				4
21:11	A	Demek ki uygun bir şekilde modellediğimiz zaman…				
21:14	Ö	Oluyormuş.				4
21:16	A	Önyargılı olmamak lazımmış.				
21:19	Ö	Evet.				4

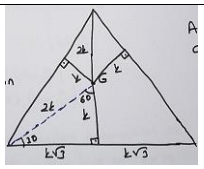
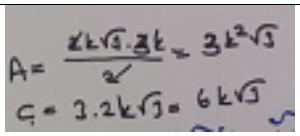
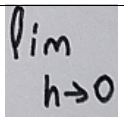
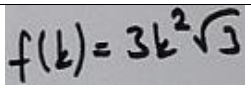
21:20	A	Teşekkür ederim Ömür.				
21:22	Ö	Ben teşekkür ederim.				4
21:24	A	Ne düşünüyorsun bununla ilgili?	2			
21:26	Ö	Eğer (mırıldanma) doğru seçimler yaparsak Alanın çevreye olan türevin tanımından rahatça bulabilirmişiz.		1	3	4
21:37	A	Rahatça bulabilirmişiz. Bu ilişki hakkında ne düşünüyorsun?				
21:40	Ö	Nasıl Hocam?				
21:42	A	Bu ilişki hakkında ne düşünüyorsun?				
21:45	Ö	Bu ilişki türevin alan ve çevre ile bulunduğunu gösteriyor. Karede de sağlıyor.				
21:53	A	Bilgi olarak söylemiyorum. Ne düşünüyorsun?				
21:58	Ö	Anlık değişimin yani alan gittikçe daralarak çevreyi oluşturmaya başlıyor.				
22:04	A	Evet. Teşekkür ederim, Ömür.				

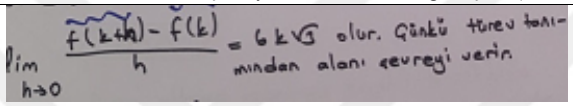
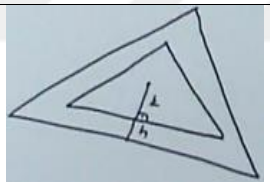
EK-12: Ömür 3. Oturum (Eşkenar Üçgende Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi)

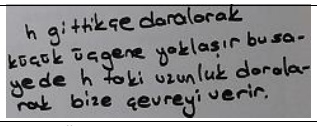
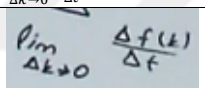
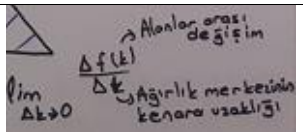
			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
00:01	A	Şimdi, Ömür üçüncü oturum yazalım, belli olsun. Şey olduğu. Kamera kaydında bakıp hemen kimin olduğunu anlayabiliyorum, yüzünüz görünmüyor ya hani.				
00:16	Ö	Tamam.				
00:17	A	Şimdi Ömür, biz ne yaptık? Kareyi yaptık.	1			
00:22	Ö	Evet.				
00:23	A	Önce dairelerde çalıştık.	6			
00:25	Ö	Sonra karede.				
00:26	A	Sonra karede çalıştık. Karede ulaştığımız son üç bilgi neydi? Bir bakabilir miyiz? Hatırlayalım mı?	6			
00:33	Ö	Olur hocam.				
00:37	A	Ne yazmışız buraya?	6			
00:38	Ö	Farklı isimlendirme şekliyle yine türevle alandan çevreye geçebiliriz.		1	2	4
00:45	A	Alanın çevre ile ilişkisini kurduk. (Karedeki sözel açıklamalar işaret ediliyor.) Nedir? h sıfıra yaklaşırsa büyük kare küçük kareye yaklaşmış sonuçta alan küçülmeye başlar ve çevresini verir. Alandaki değişim $t\ldots$ t neymiş?	1			
00:59	Ö	Ağırlık merkezinin kenara dik uzaklığı.		1	2	4
01:00	A	Dik uzaklığında ki değişime oranı türevi verir yani çevresini verir. Anlık değişim falan filan. Tamam. Şimdi bir eşkenar üçgende biz bunu deneyelim?	1			
01:12	Ö	Tamam. Açılarını yazayım mı?				2
01:27	A	Sen bilirsin.				
01:40	Ö	Alanı mı yazayım?				2
						
01:43	A	Alan çevre ilişkisi var mıdır? Var ise nasıl kuracağız?	6			
01:54	Ö	Taban alanı çarpı yükseklik bölü 2 yazacağım.				2
01:58	A	Hı! Hı!				
02:01	Ö	Buna a diyeyim.				2
02:03	A	Sen bilirsin.				
02:07	Ö	$\frac{a.h}{2}$				2
02:10	A	h nedir?	6			
02:12	Ö	h yüksekliği.				2
02:13	A	Tamam! Yüksekliği hesaplayalım, a cinsinden bulabilir miyiz yüksekliği?	6			
02:17	Ö	Bulabiliriz. h dik indiği için, $\frac{a}{2}$,$\frac{a}{2}$ bunlar açıortaydır. Dik üçgenden direk yazayım mı?				2
02:30	A	Yaz. Hı! Hı! $h =\ldots$	6			
02:34	Ö	$h = a^2 - \frac{a^2}{4}$'tür.				2
02:42	A	Tamam.				
02:43	Ö	$h = \frac{3a^2}{4}$ olur.				2
02:47	A	h mı eşittir, h'ın karesi mi eşittir?	6			
02:48	Ö	h'ın karesi eşittir.				2
02:50	A	O zaman h eşittir ne olacak?	6			
02:52	Ö	$h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$				2
02:58	A	Şunu $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ şeklinde yaz. Çünkü a kökün içinde midir, dışında mıdır belli olmuyor.	6			

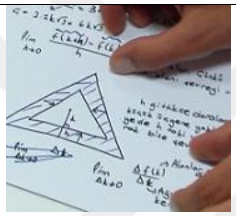
03:03	Ö	Anladım. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ olur.				2
						
03:07	A	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$ olur. Burada yerleştirirsek. (Alan formülü işaret ediliyor.)	6			
03:08	Ö	Yazarsak. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ olur.				2
						
03:15	A	Çevresi?	6			
03:28	Ö	Üçgenin çevresi $3a$ değil mi?				2
						
03:30	A	Hı! Hı! Türev ilişkisi var mı arada?	6			
03:32	Ö	Bakayım, a ya göre alırsak $2\sqrt{3}$…				2
03:42	A	Oluyor. Şey yok $2a\sqrt{3}$, anlamadım?	6			
03:48	Ö	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$ olur.				2
03:52	A	2 olur.	6			
03:53	Ö	Bu olmaz.		1	2	2
03:54	A	Olmaz. Karede de olmuyordu ilk etapta.	1			
03:57	Ö	Evet.				4
03:58	A	Uygun bir modelleme yaptık.	6			
03:59	Ö	Sonra bulduk.				4
04:00	A	Nasıl bir modelleme yapmıştık? Kareye geri dön.	6			
04:07	Ö	Şu t şeklinde almıştık $\frac{a}{2}$ yi. (Karesel halka modeli işaret ediliyor.)				4
04:12	A	Yani, buraya a dememiştik de şuraya t demiştik.	6			
04:15	Ö	Evet.		1	2	4
04:17	A	O t dediğimiz uzaklık neymiş?	1			
04:21	Ö	Karenin yarıçapı şeklinde.				4
04:26	A	Yarıçapı mı?	6			
04:32	Ö	$\frac{a}{2}$ sini alarak yarım çap.				4
04:35	A	Burada parantez içine bir şey yazmışız. (Yazılı açıklamadaki parantez için işaret ediliyor.)	6			
04:37	Ö	Ağırlık merkezinin kenara… Ha! Tam ortası ağırlık merkezi.		1	2	4
04:41	A	Tamam, t neymiş?	1			
04:44	Ö	t'de yani yarısı, kenar uzunluğunun yarısı.		1	1	2
04:48	A	Kenar uzunluğunun yarısı. Üçgende yaparsak bunu?				
04:57	Ö	Şu $\frac{a}{2}$'ye göre mi işlemi yaparsak. (Kenar uzunluğunun yarısı işaret ediliyor.)	4			2
05:02	A	Üçgende nasıl yapacağız?	6			
05:04	Ö	Hım! a yerine $2a$ deyip, bunlara a diyebiliriz.		1	2	2
05:08	A	Tamam, de.	1			
05:10	Ö	Eğer dersek $h^2 = 2a^2$'den dersek.				2
05:21	A	Sana direkt söyleyeyim mi?	6			
05:22	Ö	Tamam hocam.				2
05:23	A	a gördüğün yere $2t$ yaz burada. (Alan fonksiyonu işaret ediliyor.)	6			
05:26	Ö	a gördüğüm yere $2t$.				2
05:28	A	Hı! Hı!				
05:30	Ö	$\frac{4t^2\sqrt{3}}{4} = t^2\sqrt{3}$ olur.				2
05:38	A	$t^2\sqrt{3}$ olur. Şurada da $2t$ yaz. (Çevre fonksiyonu işaret ediliyor.)	6			
05:41	Ö	$6t$ olur.				2
05:44	A	$6t$. Bunun türevi ne olur? (Alan fonksiyonu işaret ediliyor)	6			
05:47	Ö	t'ye göre alırsak, $2\sqrt{3}t$ olur.				2
05:50	A	Önce şey yapalım. Bir kenar uzunluğunu, şurası ve şurayı belirtelim. Şu ne? Bir kenar uzunluğuna ne dedik? (Araştırmacı mavi kalem ile yapılan şeyi yazıyor.)	6			

