MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

4–BOYUTLU MANİFOLDLAR ÜZERİNDE BAZI ÖZEL TENSÖR ALANLARI

BURCU CINDIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Doç. Dr. Bahar KIRIK RÁCZ

İSTANBUL, 2024

MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

4–BOYUTLU MANİFOLDLAR ÜZERİNDE BAZI ÖZEL TENSÖR ALANLARI

BURCU CINDIK

(520921013)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Doç. Dr. Bahar KIRIK RÁCZ

İSTANBUL, 2024

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında, öncelikle bana yardım eden, bilgi ve birikimlerini benimle paylaşan değerli danışman hocam Doç. Dr. Bahar KIRIK RÁCZ'a en içten dileklerimle teşekkür ederim. Daha sonra, bu çalışmanın büyük bir kısmında kitap ve araştırmalarından faydalandığım Prof. Dr. Graham S. HALL'a ve paylaştığı fikirler, yönlendirmeler ve samimi desteklerinden ötürü Prof. Dr. Koji MATSUMOTO'ya teşekkür ederim. Bununla birlikte, bu çalışma TÜBİTAK 2210-A Yurt İçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı kapsamında ve 122F478 numaralı proje ile TÜBİTAK 3501 Kariyer Geliştirme Programı kapsamında, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu tarafından desteklenmiştir. Bu tez çalışmasını gerçekleştirmem için bana maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, eğitim hayatımın her anında yanımda duran, yardımlarını esirgemeyen, yoğun çalışmalarım sırasında bana sabır gösteren başta annem ve babam olmak üzere sevgili aile üyelerime sağladıkları maddi ve manevi her türlü destekten ötürü sonsuz şükranlarımı sunmayı kendime bir borç bilirim. Son olarak, her sabah en içten şekilde beni karşılayan ve samimi destekleriyle motivasyon sağlayan, biricik yeğenlerim Alya ve Pamuk CINDIK'a teşekkür eder, yeni evrenler keşfetme ve tanımlama serüvenlerinde bu tez çalışmasının onlara yol göstermesini dilerim.

Haziran, 2024 **Burcu CINDIK**

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR . . . . . **i**

ÖZET . . . . . **iii**

ABSTRACT . . . . . **v**

SEMBOLLER . . . . . **vii**

TABLO LİSTESİ . . . . . **viii**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Temel Tanımlar 3

1.2. Bazı Özel Vektör Alanları 12

2. MATERYAL VE YÖNTEM **14**

2.1. İkinci Mertebeden Simetrik Tensör Alanlarının Sınıflandırılması . . 14

2.2. Bivektörler 16

2.3. Dolanım Teorisi ve Yapısı 28

3. BULGULAR VE TARTIŞMA **33**

3.1. Bazı Özel $Z-$Simetrik Manifoldlar ve Uzay-Zamanlara Uygulamaları 34

3.2. Özel Vektör Alanları İçeren $Z-$Reküran Manifoldlar 37

3.3. Özel Vektör Alanları İçeren Zayıf $Z-$Simetrik Uzay-Zamanlar . . . 46

3.4. Uzay-Zamanlar Üzerinde $Z-$Tensörü ve Ricci Solitonlar 65

3.5. Uygulamalar 73

3.6. Schouten ve Cotton Tensörleri Üzerine Bazı İncelemeler 76

4. SONUÇLAR **87**

KAYNAKLAR **89**

ÖZGEÇMİŞ **93**

ÖZET

4−BOYUTLU MANİFOLDLAR ÜZERİNDE BAZI ÖZEL TENSÖR ALANLARI

Bu tezin amacı, 4−boyutlu manifoldlar üzerinde bazı özel tensör alanlarının araştırılması ve söz konusu tensör alanlarının çeşitli geometrik ve fiziksel özelliklerinin tespit edilmesidir. Çalışma; giriş, materyal ve yöntem, bulgular ve tartışma, sonuçlar olmak üzere dört ana başlık altında toplanmıştır.

Tezin birinci bölümünde, çalışmanın kapsamıyla alakalı literatür kısmı incelenmiş ve bazı temel tanımlara yer verilmiştir. Bu hususta, araştırmada göz önüne alınan 4−boyutlu manifoldlar ve metrik işaretleri, özel tensör alanları, dolanım teorisi gibi kavramların ortaya çıkışı ve günümüze kadar olan bilimsel gelişimi açıklanmıştır. Bununla birlikte, tezin ön bilgileri verilerek, çalışmada kullanılan özel vektör alanlarının tanımları da bu kısımda sunulmuştur.

Çalışmanın ikinci bölümü olan materyal ve yöntem kısmında, 4−boyutlu pozitif tanımlı ve Lorentz metrik işaretli manifoldlar göz önüne alınarak, öncelikle manifoldun teğet uzayının bazları tanımlanmıştır. Bununla birlikte, Lorentz metrik işaret üzerine yoğunlaşılarak ikinci mertebeden, simetrik tensör alanlarının Jordan-Segre sınıflandırması hakkında bilgiler verilmiştir. Daha sonra, bivektör olarak isimlendirilen ikinci mertebeden, ters-simetrik tensör alanlarının söz konusu metrik işaretteki sınıflandırılması sunulmuştur. Son olarak, tez çalışmasında dolanım teorisindeki tekniklerden faydalanılacağından, ilgili teori ve varolan dolanım tipleri 4−boyutlu pozitif tanımlı ve Lorentz metrik işaretli manifoldlar üzerinde ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, tez çalışmasında elde edilen bulgular sunularak çeşitli örnekler verilmiştir. Bu kapsamda, bazı özel $Z-$simetrik manifoldlar incelenmiş ve bahsi geçen manifoldların çeşitli özellikleri elde edilmiştir. Daha açık olarak, $Z-$reküran ve zayıf $Z-$simetrik manifoldlar göz önüne alınmış ve bu manifoldların özel vektör alanları içermesi durumunda birtakım teoremler ispatlanmıştır. Söz konusu incelemede, uzay-zamanlar üzerinde uygulamalara yoğunlaşılmış ve dolanım teorisiyle bağlantıları tespit edilmiştir. Öte yandan, $Z-$tensörünün simetriler ve Ricci solitonlarla ilişkisi de araştırılıp bazı sonuçlar bulunmuştur. $Z-$ten-

sörüyle alakalı incelemelere ek olarak, Schouten ve Cotton tensörleri de bu bölümde ele alınmış ve uzay-zamanlarla alakalı analizler yapılmıştır. Bunlara ek olarak, ilgili tensör alanlarının, $4-$boyutlu Lorentz metrik işaretli manifoldların dolanım teorisindeki bazı temsilleri de irdelenmiştir.

Son olarak, bu çalışmanın dördüncü bölümünde tezin sonuçları özetlenmiştir. Ayrıca, çalışma boyunca yapılan analizlerin ileride yol açabileceği araştırmalar üzerine öngörülerde de bulunulmuştur.

ABSTRACT

SOME SPECIAL TENSOR FIELDS ON 4−DIMENSIONAL MANIFOLDS

The aim of this study is to investigate some special tensor fields on 4−dimensional manifolds and to determine various geometric and physical properties of these tensor fields. The study is collected under four main headings: introduction, material and method, findings and discussion, and results.

In the first part of the thesis, the literature related to the scope of the study is examined and some basic definitions are included. In this regard, the emergence of concepts such as 4−dimensional manifolds and metric signatures, special tensor fields, and holonomy theory, which are considered in the research, and their scientific development until today are explained. On the other hand, preliminary information of the thesis is given and the definitions of the special vector fields used in the study are also presented in this section.

In the second part of the study, which is the material and method section, the bases of the tangent space of the manifold are first defined by considering 4−dimensional manifolds admitting Lorentz or positive definite metric signatures. In addition, information is given about the Jordan-Segre classification of second-order symmetric tensor fields, focusing on the Lorentz metric signature. Then, the classification of second order skew-symmetric tensor fields, referred to as bivectors, in the metric signatures in question is presented. Finally, since the techniques in holonomy theory will be used in this thesis, the relevant theory and the known holonomy types are discussed on 4−dimensional manifolds admitting a metric of positive definite or Lorentz signature.

In the third chapter, the findings obtained in this thesis are presented and several examples are given. In this context, some special $Z-$symmetric manifolds are examined and various properties of the aforementioned manifolds are obtained. More specifically, $Z-$recurrent and weakly $Z-$symmetric manifolds are considered, and a number of theorems are proved in case these manifolds contain special vector fields. In this investigation, applications on space-times are focused on and connections with holonomy theory are identified. On the other hand, the relationship of the $Z-$tensor with symmetries and Ricci solitons is also investigated

and some results are found. Apart from the studies related to the $Z-$tensor, Schouten and Cotton tensors are also discussed in this section and analyses related to space-times are made. In addition, some representations of the relevant tensor fields in the holonomy theory of $4-$dimensional Lorentzian manifolds are also examined.

Finally, in the fourth part of this study, the results of the thesis are summarized. In addition, predictions are made on the research that analyses done throughout the study may lead to in the future.

SEMBOLLER

M	: Diferansiyellenebilir manifold temsili
$C^\infty(M)$	: M manifoldu üzerindeki düzgün fonksiyonların kümesi
$\mathscr{C}$	: Manifold üzerindeki parçalı, düzgün eğrilerin kümesi
$T_p(M)$	: Manifoldun p noktasındaki teğet uzayı
$u \cdot w$	: Teğet vektörlerin iç çarpımı
$\mathfrak{x}(M)$	: M manifoldu üzerindeki düzgün vektör alanlarının kümesi
∇	: Levi-Civita konneksiyonu
$[X,Y]$	: X ve Y vektör alanlarının Lie parantez temsili
g_{ij}	: Metrik tensör
Γ_{ij}^k	: Christoffel sembolleri
R_{ijk}^h	: $(1,3)$ tipinden Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri
R_{ijkh}	: $(0,4)$ tipinden Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri
Ric	: Ricci tensörü
r	: Skaler eğrilik
$\mathscr{W}$	: Weyl konformal eğrilik tensörü
T	: Tensör temsili
Z	: $Z-$tensörü
$(WRS)_n$	: Zayıf Ricci simetrik manifold
$(WZS)_n$	: Zayıf $Z-$simetrik manifold
$\Lambda_p(M)$	: Manifoldun p noktasındaki tüm bivektörlerin kümesi
Φ	: Dolanım grubu
ϕ	: Dolanım cebri

TABLO LİSTESİ

Tablo 1: $(+,+,+,+)$ işareti için dolanım tipleri 29

Tablo 2: $(+,+,+,-)$ işareti için dolanım tipleri 31

1. GİRİŞ

Bilim dünyasında $n-$boyutlu uzay kavramı farklı disiplinler arası yorumlanabilme olanağına sahip olduğu ve birçok çalışma açısından problem niteliği taşımasından ötürü günümüzde de halen popülerliğini korumaya devam etmektedir. Mevcut olan $n-$boyutlu uzay kavramı, modern anlamda ilk kez Alman matematikçi Bernhard Riemann tarafından, üzerinde çeşitli tanımlamalar yapılabilmesine olanak sağlayan *manifold* kavramını getirmiştir. Manifold kavramı; modern matematiksel fizik ve geometrinin birçok kısmında merkezi bir konuma sahiptir. Çünkü; bu kavram, karmaşık yapıları, topolojik özellikleri iyi bilinen uzaylar açısından tanımlanmasına olanak sağlar. Bu durum ise Riemann'ın, bir yüzeyi daha büyük boyutlarda genelleme fikrine sahip olan ve çalışmayı genişleten ilk kişi olduğunu gösterir. Öte yandan, $4-$boyutlu manifoldlar diferansiyel geometrinin yanı sıra fizikte de ilgi çeken bir araştırma konusu olmuştur. Bilhassa, *uzay-zaman* olarak adlandırılan, $(+,+,+,-)$ Lorentz metrik işaretine sahip olan $4-$boyutlu uzaylar, Albert Einstein'ın genel görelilik teorisinde önemli bir yere sahip olduğundan, bilim insanlarının dikkatini çekmektedir. Bu nedenle $4-$boyutlu manifoldlar, üzerinde farklı geometrilerin yoğun bir şekilde çalışıldığı bir yapı olmuştur. İlgili çalışmalar dahilinde genelleme yapılabilmesi cebirsel yapıları da gerektirdiğinden, manifold üzerinde tanımlanabilen bazı cebirsel nesnelerin varlığı söz konusudur. Bu bağlamda, en temel nesneler arasında *tensör* adı verilen ve kabaca çoklu lineer dönüşüm olarak düşünülen yapılar yer almaktadır. Farklı tipten tensör alanlarının değişik manifoldlar üzerinde çeşitli özellikleri birçok bilim insanı tarafından incelenmiştir (ör. bkz. [1], [8], [18], [26], [28], [29]). Ayrıca, literatürde yer alan çalışmalar, belli yerel özellikler altında araştırılarak, ele alınan manifoldun geometrisi hakkında pek çok bilgiye olanak sağlamıştır. Söz gelimi bu ihtimaller ışığında yapılan incelemeler, yerel özelliklerden ayrılarak, manifold üzerinde global özelliklerin oluşturulmasına zemin hazırlamıştır. Ancak, manifoldun global özelliklerinden söz edebilmek yerel özelliklerin elde edilmesine karşı daha zor olduğundan, bu durum farklı çözüm yöntemleri arayışına sebep olmuştur. Bu tür özelliklerin bulunmasındaki zorluk disiplinler arası farklı yorumlamaları arttırmış ve farklı izlenimleri geliştirmiştir. Bu önemli izlenimlerden birini Élie Cartan oluşturmuştur. Cartan, dolanım kavramını diferansiyel geometri ve genel görelilik teorisi açısından [5] numaralı kaynakta tanıtmıştır. Do-

lanım grubu, bir Lie grubu olması sebebiyle; ϕ ile temsil edilen bir Lie cebrine sahiptir (bkz. [14] ve [25]). Metrik tensör, $(+,+,+,-)$ Lorentz işaretine sahip olduğunda, ϕ cebri; $o(1,3)$ ortogonal cebrinin bir alt cebridir (ör. bkz. [14], [17]). ∇, Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere, uzay-zamanların mümkün olan tüm dolanım cebirlerinin hesapları [34] numaralı kaynakta bivektör gösterimi ile verilmiştir. Bu durum çalışma için merak uyandırıcı unsurların elde edilmesi açısından büyük katkı sağlar. Zira bivektörler; ikinci mertebeden, ters-simetrik tensör alanları olup, dolanım teorisinde önemli bir yere sahiptirler. Bununla birlikte, paralel ve reküran vektör alanlarının varlığından da dolanım teorisinde bahsedilebilmektedir. Bu tür özel vektör alanları, bilhassa ikinci mertebeden, simetrik bazı özel tensörlerin özdeğer-özvektör yapısı ile de ilişkilendirilebilmektedir. Bu ilişki vasıtasıyla, literatürde genişçe yer alan çalışmalar mevcuttur ve günümüzde de farklı özel tensör alanları vasıtasıyla araştırmalar sürdürülmektedir.

Bu çalışmanın amacı; $4-$boyutlu manifoldlar üzerinde bazı özel tensör alanlarının çeşitli özelliklerinin incelenmesidir. Mevcut tensörel çalışmalar dolanım teorisi ile irdelenmiştir. Öte yandan, ikinci mertebeden, simetrik tensör alanlarının özdeğer-özvektör sınıflandırması yardımıyla yeni bakış açıları geliştirilmiştir. Bu kapsamda, Mantica ve Molinari [28] tarafından tanıtılan ve ikinci mertebeden özel bir simetrik tensör olan genelleştirilmiş $Z-$tensörü incelenmiştir. Söz konusu tensörün reküran ve zayıf $Z-$simetrik olması durumları araştırılmıştır. Tamássy ve Binh [36, 37] tarafından ortaya atılan zayıf simetri kavramı çeşitli özel tensör alanları göz önüne alınarak çalışılmış ve halen güncelliğini korumaktadır. Bununla birlikte, tez çalışmasında diğer bir ikinci mertebeden, simetrik tensör alanı olan Schouten tensörü de ele alınarak çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra, Schouten tensörüyle ilişkili bir üçüncü mertebeden tensör alanı olan Cotton tensörü de göz önüne alınmış ve birtakım bulgular elde edilmiştir.

Çalışmanın ilk kısmında; temel tanımlamalar yapılarak, daha sonraki kısımlarda kullanılmak üzere, bazı özel vektör alanlarının özelliklerinden bahsedilmiştir. İkinci kısımda; ikinci mertebeden, simetrik tensör alanlarının cebirsel sınıflandırılması hakkında bilgiler sunulmuştur. Daha sonra, bivektör kavramından bahsedilerek, uzay-zamanlar üzerinde dolanım teorisi ve yapısı incelenmiştir.

Çalışmanın üçüncü kısmında, özel vektör alanları içeren çeşitli $Z-$simetrik manifoldlar üzerinde çalışılmıştır. Söz konusu manifoldların, $4-$boyutlu ve Lorentz metrik işaretli olması durumu ele alınarak, dolanım teorisindeki varlıkları irdelenmiştir. Özel olarak, $Z-$reküran ve zayıf $Z-$simetrik manifoldlar üzerinde çalışılmıştır ve $Z-$tensörünün birçok özelliği ikinci mertebeden, simetrik tensörlerin sınıflandırılmasıyla ilişkilendirilerek elde edilmiştir. Ayrıca, elde edilen bazı sonuçları açıklamak için örneklere yer verilmiştir. Dahası, Ricci solitonlar üzerinde $Z-$tensörü ile alakalı bazı sonuçlara ulaşılıp, bu sonuçlar örnekler ile desteklenmiştir. Yapılan bu çalışmalara ek olarak, Schouten ve Cotton tensörleri de bu kısımda incelenmiş ve uzay-zamanlarla alakalı araştırmalar gerçekleştirilmiştir. Son olarak, dördüncü kısımda; çalışmanın genelinde elde edilen tüm bulgular analiz edilerek sonuçlar verilmiştir.

1.1. Temel Tanımlar

Tanım 1.1 (Noktada Diferansiyellenebilme). $U \subset \mathbb{R}^n$ açık alt kümesi, $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $p = (p^1, p^2, \ldots, p^n) \in U$ noktası verilsin. f fonksiyonunun $x = (x^1, ..., x^n) \in U$ noktasındaki değeri $f(x) = f(x^1, ..., x^n)$ olarak ifade edilsin. Keyfi bir $p \in U$ ve $1 \leq j \leq n$ için,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)_p = \lim_{s\to 0} \frac{f(p^1, ..., p^j + s, ..., p^n) - f(p^1, ..., p^j, ..., p^n)}{s}$$

limiti mevcut ve $(\partial f/\partial x^j)_p$ fonksiyonları sürekli ise, f fonksiyonuna $p \in U$ noktasında diferansiyellenebilirdir denir, [4]. Burada, $1 \leq j \leq n$ için, $(\partial f/\partial x^j)_p$ fonksiyonları f fonksiyonunun x^j'ye göre *kısmi türevi* olarak adlandırılır.

$\partial f/\partial x^j$ kısmi türevleri tanımlı olduğu takdirde, $1 \leq j \leq n$ için, U üzerinde n tane fonksiyon belirtmektedir. f fonksiyonu her $p \in U$ için diferansiyellenebilirse, U kümesi üzerinde diferansiyellenebilir denir ve $f \in C^1(U)$ olarak yazılır.

Böylece, $U \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde f fonksiyonunun kısmi türevlerinin varlığı ve sürekliliği, U kümesinin her noktasında f fonksiyonunun differansiyellenebilirliğini gerektirir.

Tanım 1.2 (Düzgün Fonksiyon). $U \subset \mathbb{R}^n$ açık alt kümesi ve $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $k \geq 1$ olmak üzere, f fonksiyonunun U kümesi üzerinde k. mertebeye kadar olan kısmi türevleri mevcut ve sürekli ise, f fonksiyonu U kümesi üzerinde C^k sınıfındandır denir

ve $f \in C^k(U)$ olarak yazılır. Eğer her k için f fonksiyonu C^k sınıfından ise, başka bir deyişle, f fonksiyonunun U kümesi üzerinde her mertebeden kısmi türevleri mevcut ve sürekli ise, f fonksiyonuna U üzerinde düzgün fonksiyon adı verilir ve $f \in C^\infty(U)$ şeklinde gösterilir, [4].

Tanım 1.3 (Topolojik Manifold). M bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa, M uzayına $n-$boyutlu *topolojik manifold* adı verilir:

- M bir Hausdorff uzayıdır.
- M topolojik uzayı ikinci-sayılabilirdir. Başka bir deyişle, M uzayının topolojisi sayılabilir bir baza sahiptir.
- M yerel olarak Euclidean olur. Daha açık olarak, M'nin her noktası, $\mathbb{R}^n$ uzayının açık bir alt kümesine homeomorfik olacak şekilde bir komşuluğa sahiptir, [27].

M bir topolojik manifold ve ζ; $p \in M$ noktasının bir U komşuluğundan $\mathbb{R}^n$ uzayının açık bir alt kümesi üzerine bir homeomorfizma olsun. Bu takdirde, U kümesine bir *koordinat komşuluğu*, ζ dönüşümüne U üzerinde bir *koordinat sistemi* ve (U,ζ) ikilisine de bir *harita* adı verilir. I bir indis kümesi ve $\alpha \in I$ olmak üzere, $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ koşulunu sağlayan M manifoldunun U_α açık kümelerinin bir $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ kolleksiyonuna M'nin bir *açık örtüsü* adı verilir, [38].

Tanım 1.4 (C^∞-Bağdaşan Haritalar). M bir topolojik manifold olsun. (U,ζ) ve (V,θ), M manifoldunun haritaları olarak verilsin. Eğer

$$\zeta \circ \theta^{-1} : \theta(U \cap V) \to \zeta(U \cap V), \quad \theta \circ \zeta^{-1} : \zeta(U \cap V) \to \theta(U \cap V)$$

şeklinde tanımlanan dönüşümler C^∞ sınıfından ise, (U,ζ) ve (V,θ) harita ikilisine *C^∞-bağdaşan haritalar* adı verilir. $\zeta\circ\theta^{-1}$ ve $\theta\circ\zeta^{-1}$ dönüşümleri, haritalar arasındaki *geçiş fonksiyonları* olarak isimlendirilmektedir. $U \cap V = \emptyset$ olduğu takdirde, (U,ζ) ve (V,θ) haritaları doğrudan C^∞-bağdaşırlar, [38].

Tanım 1.5 (C^∞ Atlas). M bir topolojik manifold olsun. $\mathscr{A} = \{(U_\alpha,\zeta_\alpha)\}$, M manifoldunun C^∞-bağdaşan haritalarının bir kolleksiyonu olsun ve $M = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ koşulu sağlansın. Bu takdirde, $\mathscr{A}$ kümesine, M manifoldu üzerinde bir C^∞ atlas veya kısaca atlas adı verilir, [38].

M bir topolojik manifold ve $\mathscr{A}$, M manifoldu üzerinde bir atlas olsun. Eğer, $\mathscr{A}$ atlası M üzerindeki en geniş atlas ise, başka bir deyişle, $\mathscr{A}$ atlası M üzerindeki herhangi bir atlas tarafından kapsanmıyorsa, $\mathscr{A}$ atlasına *maksimal atlas* denir, [38].

Tanım 1.6 (Diferansiyellenebilir Manifold). Bir maksimal atlasla birlikte M topolojik manifoldu, diferansiyellenebilir manifold veya düzgün manifold olarak adlandırılır, [38].

Bu çalışmada, dolanım (holonomy) grubu üzerinde araştırmalar yapılacağından, M diferansiyellenebilir manifoldunun bağlantılı olduğu varsayılacaktır (bkz. Bölüm 2.3). M topolojik uzayının tüm bağlantılı bileşenleri $n-$boyutlu olduğu takdirde, M, $n-$boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold olarak adlandırılmaktadır, [38] (topolojik tanımlar için bkz. [32]).

Tanım 1.7. M, $n-$boyutlu bir düzgün manifold olsun. $f : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $p \in M$ noktasının civarında, $f \circ \zeta^{-1}$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^n$'de $\zeta(p)$ noktasında C^∞ sınıfından olacak şekilde p'nin bir (U, ζ) haritası varsa, f fonksiyonuna p noktasında düzgündür veya C^∞ sınıfındandır denir. M manifoldu üzerindeki tüm noktalar için f düzgün bir fonksiyon ise, f fonksiyonu M üzerinde düzgün fonksiyon olarak adlandırılır, [38].

Tanım 1.8 (Teğet Uzay). M manifoldunun p noktasındaki $T_p(M)$ ile gösterilen *teğet vektör uzayı*, $X_p : C^\infty(M, p, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ şeklindeki bütün dönüşümlerin kümesi olup, her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $f, q \in C^\infty(M, p, \mathbb{R})$ için

(i) $X_p[af + bq] = aX_p[f] + bX_p[q]$ (lineerlik),

(ii) $X_p[fq] = X_p[f]\, q(p) + f(p) X_p[q]$ (Leibniz kuralı)

koşulları sağlanır. $T_p(M)$, üzerinde tanımlanan

$$\Big(X_p + Y_p\Big)[f] = X_p[f] + Y_p[f]$$
$$\Big(aX_p\Big)[f] = a\Big(X_p[f]\Big)$$

işlemleriyle birlikte bir vektör uzayıdır. Bu takdirde, $X_p \in T_p(M)$, M manifoldunun p noktasındaki bir teğet vektörü olarak isimlendirilmektedir, [4].

Tanım 1.9 (Teğet Demeti). $n-$boyutlu bir M manifoldu üzerinde bulunan her p noktası için karşılık gelen tüm teğet vektör kümelerinin birleşimi

$$T(M) = \{X_p \in T_p(M) | \, p \in M\} = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$$

ile gösterilmek üzere; $T(M)$ kümesi, M manifoldunun *teğet demeti* olarak adlandırılır, [4].

Tanım 1.10 (Vektör Alanı). M manifoldu üzerinde bir X *vektör alanı*; manifoldun her p noktasına, $T_p(M)$ teğet uzayının bir X_p teğet vektörünü karşılık getiren bir fonksiyondur. Daha açık olarak, X vektör alanı

$$X : M \to T_p(M)$$
$$p \in M \mapsto X_p \in T_p(M)$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyondur, [4].

Bu çalışmada, C^∞ (düzgün) vektör alanları göz önüne alınacaktır. M manifoldu üzerindeki tüm düzgün vektör alanlarının kümesi $\mathfrak{X}(M)$ ile gösterilecektir. Öte yandan, $n-$boyutlu bir M manifoldu üzerinde (U, ζ) bir harita ve X bir vektör alanı olsun. Bu takdirde, X vektör alanının bileşen fonksiyonları $1 \leq i \leq n$ için α^i olmak üzere, $X_p \in T_p(M)$ teğet vektörü,

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p$ vektörleri, $T_p(M)$ teğet uzayının doğal bazının elemanlarıdır.

Tanım 1.11 (Lie Parantezi). X ve Y, diferansiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde düzgün vektör alanları olsun. $p \in M$ ve $f \in C^\infty(M, p, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$[X, Y]_p [f] = \Big(X_p Y - Y_p X\Big)[f]$$

biçiminde tanımlanan $[X, Y]$ (düzgün) vektör alanına, X ve Y vektör alanlarının Lie parantezi (veya komütatörü) adı verilir. Lie parantezi kısaca, $[X, Y] = XY - YX$ olarak yazılır, [4].

Tanım 1.12 (Lie Cebri). $V, \mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Her (X,Y) çiftini, $[X,Y]$ elemanına eşleyen $[,] : V \times V \to V$ dönüşüm göz önüne alınsın. Bu dönüşüm, her $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $X_1, X_2, Y_1, Y_2, X, Y, Z \in V$ için

(1) $[\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y] = \lambda_1 [X_1, Y] + \lambda_2 [X_2, Y]$

$[X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2] = \lambda_1 [X, Y_1] + \lambda_2 [X, Y_2]$ (bilineerlik)

(2) $[X,Y] = -[Y,X]$ (ters simetri özelliği)

(3) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ (Jacobi özdeşliği)

özelliklerine sahipse, V vektör uzayına $[,]$ Lie operatörüyle birlikte bir Lie cebri adı verilir, [4].

Tanım 1.13 (Metrik Tensör). M bir diferansiyellenebilir manifold olsun. M manifoldu üzerindeki bir g metriği, $(0,2)$ tipinden düzgün bir tensör alanı olup; bu tensör, global, simetrik ve dejenere olmayan bir bilineer formdur. M manifoldu üzerindeki böyle bir yapı, (M,g) ikilisi şeklinde gösterilir, [15].

$p \in M$ ve (U,ζ), p noktasını içeren bir harita olmak üzere, g metrik tensörü

$$g_p = g_{ij}(dx^i)_p \otimes (dx^j)_p, \quad g_{ij} = g_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = g_{ji}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\det(g_{ij}) \neq 0$ olup, g_{ij} bileşenleri U üzerinde reel-değerli, düzgün fonksiyonlardır. Manifold üzerinde, uygun haritalar için x ve $\bar{x}$ koordinat sistemleri göz önüne alınsın. Söz konusu g metriğine, Sylvester kanonik form teorisinin tensör dönüşüm kuralı uygulandığı takdirde, $\bar{g} = \mathcal{S}^T g \mathcal{S}$ kuralının geçerli olduğu bilinmektedir. Burada, $\mathcal{S} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}$ matrisidir. Bu takdirde, g metriğinin g_{ij} bileşenlerinin, g_p'nin işaretine uygun Sylvester formunu aldığı yerde $T_p(M)$ uzayının bir bazı daima mevcuttur, [15]. Öte yandan, metrik işaret için çeşitli olasılıkların varlığından söz edilebilmektedir. Eğer Sylvester matrisi sırasıyla, $(+,+,\ldots,+)$ ve $(-,+,\ldots,+)$ işaretli ise, $g(p)$ sırasıyla, *pozitif tanımlı* ve *Lorentz metrik işaretlidir* denir. Her $p \in M$ için, $g(p)$ aynı işarete sahipse, bahsi geçen işaret g metriğinin işareti olarak adlandırılır. M manifoldu bağlantılı olduğu takdirde, her $p \in M$ için, g metriğinin işareti aynıdır, [15].

Tanım 1.14. $n = q + q'$ boyutlu düzgün bir M manifoldu üzerinde, her $p \in M$ için dejenere olmayan, $(q,\ q')$ işaretli g metriğine *yarı-Riemann metriği* denir. Bu durumda, (M, g) bir *yarı-Riemann manifoldu* olarak adlandırılır. Özel olarak

- $q' = 0$ (yani g pozitif tanımlı) ise, g metriğine bir *Riemann metriği* denir ve (M, g) literatürde bir *Riemann manifoldu* olarak bilinmektedir.
- $q = 1$ (ve $q' > 0$) ise, g metriğine bir *Lorentz metriği* denir ve (M, g) bir *Lorentz manifoldu* olarak isimlendirilmektedir, [2].

M manifoldunun bir p noktası için $u, v \in T_p(M)$ vektörleri göz önüne alınsın. Bu takdirde, $g_p(u, v) = g_{ij}u^i v^j$ reel sayısı, seçilen koordinat sisteminden bağımsız olmak üzere, u ve v vektörlerinin iç çarpımı olarak bilinir. $p \in M$ için, $0 \neq v \in T_p(M)$ teğet vektörünün sahip olduğu karakter (*causal character*); $g_p(v, v) > 0$ ise *uzaysal*, $g_p(v, v) < 0$ ise *zamansal* ve $g_p(v, v) = 0$ ise *null* olarak isimlendirilmektedir, [15].

Uyarı 1.1. Yukarıda da bahsedildiği üzere, bu çalışmada, M manifoldunun bağlantılı olduğu kabul edildiğinden, g metriğinin işareti her $p \in M$ için aynıdır. Bölüm 2.1'de tanımlanacağı üzere, tez çalışmasında, M manifoldunun bir *uzay-zaman*, yani $4-$boyutlu $(+,+,+,-)$ metrik işaretli (Lorentz metrik işaretli) olması durumu ele alınıp, Bölüm 3'te çeşitli incelemeler yapılacaktır. Yapılan araştırmalarda metriğin keyfi işaretli olması durumu da ayrıca belirtilecektir.

Tanım 1.15 (Afin Konneksiyon). M, $n-$boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold olsun. Her $f \in C^\infty(M, p, \mathbb{R})$ ve $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ için,

1. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
2. $\nabla_{X+Z} Y = \nabla_X Y + \nabla_Z Y$
3. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
4. $\nabla_X(fY) = f \nabla_X Y + X[f]Y$

koşullarını sağlayan, $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dönüşümüne M manifoldu üzerinde bir afin (veya lineer) konneksiyon adı verilir.

Tanım 1.15'de verilen dört özelliğe ek olarak

5. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (burulmasız veya simetrik konneksiyon)

6. $Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$ (metrik konneksiyon)

koşulları da gerçeklendiği takdirde, ∇ konneksiyonu, bir *Levi-Civita konneksiyonu* olarak adlandırılmaktadır, [4].

Tanım 1.16. M, $n-$boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold, $\zeta = (x^1, ..., x^n)$, M üzerinde bir koordinat sistemi ve ∇, M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu takdirde, ∇ konneksiyonuna göre, $1 \leq i, k, t \leq n$ için

$$\Gamma_{ki}^{t} = \frac{1}{2} g^{tj} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} \right) \tag{1.1}$$

şeklinde ifade edilen fonksiyonlar *konneksiyon katsayıları* veya *Christoffel sembolleri* olarak isimlendirilir. (1.1) denkleminde verilen g^{tj} bileşenleri

$$g_{kt} g^{tj} = \delta_k^j \tag{1.2}$$

bağıntısını sağlar. (1.2) denkleminde δ_k^j ifadesi Kronecker sembolünü göstermekte olup, g^{tj} tensörü, g_{tj} metriğinin tersi (inversi) olarak adlandırılmaktadır, [4].