06:01	Ö	Bir kenar uzunluğuna $2a$ dedik.				2
06:04	A	$2t$ dedik.	6			
06:05	Ö	$2t$ dedik, evet.				2
						
06:08	A	Yine sağlar mı bu sefer?				
06:10	Ö	$2\sqrt{3}t$ hayır, sağlamaz.		1	2	2
06:13	A	Gene sağlamaz.				
06:14	Ö	Gene sağlamaz.				4
06:16	A	O zaman ne yaparız?	1			
06:19	Ö	4 desek mi?				2
06:22	A	Kareye dön. Karede hangi uzunluğa t demişiz? Şurada cevap şurada. (Kare çalışmasındaki kare halkasal bölge ve yazılı açıklamalar işaret ediliyor.)	6			
06:38	Ö	Merkezler...				2
06:39	A	Merkezler ne merkezi?	6			
06:41	Ö	Ağırlık merkezinin kenarına olan uzaklığına t dedik.				2
06:45	A	Tamam! O zaman şuraya yazalım. Karede ilişkiyi kurabilmek için ne demiştik?	6			
07:05	Ö	Ağırlık merkezinden kenara olan uzaklığa t dedik. O zaman üçgende de ağırlık merkezinden kenara dik ineceğiz.		1	2	4
						
07:30	A	Tamam! Deneyelim şekil çiz. Başka bir şekil çiz. Büyük bir şekil çiz. Hı! Hı! ağırlık merkezi.	1			
07:45	Ö	Burada olsun diyelim.				2
07:50	A	Tamam, tamam. Hangi açıyla iniyor oraya?	6			
07:52	Ö	Dik bir açıyla iner.				1
07:55	A	Tamam. Doksan derece yaz.	6			
07:58	Ö	Harf mi?				2
07:59	A	k de.	6			
08:00	Ö	k deyim, tamam.				2
08:02	A	Diğer taraflara da indir bakalım.	6			
08:05	Ö	Şu şekilde mi? Şu şekilde.				2
08:10	A	Hı! Hı!				
08:21	Ö	k olur.		1	2	2
08:23	A	Tamam! Peki şurayı k cinsinden bulabilir misin, şu uzunluğu ya da şu uzunluğu? (Kenar uzunluğunun yarısı işaret ediliyor.)	1			
08:33	Ö	Onları da mı k olarak yazayım?				2
08:35	A	Hı! Hı!	6			
08:36	Ö	(Üçgenin kenar uzunluklarının yarısına k yazıyor.)		1	1	2
08:38	A	k olur mu?	1			
08:41	Ö	Hmmm... Şu uç...				2
08:46	A	Oradan çekeceğine şuradan çek. Oradan çekeceğine şuradan çek. (Araştırmacı mavi kalem ile köşe ve ağırlık merkezini birleştiren noktalı bir çizgi çiziyor.)	6			
08:51	Ö	Tamam.				2
08:56	A	Şu açı kaç derece olur? (Oluşan dik üçgendeki 30^0 açı gösteriliyor.)	6			
08:58	Ö	90^0...				1
09:00	A	Şu açı?	6			
09:01	Ö	30^0 olur.				1
09:02	A	30^0?	6			
09:05	Ö	O zaman burası 60^0 olur.				1
09:07	A	60^0 olur. 30^0'nin karşısına k mı gelir?	6			

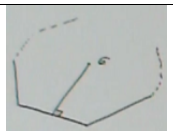
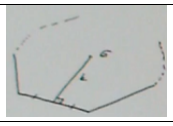
09:10	Ö	k gelir.		1	2	1
09:12	A	60^0'ın karşısına?				
09:13	Ö	90^0'ın karşısına...				1
09:14	A	Evet, 90^0'ın karşısına?	1			
09:15	Ö	$2k$ olur.		1	2	1
09:16	A	Tamam! Zaten bu kenarortay olacağı için k ya $2k$ oranı var.	1			
09:20	Ö	Evet, bu da $k\sqrt{3}$ olur.		1	2	1
09:21	A	Tamam, $k\sqrt{3}$ olur. Üçgenin komple alanını bulabilir misin buradan?	1			
09:30	Ö	O zaman bura da $k\sqrt{3}$ olduğuna göre bulabilirim evet.				2
						
09:36	A	Tamam.				
09:40	Ö	Taban alanı $2k\sqrt{3}$, çarpı yükseklik burada yine k olmak zorunda.		1	1	2
09:49	A	k mı $2k$ mı?	1			
09:50	Ö	$2k$ olmalı. Çarpı $2k$ bölü 2 olur. O da eşittir 2'ler gitti, $2k^2\sqrt{3}$ olur.		1	1	2
10:03	A	Çevre?	1			
10:05	Ö	Çevresi ise; $3.2k\sqrt{3}$ olur. O da eşittir $6k\sqrt{3}$ olur.		1	3	2
10:19	A	$k\sqrt{3}$. Pardon, bir şey soracağım. Şunu soracaktım. Alanı, bir şey ile bir şeyi çarpıp ikiye böldün değil mi?	1			
10:30	Ö	Evet.				2
10:31	A	Şu nedir? $2k\sqrt{3}$ nedir?	6			
10:33	Ö	Tabanı.				2
10:34	A	Tabanı dedin değil mi? Yükseklik $2k$ mı olur?	6			
10:38	Ö	Ağırlık merkezi k ise burası da k olmalı, diye düşünüyorum.		3	1	1
10:49	A	Şurası k ise şurası da k mı olmalı? (Araştırmacı defteri 120° saat yönünde çevirerek çizilen üçgende ağırlık merkezinin tepeye 2 tabana 1 oranını fark ettirmeye çalışıyor.)	1			
10:53	Ö	Hayır, $2k$ olmalı. Hı, tamam iki katına iki katı, tamam, evet.				2
11:02	A	O zaman şöyle uzat. Uzat, uzat, uzat. Ne olur orası?	6			
11:12	Ö	$2k$ olur.		3	2	2
11:15	A	Tamam. Yükseklik kaç olur?	1			
11:17	Ö	$3k$. O zaman bununla bu gider, $3k^2\sqrt{3}$ olur.		1	1	2
						
11:25	A	Alanın türevini alırsak şimdi çevreyi veriyor mu?	1			
11:29	Ö	Verdi, evet.		1	1	2
11:30	A	Verdi. O zaman...				
11:32	Ö	Şimdi sağladı.				2
11:33	A	Bunu genel türev denkleminden bir yapalım bakalım.	1			
11:36	Ö	Limit...				2
11:37	A	Hı! Hı!				
						
11:40	Ö	Limit h sıfırsa giderken.		1	3	2
11:43	A	Bunu (alan formülünü göstererek) bir fonksiyon olarak yazabilir misin? $f(k)$ fonksiyonu olarak yazabilir misin? Alan fonksiyonu, k'ye bağlı bir alan fonksiyonu olarak ifade edebilir misin bunu?	1			
11:54	Ö	$f(k)$ eşittir...				2
11:56	A	Tamam, yaz.				
12:00	Ö	$3k^2\sqrt{3}$ olur.		1	3	2
						

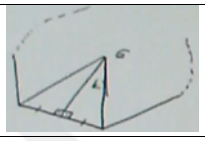
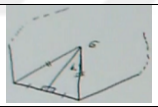
12:07	A	Tamam, güzel. Şimdi devam edelim.	1			
12:12	Ö	f, k'dan mı direk x mi diyeceğim?				2
12:16	A	Bağımsız değişkeni bu sefer...	6			
12:17	Ö	k diye alacağım.				2
12:19	A	Hı! Hı!				
12:21	Ö	$f(k+x)$				2
12:25	A	$k+h$				
12:27	Ö	$k+h$ pardon. $-f(k)$ bölü h'tır. (Genel türev denklemini yazmayı tamamlıyor. $\lim_{h\to 0}\frac{f(k+h)-f(k)}{h}$)				2
12:35	A	Tamam!				
12:40	Ö	$k+h$ yerine bu sefer bu $k+h$'ı alacağız. (Alan fonksiyonu olan $f(k)=3k^2\sqrt{3}$ işaret ediliyor.)				2
12:43	A	Bunun sonucu ne olur? (Genel türev denklemi işaret ediliyor.)	6			
12:47	Ö	Bura olur, yani çevre sonucu.				2
12:48	A	Direk şuraya yazabilirsin o zaman.	6			
12:49	Ö	$6k\sqrt{3}$ olur.		1	2	2
12:55	A	Çünkü… Olur çünkü… Niye? Çünkü…	2			
13:04	Ö	Çünkü türev tanımından $3k^2\sqrt{3}$, $6k\sqrt{3}$ oluşur.				
13:11	A	Hı hı, açıklamasını da yaz.				
13:23	Ö	Türev tanımından alanı çevreyi verir. Bir de alan gittikçe... (Mırıldanma)		1	2	2
						