Uyarı 1.2. (1.1) ve (1.2) denklemlerinde, tekrarlanan indisler üzerinden *Einstein toplama kuralı* kullanılmıştır ve çalışmanın devamında bu uylaşım göz önüne alınacaktır.

Tanım 1.17 (Riemann Eğrilik Tensörü). (M, g) bir diferansiyellenebilir manifold ve ∇, M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. Her $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{1.3}$$

şeklinde verilen $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dönüşümü, $(1, 3)$ tipinden bir tensör alanı belirtir ve söz konusu tensör, *Riemann eğrilik tensörü* olarak adlandırılır, [4]. Riemann eğrilik tensörü, kısaca *Riem* ile gösterilecektir.

(U, ζ), M manifoldu üzerinde bir harita ve $\{E_1, ..., E_n\}$, teğet uzayın bir ortonormal çatı alanı olmak üzere, $(1,3)$ tipinden Riemann eğrilik tensörü

$$R(E_j, E_k)E_i = \sum_h R^h_{ijk} E_h \tag{1.4}$$

biçiminde n^4 tane koordinat bileşeni ile tek türlü belirlidir. Konneksiyon katsayıları kullanılarak R^h_{ijk} bileşen fonksiyonları, $1 \leq i, j, k, h \leq n$ için

$$R^h_{ijk} = \partial_j \Gamma^h_{ki} - \partial_k \Gamma^h_{ji} + \Gamma^h_{jl}\Gamma^l_{ki} - \Gamma^h_{kl}\Gamma^l_{ji} \tag{1.5}$$

şeklinde hesaplanır. (1.5) denklemi g metrik tensörü ile daraltılarak, $(0,4)$ tipinden Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri

$$R_{ijkh} = R^l_{jkh} g_{il} \tag{1.6}$$

biçiminde verilir.

Teorem 1.1. (M, g) bir diferansiyellenebilir manifold ve ∇, M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu takdirde, manifoldun Riemann eğrilik tensörü, her $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ için

(i) $R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$

(ii) $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$

(iii) $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$

(iv) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (Birinci Bianchi Özdeşliği)

özelliklerini sağlar, [4].

Tanım 1.18 (Ricci Tensörü). (M, g) bir diferansiyellenebilir manifold ve ∇, M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. $\{E_1, ..., E_n\}$, teğet uzayın bir ortonormal çatı alanı olmak üzere, her $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g\left(R(E_i, X)Y, E_i\right) \tag{1.7}$$

şeklinde verilen ikinci mertebeden, simetrik, kovaryant tensör alanı *Ricci tensörü* olarak adlandırılır ve *Ric* ile gösterilir. (1.7) tanımına göre, $Ric(X, Y) = Ric(Y, X)$ bağıntısı mevcuttur.

Ricci tensörünün bileşenleri R_{ij} ile gösterilmek üzere, Riemann eğrilik tensörü üzerinden

$$R^{l}_{ilj} = R_{ij} \tag{1.8}$$

daraltması uygulanarak elde edilir, [4].

Tanım 1.19 (Skaler Eğrilik). (M,g) bir diferansiyellenebilir manifold ve ∇, M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. $\{E_1,...,E_n\}$, teğet uzayın bir ortonormal çatı alanı olmak üzere

$$r = \sum_{i,\,j=1}^{n} g\Big(R(E_i,E_j)E_j,E_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} Ric(E_i,E_i) \tag{1.9}$$

biçiminde tanımlanan r fonksiyonu, M manifoldunun *skaler eğriliği* olarak adlandırılır, [4]. Yerel koordinatlar göz önüne alındığında, skaler eğrilik fonksiyonu

$$r = R_{ij}g^{ij} \tag{1.10}$$

şeklinde ifade edilir, [4].

Tanım 1.20 (Weyl Konformal Eğrilik Tensörü). (M,g) bir diferansiyellenebilir manifold $(n>3)$ ve ∇, M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. Her $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\begin{aligned}\mathscr{W}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \frac{1}{n-2}\Big(&Ric(X,Z)Y - Ric(Y,Z)X + g(X,Z)QY - g(Y,Z)QX\Big)\\ &+ \frac{r}{(n-1)(n-2)}\left(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan (1, 3) tipinden $\mathscr{W}$ tensör alanına *Weyl konformal eğrilik tensörü* adı verilir. Burada, Q Ricci operatörünü temsil etmek üzere

$$g(QX,Y) = Ric(X,Y)$$

koşulu sağlanmaktadır. Yerel koordinatlarda $\mathscr{W}$ tensörünün bileşenleri

$$\mathscr{W}^{i}{}_{jkh} = R^{i}{}_{jkh} + \frac{1}{n-2}\left(\delta^{i}{}_{h}R_{jk} - \delta^{i}{}_{k}R_{jh} + g_{jk}R^{i}{}_{h} - g_{jh}R^{i}{}_{k}\right) + \frac{r}{(n-1)(n-2)}\left(\delta^{i}{}_{k}g_{jh} - \delta^{i}{}_{h}g_{jk}\right)$$

şeklinde ifade edilir (ör. bkz. [14]).

$n \geq 4$ için, $\mathscr{W} \equiv 0$ ise, (M, g) manifoldu *konformal olarak düz uzay* olarak isimlendirilmektedir. Öte yandan, $n = 3$ için, Weyl konformal eğrilik tensörü özdeş olarak sıfırdır.

1.2. Bazı Özel Vektör Alanları

Tanım 1.21. (M, g) bir diferansiyellenebilir manifold ve ∇, M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. M manifoldu üzerinde düzgün bir ξ vektör alanı göz önüne alınsın. Her $X \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\nabla_X \xi = \rho\, X + \eta(X)\xi \tag{1.11}$$

koşulu sağlanıyor ise, ξ *tors oluşturan vektör alanı* (*torse-forming vector field*) olarak adlandırılır. Burada, $\rho \in C^\infty(M)$ ve η bir $1-$formdur, [41].

Söz konusu (1.11) denkleminin yerel olarak gösterimi

$$\nabla_i \xi^h = \rho\, \delta_i^h + \xi^h \eta_i \tag{1.12}$$

biçimindedir. (1.12) denkleminde, ξ^h ve η_i sırasıyla, ξ ve η'nın bileşen gösterimleridir ve δ_i^h ise Kronecker deltasını sembolize etmektedir.

Bilhassa, (1.11) denkleminde $\rho = 0$ seçilir ise, ξ *reküran vektör alanı* (*recurrent vector field*) olarak adlandırılır. Ayrıca, bir ξ reküran vektör alanı (1.12) ifadesine göre

$$\nabla_i \xi_j = \eta_i \xi_j \tag{1.13}$$

eşitliğini sağlar.

Öte yandan, ξ tors oluşturan vektör alanı olmak üzere, (1.11) eşitliğinde η formu gradiyent ise, ξ vektör alanı *konsörkılır* (*concircular*) olarak isimlendirilir. Bu bağlamda, η formunun gradiyent olması halinde, $\eta = dv(x)$ olacak şekilde bir $v(x)$ fonksiyonunun varlığından söz edilir. Bu takdirde, bir ξ konsörkılır vektör alanı (1.12) denklemine göre

$$\nabla_i \xi_j = \rho g_{ij} \tag{1.14}$$

koşulunu sağlar. Özel olarak, (1.14) denkleminde ρ fonksiyonu bir sabitse, ξ *yakınsak vektör alanı* (*convergent vector field*) olarak adlandırılır. Bununla birlikte, (1.14) denkleminde $\rho = 0$ ise, ξ vektör alanı *kovaryant olarak sabit* (*covariantly constant*) ya da *paralel* (*parallel*) olarak isimlendirilir.

Reküran ve paralel vektör alanları, Bölüm 2.3'te inceleneceği üzere, özellikle dolanım teorisi açısından önemli bir yere sahiptir (bkz. [14]). Bununla birlikte, bu çalışmada yer verilen diğer bir vektör alanı da Hinterleitner ve Kiosak [22] tarafından tanımlanan $\varphi(Ric)$ vektör alanıdır. Söz konusu vektör alanlarının ortaya çıkış motivasyonu, Einstein manifoldları üzerindeki bir φ konsörkılır vektör alanının, $\nabla\varphi = \varrho Ric$ denklemiyle karakterize edilebilmesi ile açıklanabilir. $\varphi(Ric)$ vektör alanları, ϱ bir sabit olmak üzere [22] numaralı kaynakta detaylıca incelenmiştir.

Tanım 1.22. (M, g) bir diferansiyellenebilir manifold ve ∇, M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. M manifoldu üzerinde tanımlanan bir φ vektör alanı

$$\nabla\varphi = \varrho Ric \tag{1.15}$$

bağıntısını gerçekliyorsa, ilgili vektör alanı bir $\varphi(Ric)$ *vektör alanı* olarak adlandırılır. (1.15) ifadesinde, Ric ve ϱ sırasıyla, Ricci tensörünü ve bir sabiti göstermektedir, [22]. Ayrıca, $\varrho \neq 0$ seçilir ise, φ vektör alanı *öz-*$\varphi(Ric)$ vektör alanı olarak adlandırılacaktır. Öte yandan, (1.15) eşitliğinde $\varrho = 0$ ise, φ paralel bir vektör alanı olur. İlaveten, Ric simetrik olduğundan $\nabla_i\varphi_j = \nabla_j\varphi_i$ eşitliği mevcuttur. Dolayısıyla, φ yerel olarak gradiyent olur.

M manifoldunun sabit uzunluklu bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı içermesi halinde, r skaler eğriliğin sabit olması gerektiği [22] numaralı makalede ispatlanmıştır. Bu durumun tersinin de doğru olduğu [24] numaralı makalede gösterilmiştir.

Tez çalışmasında, yukarıda belirtilen bazı özel vektör alanlarıyla birlikte Ricci özdeşliği de kullanılacaktır. Bir φ düzgün vektör alanı için *Ricci özdeşliği*

$$\nabla_k\nabla_j\varphi_i - \nabla_j\nabla_k\varphi_i = \varphi_h R^h{}_{ijk} \tag{1.16}$$

şeklinde verilir, [14].

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu kısımda, *uzay-zaman* olarak isimlendirilen 4−boyutlu, Lorentz metrik işaretli manifoldlar göz önüne alınarak, söz konusu manifoldlar üzerinde ikinci mertebeden, simetrik tensör alanlarının sınıflandırılması açıklanacaktır. Daha sonra, çalışmanın önemli bir kavramı olan ikinci mertebeden, ters-simetrik tensör alanları (bivektörler) incelenecektir. Son olarak, dolanım teorisi kavramı ve uzay-zamanların dolanım yapısı hakkında bilgi verilecektir. Ayrıca, çalışmanın bu kısmında 4−boyutlu düzgün bir M manifoldu, g metriği ile birlikte Hausdorff ve bağlantılı (dolayısıyla, yol-bağlantılı) bir manifold olarak kabul edilecektir.

2.1. İkinci Mertebeden Simetrik Tensör Alanlarının Sınıflandırılması

M; 4−boyutlu, düz olmayan bir diferansiyellenebilir manifold ve M üzerindeki g metriği $(+,+,+,-)$ Lorentz işaretine sahip olsun. Bu takdirde, (M,g) yapısı bir *uzay-zaman* olarak adlandırılacaktır. M manifoldunun $p \in M$ noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$ olmak üzere, $v,w \in T_p(M)$ vektörlerinin iç çarpımı $v \cdot w$ şeklinde gösterilecektir. Tanım 1.14'de bahsedildiği üzere, sıfırdan farklı bir $v \in T_p(M)$ teğet vektörünün sahip olduğu karakter; $v \cdot v > 0$ ise *uzaysal*, $v \cdot v < 0$ ise *zamansal* ya da $v \cdot v = 0$ ise *null* olarak adlandırılır. $T_p(M)$ uzayı için bir pseudo-ortonormal baz; karşılıklı olarak birbirine dik olan

$$\{x,y,z,t\} \tag{2.1}$$

dörtlüsü şeklinde gösterilecektir. Burada; x,y,z birim uzaysal vektörler ve t birim zamansal vektördür. Ayrıca, l ve n null vektörler olmak üzere, bir ilişkili null baz (null tetrad)

$$\{l,n,x,y\} \tag{2.2}$$

dörtlüsüyle ifade edilecektir. Söz konusu (2.1) ve (2.2) baz sistemleri arasındaki bağıntı, $\sqrt{2}l = z + t$ ve $\sqrt{2}n = z - t$ eşitlikleri tarafından sağlanmakta olup, l ve n null vektörleri için $l \cdot n = 1$ koşulu gerçeklenmektedir.

T; M manifoldunun p noktasında bileşen formu T_{ij} $(= T_{ji})$ olan ikinci mertebeden, simetrik bir tensör alanı olsun. Bu durumda, T tensörü, $v \in T_p(M)$ olmak üzere, $v^i \to T^i{}_j v^j$

şeklinde verilen teğet uzaylar arasındaki bir lineer eşlemeye karşılık gelecek biçimde sınıflandırılabilir. Öncelikle; ikinci mertebeden, simetrik bir T tensörü $T^i{}_j$ indisli hali ile düşünülsün. Bu takdirde, T tensörü için özvektör-özdeğer problemi; temsili bir özvektör v^j ve bu özvektöre karşılık gelen özdeğer $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $T^i{}_j v^j = \lambda v^i$ denklemi ile belirlenir. Söz konusu yapı yardımıyla T tensörünün kanonik formları oluşturulur ve sınıflandırılması elde edilir. Literatürde bu sınıflandırma *"Jordan-Segre sınıflandırılması"* olarak bilinmektedir, [14]. Uzay-zamanlar için ilgili sınıflandırmada Segre tipleri yazımı *"Jordan blokları"* ile belirlenir. T simetrik tensörünün p noktasında tüm özdeğerlerinin reel olduğu varsayıldığı takdirde, mümkün olan beş tane kanonik formu vardır. Bu formlar aşağıda verilen matris gösterimleri ve Segre tipleri ile ifade edilmektedir:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(a) Segre tipi {1,111} (b) Segre tipi {211} (c) Segre tipi {31}

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

(d) Segre tipi {22} (e) Segre tipi {4}

Burada; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ olup, dejenere özdeğerlerin varolması durumunda, ilgili özdeğerler Segre tipi içerisinde yay ayraç ile belirtilecektir. Yukarıdaki matris formlarından {22} ve {4} Segre tipleri için, $\det g_{ij} \geq 0$ olması gerektiği kanıtlanabilir, [14]. Dolayısıyla, Lorentz metrik işareti için bu Segre tipleri mevcut değil iken, geri kalan diğer tipler $(+,+,+,-)$ metrik işareti için meydana gelebilmektedir. İkinci mertebeden, simetrik tensörlerin sınıflandırmasına yönelik detaylı bir incelemeye [14] numaralı referansta genişçe yer verilmiştir. Böyle bir T tensörünün cebirsel olarak ifadesi Teorem 2.1'de sunulmuştur.

Teorem 2.1 ([14]). M bir uzay-zaman ve $p \in M$ olsun. $T \neq 0$, p noktasında ikinci mertebeden, simetrik bir tensör alanı olsun. Bu takdirde, T tensörü p noktasında belirlenen $\{l,n,x,y\}$ ilişkili (reel) null tetradına göre aşağıdaki kanonik formlardan birini alır:

(i) $T_{ij} = 2\lambda_1 l_{(i}n_{j)} + \lambda_2(l_i l_j + n_i n_j) + \lambda_3 x_i x_j + \lambda_4 y_i y_j$

(ii) $T_{ij} = 2\lambda_1 l_{(i}n_{j)} + \lambda l_i l_j + \lambda_2 x_i x_j + \lambda_3 y_i y_j$

(iii) $T_{ij} = 2\lambda_1 l_{(i}n_{j)} + 2l_{(i}x_{j)} + \lambda_1 x_i x_j + \lambda_2 y_i y_j$

(iv) $T_{ij} = 2\lambda_1 l_{(i}n_{j)} + \lambda_2(l_i l_j - n_i n_j) + \lambda_3 x_i x_j + \lambda_4 y_i y_j$.

Burada; yay ayraç indisler arasındaki simetrizasyonu temsil etmekte ve $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ olup, (ii) şıkkında $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ koşulu ve (iv) şıkkında $\lambda_2 \neq 0$ koşulu gerçeklenir.

Teorem 2.1'de ifade edilen (i)–(iv) cebirsel formlarına göre, T tensörünün Segre tipi gösterimleri sırasıyla, $\{1,111\}$, $\{211\}$, $\{31\}$ ve $\{z\bar{z}11\}$ şeklindedir. Daha önce belirtildiği gibi, dejenere özdeğerlerin varolması durumunda, Segre tipi içerisinde yay ayraç kullanılacaktır. Öte yandan, $\{1,111\}$ Segre tipi, T tensörünün $\mathbb{R}$ üzerinde köşegenleştirilebilir olması durumudur. Ayrıca, kıvrık parantez içinde bulunan virgül işareti, zamansal özvektöre karşılık gelen özdeğeri, diğer ilişkili uzaysal özvektörlere karşılık gelen özdeğerlerden ayırmak için kullanılır. Bununla birlikte, $\{z\bar{z}11\}$ Segre tipi içerisindeki $z\bar{z}$ ve 11 gösterimleri sırasıyla, kompleks eşlenik özvektör çiftini ve reel özvektörleri temsil eder. Söz konusu kanonik formlar dikkate alınarak, Bölüm 3'te bazı özel ikinci mertebeden, simetrik tensör alanları üzerinde detaylı incelemeler yapılacaktır.

2.2. Bivektörler

(M,g) bir uzay-zaman ve $p \in M$ olsun. M manifoldu üzerinde (p noktasında) ikinci mertebeden, ters-simetrik bir tensör *bivektör* olarak adlandırılır. İlgili bivektör F ile gösterilmek üzere, bileşen formu $F_{ij} = -F_{ji}$ biçimindedir. M manifoldunun p noktasındaki tüm bivektörlerinin kümesi $\Lambda_p(M)$ olarak ifade edilecektir. Söz konusu $\Lambda_p(M)$ kümesi, 6−boyutlu reel bir vektör uzayı olup, [ ] ile gösterilen matris komütatörü altında bir Lie cebri oluşturmaktadır. Bu durumda, (2.1) pseudo-ortonormal baz sistemi göz önüne alınırsa, $\Lambda_p(M)$ kümesinin üreteç elemanları $x \wedge y,\ x \wedge z,\ y \wedge z,\ t \wedge x,\ t \wedge y,\ t \wedge z$ olarak ifade edilir, [14].

Öte yandan, F bivektörü ters-simetrik olduğundan, matris gösteriminde

$$F^T = -F \tag{2.3}$$

eşitliği yazılabilir. (2.3) eşitliğinin her iki tarafının determinantı alınırsa

$$\det(F^T) = \det(-F) \tag{2.4}$$

ifadesi elde edilir. (2.4) ifadesi $n-$boyut için düzenlendiği takdirde

$$\det(F) = (-1)^n \det(F) \tag{2.5}$$

eşitliğine ulaşılır. (2.5) eşitliğine göre, n tek sayı ise F matrisi tekil olmalıdır zira bu durumda F matrisinin determinantı her zaman sıfırdır.

Bununla birlikte, sıfırdan farklı bir $F \in \Lambda_p(M)$ bivektörü ters-simetrik olduğundan, F bivektörünün rankı ($rankF$) çift sayıdır. Dolayısıyla, $4-$boyutlu M manifoldu üzerinde tanımlanan bir $F \neq 0$ bivektörünün rankı 2 ya da 4 olmalıdır. Bu takdirde, $rankF = 2$ ise, F bivektörü *basit* (*simple*) *bivektör*, $rankF = 4$ ise, F bivektörü *basit olmayan* (*non-simple*) *bivektör* olarak isimlendirilir, [14]. Dahası, M manifoldu üzerinde sıfırdan farklı bir bivektörün rankı üç olamayacağı için, $F_{ij}k^j = 0$ koşulunu sağlayacak biçimde bir $k \neq 0$ teğet vektörünün varlığı, F bivektörünün basit olmasına denktir (bu ifadenin tersi de doğrudur). Genel olarak, basit bir F bivektörünün F_{ij} bileşenlerinin matrisi tamamen sıfırlardan oluşan iki satır (ve dolayısıyla, iki sütun) şeklinde seçilebilir. Bununla birlikte, $p \in M$ noktasında basit bir F bivektörü, u ve w lineer bağımsız kovektörler ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$F_{ij} = \lambda\left(u_i w_j - w_i u_j\right) = 2\lambda u_{[i} w_{j]}{}^{1} \tag{2.6}$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu durumda, u ve w vektörleriyle üretilen $2-$uzay, F bivektörü tarafından tek türlü belirlidir. Söz konusu $2-$uzay, F bivektörünün *blade*'i olarak isimlendirilir ve $u \wedge w$ ile gösterilir. Manifoldun p noktasındaki herhangi bir k vektörü, F bivektörünün

[1] Burada yer verilen köşeli parantez '[ ]' indisler arası ters-simetrizasyonu temsil eder.

blade yapısına dik ise, $F_{ij}k^j = 0$ koşulu gerçeklenir. Dolayısıyla, basit bir bivektör tek türlü olarak, (2.6) formunda ifade edilebilmektedir.

Bir p noktasındaki basit bivektörlerin kümesi, karşılık geldiği blade yapısının uzaysal, zamansal ve null 2−uzay olmasına göre sırasıyla, *uzaysal* ($F_{ij}F^{ij} > 0$), *zamansal* ($F_{ij}F^{ij} < 0$) ve *null* ($F_{ij}F^{ij} = 0$) olarak sınıflandırılır, [14, 18]. Örneğin, (M, g) uzay-zamanı için (2.2) ilişkili null bazına göre bivektörün blade yapılarından bazılarının sınıflandırılması

$$\begin{aligned} &x \wedge y \quad \textit{uzaysal} \\ &l \wedge n \quad \textit{zamansal} \\ &l \wedge y \quad \textit{null} \end{aligned} \tag{2.7}$$

şeklinde verilir. Öte yandan, basit olmayan bir F bivektörü, basit uzaysal ve basit zamansal iki bivektörün toplamı şeklinde bir ayrışım ile ifade edilebilmektedir. Söz konusu bivektörler, birbirlerinin dik tümleyenidir ve bu basit bivektörlerin blade'i, F bivektörü tarafından tek türlü belirlidir, [19].

Şimdiye kadar sunulan bilgiler, çalışmanın ilerleyen bölümlerinde bivektörün doğası (naturası) hakkında çıkarımda bulunabilmek için yardımcı olacaktır. Son olarak, bivektörlerin özdeğer-özvektör yapısı göz önüne alınarak, Segre tipleri belirlenecektir. Bu hususta, (2.2) ilişkili null baz sisteminin üreteç vektörleri, $F \neq 0$ bivektörü ile sırasıyla çarpılarak, özdeğer-özvektör yapısı tespit edilecektir. Genel tanım gereği, ters-simetrik bir F bivektörünün bileşenlerinin

$$F_{ij} = -F_{ji} \tag{2.8}$$

koşulunu sağladığı bilinmektedir. Daha sonra, (2.8) eşitliği g^{ij} tensörü ile daraltılırsa

$$F_i{}^i = -F_j{}^j \tag{2.9}$$

eşitliği elde edilir. (2.9) eşitliğinin sağ tarafındaki toplam indisi i olarak değiştirilip, bu denklem düzenlenirse

$$F_i{}^i = 0 \tag{2.10}$$

olarak bulunur. Bu durumda, (2.10) denkleminden, F bivektörünün tüm özdeğerlerinin toplamının sıfır olduğu sonucuna varılır. Aynı bakış açısı ile, F bivektörünün null-olmayan, reel ya da kompleks özvektörlerinin her zaman sıfır özdeğerine sahip olduğu çıkarımında bulunulabilir. Bu durumu açıklamak için, F bivektörünün null-olmayan bir k özvektörü ele alınsın. Bu takdirde, $k \cdot k \neq 0$ (ya da $k_i k^i \neq 0$) olup, $\lambda' \in \mathbb{C}$ için

$$F_i{}^j k^i = \lambda' k^j \tag{2.11}$$

denklemi sağlanır. Diğer taraftan, (2.8) eşitliği yardımıyla

$$F_{ij} k^i = -F_{ji} k^i \tag{2.12}$$

olarak yazılır. (2.12) eşitliğinin her iki tarafı k^j ile daraltılırsa

$$F_{ij} k^i k^j = -F_{ji} k^i k^j \tag{2.13}$$

elde edilir. (2.13) denkleminin sağ tarafındaki indisler karşılıklı olarak yer değiştirirse

$$F_{ij} k^i k^j = -F_{ij} k^j k^i \tag{2.14}$$

ifadesine ulaşılır ve buradan

$$F_{ij} k^i k^j = 0 \tag{2.15}$$

sonucu elde edilir. Öte yandan, (2.11) denkleminden

$$F_{ij} k^i = \lambda' k_j \tag{2.16}$$

yazılır. (2.16) denklemi k^j ile daraltıldığı takdirde

$$F_{ij} k^j k^j = \lambda' k_j k^j \tag{2.17}$$

eşitliği bulunur. (2.15) ve (2.17) denklemleri yardımıyla

$$\lambda' k_j k^j = 0 \tag{2.18}$$

sonucuna ulaşılır. (2.18) denkleminden $\lambda' = 0$ veya $k_j k^j = 0$ olması gerekir. Ancak, k null-olmayan özvektör olarak kabul edildiğinden, $\lambda' = 0$ olmak zorundadır, [14].

(M, g) bir uzay-zaman olmak üzere, (2.2) ilişkili null bazında yer alan elemanlar arasında

$$l \cdot n = x \cdot x = y \cdot y = 1,$$
$$l \cdot l = n \cdot n = x \cdot y = l \cdot x = l \cdot y = n \cdot x = n \cdot y = 0$$

bağıntıları mevcuttur. Bu bağıntılar yardımıyla, basit bir F bivektörünün uzaysal, zamansal ve null olmasına göre doğası aşağıdaki maddelerde belirlenecektir. Ayrıca, söz konusu bivektörlerin Segre tipleri sırasıyla bulunarak, bu bivektörlerin rankının iki olduğu gösterilecektir. Son olarak, basit olmayan bivektör örneği verilerek, benzer incelemeler yapılacaktır.

i. Öncelikle, F basit bivektörünün blade yapısının x ve y vektörleri tarafından üretildiği kabul edilsin. Bu takdirde, $\lambda \neq 0$ için, (2.6) denkleminden

$$F_{ij} = 2\lambda x_{[i} y_{j]} \tag{2.19}$$

olarak yazılır. Daha sonra, ters-simetrizasyondan yararlanılarak, (2.19) bivektörü

$$F_{ij} = \lambda(x_i y_j - y_i x_j) \tag{2.20}$$

şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla, (2.20) bivektörünün $F = \lambda(x \wedge y)$ şeklinde ifadesi mümkündür. Bu takdirde, (2.20) bağıntısı göz önüne alınarak

$$F_{ij} F^{ij} = \lambda^2 (x_i y_j - y_i x_j)(x^i y^j - y^i x^j) = 2\lambda^2 \tag{2.21}$$

bulunur. Bu durumda, (2.21) ifadesine göre, $\lambda \neq 0$ için, $F_{ij} F^{ij} = 2\lambda^2 > 0$ olur. Bu ise, F bivektörünün bir uzaysal bivektör olduğunu gösterir.

Diğer taraftan, F bivektörünün özdeğer-özvektör yapısının tespit edebilmesi için, (2.20) bivektörü sırasıyla, (2.2) ilişkili null bazın üreteçleri ile çarpılır ve böylece

$$\begin{aligned} F_{ij}l^j &= \lambda(x_iy_j - y_ix_j)l^j = 0 \\ F_{ij}n^j &= \lambda(x_iy_j - y_ix_j)n^j = 0 \\ F_{ij}x^j &= \lambda(x_iy_j - y_ix_j)x^j = -\lambda y_i \\ F_{ij}y^j &= \lambda(x_iy_j - y_ix_j)y^j = \lambda x_i \end{aligned} \tag{2.22}$$

denklemleri elde edilir. Bu takdirde, (2.22)'deki ilk iki denklemden, l ve n vektörlerinin, F tensörünün 0 (sıfır) özdeğerine karşılık gelen özvektörleri olduğu görülür. Bununla birlikte, (2.22)'deki son iki denkleme göre, x ve y vektörlerinin F bivektörünün özvektörleri olamayacağı açıktır. Ancak, F bivektörünün kompleks özdeğerlere karşılık gelen kompleks özvektörlere sahip olduğu aşağıdaki şekilde gösterilebilir. Söz konusu kompleks özdeğer ve özvektörler

$$\begin{aligned} F_{ij}(x^j + \imath y^j) &= \lambda(x_iy_j - y_ix_j)(x^j + \imath y^j) \\ &= -\lambda y_i + \imath\lambda x_i \\ &= \imath\lambda(x_i + \imath y_i) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F_{ij}(x^j - \imath y^j) &= \lambda(x_iy_j - y_ix_j)(x^j - \imath y^j) \\ &= -\lambda y_i - \imath\lambda x_i \\ &= -\imath\lambda(x_i - \imath y_i) \end{aligned}$$

denklemleri yardımıyla elde edilir. En nihayetinde, F bivektörünün hesaplanan özdeğer ve özvektörleri

$$\begin{array}{lcccc} \text{Özvektörler:} & l, & n, & (x+\imath y), & (x-\imath y) \\ \text{Özdeğerler:} & 0, & 0, & \imath\lambda, & -\imath\lambda \end{array} \tag{2.23}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla, (2.23) ifadesinden F bivektörünün Segre tipi

$$\{(11)z\bar{z}\} \tag{2.24}$$

olarak belirlenir. Daha önce bahsedildiği gibi, Segre tipi gösterimi kıvrık parantez içerisinde verilir. (2.24) Segre tipi yazılışından görüleceği üzere, yay parantez arasında yer alan (1) rakamları dejenere (reel) özdeğere karşılık gelen özvektörleri temsil etmek için kullanılmıştır. Dolayısıyla, elde edilen F bivektörünün matrisi $\mathbb{C}$ üzerinde köşegenleştirilebilirdir.

Son olarak, F uzaysal bivektörünün rankının 2 olduğu gösterilecektir. Bunun için, F bivektörünün matris formu temsili bir notasyonla

$$[F] = \begin{pmatrix} l\cdot Fl & l\cdot Fn & l\cdot Fx & l\cdot Fy \\ n\cdot Fl & n\cdot Fn & n\cdot Fx & n\cdot Fy \\ x\cdot Fl & x\cdot Fn & x\cdot Fx & x\cdot Fy \\ y\cdot Fl & y\cdot Fn & y\cdot Fx & y\cdot Fy \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

şeklinde oluşturulur. Burada; Fl, Fn, Fx ve Fy ifadeleri sırasıyla, (2.20) denklemiyle verilen F_{ij} bileşenlerinin l^j, n^j, x^j ve y^j ile daraltılmasını göstermektedir. Bu takdirde, (2.22) denklemleri göz önüne alınıp, (2.2)'de verilen null baz elemanlar ile iç çarpım yapılırsa, (2.25) matrisinin girdileri

$$[F] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, F bivektörünün (2.26) ile verilen matris gösteriminde $\lambda \neq 0$ olduğundan, $rankF = 2$ bulunur. Sonuç olarak, F bivektörünün uzaysal, basit bir bivektör olduğu açıkça gösterilmiştir.

ii. Şimdi, F basit bivektörünün blade yapısının l ve n vektörleri tarafından üretildiği kabul edilsin. Bu takdirde, $\lambda \neq 0$ için, (2.6) denkleminden

$$F_{ij} = 2\lambda l_{[i}n_{j]} \tag{2.27}$$

olarak yazılır ve ters-simetrizasyondan yararlanılarak, (2.27) bivektörünün bileşenleri

$$F_{ij} = \lambda(l_i n_j - n_i l_j) \tag{2.28}$$

şeklinde elde edilir. (2.28) ifadesinden, $F = \lambda(l \wedge n)$ biçiminde olduğu açıktır. Bu takdirde, (2.28) bağıntısı göz önüne alınarak

$$F_{ij}F^{ij} = \lambda^2(l_i n_j - n_i l_j)(l^i n^j - n^i l^j) = -2\lambda^2 \tag{2.29}$$

bulunur. Bu durumda, (2.29) ifadesine göre, $\lambda \neq 0$ için, $F_{ij}F^{ij} = -2\lambda^2 < 0$ olur. Bu ise, F bivektörünün zamansal bir bivektör olduğunu gösterir. Şimdi, bu zamansal bivektörün Segre tipi için özdeğer-özvektör yapısı incelensin. Bu hususta, (2.28) bivektörü sırasıyla, (2.2)'deki ilişkili null bazın üreteçleri ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} F_{ij}l^j &= \lambda(l_i n_j - n_i l_j)l^j = \lambda l_i \\ F_{ij}n^j &= \lambda(l_i n_j - n_i l_j)n^j = -\lambda n_i \\ F_{ij}x^j &= \lambda(l_i n_j - n_i l_j)x^j = 0 \\ F_{ij}y^j &= \lambda(l_i n_j - n_i l_j)y^j = 0 \end{aligned} \tag{2.30}$$

denklemleri elde edilir. Bu takdirde, (2.30)'daki ilk iki denklemden, l ve n vektörlerinin, F tensörünün sırasıyla, λ ve $-\lambda$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri olduğu görülür[2]. Ayrıca, (2.30)'daki son iki denklemden, x ve y vektörlerinin, F bivektörünün 0 (sıfır) özdeğerine karşılık gelen özvektörleri olduğu açıktır. Söz konusu F bivektörünün hesaplanan özdeğer ve özvektörleri

$$\begin{array}{lcccc} \text{Özvektörler:} & l, & n, & x, & y \\ \text{Özdeğerler:} & \lambda, & -\lambda, & 0, & 0 \end{array} \tag{2.31}$$

[2](2.30) denklemlerinden görüleceği gibi, F tensörünün bileşenleri ikinci indis üzerinden daraltılmıştır. Birinci indis üzerinden daraltma uygulandığı takdirde özdeğerlerin işaret kadar fark edeceği açıktır.