13:36	A	Şekil çiz.	1			
13:42	Ö	Yine mi üçgen?				2
13:42	A	Evet.				
13:43	Ö	İç, içe?				2
13:44	A	Yani şu ne anlama geliyor, şu ne anlama geliyor? Karede yapmıştık ya. (Araştırmacı, gene türev denklemindeki $f(k+h)$ ve $f(k)$ ifadelerinin üstünü mavi kalem ile işaretliyor.)	6			
14:16	Ö	h'ı doğru mu yazdım?				2
						
14:17	A	Hı! Hı!	6			
14:20	Ö	h gittikçe daralarak... (Üçgensel halka bölgeyi tarıyor.)				4
14:29	A	Artık bir şey söylememe gerek kalmadan sen hallediyorsun işi.				
14:32	Ö	Evet.				4
14:33	A	Evet.				
14:37	Ö	h gittikçe daralarak, küçük üçgene yaklaşır.				4
14:56	A	Ok işaretiyle gösterebilir misin onu? Hangisi hangisine yaklaşıyor? (öğrenci ok işaretiyle gösterdikten sonra) Tamam.	6			
15:05	Ö	Yaklaşır, bu sayede çevreye…				4
15:09	A	Çevreye dönüşecek olan ne?	6			
15:15	Ö	Alanı gittikçe çevreye dönüşür.				4
15:18	A	Hangi alan?	6			
15:19	Ö	Im! $f(k+h)$'ın ona ek (Mırıldanma) küçük üçgende ki...				4
15:26	A	Hangi alanı taradın sen?	6			
15:30	Ö	Im!				4
15:31	A	h yüksekliğinde ki.				
15:32	Ö	h yüksekliğinde.				4
15:34	A	Tamam! O zaman ne olacak? Hangi alan git gide değişip çevreye döner?	6			
15:40	Ö	h'daki… Im! Uzunluk gittikçe k'ya yaklaşacak....				4
15:46	A	Hı! Hı!				
15:47	Ö	Çevreye dönüşecek. Küçük üçgende ki çevreyi bize sağlar.				4
15:52	A	Tamam! Uygun bir şekilde yaz, ifade et.	6			
16:00	Ö	h... (Katılımcı yazıyor.)		1	2	4

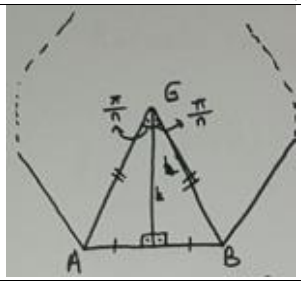
						
16:23	A	Şimdi Ömür. Şu önceki şeyi bir açsana. (Bir önceki çalışma kastediliyor.)	1			
16:27	Ö	Tamam.				4
16:28	A	Çünkü açıklama çok sağlıklı olmadı. h sıfıra yaklaşır, bu sonuçta alan küçülmeye başlar ve ne yapar?	6			
16:38	Ö	Çevresini verir.				4
16:40	A	Çevreyi verir. Aslında çevreyi verir mi yoksa alan çevreye mi dönüşür?	6			
16:44	Ö	Alan çevreye dönüşür.		1	2	4
16:47	A	Niye?	2			
16:51	Ö	Yani gittikçe küçülerek. Yani gittikçe küçülüp çevreyi sağlar. Yani taralı alan gittikçe kapanır.				4
17:00	A	Hı! Hı!				
17:02	Ö	Sadece uzunluk kalır.				4
17:04	A	Alan uzunluğa dönüşmüş oluyor.				
17:05	Ö	Evet.				4
17:06	A	Sıfır kalınlığını düşürttüğün zaman alanı olmaktan çıkar.	6			
17:10	Ö	Evet. Uzunluğa dönüşür.		1	2	4
17:11	A	Alan uzunluğa dönüşür. Tamam, güzel. Bunu Δt cinsinden, değişim oranı cinsinden yazalım.	1			
17:22	Ö	$\Delta t, \Delta f$ eşittir....(Δt −yazıp duruyor.)		1	1	2
17:25	A	Karede nasıl yapmıştık? t bitti artık t ile çalışmıyoruz.	1			
17:32	Ö	k ile çalışıyoruz. Δt sıfıra gidiyor. Δk sıfıra gider. (geri dönüp yanlış yazdığı ifadeyi düzeltmeye çalışıyor.) Limit Δk sıfıra giderken...				2
						
17:50	A	Sil, sil tekrardan yazalım. (Araştırmacı, yanlış yazılan ifadenin üstünü mavi kalemle çiziyor.)	6			
17:54	Ö	Limit Δk sıfıra giderken, $\Delta f(k)$ bölü Δt'ye göre olması lazım. (Katılımcının yazdığı ifade: $\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta f(k)}{\Delta t}$ şeklinde yine hatalı.)				
						
18:08	A	Δk.	6			
18:10	Ö	Δk, pardon. Olması lazım.		1	2	2
18:13	A	Tamam. Bu nerede ki değişim?	1			
18:15	Ö	Bu alanlar arasında ki değişim. (Anlık değişim oranı ifadesinin pay kısmı işaret ediliyor.)				4
18:18	A	Gel, şöyle bir ok çek. Alanlar arası değişim.	6			
18:27	Ö	Değişim.		1	2	4
18:28	A	Bu neyin değişimi? (Anlık değişim oranı ifadesinin payda kısmı işaret ediliyor.)	1			
18:30	Ö	Uzunluk.				4
18:31	A	Ne uzunluğu?	6			
18:32	Ö	k'ya göre uzunluğu.				4
18:34	A	k nedir?	6			
18:35	Ö	Küçük üçgenin ağırlık merkezinin bir kenara olan uzaklığı.				4
18:40	A	Tamam, yaz o zaman. Ağırlık merkezinin…	6			
18:48	Ö	Ağırlık merkezinin				4
18:52	A	Kenara.	6			
18:54	Ö	Uzaklığıdır.		1	2	4
19:00	A	Güzel, tamam. Şimdi sözel olarak ifade edelim. (Araştırmacı, işaret ederek katılımcının sayfayı geri çevirip kare çalışmasına dönmesini istiyor.)	1			
						
19:06	Ö	Geri mi katlayayım?				4
19:07	A	Karede bir sözel ifade vardı ya, şuna benzer bir sözel ifade yazacağız. (Karedeki yazılı ifade işaret ediliyor.)	6			
19:19	Ö	Tamam. (Katılımcı okuyor ve bitince tamam diyor.)				4
19:25	A	Şuradan başla yaz. Sonuç de.(Çalışma sayfasında boş bir alan işaret ediliyor.)				
19:33	Ö	İlk önce f… $\Delta f(k)$ alanları, alanları arasındaki değişimin, Δk olarak… Ee! k ağırlık merkezinin...				4

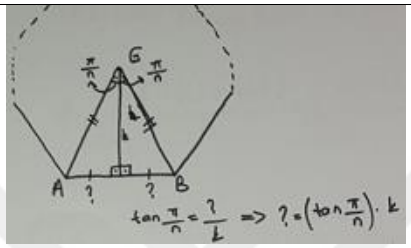
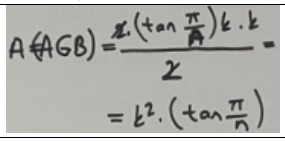
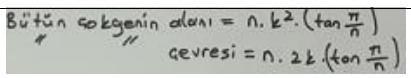
20:10	A	Alta geç. (Yazacak yer kalmadığı için alt tarafa yazması isteniyor.				
20:11	Ö	Ağırlık merkezinin bir kenara olan uzaklığı olup…				4
20:23	A	Parantezi kapat. k'da ki.	6			
20:25	Ö	Uzaklığın oranıdır. Oranı türevi, oranı türev tanımıdır. Bize çevreyi buldurur.				4
21:00	A	Okuyalım bakalım, düzgün oldu mu? Alanları arasında ki değişimin k'da ki uzaklığın oranı, k'daki uzaklığın mı oranı yoksa bu k'da ki nedir?	6			
21:21	Ö	Değişimin. ("Uzaklığın" ifadesinin üstünü çizip "anlık değişimin" ifadesini ekliyor.)				4
21:22	A	Değişimin oranı mı? k'da ki değişimin, anlık değişimin.	6			
21:26	Ö	Evet. Değişimin.				4
21:31	A	Anlık yazacağız oraya.				
21:33	Ö	Anlık değişimin.		1	2	4
						
21:36	A	Anlık değişimin oranı türev tanımıdır. Bize çevreyi verir, çevreyi buldurur. Tamam. Şimdi bir şey soracaktım da ne soracaktım ben sana. Vallahi ne soracağımı unuttum. Ha, ha! Tamam! h nedir? (Genel türev denklemindeki $h \to 0$ işaret ediliyor.)	1			
21:56	Ö	h sıfıra giderken, bu genel türev tanımında vardır yani.				2
22:03	A	Bu h nedir? Şu nedir? Şu $\Delta\, k$ nedir?	6			
22:10	Ö	Yani h üçgen.....				2
						