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla, (2.31) ifadesinden F bivektörünün Segre tipi

$$\{11(11)\} \tag{2.32}$$

olarak bulunur. (2.32) Segre tipini gösteren rakamların toplamının uzayın boyutuna eşit olduğu açıktır. Ayrıca, F bivektörünün tüm özdeğerleri reeldir. Dolayısıyla, zamansal F bivektörü $\mathbb{R}$ üzerinde köşegenleştirilebilirdir.

Şimdi, zamansal F bivektörünün rankının 2 olduğu gösterilecektir. Bunun için (2.25) bivektör matris formu göz önüne alınarak, F bivektörünün matris girdilerinin her biri hasaplanır. Söz konusu F bivektörü için, (2.30)'da yer alan denklemlerin her biri, (2.2) baz elemanları ile iç çarpılır ve (2.25) matrisi

$$[F] = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, F bivektörünün (2.33) ile verilen matris gösteriminde $\lambda \neq 0$ olduğundan, $rankF = 2$ bulunur. Sonuç olarak, F bivektörünün zamansal, basit bir bivektör olduğu açıkça gösterilmiştir.

iii. Daha sonra, F basit bivektörünün blade yapısının l ve x vektörleri tarafından üretildiği kabul edilsin. Bu takdirde, $\lambda \neq 0$ için, (2.6) denkleminden F bivektörü

$$F_{ij} = 2\lambda l_{[i}x_{j]} \tag{2.34}$$

olarak yazılır ve ters-simetrizasyona göre açılım yapılarak, (2.34) bivektörünün bileşenleri

$$F_{ij} = \lambda(l_i x_j - x_i l_j) \tag{2.35}$$

şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla, (2.35) ifadesinden, $F = \lambda(l \wedge x)$ biçiminde olduğu açıktır.

(2.35) bağıntısı göz önüne alınarak

$$F_{ij}F^{ij} = \lambda^2(l_i x_j - x_i l_j)(l^i x^j - x^i l^j) = 0 \tag{2.36}$$

eşitliği bulunur. Bu durumda, (2.36) ifadesine göre, $F_{ij}F^{ij} = 0$ olur. Böylece, F bivektörünün doğasının null olduğu anlaşılır. Şimdi, söz konusu bivektörün Segre tipi belirlenecektir. Bu hususta, (2.34) bivektör bileşenleri sırasıyla, (2.2)'deki ilişkili null bazın üreteçleri ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} F_{ij}l^j &= \lambda(l_i x_j - x_i l_j)l^j = 0 \\ F_{ij}n^j &= \lambda(l_i x_j - x_i l_j)n^j = -\lambda x_i \\ F_{ij}x^j &= \lambda(l_i x_j - x_i l_j)x^j = \lambda l_i \\ F_{ij}y^j &= \lambda(l_i x_j - x_i l_j)y^j = 0 \end{aligned} \tag{2.37}$$

denklemleri elde edilir. Bu takdirde, (2.37)'deki birinci ve dördüncü denklemden, l ve y vektörlerinin, F bivektörünün 0 (sıfır) özdeğerine karşılık gelen özvektörleri olduğu görülür. Bununla birlikte, (2.37)'deki ikinci ve üçüncü denkleme göre, n ve x vektörlerinin F bivektörünün özvektörleri olamayacağı açıktır. En nihayetinde, F bivektörünün hesaplanan özdeğer ve özvektörleri

$$\begin{aligned} \text{Özvektörler:} \quad & l, \quad y \\ \text{Özdeğerler:} \quad & 0, \quad 0 \end{aligned} \tag{2.38}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla, (2.38) ifadesinden F bivektörünün Segre tipi

$$\{(31)\} \qquad \text{ya da} \qquad \{(22)\} \tag{2.39}$$

formlarından biri olabilir. Ancak, Bölüm 2.1'de belirtildiği üzere, {(22)} Segre tipi Lorentz metrik işaret için mümkün olamayacağından, F bivektörünün Segre tipi {(31)} olmak zorundadır (ayrıntılar için bkz. [14], Teorem 7.3).

Şimdi de, F null bivektörünün rankının 2 olduğu gösterilecektir. Uzaysal ve zamansal

bivektörler için uygulanan adımlara benzer şekilde, (2.25) bivektör matris formu göz önüne alınarak, F bivektörünün matris girdilerinin her biri hasaplanır. Söz konusu F bivektörü için, (2.37)'de yer alan denklemlerin her biri, (2.2) baz elemanları ile iç çarpılır ve (2.25) matrisi

$$[F] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, F bivektörünün (2.40) ile verilen matris gösteriminde $\lambda \neq 0$ olduğundan, $rankF = 2$ olarak belirlenir. Sonuç olarak, F tensörünün basit bir null bivektör olduğu açıkça gösterilmiştir.

Özetle; bir (M, g) uzay-zamanı üzerindeki basit bir bivektörün uzaysal, zamansal veya null olması durumları i, ii ve iii maddelerinde incelenmiş oldu. Son olarak, F bivektörünün basit olmaması durumu aşağıdaki maddede incelenecektir.

iv. $F \in \Lambda_p(M)$ basit olmayan bir bivektör olarak seçilsin. Söz konusu bivektör $\alpha \neq 0$ ve $\beta \neq 0$ reel değerli fonksiyonları için

$$F_{ij} = 2\alpha l_{[i} n_{j]} + 2\beta x_{[i} y_{j]} \tag{2.41}$$

olarak yazılır ve buradan

$$F_{ij} = \alpha(l_i n_j - n_i l_j) + \beta(x_i y_j - y_i x_j) \tag{2.42}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, (2.42) ifadesinden, $F = \alpha(l \wedge n) + \beta(x \wedge y)$ biçimindedir. Öte yandan,

$$F_{ij}F^{ij} = \left[\alpha(l_i n_j - n_i l_j) + \beta(x_i y_j - y_i x_j)\right]\left[\alpha(l^i n^j - n^i l^j) + \beta(x^i y^j - y^i x^j)\right] = 2(\beta^2 - \alpha^2) \tag{2.43}$$

bulunur. (2.43) ifadesine göre, $F_{ij}F^{ij}$ büyüklüğü α ve β değerlerine bağlıdır.

Şimdi, F bivektörünün Segre tipi belirlenecektir. Bu hususta, (2.42) bivektör bileşenleri

sırasıyla, (2.2)'deki ilişkili null bazın üreteçleri ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} F_{ij}l^j &= \Big[\alpha(l_in_j - n_il_j) + \beta(x_iy_j - y_ix_j)\Big]l^j = \alpha l_i \\ F_{ij}n^j &= \Big[\alpha(l_in_j - n_il_j) + \beta(x_iy_j - y_ix_j)\Big]n^j = -\alpha n_i \\ F_{ij}x^j &= \Big[\alpha(l_in_j - n_il_j) + \beta(x_iy_j - y_ix_j)\Big]x^j = -\beta y_i \\ F_{ij}y^j &= \Big[\alpha(l_in_j - n_il_j) + \beta(x_iy_j - y_ix_j)\Big]y^j = \beta x_i \end{aligned} \tag{2.44}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu takdirde, (2.44)'deki ilk iki denklemden, F bivektörünün l ve n özvektörlerine karşılık α ve $-\alpha$ özdeğerlerinin geldiği açıkça görülür. Bununla birlikte, (2.44)'deki son iki denkleme göre, x ve y vektörleri F bivektörünün özvektörleri olamaz. Ancak, F bivektörünün kompleks özdeğerlere karşılık gelen kompleks özvektörlere sahip olduğu

$$\begin{aligned} F_{ij}(x^j + \dot{\imath}y^j) &= \Big[\alpha(l_in_j - n_il_j) + \beta(x_iy_j - y_ix_j)\Big](x^j + \dot{\imath}y^j) \\ &= -\beta y_i + \dot{\imath}\beta x_i \\ &= \dot{\imath}\beta(x_i + \dot{\imath}y_i) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F_{ij}(x^j - \dot{\imath}y^j) &= \Big[\alpha(l_in_j - n_il_j) + \beta(x_iy_j - y_ix_j)\Big](x^j - \dot{\imath}y^j) \\ &= -\beta y_i - \dot{\imath}\beta x_i \\ &= -\dot{\imath}\beta(x_i - \dot{\imath}y_i) \end{aligned}$$

şekilde gösterilebilir. Bu sayede, basit olmayan F bivektörünün hesaplanan özdeğer ve özvektörleri

$$\begin{array}{llllll} \text{Özvektörler:} & l, & n, & (x + \dot{\imath}y), & (x - \dot{\imath}y) \\ \text{Özdeğerler:} & \alpha, & -\alpha, & \dot{\imath}\beta, & -\dot{\imath}\beta \end{array} \tag{2.45}$$

şeklinde verilir. Dolayısıyla, (2.45) verilerinden, F bivektörünün Segre tipi $\{11z\bar{z}\}$ olarak belirlenir. Son olarak, F bivektörünün rankının 4 olduğu gösterilecektir. Söz konusu F bivektörü için, (2.44)'de yer alan denklemlerin her biri, (2.2) baz elemanları ile iç çarpılırsa,

(2.25) matrisi

$$[F] = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

şeklinde belirlenir. (2.46) matrisinde, $\alpha \neq 0$ ve $\beta \neq 0$ olduğundan, $rankF = 4$ bulunur. Bu durumda, basit olmayan bir F bivektörünün rankının 4 olduğu gösterilmiştir.

Yukarıdakilere ek olarak, $F \in \Lambda_p(M)$ bivektörünün *dual bivektörü* olan F^*

$$F^*_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijkh}F^{kh}$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Burada, "*" dual operatörünü göstermektedir ve ϵ_{ijkh}, olağan pseudo tensördür, [14].

2.3. Dolanım Teorisi ve Yapısı

(M, g) bir uzay-zaman ve ∇, M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. $p \in M$ olmak üzere, $\mathscr{C}_k(p)$; $1 \leq k \leq \infty$ için, p noktasında başlayan ve bu noktada biten C^k sınıfından tüm parçalı kapalı eğrilerin kümesini göstersin. $c \in \mathscr{C}_k(p)$ için, $h_c : T_p(M) \to T_p(M)$ dönüşümü; c eğrisi boyunca $T_p(M)$ uzayının her bir elemanının (∇ kullanılarak) paralel kaydırılmasıyla elde edilen lineer izomorfizmayı temsil etsin. $c_0 \in \mathscr{C}_k(p)$, p noktasındaki sabit eğri olmak üzere, $T_p(M)$ üzerindeki birim (özdeşlik) dönüşümü h_{c_0} ile ifade edilsin. Bununla birlikte, $c,\ c_1,\ c_2 \in \mathscr{C}_k(p)$ için, $h_c^{-1} = h_{c^{-1}}$ ve $h_{c_1} \circ h_{c_2} = h_{c_1.c_2}$ işlemleri tanımlansın. Bu işlemler altında, $\{h_c : c \in \mathscr{C}_k(p)\}$ kümesi bir grup yapısı oluşturmaktadır. Dahası, söz konusu grup, $G \equiv GL(T_p(M)) = GL(4, \mathbb{R})$ genel lineer grubunun bir alt grubudur. Bu gruba, M manifoldunun p noktasındaki *k−dolanım grubu* (*k−holonomy group*) adı verilir ve bu grup $\Phi_k(p)$ ile gösterilir, [14, 17, 18, 19]. M manifoldu yol bağlantılı olduğundan, $p, p' \in M$ için, bu iki nokta arasında parçalı düzgün bir eğri mevcuttur. Bu takdirde, $\Phi_k(p)$ ve $\Phi_k(p')$ grupları eşleniktir. Öte yandan, $k-$dolanım grubunun, k'nın diferansiyellenebilirlik derecesinden bağımsız olduğu da kanıtlanabilir. Dolayısıyla, M manifoldunun Φ ile gösterilecek olan *dolanım grubu* (*holonomy group*) elde edilir, [14] (ayrıca bkz. [13, 17, 18, 19, 23, 25]).

Öte yandan, Φ dolanım grubunun bir Lie grubu olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla, söz konusu grubun ϕ ile gösterilecek olan bir Lie cebri vardır, [14, 25]. 4−boyutlu diferansiyellenebilir bir M manifoldu üzerindeki g metriğinin işareti, sırasıyla, $(+,+,+,+)$, $(+,+,+,-)$, $(+,+,-,-)$ olmak üzere; ϕ cebri, sırasıyla, $o(4)$, $o(1,3)$ ve $o(2,2)$ ortogonal cebirlerinin birer alt cebridir. Bu çalışmada uzay-zamanların dolanım teorisi üzerine yoğunlaşılacak olsa da, muhtemel bütün metrik işaretler için birtakım açıklamalar yapmak yararlı olacaktır. Öncelikle, 4−boyutlu diferansiyellenebilir bir M manifoldu üzerindeki g metriğinin $(+,+,+,+)$ pozitif tanımlı metrik işarete sahip olduğu kabul edilsin. Söz konusu metrik işaret için, M manifoldunun $T_p(M)$ teğet uzayının $\{x,y,z,w\}$ ile gösterilen bir ortonormal bazı ele alınsın. Bu durumda, ϕ dolanım cebri $o(4)$ ortogonal cebrinin bir alt cebridir. Bu alt cebrin bivektörlerle temsili ve dolanım tipleri [20] numaralı kaynakta verilmiştir. İlgili dolanım tipleri $S_1, S_2, S_3, \overset{+}{S}_3, \overset{+}{S}_4$ ve S_6 ile gösterilmektedir ve aşağıdaki tabloda boyutları ve bazlarıyla birlikte ifade edilmektedir:

Tablo 1: $(+,+,+,+)$ işareti için dolanım tipleri

Tip	**Boyut**	**Bazlar**	**Paralel vektör alanları**
S_1	1	$x \wedge y$	$\langle z, w \rangle$
S_2	2	$x \wedge y, z \wedge w$	—
S_3	3	$x \wedge y, x \wedge z, y \wedge z$	$\langle w \rangle$
$\overset{+}{S}_3$	3	$\overset{+}{S}$	—
$\overset{+}{S}_4$	4	$\overset{+}{S}, G$	—
S_6	6	$o(4)$	—

Tablo 1'de, $\overset{+}{S}$ sembolü $o(3)$ Lie cebrini temsil eder ve $\overset{-}{S}_p = \{F \in \Lambda_p(M) : F^* = -F\}$ kümesini göstermek üzere, $0 \neq G \in \overset{-}{S}_p$ şeklindedir, [20]. Dördüncü sütunu açıklamadan önce aşağıdaki uyarıların verilmesi yerinde olacaktır. Bölüm 1.2'de sunulan reküran ve paralel vektör alanları, 4−boyutlu manifoldların dolanım teorisinde temel bir yere sahiptir. Söz konusu vektör alanlarını belirleyebilmek için, her bir dolanım tipindeki $F \in \phi$ baz bivektörleri ele alınır ve $v \in T_p(M)$ vektörünün, her $F \in \phi$ bivektörünün bir özvektörü olup olmadığı

kontrol edilir. Bu koşulu sağlayan v vektörleri, ilgili dolanım tipi için (yerel olarak) reküran olacaktır. Eğer bu özvektöre karşılık gelen özdeğerlerin hepsi sıfırsa; (yerel) reküran vektör alanı, (yerel) paralel vektör alanı olacak şekilde inşa edilebilmektedir, [14]. Öte yandan, null-olmayan reküran bir vektör alanı, paralel olacak şekilde düzenlenebilmektedir. Daha açık olarak; v null-olmayan, reküran bir vektör alanı olsun. Bu durumda, (1.13) bağıntısından

$$\nabla_i v_j = \eta_i v_j \tag{2.47}$$

koşulu sağlanır. (2.47) denklemi v^j ile çarpıldığı takdirde,

$$(\nabla_i v_j)v^j = \frac{1}{2}\nabla_i(v_j v^j) = \eta_i v_j v^j \tag{2.48}$$

bulunur. $v \cdot v \neq 0$ olduğundan, (2.48) denkleminden, η formuna karşılık gelen vektör alanının $f \equiv \frac{1}{2}\log|v \cdot v|$ fonksiyonunun gradiyenti olması gerektiği sonucuna ulaşılır. Buradan, $\nabla_i(e^{-f}v_j) = 0$ bulunur. O halde, v reküran vektör alanı, paralel olacak şekilde düzenlenebilmektedir. Null-olmayan reküran vektör alanlarının paralel olarak yeniden ölçeklendirilebilmesi gerçeği *öz-reküran* vektör alanı kavramını doğurmaktadır, [16]. Yukarıdaki açıklamalardan görüleceği üzere, yalnızca null vektör alanları, öz-reküran olmaya aday vektör alanlarıdır. Buna göre, pozitif tanımlı metrik işaretli bir manifold üzerindeki reküran bir vektör alanı daima paralel olarak düzenlenebilmektedir. Bu nedenle, Tablo 1'in dördüncü sütununda yalnızca muhtemel olan paralel vektör alanları sunulmuştur. ϕ cebrinde yer alan tüm bivektörler için sıfır özdeğerine karşılık gelen vektör alanları her bir dolanım tipi için tespit edilmiş ve ilgili sütun doldurulmuştur. Burada, $\langle\ \rangle$ üreteç kümesini göstermektedir.