22:11	A	Yani şunun şununla nasıl bir ilişkisi var? Şurayla şuranın nasıl bir ilişkisi var?($\lim_{h\to 0}\frac{f(k+h)-f(k)}{h}$ ile $\lim_{\Delta k\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta k}$ ifadeleri eş zamanlı olarak işaret ediliyor.)	6			
22:14	Ö	Biri alanlar arasındaki fark. (Aynı anda pay kısımları işaret ediliyor.) Biri uzunluklar arasındaki fark. (Aynı anda payda kısımları işaret ediliyor.)				2
22:21	A	Tamam! Yani hangisi… Birbiriyle denkleştirsen hangisi, hangisi oluyor?				
22:29	Ö	$f(k+h)-f(k)$, $\Delta f(k)$'ya eşit oluyor.				2
22:31	A	Yani alanlarda ki değişim.	6			
22:32	Ö	Alanlarda ki değişim oluyor. Δk ise h yani uzunluklar arasında ki değişim oluyor.				2
22:38	A	Yani şu k'daki değişim.	6			
22:40	Ö	Evet.		1	2	2
22:43	A	Tamam! Teşekkür ederim.				
22:44	Ö	Ben teşekkür ederim.				4
22:48	A	Bu kadar. Evet. Baya sürdü değil mi?				
22:50	Ö	Evet.				4
22:51	A	Gayet başarılı bir şekilde halletmiş olduk.				
22:54	Ö	Üçgende… (Mırıldanma)				4
22:56	A	Demek ki bu alan-çevre-türev ilişkisini kurmak için ne yapmak gerekiyormuş?	1			
23:02	Ö	Uygun harflendirme yapmamız lazım.				4
23:06	A	Tamam, uygun harflendirmeyi neyle yapacağız?	6			
23:07	Ö	Ağırlık merkezinde...		1	2	4
23:08	A	Ağırlık merkezi tamam. Aynen öyle. Teşekkür ederim. Demek ki bu ağırlık merkezi bizim için önemliymiş.				
23:15	Ö	Evet.				
23:16	A	Ağır olmak lazım değil mi?				
23:17	Ö	Evet.				
23:20	A	Teşekkür ederim dostum.				
23:22	Ö	Ben teşekkür ederim.				

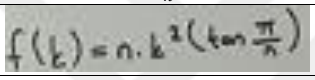
EK-13: Ömür 4. Oturum (Düzgün n-gende Alan ve Çevre Arasındaki Türev İlişkisi)

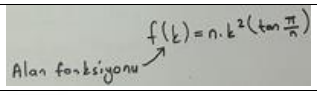
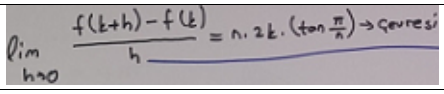
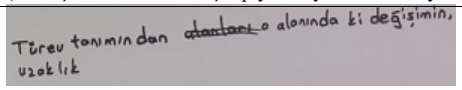
			Müdahale	Geri Katlama	Çıktı	Seviye
00:02	A	Şimdi, o zaman buraya Ö4 yazalım. (Resim defterinin köşesine katılımcının isminin baş harfi ve kaçıncı oturum olduğu yazılıyor.) Tamamdır, görünüyor. (Kamera kontrolü yapılıyor.) Önceki haftalarda ne yapmıştık?	1			
00:20	Ö	Önceki haftalarda daireyi, kareyi ve üçgeni incelemiştik.				4
00:25	A	İncelemiştik. Alan, çevre, türev ilişkisi…	6			
00:27	Ö	Evet.				4
00:28	A	Tamam. Alan çevre türev ilişkisi, karede ilk etapta oluyor muydu?	6			
00:32	Ö	İlk etapta olmuyordu. Hayır.				4
00:34	A	Dairede çapa göre yapsak oluyor muydu?	6			
00:38	Ö	Evet, oluyordu dairede.				4
00:39	A	Yarıçapa göre değil, çapa göre?	6			
00:42	Ö	Yarıçapa oluyordu. Çapa göre olmuyordu.				4
00:43	A	Çapa göre olmuyordu. Eşkenar üçgende kenara göre yapsak oluyor muydu?	6			
00:48	Ö	Cık! Ağırlık merkezine göre oluyordu.				4
00:50	A	Ağırlık merkezine… Karede?	6			
00:53	Ö	Karede de ağırlık merkezine göre.				4
00:56	A	Ağırlık merkezi… Dairede?	6			
00:58	Ö	Dairede de ağırlık merkezi, tam orta noktası, çünkü merkez.		1	2	4
00:59	A	Ağırlık merkezi, merkez. Şimdi, soru şu: "Düzgün çokgende alan-çevre türev ilişkisi kurabilir miyiz? Kurabilirsek nasıl kurabiliriz?"	1			
01:14	Ö	Eğer kurarsak onu da daha öncekiler gibi ağırlık merkezine göre göre kurmalıyız.				5
01:19	A	Ağırlık merkezine göre… Fonksiyon olarak tanımlayacağımız şey, neye bağlı olması lazım? Kenar uzunluğuna mı bağlı olması lazım, yoksa ağırlık merkezine…	6			
01:30	Ö	Ağırlık merkezinden kenara olan dik uzaklığına bağlı bir fonksiyon…		1	3	5
01:33	A	Dik uzaklığına bağlı bir fonksiyon üretmemiz lazım lazım. Tamam. Bir tane düzgün çokgen çizelim. Üç kenarı şöyle çiz, geri kalanlarına da nokta nokta koyduğu zaman n-gen olsun. Çokgen olduğu belli olsun diye… Şöyle noktaları koy. Gerisi önemli değil. (Katılımcı çizimi yapıyor.) Düzgün çokgenin için de kuralım bakalım. Artık müdahale etmeyeyim sen kurarsın.	1			
02:06	Ö	Orta noktasını alalım.				2
02:07	A	Evet.				
02:08	Ö	Ağırlık merkezinin				2
02:09	A	Hı! Hı!				
02:14	Ö	Kenara olan dik uzaklığıdır.				2
						
02:18	A	Tamam!				
02:19	Ö	Dik uzaklığı sayesinde kenar ikiye bölünmüş olur. Iı! Mesela uzaklığına k desek…				2
						
02:32	A	Hı! Hı!				
02:33	Ö	Çokgenin alanı… Nasıl?				2
02:41	A	Şimdi, onunla ilgili spesifik bir alan formülümüz yok.	6			
02:44	Ö	Ihı!				2
02:44	A	Biz üreteceğiz.	6			
02:47	Ö	Hım!		1	2	2
02:49	A	Bu niye böyle olur dedin? İkiye böler dedin?	2			

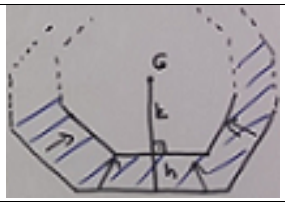
02:52	Ö	Dik olduğu için.				1
02:53	A	Tamam.				
02:54	Ö	Ağırlık merkezinden kenara olan dik uzaklığı olduğu için ikiye böler. Tam, ağırlık merkezinde olduğundan dolayı.				1
03:01	A	Hı! Hı! Tamam.				
03:03	Ö	Yanlış mı acaba?				1
03:04	A	Yo, yo. Doğru. Sıkıntı yok. Sen neye dayanarak böyle söylediğini merak ettim.				
03:10	Ö	(Sessizlik)		1	3	1
03:19	A	Şurayı bulabilir miyiz? (Kenar uzunluğunun yarısı işaret ediliyor.)	1			
03:27	Ö	Dik üçgen çizersek…				1
03:29	A	Çiz o zaman.	6			
03:30	Ö	Bulabiliriz.				2
03:36	A	Diğer tarafı da çiz. (Ağırlık merkezinden dikmenin indiği diğer köşeye olan doğru parçası kastediliyor.)	6			
						
03:37	Ö	Bir saniye, şu… Burası k uzunluğudur. 90 olursa sanırım 30 olması lazım.		1	1	2
03:56	A	30 değil. Kaç… Şimdi şurada bir, nasıl bir üçgen oluştu? (Ardışık iki köşe ve ağırlık merkezinin oluşturduğu üçgen işaret ediliyor.)	1			
04:01	Ö	Ee! Eşkenar üçgen oldu.				1
04:03	A	Eşkenar değil. Altıgense eşkenar olur.	6			
04:08	Ö	Hım! Ama bilmiyoruz, çokgenin kenar sayısını.				1
04:10	A	Kareyse, e, dik üçgen oluyor.	6			
04:13	Ö	Evet.		1	2	1
04:14	A	İkizkenar dik üçgen oluyor. Beşgense farklı, altıgense farklı… Şu kenar ile şu kenar ile şu kenar arasında bir ilişki var mı? (Ağırlık merkezinden ardışık köşelere inen kenarlar işaret ediliyor.)	1			
04:25	Ö	İkizkenar.				1
04:26	A	İkizkenar. Tamam, ikizliği belirtelim.	6			
						
04:30	Ö	İkizkenar üçgen oldu.		1	2	2
04:31	A	Şu k sanki şeyde görünüyor. Şu k'yı biraz daha bu tarafa taşıyalım mı?				
04:34	Ö	Tamam.				2
04:35	A	Şuraya doğru taşıyalım mı?				
04:36	Ö	Tamam.				2
04:38	A	Tamam. Peki, kaç tane böyle ikizkenar üçgen oluşur? Bu çemberin içinde, şey, çokgenin içinde?	1			
04:47	Ö	I! Kenar sayısı kadar. n tane üçgen oluşur.				1
04:50	A	n tane üçgen oluşur değil mi?	6			
04:52	Ö	n tane, kenar sayısı kadar üçgen oluşur.				1
04:54	A	Bu üçgenler, aynı ölçülerde mi farklı ölçülerde mi?	6			
05:00	Ö	Aynı ölçülerde olur. Yani ağırlık merkezinden olduğu için.				1
05:03	A	Eş üçgenler, eş üçgenler.	6			
05:04	Ö	Eş üçgenler oluşur.		1	2	2
05:05	A	Şu tepe açı, şu açı için bir şey söyleyebilir misin? (Ağırlık merkezindeki açı işaret ediliyor.)	1			
05:09	Ö	Im! Tam bir 360^0 oluşturur.				1
05:13	A	Hı! Hı!				
05:14	Ö	Ee! Ona göre de 360 bölü n şeklinde diyebilir miyiz?				1
05:19	A	Tamam. Bunu tamamı… Şu açı kaç derece olur? Şu açıyı iki eş parçaya bölsene. Neden iki eş parçaya böldüğümüzü biliyor musun?	6			
05:28	Ö	Evet. Çünkü şöyledir, açıortay oluşu…				1
05:34	A	Tamam. E! O zaman $\frac{360^0}{n}$ tamamı dedin değil mi?	6			
05:38	Ö	Evet.				1
05:39	A	O zaman şurası ne olur? (Köşe, ağırlık merkezi ve ağırlık merkezinden kenara indirilen dikmenin oluşturduğu açı işaret ediliyor.) Sadece bir noktalık açı kaç dereceye denk gelir.	6			
05:48	Ö	O zaman $\frac{360^0}{n}$ bir daha 2'ye böleriz.				2

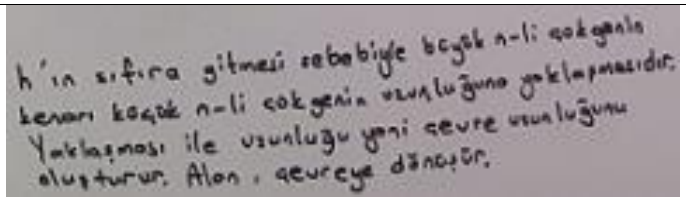
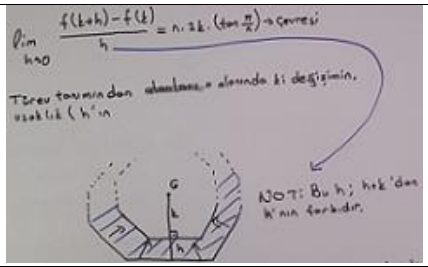
05:51	A	Böylelikle $\frac{180^0}{n}$ yani $\frac{\pi}{n}$.	6			
05:54	Ö	Evet.				2
05:55	A	Tamam, o zaman şimdi, şu açıyı $\frac{\pi}{n}$ diye belirtelim.	6			
						
05:	Ö	(Çizim yapıyor.)				2
06:05	A	Tamam.				
06:07	Ö	Burası da $\frac{\pi}{n}$'dir.		1	2	2
06:12	A	Tamam. Şu uzunluğu hesaplayabilir miyiz? Şu uzunluğu? (Çokgenin kenar uzunluğunun yarısı işaret ediliyor.) Açıyı biliyoruz, bir kenarı biliyoruz, bu açıyı biliyoruz…	1			
06:29	Ö	Ee! Pisagor bağıntısından mı yapabiliriz?		1	1	1
06:33	A	Trigonometrik fonksiyonları biliyor musun?	1			
06:37	Ö	Ee! Şey mi?				1
06:38	A	Sinüs, kosinüs vs.	6			
06:41	Ö	Sinüs açılımı, kosinüs açılımı?				1
06:42	A	Yok, yok. Mesela sinüs, kosinüs, tanjant, kotanjant…	6			
06:46	Ö	Ha! Şey formülü, karşı bölü komşu, o şekilde mi hocam?				1
06:49	A	Hı! Hı!	6			
06:49	Ö	Tamam.				1
06:51	A	Şuraya soru işareti de.	6			
06:56	Ö	Sinüs alfa şeklinde mi?		1	1	2
06:58	A	Sinüs alfa değil. Tanjant, cotanjant… Çünkü sinüs alfa için tam burayı hesaplamak lazım. (Hipotenüs işaret ediliyor.)	1			
07:03	Ö	Tamam. Tanjant… Bunu alfa, bununkini mi alayım hocam? (Sol taraftaki $\frac{\pi}{n}$'lik açı işaret ediliyor.)				2
07:09	A	Hı! Hı! Şöyle de alabilirsin. Fark etmiyor. Şu da soru işareti oluyor ya… (Sağdaki $\frac{\pi}{n}$'lik açı işaret ediliyor.)	6			
07:15	Ö	(Çokgenin kenarının diğer yarısına da soru işareti koyuyor.)				2
07:17	A	Hı! Hı!				
07:18	Ö	Hangisine göre olur ki? (Mırıldanma)				2
07:21	A	İkisi de aynı sonucu verir. Yani şurada da bir dik üçgen var.	6			
07:25	Ö	Evet.				2
07:26	A	Şurada da bir dik üçgen var. Hangisini istiyorsan o.	6			
07:29	Ö	Şuna göre aldım.				2
07:31	A	Tamam.				
07:32	Ö	$tan\frac{\pi}{n}$…				2
07:34	A	Hı! Hı!				
07:38	Ö	Eşittir soru işareti bölü…				2
07:40	A	Hı! Hı!				
07:41	Ö	k olur.				2
07:44	A	Tamam.				
07:48	Ö	Kotanjant…				2
07:49	A	Gerek yok. Soru işareti ne olur?	6			
07:56	Ö	Soru işareti… $tan\frac{\pi}{n}$ açılımını yapabilir miyiz?		1	1	2
08:00	A	Yok, gerek yok. $tan\frac{\pi}{n}$ bir sabittir. $\frac{\pi}{n}$ bir açıdır. Kenar sayısına bağlı bir açıdır. Mesela dörtgen olsa kare olurdu. Karede $\frac{\pi}{4}$ ne yapar?	1			
08:12	Ö	$\frac{\pi}{4}$ … 45^0 yapar.				2
08:13	A	45^0 derece olur. Ee! Hani, kareye bir gelsene. Kareye bir gelsene.	6			
08:23	Ö	(Kare çalışma kağıdını açar.)				2
08:25	A	Yani şu açı 45^0 olur. (Köşe, ağırlık merkezi ve ağırlık merkezinden kenara indirilen dikmenin oluşturduğu açı işaret ediliyor.)				

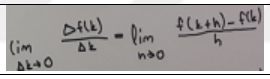
08:28	Ö	Evet.		1	2	2
08:32	A	(Mırıldanma) Üçgen olsaydı, şuradan şöyle şu kenara giden açı kaç derece olurdu? Şu açı? (Üçgenin köşesi, ağırlık merkezi ve ağırlık merkezinden kenara inen dikmenin yaptığı açı işaret ediliyor.)	1			
08:40	Ö	Orası 60^0 olurdu.		1	2	2
08:42	A	60^0 olurdu gibi… (Araştırmacı, sayfaları geri çokgen çalışma kâğıdına çeviriyor.) Dolayısıyla n'e bağlı bir şey. Soru işaretini çekebilir misin oradan?	1			
08:54	Ö	(6 saniye sessizlik) Im! Nasıl yapacağımı bilmiyorum. Nasıl yani?				2
08:57	A	Şunu (soru işareti) şuna (k) böldün, tanjat bu ise?	6			
09:03	Ö	Ha! Çarpım mı yapmak için? (İçler dışlar çarpımı işareti yapıyor.)				2
09:04	A	Hı! Hı!	6			
09:05	Ö	Tamam. ?=$\left(tan\ \frac{\pi}{n}\right).k$ olur.		1	2	2
09:15	A	Tamam. O zaman şu iki soru işareti ne olur? Çevresi, alanı ne olur? Şuraya G dedik, Şuraya A diyelim, B diyelim.	1			
						