Şimdi de, g metriği $(+,+,+,-)$ Lorentz işaretine sahip olsun. Bu takdirde, ϕ dolanım cebri $o(1,3)$ ortogonal cebrinin bir alt cebridir. Bu alt cebrin bivektör temsili ve ilgili dolanım cebirleri [34] numaralı makalede verilmiştir. Söz konusu dolanım tipleri R_1 (manifoldun düz olma durumu), R_2, R_3, $\ldots$, R_{15} (genel dolanım tipi) şeklinde gösterilmektedir. Bahsi edilen dolanım tipleri, Tablo 2'de bazlarıyla birlikte ifade edilmektedir.

Tablo 2: $(+,+,+,-)$ işareti için dolanım tipleri

Tip	Bazlar	Paralel vektör alanları	Reküran vektör alanları
R_2	$l \wedge n$	$\langle x, y\rangle$	l, n
R_3	$l \wedge x$	$\langle l, y\rangle$	—
R_4	$x \wedge y$	$\langle l, n\rangle$	—
R_6	$l \wedge n, l \wedge x$	$\langle y\rangle$	l
R_7	$l \wedge n, x \wedge y$	—	l, n
R_8	$l \wedge x, l \wedge y$	$\langle l\rangle$	—
R_9	$l \wedge n, l \wedge x, l \wedge y$	—	l
R_{10}	$l \wedge n, l \wedge x, n \wedge x$	$\langle y\rangle$	—
R_{11}	$l \wedge x, l \wedge y, x \wedge y$	$\langle l\rangle$	—
R_{12}	$l \wedge x, l \wedge y, l \wedge n + \nu(x \wedge y)$	—	l
R_{13}	$x \wedge y, y \wedge z, x \wedge z$	$\langle t\rangle$	—
R_{14}	$l \wedge n, l \wedge x, l \wedge y, x \wedge y$	—	l
R_{15}	$o(1,3)$	—	—

Tablo 2'de $0 \neq \nu \in \mathbb{R}$ olmakla birlikte, R_1 tipi manifoldun düz olma durumunu temsil ettiğinden burada sunulmamıştır. Ayrıca, $l \wedge n + \nu(x \wedge y)$ bivektörü ile üretilen R_5 tipi, bir uzay-zaman için dolanım cebri olamayacağından bu tabloda yer almaz (detaylar için bkz. [14], Teorem 8.9). Yukarıda verilen açıklamalar ışığında, Tablo 2'nin üçüncü ve dördüncü sütunları doldurulmuş ve sırasıyla, muhtemel (yerel) paralel ve (yerel) reküran vektör alanları elde edilmiştir.

Son olarak, g metriği $(+,+,-,-)$ metrik işaretine sahip olsun. Bu durumda, g metriği *nötr metrik* olarak isimlendirilmektedir. İlgili metrik işaret için, ϕ dolanım cebri $o(2,2)$ ortogonal cebrinin bir alt cebridir. Bu alt cebrin bivektör temsili ve ilgili dolanım cebirleri [11] ve [40] numaralı makalelerde elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında, Lorentz metrik işaretine sahip $4-$boyutlu manifoldların dolanım teorisi üzerine yoğunlaşılacaktır. İkinci mertebeden, simetrik bazı özel tensör alanlarının dola-

nım teorisindeki varlıkları araştırılacaktır. Tablo 2'de verilen dolanım tipleri göz önüne alınarak, Riemann eğrilik (*Riem*) ve Ricci (*Ric*) tensörleri ile skaler eğrilik (r) hesaplanacaktır. Riemann eğrilik tensörü için, $p \in M$ noktasında bivektörlerin $\Lambda_p(M)$ uzayı üzerinde tanımlanan *eğrilik dönüşümü* (*curvature map*) kullanılacaktır. Eğrilik dönüşümü; $\tilde{f} : \Lambda_p(M) \to \Lambda_p(M)$, $F^i_{\ j} \to R^i_{\ jkh} F^{kh}$ şeklinde tanımlanan lineer bir dönüşümdür. Bu lineer dönüşümün görüntüsü, ϕ Lie cebrinin bir alt uzayıdır. Nihayetinde *Riem*; ϕ Lie cebrindeki bivektörlerin çarpımlarının simetrik toplamı biçiminde yazılabilmektedir, [14].

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

İkinci mertebeden, simetrik tensör alanları sahip oldukları özellikler sebebiyle yıllar boyunca geometricilerin dikkatini çekmiştir. Özellikle, matematik ve fizik bilimleri açısından simetrik tensör alanlarının 4−boyutta sınıflandırılması büyük önem taşımaktadır. Tezin bu bölümünde, Mantica ve Molinari [28] tarafından tanıtılan ve *genelleştirilmiş Z−tensörü* olarak adlandırılan ikinci mertebeden, simetrik özel bir tensör alanı ile çalışılacaktır. Öncelikle, genel $n-$boyutlu manifoldlar üzerinde söz konusu tensör alanı dikkate alınacaktır. Daha sonra, 4−boyutlu uzay-zamanlar göz önünde bulundurularak birtakım uygulamalar yapılacaktır.

$n-$boyutlu düzgün bir M manifoldu üzerinde genelleştirilmiş $Z-$tensörü

$$Z = Ric + \psi g \tag{3.1}$$

olarak tanımlanır. Burada, Ric ve g sırasıyla, Ricci ve metrik tensörleri ifade etmektedir ve ψ, keyfi bir skaler fonksiyondur, [28]. Ayrıca, $Z \equiv 0$ ise, (M, g) manifoldu *Z−düz manifold* olarak adlandırılır ve (3.1) ifadesinden, $\psi = -\frac{r}{n}$ bulunur. Bu durumda, (M, g) manifoldunun bir Einstein manifoldu olduğu açıktır.

$Z-$tensör alanı birçok araştırmacı tarafından çeşitli simetrik manifoldlar üzerinde çalışılmıştır (ör. bkz. [8, 9, 26, 28, 29, 30, 31, 33]). Bilhassa, Tamássy ve Binh [36, 37] tarafından literatüre kazandırılan zayıf simetrik manifoldlar üzerine detaylıca incelemeler yapılmıştır. Söz konusu incelemelerde, $n > 2$ boyutlu özel bir Riemann manifoldu üzerinde araştırmalar sürdürülmüştür. (M, g) $(n > 2)$ bir Riemann manifoldu ve ∇, M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere, manifoldun Ricci tensörü

$$(\nabla_U Ric)(V, W) = A(U)Ric(V, W) + B(V)Ric(W, U) + D(W)Ric(U, V) \tag{3.2}$$

koşulunu sağlarsa, bu manifolda *zayıf Ricci simetrik manifold* (*weakly Ricci symmetric manifold*) adı verilir ve bahsi geçen manifold $(WRS)_n$ ile gösterilir. Burada, $U, V, W \in \mathfrak{X}(M)$ ve A, B, D aynı anda sıfır olmayan $1-$formlardır.

Başka bir açıdan, Mantica ve Molinari [28] zayıf $Z-$simetrik manifold yapısını tanıtmış ve geometrik olarak bu manifoldun birçok özelliğini elde etmişlerdir. Eğer (3.1) bağıntısı ile verilen genelleştirilmiş $Z-$tensörünün kovaryant türevi

$$(\nabla_U Z)(V,W) = A(U)Z(V,W) + B(V)Z(W,U) + D(W)Z(U,V) \tag{3.3}$$

koşulunu sağlıyorsa, (M,g) manifolduna *zayıf $Z-$simetrik manifold* (*weakly $Z-$symmetric manifold*) adı verilir ve bahsi geçen manifold $(WZS)_n$ ile gösterilir. Burada, $U,V,W \in \mathfrak{X}(M)$ ve A,B,D aynı anda sıfır olmayan $1-$formlardır. Özel olarak, (3.1) bağıntısında $\psi \equiv 0$ ise, $Z = Ric$ olur ve (3.2) eşitliğinden, $(WZS)_n$ manifoldu $(WRS)_n$ manifolduna indirgenir. Benzer şekilde, (3.3) eşitliğinde $A \neq 0$ ve $B = D = 0$ ise, $(WZS)_n$ manifoldu *$Z-$reküran manifolda* (*$Z-$recurrent manifold*) indirgenmektedir. Ayrıca, bir $Z-$reküran manifold için $A \equiv 0$ ise, $\nabla Z = 0$ bulunur ve böyle bir manifold *$Z-$paralel manifold* (*$Z-$parallel manifold*) ya da *$Z-$simetrik manifold* (*$Z-$symmetric manifold*) olarak adlandırılır. $Z-$tensörü paralel ise Ricci tensörünün de paralel olduğu Mantica ve Suh [30] tarafından kanıtlanmıştır ve bu bilgi daha sonra kullanılacaktır.

Çalışmanın devamında, yukarıda tanımlanan bazı özel $Z-$simetrik manifoldlar incelenerek, bu manifoldların çeşitli özellikleri elde edilmiştir. Özel vektör alanları içeren $Z-$reküran ve zayıf $Z-$simetrik manifoldlar üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Öte yandan, $Z-$tensörünün birçok özelliği ikinci mertebeden, simetrik tensörlerin sınıflandırılmasıyla ilişkilendirilmiştir. Daha sonra, Ricci solitonlar üzerinde $Z-$tensörü ile alakalı bazı incelemeler yapılmış ve bu kısımda elde edilen bazı sonuçları açıklamak için çeşitli örneklere yer verilmiştir. Son olarak, Schouten ve Cotton tensörleri ile ilgili araştırmalar yürütülmüş ve bazı örnekler yardımıyla açıklamalarda bulunulmuştur.

3.1. Bazı Özel $Z-$Simetrik Manifoldlar ve Uzay-Zamanlara Uygulamaları

Bu kısımda, $Z-$reküran ve zayıf $Z-$simetrik manifoldlar göz önüne alınıp bu manifoldların birtakım özellikleri incelenecektir. Ayrıca, ilgili manifoldların uzay-zamanlar üzerindeki uygulamaları üzerine yoğunlaşılacaktır. Öncelikle, $Z-$tensörünün Bölüm 1.2'de yer verilen özel vektör alanları ile ilişkisi, Yardımcı Teorem 3.1 ile verilecektir.

Yardımcı Teorem 3.1. M, $n-$boyutlu düzgün bir manifold ve g, M üzerinde keyfi işaretli bir metrik olsun. Ayrıca, v ve φ, M manifoldunun boş olmayan, bağlantılı, açık bir $\mathscr{V}$ alt kümesi üzerinde kaybolmayan düzgün vektör alanları olsun. Buna göre, aşağıdaki koşullar sağlanır:

(i) Ricci tensörünün bir özvektörü, $Z-$tensörünün de bir özvektörüdür ve bu durumun tersi de doğrudur.

(ii) Eğer v vektör alanı $\mathscr{V}$ kümesi üzerinde reküran ise, $Z-$tensörünün $\lambda+\psi$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörüdür. Burada, λ, Ricci tensörünün aynı v özvektörüne karşılık gelen özdeğeridir.

(iii) Eğer φ vektör alanı $\mathscr{V}$ kümesi üzerinde sabit uzunluklu bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı ya da yakınsak ya da paralel bir vektör alanı ise, $Z-$tensörünün ψ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörüdür.

İspat: w vektörü, M manifoldunun boş olmayan, bağlantılı, açık bir $\mathscr{V}$ alt kümesi üzerinde Ricci tensörünün α özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olsun. Bu durumda, R_{ij}, Ricci tensörünün bileşenlerini göstermek üzere

$$R_{ij}w^j = \alpha w_i \tag{3.4}$$

koşulu gerçeklenir. Ayrıca, (3.1) bağıntısı yerel olarak

$$Z_{ij} = R_{ij} + \psi g_{ij} \tag{3.5}$$

biçiminde ifade edilir. Burada, Z_{ij}, $Z-$tensörünün bileşenleridir ve ψ keyfi skaler fonksiyondur. (3.5) denklemi w^j ile daraltılırsa

$$Z_{ij}w^j = R_{ij}w^j + \psi g_{ij}w^j$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik (3.4) yardımı ile yeniden düzenlenirse

$$Z_{ij}w^j = (\alpha+\psi)w_i \tag{3.6}$$

ifadesine ulaşılır. (3.6) bağıntısından, w vektörünün $Z-$tensörünün $\alpha+\psi$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğu açıktır. Dolayısıyla, Ricci tensörünün bir özvektörü aynı zamanda $Z-$tensörünün de bir özvektörü olur. Tersine, w vektör alanı $Z-$tensörünün bir özvektörü olsun. Bu takdirde, $Z-$tensörü için, $Z_{ij}w^j = \alpha w_i$ bağıntısı mevcuttur. (3.5) eşitliği w^j ile daraltılıp, bu bağıntı kullanılırsa, $R_{ij}w^j = (\alpha-\psi)w_i$ ifadesine ulaşılır. Yani, w özvektörü Ricci tensörünün $\alpha-\psi$ özdeğerine karşılık gelir. Dolayısıyla, w vektörü aynı zamanda Ricci tensörünün de bir özvektörüdür. Bu durumda (i) koşulu ispatlanmış olur. (i) şıkkından görüldüğü üzere, Ricci ve $Z-$tensörünün Segre tipi özdeğerleri kadar fark eder.

Daha sonra, $\mathscr{V}$ kümesi üzerinde kaybolmayan (non-vanishing) reküran vektör alanı (1.13) koşulunu sağlamak üzere, v ile temsil edilsin. Bu durumda, v reküran vektörü, Ric tensörünün λ gibi bir özdeğerine karşılık gelen bir özvektörüdür, [16]. Buna göre, (3.5) denklemi v^j ile daraltılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$Z_{ij}v^j = (\lambda+\psi)v_i \tag{3.7}$$

koşulu elde edilir. Dolayısıyla, v vektörü, $Z-$tensörünün $\lambda+\psi$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörüdür ve böylece (ii) koşulu ispatlanır.

Bir başka açıdan, $\mathscr{V}$ kümesi üzerinde (1.15) denklemini sağlayan sabit uzunluklu bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı göz önüne alınsın. O halde, manifoldun r skaler eğriliği sabit olmalıdır, [22]. Ayrıca, bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı için (1.15) denklemi ve (1.16) Ricci özdeşliğinden

$$\varphi_h R^h_{ijk} = \varrho\,(\nabla_k R_{ij} - \nabla_j R_{ik}) \tag{3.8}$$

bulunur. φ vektör alanı sabit uzunluklu ise, daraltılmış ikinci Bianchi özdeşliği ve (3.8) denklemi kullanılarak, $\varphi_h R^h_i = 0$ olduğu görülür. Bu bağıntı, metrik tensör yardımıyla $R_{ij}\varphi^j = 0$ biçiminde de yazılabilir. Dolayısıyla, φ vektör alanının Ricci tensörünün sıfır özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğu anlaşılır. Bu takdirde, (3.5) ifadesi φ^j ile daraltılıp, (i) koşulu kullanılırsa, $Z_{ij}\varphi^j = \psi\varphi_i$ elde edilir. Buna göre, φ vektörü $Z-$tensörünün de ψ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörüdür. Benzer adımlar φ vektör alanının, paralel ya da yakınsak olması halinde de aşağıdaki gibi uygulanabilir. İlk olarak, φ vektör alanı paralel

kabul edilsin. Dolayısıyla, $\nabla_j \varphi_i = 0$ olmalıdır. (1.16) bağıntısı ile verilen Ricci özdeşliği, φ paralel vektör alanı için düzenlenirse, $R_{ijkh}\varphi^h = 0$ bulunur. Elde edilen bu ifade g^{ik} tensörü ile daraltılırsa, $R_{jh}\varphi^h = 0$ olarak elde edilir. En nihayetinde, φ vektör alanının, Ricci tensörünün sıfır özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğu görülür. Daha sonra, (3.5) denklemi φ^j bileşenleri ile daraltılırsa

$$Z_{ij}\varphi^j = R_{ij}\varphi^j + \psi g_{ij}\varphi^j = \psi\varphi_i \tag{3.9}$$

elde edilir. Bu durumda, φ vektör alanı, $Z-$tensörünün ψ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörüdür. Öte yandan, φ vektör alanının yakınsak olduğu kabul edilsin. Yakınsak bir vektör alanı, (1.14) koşulunu ρ bir sabit olmak üzere sağlar. Sonrasında, (1.16) denklemi, φ yakınsak vektör alanı için, $\nabla_j \varphi_i = \rho g_{ij}$ olacak biçimde yeniden düzenlenirse

$$\nabla_k(\rho g_{ij}) - \nabla_j(\rho g_{ik}) = R_{ijkh}\varphi^h$$

elde edilir. Burada, ∇ metrik konneksiyon ve $\nabla\rho = \partial\rho = 0$ olduğundan, $R_{ijkh}\varphi^h = 0$ bulunur. Bu ifade, g^{ik} tensörü ile daraltılırsa, $R_{jh}\varphi^h = 0$ bulunur. Yani, φ yakınsak vektör alanı, Ric için bir özvektördür ve sıfır özdeğerine karşılık gelmektedir. Ayrıca, (3.9) denklemi de sağlanacağından, φ vektör alanının, $Z-$tensörünün ψ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğu da görülür. Dolayısıyla, ispat tamamlanır. ■

3.2. Özel Vektör Alanları İçeren $Z-$Reküran Manifoldlar

Keyfi işaretli bir g metriği içeren düzgün, $n-$boyutlu bir M manifoldu düşünülsün. $Z-$tensörü; M manifoldunun boş olmayan, bağlantılı, açık bir $\mathscr{V}$ kümesi üzerinde hiçbir yerde sıfır olmayacak biçimde tanımlansın ve bu tensör reküran olsun. Bu durumda, (M, g) manifolduna $Z-$*reküran manifold* denir ve her $U, V, W \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$(\nabla_U Z)(V, W) = A(U)Z(V, W) \tag{3.10}$$

koşulu gerçeklenir. Burada, A bir $1-$formdur ve *reküran* $1-$*form* olarak adlandırılır, [28]. Bununla birlikte, (3.10) koşulunda $A \equiv 0$ ise, yani $\nabla Z = 0$ olması halinde, söz konusu manifold

Z−paralel manifolda indirgenir. 4−boyutlu farklı metrik işarete sahip manifoldlar üzerinde tanımlanan, ikinci mertebeden, simetrik, reküran ve paralel tensörler [16] numaralı kaynakta ayrıntılı olarak incelenmiş ve tüm metrik işaretler için, muhtemel dolanım tipleri ve Segre tipleri tespit edilmiştir. Bu çalışmanın katkılarıyla aşağıdaki uyarı verilir:

Uyarı 3.1. Reküran bir $Z-$tensörünün reel ya da karmaşık bir özvektörü, $\mathscr{V}$ kümesi üzerinde hiçbir yerde sıfır olmayan bir α özdeğerine karşılık geliyorsa, (3.10) eşitliğinde yer alan A 1−formu, $\mathscr{V}$ kümesi üzerinde bir gradiyenttir (ikinci mertebeden, simetrik ve reküran bir tensör için genel bir ispat [16] kaynağındaki Lemma 1'de yer almaktadır).