09:27	Ö	(Harflendirmeleri yapıyor.)				2
09:32	A	Hı! Hı!				
09:33	Ö	Taban… (Mırıldanma)				2
09:35	A	Hı! Hı!				
09:36	Ö	Alanı, üçgenin alanını yapacağız.				2
09:38	A	Hı! Hı! Alan $\overset{\Delta}{AOB}$ de, $\overset{\Delta}{AOG}$ de. Yani belli olsun. (Araştırmacı harflendirmeyi şaşırıyor.)	6			
09:43	Ö	AGB?				2
09:44	A	AGB pardon.	6			
09:52	Ö	Taban alanı çarpı (yanlış yazıyor)				2
09:59	A	$\frac{\pi}{n}$				
10:05	Ö	Taban alanı çarpı yükseklik… Bir daha k geliyor, ikiye düşüyor, bunlar gider…				2
10:13	A	k^2'yi başa alsana. k^2'yi başa al.	6			
10:17	Ö	$k^2.tan\frac{\pi}{n}$ olur.		1	2	2
						
10:24	A	Bu sayıyı burada yazdığında pi ile karışma ihtimali var. (Tanjant ifadesinden sonra gelen k ifadesinin karışma ihtimali ima ediliyor.) Uzunluk ile açıyı karıştırma ihtimali var. Bütün alan ne olur?	1			
10:32	Ö	(Suskunluk)				2
10:35	A	Bütün çokgenin alanı?	6			
10:39	Ö	n çarpı…				2
10:40	A	Tamam. Bütün çokgenin alanı yazalım.	6			
10:56	Ö	(Yazıyor) $n.k^2.tan\frac{\pi}{n}$ olur.		1	2	2
11:05	A	n olur. Çevre?	1			
11:08	Ö	Çevresi de…Tüm kenar uzunlukları olmalı. O zaman (yazıyor) büyün çokgenin… n çarpı şu uzunluğu. (Çokgenin bir kenarını işaret ediyor.) O da $2k.tan\frac{\pi}{n}$ olur.		1	3	2
						
11:40	A	Arada alan, ıı, türev ilişkisi var mı?	1			
11:43	Ö	Evet. Var. k'ya göre türev aldığımızda…				6
11:46	A	Şaşırtıcı bir şey mi bu?	6			
11:48	Ö	Evet.				6

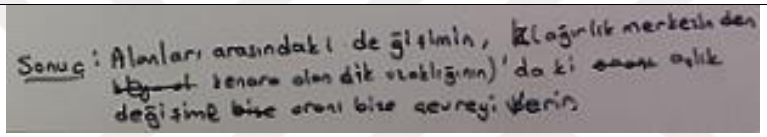
11:50	A	Yani… Ee! Şöyle söyleyeyim: bunun, böyle bir ilişki kurmayı bekliyor muydun, k'ya göre oluşturduğumuz zaman?	6			
11:55	Ö	Hayır. Böyle bir ilişki kurmayı beklemiyordum.				6
11:58	A	Peki! Mülakatın başında şeyi sordum… Söyledin ya neye göre oluştururşak alan türev ilişkisi olur demiştin?	6			
12:05	Ö	Ağırlık merkezine göre oluştururşak				6
12:07	A	Tamam. Ona göre oluşturduğumuzda bu ilişkinin kurulacağını bekliyor muyduk?	6			
12:13	Ö	Evet. Bekliyorduk.		1	2	6
12:14	A	Tamam. Sıkıntı yok. O zaman açıklamasını yap. Üçgen, karede yapmıştık ya bir şeyler. Bir şeyler yapmıştık ya.	1			
12:23	Ö	Anladım. (Yazıyor ve yazdıklarını kısık sesle mırıldanıyor.) Bir çokgende G ağırlık merkezinden… (Duraksıyor ve yazdıklarını tekrar okuyor.) Kenara olan uzaklığı ile alanını bulursak türevi bize çevreyi verir.		1	3	7
13:34	A	Tamam. Ee! Şimdi, türevin geometrik yorumu vardı ya…	1			
13:43	Ö	f fonksiyon?				2
13:44	A	Hı! Hı!				
13:45	Ö	Limit mi?				2
13:46	A	Hı! Hı! Bunu bir f fonksiyonu olarak tanımla önce. Şunu bir f fonksiyonu olarak tanımla. (Alan formülü işaret ediliyor.)	6			
13:54	Ö	(Yazmaya başlıyor.) $f(k)$ mı diyeceğiz?				2
13:59	A	Hı! Hı!				
14:00	Ö	$f(k) = n.k^2.tan\frac{\pi}{n}$ 'dir.		1	2	2
						
14:14	A	Ee! Bağımsız değişkenin ne?	1			
14:17	Ö	Bağımsız değişkenlerimiz n ile $tan\frac{\pi}{n}$ olması lazım.		1	1	2
14:23	A	Bağımsız değiken?	1			
14:25	Ö	Bağımsız..				2
14:26	A	n dediğimiz şey neye denk geliyor?	6			
14:29	Ö	n değişiyor aslında. $tan\frac{\pi}{n}$ mi olması lazım?		1	1	2
14:35	A	Cık! Neye göre türev aldın sen?	1			
14:37	Ö	k^2'ye göre.		1	3	2
14:40	A	n dediğimiz şey ne?	1			
14:41	Ö	Çokgenin kenar sayısı.				2
14:43	A	Kenar sayısı değişken olur mu?	6			
14:48	Ö	Değişken… Aldığımız şeye bağlı. Hani sabittir.				2
14:52	A	Ama sürekli bir değişken olsa buçuklu değerler alır mı?	6			
14:56	Ö	Hayır. Al… Alı… Almaz, almaz.		1	2	2
15:00	A	Almaz.				
15:01	Ö	Almaz.				2
15:02	A	Türevi neye göre aldık?	1			
15:03	Ö	k^2'ye göre aldık.				2
15:04	A	k nedir?	6			
15:06	Ö	k da bir kenarının… Ee! Ağırlık merkezini kenara olan dik uzaklığıdır.				2
15:13	A	Dik uzaklığıdır. Tamam. O zaman bağımsız değişkenin ne?	6			
15:18	Ö	k^2 mi?				2
15:20	A	k.	6			
15:21	Ö	k mı?				2
15:23	A	k'ya bağlı olarak alan değişiyor.	6			
15:27	Ö	Ha! Bağımsız değişken bağımlı değişken… Tamam.				2
15:28	A	Mesela beşgen için 5 koyacaksın, n yerine 5 koyacaksın. O $tan\frac{\pi}{5}$ bir açı değeri olacak bir şey olacak. Bir değer olacak.	6			
15:36	Ö	Hı! Hı! Evet.				2
15:37	A	5 ile çarpacaksın o kadar. k bir uzunluk. Uzunluk bir değişken oluyor orada.	6			
15:44	Ö	Anladım.				2
15:45	A	Bu, alan fonksiyonu.	6			
15:47	Ö	Tamam.		1	2	2
15:47	A	Bu ne fonksiyonu?	1			
15:49	Ö	Alan fonksiyonu.				2

15:50	A	Tamam. Bağımlı değişkenin ne?	6			
15:52	Ö	Bağımlı değişkenlerimiz de çevresini etkilediği için… Ee!				2
15:58	A	Bu ne fonksiyonu?	6			
16:00	Ö	Alan fonksiyonu.				2
16:01	A	O zaman bağımlı değişkenin ne olur?	6			
16:04	Ö	Alan.		1	2	2
16:05	A	Alan.				
16:05	Ö	Olur.				2
16:06	A	O zaman yaz. Buraya alan fonksiyonu yaz. Alan fonksiyonu yaz.				
16:11	Ö	Yazı ile mi?				2
16:12	A	Hı! Hı! Bu alan fonksiyonu. Yani alan fonksiyonu olduğunu bilelim. Şöyle, şey yap da . (Araştırmacı parmağıyla ok çizmesini işaret ediyor.) Alan fonksiyonu olduğunu anlayalım. Bu $f(k)$'nın alan fonksiyonu olduğunu anlayalım.				
16:30	Ö	Şöyle mi çizeyim?				2
16:31	A	Hı! Hı!				
						
16:31	A	Tamam.				
16:32	Ö	Alan foksiyonu.				2
16:33	A	O limitli açıklamayı yapalım bakalım. Nasıl bir açıklama yapacağız.	1			
16:38	Ö	Şuraya geçeyim mi? (Kağıdın boş bir alanını ifade ediyor.)				2
16:39	A	Hı! Hı!				
16:41	Ö	(Yazıyor ve yazdıklarını kısık sesle mırıldanıyor.) $\lim_{h\to 0} \frac{f(k+h)-f(k)}{h}$				2
16:55	A	Tamam.				
16:56	Ö	Oluşur. (Yazdığı $\lim_{h\to 0} \frac{f(k+h)-f(k)}{h}$ ifadesini açmaya yelteniyor.)		1	3	2
16:59	A	Bunun sonucu nedir? (Genel türev denklemi işaret ediliyor.) Ne öngörüyorsun?	1			
17:03	Ö	E! Alanın… E! Türevine göre alan fonksiyonunun sonucu olarak çevreyi verecek.				6
17:10	A	Güzel. O zaman eşittir yaz.				
17:13	Ö	Eşittir, $n.2k.tan\frac{\pi}{n}$'dir.				6
17:24	A	Buraya da çevre yazalım.				
17:29	Ö	Çevresi. Yani alanı olan… I! Alanlara olan değişimin uzaklıklara olan değişime oranı bize çevreyi verir.		1	3	6
						
17:46	A	Sözel olarak yaz.	1			
17:47	Ö	(Yazıyor.)				7
18:08	A	Alanları değil de alanındaki değişim diyelim.	6			
18:11	Ö	(Yanlış ifadenin üstünü çizip yazmaya devam ediyor.)		1	1	7
						
18:24	A	Ne uzaklığı?	1			
18:27	Ö	E! Şey… k'nın h'a olan uzaklığı.				2
18:33	A	Tamam. k'nın mı? Anlamadım. Neyin neye uzaklığı?	6			
18:38	Ö	E! (Parmaklarını k uzunluğu kadar açıp bunun üzerine koyuyor.) h'ın k'ya olan uzaklığı. Alan… Uzaklıklar arasında…				2
18:44	A	Bu h nedir? (Genel türev denkleminin paydası işaret ediliyor.) Bu alandaki değişim. (Genel türev denkleminin pay kısmı işaret ediliyor.)	6			
18:49	Ö	Evet.				2
18:50	A	Bu h neydeki değişimdir? (Genel türev denkleminin paydası işaret ediliyor.)	6			
18:53	Ö	E! (Çokgen şeklini işaret ederek) Dışardaki diğer büyük… Uzunluğu…		1	2	2
18:58	A	Şekil çizsene. (Araştırmacı boş bir yer işaret ediyor.) Şunu sonradan yaparız. (yarım kalan yazılı ifade işaret ediliyor.) Şuraya şekil çiz.	1			
19:03	Ö	Tamam. Tamam. (Çokgen halkasal bölge çizimi yapmaya başlıyor.)		1	2	2
20:09	A	Şekildeki sözel açıklamayı yap.	1			

20:18	Ö	E! Uzaklıkları arasındaki değişimde… I! Türev tanımına göre arasındaki farkla büyük çokgenin, bilmediğimiz, kenar uzunluğu… E! Kaç-gen olduğunu bilmediğimiz büyük çokgenin içindeki çokgene… E! Bilmediğimiz k… Açı, kenarları…				7
20:38	A	n-gen de.	6			
20:39	Ö	n-gene olan… E! Uzaklığının arasındaki farkı oluşturur. Yani gittikçe bu (dışardaki çokgen)… E! Yani, uzaklık yaklaşması demektir.				7
						
20:51	A	Yani uzaklık o… Niye yaklaştırıyorsun onu?	6			
20:56	Ö	E! Limite göre aldığımızda türev tanımıyla…				7
20:58	A	Hı! Hı!				
20:59	Ö	Uzaklıkları arasındaki oranın kapanması… (Eliyle dıştaki çokgeni içe doğru itme hareketi yapıyor.)				7
21:03	A	Limitten dolayı mı yaklaştırıyorsun?	6			
21:06	Ö	Türev tanımından dolayı.				7
21:09	A	Tamam. Şunu söylemek istiyorsun, yanlış mı anladım? h'ı sıfıra götürsek…	6			
21:13	Ö	Evet.				7
21:15	A	h'ı sıfıra götürsen yaklaşacak.	6			
21:17	Ö	Evet. Yaklaşması anlamında.		1	2	7
21:18	A	O alanı niye taradın, orayı?	1			
21:22	Ö	h'ın bölgesini belli ediyor.				2
21:26	A	O h'ın bölgesi olduğunu, tarayacağını nereden anladın?	6			
21:31	Ö	İkisinin arasındaki uzaklık, oluşur. (Şekli işaret ediyor.)				2
21:33	A	İkisinin arasındaki alanı tarayacağını nereden anladın?	6			
21:36	Ö	(Suslunluk)				2
21:41	A	Biraz sıkıştırayım, seni. Ya ne olacak? (Gülüşme)				
21:42	Ö	(Gülüşme)				2
21:44	A	(Kahkaha) Sakin ol Ömür.				
21:48	Ö	(Kahkaha) Onun da yani yaklaşması mahiyetinde. E! Oklarla gösterdiğim şekilde, yaklaşması				2
21:59	A	Yo! Alanların birbirinden… O iki alanı birbirinden çıkartıp o aradaki alanı bulacağını nereden anladın? Yani neye dayanarak?	6			
22:05	Ö	(Eli genel türev denklemine gidiyor.) Türev ilk şeyinden anladım. Alanlar arasındaki..				2
22:07	A	Ha! Ha! Fark.				
22:10	Ö	…farkından dolayı.				2
22:11	A	Alanlarındaki değil. Alanlar arasındaki(Konuşmalar senkronize oluyor.)				
22:12	Ö	Alanlar arasındaki değişim. (Konuşmalar senkronize oluyor.)		1	2	2
22:13	A	Değişim. (Konuşmalar senkronize oluyor.) Tamam. Alanlar arasındaki değişim. Şimdi o h'ı sıfıra götürdüğünde ne olur?	1			
22:17	Ö	E! Büyük çokgendeki şey, uzaklık, kapanmaya başlar.				7
22:22	A	Hı! Hı! O aradaki alan neye dönüşür?				
22:25	Ö	E! Uzunluğa dönüşür.				7
22:27	A	Çevre uzunluğuna dönüşür.	6			
22:28	Ö	Evet.				7
22:28	A	Tamam.				
22:29	Ö	Çevre uzunluğuna dönüşür.		1	2	7
22:30	A	Bunu şey yapalım, sözel olarak yaz. (Şeklin altındaki boş yer işaret ediliyor.)	1			
22:34	Ö	(Kalemi eline alıyor ama yazmıyor.) Şu bunun yaklaşması mı?				7
22:38	A	Hı! Hı! Yaklaşmasını anladığın şekilde yaz.	6			
22:48	Ö	h'ın sıfıra… Yaklaşmasıdır. ("h'ın sıfıra gitmesi sebebiyle büyük n-li çokgenin kenarı küçük n-li çokgenin uzunluğuna yaklaşmasıdır" yazıyor.)				7
23:42	A	Yaklaştığı zaman da ne olur?	6			
23:46	Ö	(yazıyor.) Yaklaşması ile… Im! Nerdeyse birleşmeye gelir, uzunluğunu… Yani çevre uzunluğunu oluşturur.				7
24:12	A	Ne oluşturur?	6			
24:15	Ö	E! h'ın gittikçe daralmasıdır. (Eliyle büyük çokgenin küçük çokgene yaklaştığını işaret ediyor.) Yani sıfıra gitmesidir.				7

24:18	A	O, çevre uzunluğunu oluşturacak şey ne?	6			
24:24	Ö	Kenar uzunluğunun…				7
24:26	A	Uzunluğa dönüşecek olan şey ne?	6			
24:33	Ö	Alanı.				7
24:34	A	Ha! Alanı. Bak burada gizli özne var. Buraya alan yaz. (Yazılı ifade düzeltilmeye çalışılıyor.) Alan...	6			
24:40	Ö	Çevreye… (yazmaya devam ediyor.) Dönüşür. (Kısık sesle yazdıklarını okuyor.)		1	2	7
						
24:41	A	Alan çevreye dönüşür. Mesela bak şu cümlede gizli özne var, daha doğrusu özne yok.				
24:50	Ö	Anladım hocam.				7
24:51	A	Oluşturur diyorsun da ne oluşturur?				
24:52	Ö	Alan oluşturur. Alan çevreye dönüşür.				7
24:56	A	Tamam. Değişim oranı cinsinden yazalım.	1			
25:01	Ö	Buradan mı? (Yazacağı yeri soruyor, yarım bıraktığı ifadeyi işaret ediyor.)				2
25:02	A	Hı! Hı!				
25:02	Ö	Türevin tanımından alandaki değişimin…				2
25:07	A	Alandaki değişim şu. (Genel türev denkleminin pay kısmı işaret ediliyor.)	6			
25:08	Ö	Değişimin… E! Uzaklık…				2
25:11	A	Ne uzaklığı? Parantez aç.	6			
25:15	Ö	h'ın sıfıra yaklaşması…				2
25:20	A	h…				
25:21	Ö	h'ın k, şey… Diğer küçük çokgene yaklaşmasıyla… E! Çokgene…		1	1	2
25:31	A	Şimdi! Şu ağırlık merkezi.	1			
25:34	Ö	Evet.				
25:35	A	Hem şunun ağırlık merkezi hem de şunun ağırlık merkezi… (Çokgenler işaret ediliyor.)	6			2
25:39	Ö	Evet.				
25:40	A	Şu aradaki mesafe ne? (Dış çokgenin kenarı ile ağırlık merkezi arasındaki $k+h$'lık bölüm işaret ediliyor.)	6			2
25:42	Ö	$h+k$.				
25:43	A	Şu aradaki mesafe ne? (İçteki çokgenin kenarı ile ağırlık merkezi arasındaki k'lık bölüm işaret ediliyor.)	6			2
25:44	Ö	k.				
25:45	A	k… h dediğimiz şey nedir o zaman? Mesafeler cinsinden belirle.	6			2
25:53	Ö	E! İkisinin arasındaki farkı oluşturur. $h+k$'nın eksi k.				
25:58	A	$h+k$ eksi k				2
25:59	Ö	k.				
26:01	A	O zaman bunu da not yaz şuraya hemen not olarak yaz.	6			2
26:05	Ö	(Konuşmadan "Not:" yazıyor.)				
26:09	A	(Araştırmacı, genel türev denkleminin paydası ile not arasında bir ok çiziyor.) Bu h… Bu h…				2
						