İlk olarak, $Z-$reküran bir manifoldun, özel vektör alanları içermesine göre aşağıdaki teorem verilecektir:

Teorem 3.1. (M,g), $n-$boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu ve $Z-$tensörü reküran olsun. φ; M manifoldunun boş olmayan, bağlantılı, açık bir $\mathscr{V}$ alt kümesi üzerinde hiçbir yerde kaybolmayan, düzgün bir vektör alanı olsun. Bu durumda, $Z-$tensörünün ψ skaler fonksiyonu, $\mathscr{V}$ kümesi üzerinde sıfırdan farklı olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanır:

(i) φ paralel bir vektör alanı ise, $Z-$tensörü ya paraleldir ya da paralel olacak şekilde ölçeklendirilebilir. Dahası, φ reküran bir vektör alanıysa ve $Z-$tensörünün sıfırdan farklı bir özdeğerine karşılık geliyorsa, $Z-$tensörü paralel olacak şekilde ölçeklendirilebilir.

(ii) φ sabit uzunluklu bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı ise, φ vektör alanı ya null olmalıdır ya da $Z-$tensörü paralel olacak şekilde ölçeklendirilebilir.

(iii) φ yakınsak bir vektör alanı ise, $Z-$tensörü paralel olacak şekilde ölçeklendirilebilir. Özel olarak, φ bir null vektör alanı ise, paralel vektör alanına indirgenir.

İspat: (M,g), $n-$boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu ve $Z-$tensörü reküran olsun. φ; M manifoldunun boştan farklı, bağlantılı, açık bir $\mathscr{V}$ alt kümesi üzerinde hiçbir yerde kaybolmayan, düzgün bir vektör alanı olsun. Öncelikle, φ vektörünün $\mathscr{V}$ üzerinde paralel olduğu varsayılsın. Yardımcı Teorem 3.1'den faydalanılarak, φ vektör alanının, $Z-$tensörünün $\psi \neq 0$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğu görülür. Böylece, Uyarı 3.1'e göre, A reküran 1−formu gradiyent olmalıdır. Daha açık olarak, $\psi \neq 0$ olmak üzere, $Z_{ij}\varphi^j = \psi\varphi_i$ şeklinde

ifade edilebilir. Elde edilen bu koşulun kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla_k Z_{ij}\varphi^j + Z_{ij}\nabla_k\varphi^j = \partial_k\psi\,\varphi_i + \psi\nabla_k\varphi_i \tag{3.11}$$

eşitliğine varılır. Burada, φ vektör alanı paralel olduğundan, $\nabla\varphi = 0$ koşulunu sağlar. Ayrıca, $Z-$tensörü reküran olduğundan (3.10) eşitliği yardımıyla

$$A_k Z_{ij}\varphi^j = \partial_k\psi\varphi_i \tag{3.12}$$

denklemi elde edilir. (3.12) denkleminde, $Z_{ij}\varphi^j = \psi\varphi_i$ ($\psi \neq 0$) bağıntısı göz önüne alınırsa

$$A_k = \frac{\partial_k\psi}{\psi} \tag{3.13}$$

ifadesine ulaşılır. Dolayısıyla, (3.13) denkleminden, $A_k = \nabla_k \log|\psi|$ şeklinde ifade edilir. Bu ise, A reküran $1-$formunun $\log|\psi|$ fonksiyonunun gradiyenti olduğunu gösterir. Bu takdirde, (3.10) ve (3.13) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\nabla_k(\psi^{-1}Z_{ij}) &= \partial_k(\psi^{-1})Z_{ij} + \psi^{-1}\nabla_k Z_{ij}\\ &= (-1)\psi^{-2}\partial_k\psi Z_{ij} + \psi^{-1}A_k Z_{ij}\\ &= -\frac{\partial_k\psi}{\psi^2}Z_{ij} + \frac{\partial_k\psi}{\psi^2}Z_{ij}\\ &= 0\end{aligned} \tag{3.14}$$

olarak bulunur. O halde, $\nabla(e^{-\log|\psi|}\otimes Z) = \nabla(\psi^{-1}\otimes Z) = 0$ şeklinde elde edilir. Bu ise, $Z-$tensörünün, paralel bir tensör alanıyla orantılı olduğu anlamına gelir. Ayrıca, $\psi \neq 0$ sabit ise, (3.13) ifadesinden $A \equiv 0$ ve böylece (3.10) koşulundan, $\nabla Z = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla, (M,g) manifoldu, $Z-$paralel manifolda indirgenir. Öte yandan, φ vektör alanı, $Z-$tensörünün sıfırdan farklı bir özdeğerine karşılık gelen reküran bir vektör alanı olsun. Bu takdirde, söz konusu vektör alanı için, (1.13) denkleminden $\nabla_k\varphi_j = q_k\varphi_j$ bağıntısı q_k bir $1-$form olmak üzere sağlanmaktadır. Yardımcı Teorem 3.1 (ii) koşulundan, $\lambda + \psi \neq 0$ olmak

üzere

$$Z_{ij}\varphi^j = (\lambda+\psi)\varphi_i \tag{3.15}$$

denklemi yazılır. (3.15) denkleminin kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla_k Z_{ij}\varphi^j + Z_{ij}\nabla_k\varphi^j = \partial_k(\lambda+\psi)\varphi_i + (\lambda+\psi)\nabla_k\varphi_i \tag{3.16}$$

elde edilir. φ vektör alanının reküran olduğu dikkate alınıp, (3.10) ve (3.16) denklemleri kullanılırsa

$$A_k Z_{ij}\varphi^j + Z_{ij}q_k\varphi^j = \partial_k(\lambda+\psi)\varphi_i + (\lambda+\psi)q_k\varphi_i$$

şeklinde bulunur. Bu denklem, (3.15) ifadesi yardımıyla düzenlenirse

$$A_k(\lambda+\psi)\varphi_i = \partial_k(\lambda+\psi)\varphi_i$$

eşitliğine ulaşılır ve bu eşitlikten A reküran $1-$formunun bileşenleri

$$A_k = \frac{\partial_k(\lambda+\psi)}{\lambda+\psi} = \nabla_k \log|\lambda+\psi| \tag{3.17}$$

olarak ifade edilir. Dolayısıyla, A reküran $1-$formu, $\log|\lambda+\psi|$ fonksiyonunun gradiyenti olur. Bu takdirde, (3.10) ve (3.17) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\nabla_k\left((\lambda+\psi)^{-1}Z_{ij}\right) &= (-1)(\lambda+\psi)^{-2}\partial_k(\lambda+\psi)Z_{ij} + (\lambda+\psi)^{-1}A_k Z_{ij}\\ &= -\frac{\partial_k(\lambda+\psi)}{(\lambda+\psi)^2}Z_{ij} + \frac{\partial_k(\lambda+\psi)}{(\lambda+\psi)^2}Z_{ij}\\ &= 0\end{aligned} \tag{3.18}$$

olduğundan bir önceki duruma benzer şekilde, $Z-$tensörü paralel olacak şekilde ölçeklendirilebilirdir. Böylece, (i) şıkkının ispatı tamamlanır.

Şimdi de, φ vektör alanı, sabit uzunluklu bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı olsun. O halde, bir c sabiti için, $\varphi_i\varphi^i = c$ koşulu sağlanır. Diğer taraftan, Yardımcı Teorem 3.1 (iii) koşulundan, $Z_{ij}\varphi^j = \psi\varphi_i$ $(\psi \neq 0)$ bağıntısı gerçeklenmektedir. Bu ifadenin kovaryant türevi alınırsa, (3.11) denklemi elde edilir. (3.11) denkleminde, $\varphi(Ric)$ vektör alanı için (1.15) koşulu kullanılıp,

(3.5) ve (3.10) bağıntıları göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} A_k Z_{ij}\varphi^j + Z_{ij}\varrho R^j{}_k &= \partial_k\psi\varphi_i + \psi\varrho R_{ik} \\ A_k\psi\varphi_i + (R_{ij} + \psi g_{ij})\varrho R^j{}_k &= \partial_k\psi\varphi_i + \psi\varrho R_{ik} \\ A_k\psi\varphi_i + \varrho R_{ij}R^j{}_k + \psi\varrho R_{ik} &= \partial_k\psi\varphi_i + \psi\varrho R_{ik} \end{aligned} \tag{3.19}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikte gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\psi\varphi_i A_k + \varrho R_{ij}R^j{}_k = \varphi_i\partial_k\psi \tag{3.20}$$

denklemi bulunur. (3.20) denklemi φ^i ile daraltılırsa

$$\psi\varphi_i\varphi^i A_k + \varrho R_{ij}\varphi^i R^j{}_k = \varphi_i\varphi^i\partial_k\psi \tag{3.21}$$

bulunur. Buradan, $\varphi_i\varphi^i = c$ ve $R_{ij}\varphi^i = 0$ olduğundan

$$c\psi A_k = c\partial_k\psi \tag{3.22}$$

eşitliğine ulaşılır. $c = 0$ iken, (3.22) eşitliği aşikar olarak sağlanır. Bu ise, φ vektör alanının null olması anlamına gelir. Öte yandan, $c \neq 0$ iken, (3.22) denkleminden $A_k = \dfrac{\partial_k\psi}{\psi}$ bulunur. Dolayısıyla, A reküran $1-$formu, $\log|\psi|$ fonksiyonunun gradiyenti olur. Bu durumda, $Z-$tensörü paralel olacak şekilde ölçeklendirilebilir. Böylece, Teorem 3.1 (ii) koşulunun ispatı da tamamlanır.

Daha sonra, (i) ve (ii) koşullarının ispatında yararlanılan benzer adımlar φ vektör alanının yakınsak olması halinde (iii) koşulunun ispatı için uygulanabilir. Yakınsak bir vektör alanı, ρ bir sabit olmak üzere (1.14) denklemini sağlar. Bununla birlikte, Yardımcı Teorem 3.1 (iii) koşuluna göre, $Z_{ij}\varphi^j = \psi\varphi_i$ bağıntısı mevcuttur. Bu eşitliğin kovaryant türevi alınırsa ve $\varphi_i\varphi^i = c$, $R_{ik}\varphi^i = 0$ koşulları kullanılırsa, (3.22) denkleminin sağlandığı görülür. Buradan, $c \neq 0$ ise, $A_k = \dfrac{\partial_k\psi}{\psi} = \nabla_k \log|\psi|$ bulunur. Dolayısıyla, $Z-$tensörü paralel olacak şekilde ölçeklendirilebilirdir. Aksine, $c = 0$ ise, φ bir null vektör alanı olur. Bu takdirde, $\varphi_i\varphi^i = 0$ koşulunun kovaryant türevi alınıp, (1.14) denklemi göz önünde bulundurulursa, $\rho = 0$ sonucuna

ulaşılır. Böylece, φ paralel bir vektör alanına indirgenir ve ispat tamamlanır. ■

Şimdi de, $Z-$paralel manifoldlar hakkında bazı bilgiler vermek yararlı olacaktır. (M,g) manifoldunun bir $Z-$paralel manifold olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, $\nabla Z = 0$ koşulu sağlanır. Öncelikle, (3.5) denkleminin kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla_k Z_{ij} = \nabla_k R_{ij} + \partial_k \psi g_{ij} \tag{3.23}$$

ifadesine ulaşılır. (3.23) denkleminde, $\nabla_k Z_{ij} = 0$ koşulu kullanılırsa ve bu denklem g^{ik} ile daraltılırsa

$$\nabla_k R_{ij} g^{ik} + \partial_k \psi g_{ij} g^{ik} = 0 \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.24) denklemi, $g_{ij}g^{ik} = \delta^k_j$ olmak üzere

$$\nabla_k R^k{}_j + \partial_k \psi \delta^k_j = 0 \tag{3.25}$$

şeklinde düzenlenir. Öte yandan, (3.25) denkleminde, daraltılmış ikinci Bianchi özdeşliği uygulanıp gerekli düzenlemeler yapıldığı takdirde

$$\partial_j \psi = -\frac{1}{2}\nabla_j r \tag{3.26}$$

denklemi elde edilir. Diğer taraftan, (3.23) denkleminde, $\nabla_k Z_{ij} = 0$ koşulu kullanılırsa ve bu denklem g^{ij} ile daraltılırsa, $\partial_j \psi = -\frac{1}{n}\nabla_j r$ elde edilir. Böylece, (3.26) denkleminden

$$\frac{1}{n}\nabla_j r = \frac{1}{2}\nabla_j r \tag{3.27}$$

sonucuna ulaşılır. (3.27) denkleminden, $(n-2)\nabla_j r = 0$ olduğu açıktır ve $n > 2$ için, $\nabla_j r = 0$ bulunur. Bu ise, $Z-$paralel bir manifold için, skaler eğriliğin sabit olduğu anlamına gelmektedir. Bu takdirde, $n > 2$ için, $\nabla_j r = 0$ olduğundan, (3.26) denkleminden $\partial_j \psi = 0$ şeklinde belirlenir. Buna göre, $n > 2$ için, ψ bir sabittir. Elde edilen tüm bu veriler (3.23) denkleminde yerine yazıldığı takdirde, $\nabla Ric = 0$ olarak bulunur. Başka bir deyişle, $Z-$tensörü paralel ise, Ricci tensörü de paralel olmalıdır (bkz.[30]). Aksine, ψ bir sabit ve Ricci tensörü paralel ise,

(3.23) denkleminden, $\nabla Z = 0$ olarak elde edilir. Yani, (M, g) bir $Z-$paralel manifolddur. Tüm bunlara ek olarak, (3.5) denklemi g^{ij} tensörü ile daraltıldığı takdirde, $Z-$tensörünün izini temsil edecek olan $\bar{Z}$

$$\bar{Z} = r + \psi n \tag{3.28}$$

şeklinde bulunur. (3.28) ifadesine göre, $Z-$paralel bir manifold için $\bar{Z}$ skalerinin de yukarıda verilen işlemler altında sabit olması gerektiği anlaşılır. Öte yandan, (3.5) denkleminden

$$Z^i{}_j = R^i{}_j + \psi \delta^i_j \tag{3.29}$$

elde edilir. Bu denklemin kovaryant türevi i indisi üzerinden alındığı takdirde

$$\nabla_i Z^i{}_j = \nabla_i R^i{}_j + \partial_j \psi \tag{3.30}$$

denklemine ulaşılır. (3.30) denkleminde, $\nabla_i R^i{}_j = \frac{1}{2}\nabla_j r$ daraltılmış ikinci Bianchi özdeşliği kullanılırsa

$$\nabla_i Z^i{}_j = \frac{1}{2}\nabla_j r + \partial_j \psi \tag{3.31}$$

bulunur. Bir diğer açıdan, (3.28) eşitliğinin kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla_j \bar{Z} = \nabla_j r + n\, \partial_j \psi$$

bulunur ve bu eşitliğin her iki tarafı n ile bölündüğünde

$$\frac{1}{n}\nabla_j \bar{Z} = \frac{1}{n}\nabla_j r + \partial_j \psi \tag{3.32}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $n > 2$ için, $\frac{1}{2}\nabla_j r = \frac{1}{n}\nabla_j r$ olduğundan (3.31) ve (3.32) denklemlerinden, $\nabla_i Z^i{}_j = \frac{1}{n}\nabla_j \bar{Z} = 0$ ifadesine ulaşılır. Bu durumda, $Z-$tensörünün diverjansı sıfır olmalıdır.