26:16	Ö	Bu h?				2
26:19	A	Neler arasındaki farktır? $h+k$ eksi?	6			
26:22	Ö	$h+k$…				2
26:26	A	…'dan… (eklemesi gereken ek ifade ediliyor.)	6			
26:27	Ö	(Kısık sesle yazmaya devam ediyor.) …'dan h'ı				2

26:29	A	k'yı.	6			
26:30	Ö	k				2
26:32	A	Şu uzaklıktan şu uzaklığın farklı.	6			
26:34	Ö	Evet. k'nın mı k'yı mı?				2
26:39	A	k'nın farkı.	6			
26:41	Ö	k'nın farkıdır.		1	2	2
26:44	A	Diğer deyişle nedir? Ne, neydeki değişimdir?	1			
26:50	Ö	Uzaklıkları…				2
26:51	A	Ne uzaklığı? Neyin uzaklığı arasındaki, fark, değişimdir?	6			
26:58	Ö	Alanının şeyini mi?				2
26:59	A	Yok, yok. Hangi uzaklıklar arasındaki değişimdir?	6			
27:03	Ö	$h+k$'nın k'yı…				2
27:05	A	k'daki değişimdir değil mi?	6			
27:06	Ö	k'daki evet.		1	2	2
27:07	A	k'daki değişim. Şimdi tamam bunu Δ cinsinden yazabilir misin?	1			
27:11	Ö	Yazarım.				7
27:12	A	Şu ne anlama geliyor? (Genel türev denklemi işaret ediliyor.)	6			
27:15	Ö	$\lim_{\Delta k}$ şeklinde mi?				7
27:21	A	Evet.	6			
27:22	Ö	k sıfıra giderken Δ alanın				7
27:27	A	Δf.				
27:28	Ö	$f(k)$				7
27:30	A	Bölü…				
27:32	Ö	Bölü Δk				7
27:33	A	Δk. O da eşittir… $\lim_{h\to 0}$ budur, bu ifade. (Genel türev denklemi işaret ediliyor.) Değil mi?	6			
27:40	Ö	Evet. Yazayım mı?				7
27:42	A	Hı! Hı!				
27:43	Ö	(Yazmaya başlıyor ve yazdıklarını kısık sesle söylüyor.) $\lim_{h\to 0}\frac{f(k+h)-f(k)}{h}$		1	2	7
						
27:55	A	Tamam. O zaman, biz bu, nedeki değişim? ($\Delta f(k)$ işaret ediliyor.)	1			
27:59	Ö	Alanları arasındaki değişim.		1	3	2
28:00	A	Bu nedeki değişim?	1			
28:03	Ö	Uzaklıkları arasındaki değişim… Yani $h+k$'nın k'ya olan farkı.				2
28:07	A	k'daki değişim.	6			
28:08	Ö	k'daki değişim.				2
28:09	A	k nedir?	6			
28:13	Ö	k da küçük üçgendeki…				2
28:14	A	Ağırlık mer…	6			
28:15	Ö	Ağırlık merkezinin kenara olan dik uzaklığı.		1	2	2
28:17	A	Kenara olan uzaklığı. Tamam. Bunu buna oranladığımız zaman bir şey veriyor bize. Türev veriyor.				
28:21	Ö	Evet.				2
28:22	A	Bunun açıklamasını yaz. Bak şunun gibi… (Üçgen çalışma kâğıdını açıyor.) Üçgende yazmıştık. Ne yazmıştı? Sonuç…	1			
28:33	Ö	(Kısık sesle üçgen çalışma kâğıdındaki ifadeyi okuyor.) Alanlar arasındaki değişimin k (ağırlık merkezinin bir kenara uzaklığı olup)				4
28:37	A	… k'daki…	6			
28:37	Ö	(Kısık sesle üçgen çalışma kâğıdındaki ifadeyi okumaya devam ediyor.) Anlık değişimin oranı türev tanımıdır. Bize çevreyi buldurur.		1	2	4
28:44	A	Buna benzer bir sonuç yazacağız. (Çokgen çalışma kağıdını geri çeviriyor ve yazmak için yer işaret ediyor.) Sonuç yazalım.	1			
28:49	Ö	("Sonuç:" yazıp bekliyor.) Alanları…				4
28:59	A	Şey, baktım kayıt yapıyor mu? (Gülüşme)				
29:01	Ö	(Gülüşme) Alanları… Arkasını yazayım mı?				4
29:03	A	Hı! Hı! Yaz gitsin.	6			
29:04	Ö	(Yazmaya başlıyor ve bir yandan da okuyor.) Alanları arasındaki değişimin… (5 saniye duruyor.) Alanları arasındaki değişimin… (9 saniye duruyor.) G ağırlık merkezinden k'ya…				7
29:44	A	k değil, k değil. Kenar.	6			

29:47	Ö	Kenara olan…				7
29:53	A	Şimdi bu k'daki değişim değil mi? ($\lim_{\Delta k \to 0} \frac{\Delta f(k)}{\Delta k}$ ifadesinin paydası işaret ediliyor.) k'yı tanımlaman lazım.	6			
29:54	Ö	Evet.				7
29:54	A	Evet. k'yı yazacaksın. Kenara olan…				
30:00	Ö	Uzaklık, dik uzaklığının				7
30:02	A	Dik uzaklığının… Hı! Hı!	6			
30:03	Ö	(Yazmaya kaldığı yerden devam ediyor. Parantez içindeki "kenara olan dik uzaklığının" ifadesini araştırmacıya gösteriyor.)				7
30:08	A	Tamam. Bu k olması lazım bu arada. (k yerine G yazılmış.) Sen k'yı tanımlıyorsun şu anda.	6			
30:13	Ö	Evet. (G ifadesinin üstüne k yazıyor.)				7
30:15	A	Δk'yı tanımlıyorsun.	6			
30:17	Ö	(Kısık sesle Δk diyor ve yazdıklarını okuyup yazmaya devam ediyor.)				7
30:25	A	Daki ekle gitsin. (parantez sonuna eklenecek olan ek ifade ediliyor.)	6			
30:26	Ö	(Yazmaya devam ediyor.) Daki oranı…				7
30:31	A	Anlık.	6			
30:33	Ö	(Oranı kelimesinin üstünü çizip yazmaya devam ediyor.) Anlık… E! Değişimi mi?				7
30:37	A	Hı! Hı!	6			
30:38	Ö	(Yazmaya devam ediyor.) anlık değişimi bize çevreyi verir.				7
30:47	A	Değişime oranı…	6			
30:47	Ö	(Yazmaya devam ediyor.)		1	2	7
						
31:01	A	(Araştırmacı kalem kutusu ve koluyla yazılan ifadenin üstünü kapatıyor.)				
31:02	Ö	(Gülüşme)				7
31:02	A	Tekrar et bakayım.	1			
31:04	Ö	(Gülüşme) Alanları arasındaki değişimin… I! k ağırlık merkezinden kenara olan dik uzaklığının… I! Dik uzaklığının anlık… E! Yani, k'nın ağırlık merkezinden kenara olan dik uzaklığının…				7
31:27	A	Yani k de. k'daki diyelim.	6			
31:28	Ö	k'daki.. E! Anlık değişimin oranı, bize çevreyi verir.		1	2	7
31:34	A	Tekrar söyle.	1			
31:36	Ö	Alanları arasındaki… E! Değişimin				7
31:40	A	Hı! Hı!				
31:41	Ö	E! k'nın ağırlık merkezinin kenara olan dik uzaklığındaki… E! Anlık değişimi bize çevreyi verir.				7
31:53	A	Değişime oranı…	6			
31:55	Ö	Değişime oranı. Pardon. Değişime oranı bize…				7
31:57	A	Türev, türev değişim oranıdır.	6			
31:59	Ö	Evet.				7
32:00	A	Değişimlerin oranıdır.	6			
32:01	Ö	Değişime oranı bize çevreyi verir.		1	2	7
32:03	A	Tamam. (Araştırmacı, kalem kutusu ve kolunu yazılı ifadenin üstünden çekiyor.) Teşekkürler ya Ömür.				
32:06	Ö	Ben teşekkür ederim.				
32:08	A	Böylece bu işi bitirdik. Alan, çevre, türev ilişkisi bitti. Hayırlı uğurlu olsun. Teşekkürler Ömür.				
32:24	Ö	Ben teşekkür ederim.				
32:27	A	Biraz zorlandın mı? Uğraşırken…				
32:30	Ö	Tanım olarak söylemek, biraz şey… E! Beni biraz zorluyor.				
32:36	A	Yine de tanımlar üzerine biraz düşün.				
32:39	Ö	Evet.				
32:40	A	Tanımlar oturursa çok iyi olur. Yani türevi tam olarak anlamış olursun.				
32:45	Ö	Evet.				