Bu aşamada, tez çalışması açısından $Z-$paralel manifoldlar hakkında çıkarımlarda bulunmak yerinde olacaktır. Uyarı 3.1'de bahsedildiği üzere, ikinci mertebeden, simetrik bir T tensör alanı reküransa ve sıfırdan farklı özdeğere karşılık gelecek biçimde bir özvektöre

sahipse, T tensörü paralel olacak şekilde ölçeklendirilebilmektedir, [16]. Böylece, T tensörü ancak tüm özdeğerleri sıfır olduğu takdirde öz-reküran olabilmektedir. 4−boyutlu, Lorentz metrik işaretli bir manifold üzerinde öz-reküran bir T tensörünün muhtemel Segre tiplerinin {(211)} ya da {(31)} şeklinde olduğu bilinmektedir, [14]. Özel olarak, (öz-reküran) Ricci tensörünün yalnızca {(211)} Segre tipinde olabileceği de kanıtlanmıştır, [16]. Öte yandan, 4−boyutlu farklı metrik işarete sahip olan manifoldlar üzerinde tanımlanan, ikinci mertebeden, simetrik ve paralel tüm tensörler [16] numaralı kaynakta sınıflandırılarak muhtemel dolanım tipleri her bir metrik işaret için elde edilmiştir. Bu çalışmalardan faydalanılarak, Z−paralel bir uzay-zaman için aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.1. (M, g) bir uzay-zaman ve Z−tensörü paralel olsun. Bu takdirde, Ricci tensörü de paralel olmalıdır ve mümkün olan tüm Segre tipleri (ve karşılık gelen dolanım tipleri); $\{(1,1)(11)\}$ (R_7, R_4 ya da R_2), $\{(1,11)1\}$ (R_{10}), $\{1,(111)\}$ (R_{13}) ve $\{(211)\}$ (R_8 ya da R_3, tüm özdeğerler sıfır) şeklindedir. Her bir durum için, Z−tensörünün Segre tipi, Ricci tensörünün Segre tipinden özdeğeri kadar farklıdır.

Örnek 3.1. R_3 dolanım tipi üreteç bivektörü $F = l \wedge x$ ile birlikte verilsin (bkz. Tablo 2). M manifoldu düz olmadığından, Riemann eğrilik tensörünün hiçbir yerde sıfır olmadığı, açık bir $\mathscr{V} \subset M$ alt kümesi mevcuttur. Bu takdirde, $\beta : \mathscr{V} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathscr{V}$ üzerinde sıfırdan farklı olmak üzere, *Riem* tensörünün bileşenleri, $R_{ijkh} = \beta F_{ij} F_{kh}$ şeklinde yazılabilmektedir. Bu denkleme üreteç bivektör yerleştirilirse

$$R_{ijkh} = \beta(l_i x_j - x_i l_j)(l_k x_h - x_k l_h) \tag{3.33}$$

ifadesi elde edilir. (3.33) denklemi g^{ik} ile daraltılıp, (2.2) ilişkili null baz vektörleri arasındaki bağıntılar kullanıldığı takdirde

$$R_{jh} = \beta l_j l_h \tag{3.34}$$

elde edilir. Bununla birlikte, (3.34) denklemi g^{jh} ile daraltılırsa, $r = 0$ olarak bulunur. Bu durumda, (3.5) ve (3.34) denklemlerinden

$$Z_{jh} = \beta l_j l_h + \psi g_{jh} \tag{3.35}$$

bulunur. Buradan, $Z-$tensörünün Segre tipini belirlemek için, (3.35) ifadesi sırasıyla l, n, x ve y vektörleri ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} Z_{jh}l^h &= \psi l_j \\ Z_{jh}n^h &= \beta l_j + \psi n_j \\ Z_{jh}x^h &= \psi x_j \\ Z_{jh}y^h &= \psi y_j \end{aligned} \tag{3.36}$$

elde edilir. (3.36) bağıntılarına göre; l, x ve y vektörleri, $Z-$tensörünün ψ özdeğerine karşılık gelen özvektörleridir. Dolayısıyla, $Z-$tensörünün Segre tipi $\{(211)\}$ şeklinde yazılır. Ayrıca, Tablo 2'ye göre, l vektör alanının paralel olduğu bilinmektedir. Bu durumda, (3.34) denkleminin kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla_k R_{jh} = \partial_k \beta \, l_j l_h \tag{3.37}$$

denklemine ulaşılır. Diğer taraftan, (3.34) denklemi, $l_j l_h = \frac{1}{\beta} R_{jh} \ \ (\beta \neq 0)$ şeklinde ifade edilerek, (3.37) denkleminde yerine yazılırsa

$$\nabla_k R_{jh} = \frac{\partial_k \beta}{\beta} R_{jh} = \nabla_k \log|\beta| R_{jh} = \partial_k (\log|\beta|) R_{jh} \tag{3.38}$$

bulunur. Dolayısıyla, (3.38) denkleminden, (M, g) manifoldunun Ricci reküran olduğu görülür. Dahası, manifoldun reküran $1-$formunun, $\log|\beta|$ fonksiyonunun gradiyenti olduğu da açıktır. Bu takdirde, (3.38) denkleminden

$$\begin{aligned} \nabla_k \left(\beta^{-1} R_{jh}\right) =& (-1)\beta^{-2} \partial_k \beta R_{jh} + \beta^{-1} \frac{\partial_k \beta}{\beta} R_{jh} \\ =& -\frac{\partial_k \beta}{\beta^2} R_{jh} + \frac{\partial_k \beta}{\beta^2} R_{jh} \\ =& 0 \end{aligned} \tag{3.39}$$

olarak bulunur. O halde, Ricci tensörü paralel olacak şekilde ölçeklendirilebilir. Son olarak, (3.35) denkleminin kovaryant türevi alınıp, (3.38) bağıntısı kullanılırsa

$$\nabla_k Z_{jh} = \partial_k (\log|\beta|) \, R_{jh} + \partial_k \psi \, g_{jh} \tag{3.40}$$

denklemine ulaşılır. Buradan, (3.5) ve (3.40) denklemleri yardımıyla

$$\nabla_k Z_{jh} = \partial_k(\log|\beta|)\, Z_{jh} + \beta\,\partial_k\left(\frac{\psi}{\beta}\right) g_{jh} \tag{3.41}$$

sonucu elde edilir. (3.41) denklemini sağlayan (M,g) manifoldu, *genelleştirilmiş $Z-$reküran manifold* olarak isimlendirilir. Özel olarak, $\dfrac{\psi}{\beta}$ sabitse, (M,g) manifoldu, reküran $1-$formu $\log|\beta|$ fonksiyonunun gradiyenti olan bir $Z-$reküran manifolda indirgenmektedir. Bu durumda, $Z-$tensörü paralel olacak şekilde ölçeklendirilebilir. Ek olarak, $\nabla Z = 0$ olduğu takdirde, β ve ψ fonksiyonları sabittir ve (3.38) bağıntısından, Ricci tensörü de paralel olur. En nihayetinde, R_3 dolanım tipi için, Sonuç 3.1 uygulanmış oldu.

3.3. Özel Vektör Alanları İçeren Zayıf $Z-$Simetrik Uzay-Zamanlar

Bu kısımda, zayıf $Z-$simetrik manifoldlar uzay-zamanlar üzerinde incelenecektir. Çalışmanın çıktılarının uygulanabilirliği açısından her ne kadar uzay-zamanlar üzerine yoğunlaşılmış olsa da, elde edilen birçok sonuç $n-$boyutlu durum için de geçerlidir.

(M,g), zayıf $Z-$simetrik bir uzay-zaman olmak üzere, bu manifold $(WZS)_4$ ile gösterilecektir. Böyle bir uzay-zaman için, (3.3) koşulu yardımıyla

$$\nabla_k Z_{jh} = A_k Z_{jh} + B_j Z_{kh} + D_h Z_{kj} \tag{3.42}$$

yazılır. Burada; A, B, D aynı anda sıfır olmayan $1-$formlardır. Ayrıca, $Z-$tensörü simetrik olduğundan, bu tensörün bileşenleri $Z_{jh} = Z_{hj}$ koşulunu sağlar ve (3.42) denklemi

$$\nabla_k Z_{hj} = A_k Z_{hj} + B_h Z_{kj} + D_j Z_{kh} \tag{3.43}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. (3.42) denkleminden (3.43) denklemi çıkarılırsa

$$\nabla_k Z_{jh} - \nabla_k Z_{hj} = A_k(Z_{jh} - Z_{hj}) + (B_j - D_j)Z_{kh} + (D_h - B_h)Z_{kj} \tag{3.44}$$

denklemine ulaşılır. $Z-$tensörü simetrik olduğundan, (3.44) denklemi

$$(B_j - D_j)Z_{kh} + (D_h - B_h)Z_{kj} = 0$$

şeklini alır ve buradan

$$(B_j - D_j)Z_{kh} = (B_h - D_h)Z_{kj} \tag{3.45}$$

eşitliğine varılır. (3.45) eşitliğinde, $\gamma_i = B_i - D_i$ olarak isimlendirilirse

$$\gamma_j Z_{kh} = \gamma_h Z_{kj} \tag{3.46}$$

bağıntısı oluşur.

Çalışmanın devamında, özel vektör alanları içeren $4-$boyutlu, Lorentz metrik işaretli zayıf $Z-$simetrik manifoldlar üzerinde incelemeler yapılacaktır. (M, g), zayıf $Z-$simetrik bir uzay-zaman olsun. φ düzgün vektör alanının; söz konusu manifoldun boş olmayan, bağlantılı, açık bir $\mathscr{V}$ alt kümesi üzerinde hiçbir yerde kaybolmadığı kabul edilsin. Öncelikle, φ vektör alanının $\mathscr{V}$ kümesi üzerinde paralel olduğu varsayılsın. Yardımcı Teorem 3.1 (iii)'den faydalanılarak, φ vektör alanının, $Z-$tensörünün ψ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğu görülür. Bu durum, $\psi \neq 0$ olmak üzere, (3.9) bağıntısıyla

$$Z_{jh}\varphi^h = \psi\varphi_j \tag{3.47}$$

şeklinde gösterilir. Bununla birlikte, (3.46) bağıntısı φ^j ile daraltılırsa

$$\gamma_j Z_{kh}\varphi^j = \gamma_h Z_{kj}\varphi^j \tag{3.48}$$

ifadesi bulunur. Bu takdirde, (3.47) ve (3.48) denklemleri göz önüne alınarak

$$\gamma_j \varphi^j Z_{kh} = \psi\gamma_h\varphi_k \tag{3.49}$$

bulunur. Ardından, (3.49) eşitliği, φ^k ile daraltılır ve (3.47) bağıntısı yardımıyla

$$\gamma_j \varphi^j \varphi_h = \gamma_h \varphi_k \varphi^k \tag{3.50}$$

denklemine ulaşılır.

Şimdi, φ paralel vektör alanının null ve null-olmayan durumları göz önüne alınacak ve bu bölümün başında yapılan hesaplamalar yardımıyla çeşitli incelemelerde bulunulacaktır.

Durum 1: İlk olarak, φ (paralel) vektör alanı null kabul edilsin. Bu takdirde, (3.50) denklemi, $\gamma_j = B_j - D_j$ olmak üzere, null φ vektör alanı için düzenlenirse

$$\gamma_j \varphi^j = (B_j - D_j)\varphi^j = 0 \tag{3.51}$$

ifadesi elde edilir. Buradan, (3.51) ifadesi, (3.49) denkleminde yerine yazılırsa

$$\psi \gamma_h \varphi_k = 0 \tag{3.52}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\psi \neq 0$ ve $\varphi \neq 0$ olduğundan, (3.52) denkleminden, $\gamma = 0$ olarak belirlenir. Böylece, $B = D$ olur. Öte yandan, (3.47) denklemi j ve h indisleri üzerinden tekrar düzenlenip, kovaryant türevi alınırsa ve $\nabla\varphi = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\nabla_k Z_{jh} \varphi^j = \partial_k \psi \varphi_h \tag{3.53}$$

denklemi elde edilir. Buradan, (3.53) denkleminde, (3.42) bağıntısı yerine yazılırsa

$$(A_k Z_{jh} + B_j Z_{kh} + D_h Z_{kj})\varphi^j = \partial_k \psi \varphi_h \tag{3.54}$$

bulunur. (3.54) denkleminin sol tarafı (3.47) bağıntısıyla

$$\psi A_k \varphi_h + B_j \varphi^j Z_{kh} + \psi D_h \varphi_k = \partial_k \psi \varphi_h \tag{3.55}$$

haline gelir. Bu takdirde, (3.55) denklemi φ^h ile daraltılırsa

$$\psi A_k \varphi_h \varphi^h + B_j \varphi^j Z_{kh} \varphi^h + \psi D_h \varphi^h \varphi_k = \partial_k \psi \varphi_h \varphi^h \tag{3.56}$$

bulunur. Bununla birlikte, φ vektör alanı null olduğundan, (3.47) ve (3.56) denklemleri yardımıyla

$$B_j \varphi^j \psi \varphi_k + D_h \varphi^h \psi \varphi_k = 0 \tag{3.57}$$

olarak elde edilir. (3.57) eşitliğinde, h toplam indisi, j olarak değiştirilip, denklem yeniden düzenlenirse

$$(B_j \varphi^j + D_j \varphi^j) \psi \varphi_k = 0 \tag{3.58}$$

eşitliğine ulaşılır. Dolayısıyla, $\psi \neq 0$ olduğundan, $(B_j + D_j)\varphi^j = 0$ bulunur. Bu durumda, $B = D$ iken, $B_j \varphi^j = D_j \varphi^j = 0$ olur. Bu ise, φ vektör alanının, B $(= D)$ $1-$formuna karşılık gelen vektör alanına dik olması gerektiği anlamına gelir. Daha sonra, (3.55) eşitliği φ^k üzerinden daraltılırsa

$$\psi A_k \varphi^k \varphi_h + B_j \varphi^j Z_{kh} \varphi^k + \psi D_h \varphi^k \varphi_k = \partial_k \psi \varphi^k \varphi_h \tag{3.59}$$

denklemi elde edilir. Buradan, φ null vektör alanı ve $B_j \varphi^j = 0$ olduğundan, (3.47) ve (3.59) bağıntıları yardımıyla

$$\psi A_k \varphi^k \varphi_h = \partial_k \psi \varphi^k \varphi_h \tag{3.60}$$

bulunur. Bununla birlikte, $\psi \neq 0$ olduğundan, (3.60) eşitliğinden

$$A_k \varphi^k = \frac{\partial_k \psi}{\psi} \varphi^k \tag{3.61}$$

denklemine ulaşılır. Böylece, (3.61) denkleminde, $\dfrac{\partial_k \psi}{\psi} = \nabla_k \log|\psi|$ olarak yazılırsa

$$A_k \varphi^k = \nabla_k \log|\psi| \varphi^k \tag{3.62}$$

eşitliğine ulaşılır ve tüm bileşenler eşitliğin bir tarafında düzenlenilirse

$$(A_k - \nabla_k \log|\psi|)\,\varphi^k = 0 \tag{3.63}$$

elde edilir. Dolayısıyla, φ vektör alanının, $A - \nabla \log|\psi|$ formuna karşılık gelen vektör alanına dik olduğu açıktır.

Durum 2: Öncelikle, φ null-olmayan, paralel bir vektör alanı olsun. Ayrıca, $\gamma_j \varphi^j \neq 0$ olsun. Buradan, (3.49) denkleminde eşitliğin her iki tarafı $\gamma_j \varphi^j$ skalerine bölünürse

$$Z_{kh} = \frac{\psi}{\gamma_j \varphi^j}\,\gamma_h \varphi_k \tag{3.64}$$

ifadesine ulaşılır. $Z-$tensörü simetrik olduğundan $\gamma_h \varphi_k = \gamma_k \varphi_h$ olduğu görülür. Dolayısıyla, γ ve φ birbirleri ile orantılı olmalıdır. Bu orantı, $\lambda \neq 0$ olmak üzere, $\gamma_h = \lambda \varphi_h$ şeklinde ifade edilir ve (3.64) denkleminde yerine yazılırsa

$$Z_{kh} = \frac{\psi}{\gamma_j \varphi^j}\,\lambda \varphi_k \varphi_h \tag{3.65}$$

eşitliğine ulaşılır. (3.65) bağıntısında, $a = \dfrac{\psi\,\lambda}{\gamma_j \varphi^j}$ olarak ifade edilirse

$$Z_{kh} = a\,\varphi_k \varphi_h \tag{3.66}$$

denklemine ulaşılır. Bu takdirde, $Z-$tensörü, $\mathscr{V}$ açık kümesi üzerinde hiçbir yerde sıfır olmayacak biçimde, a skalerleri için, $Z = a\,\varphi \otimes \varphi$ bulunur. Sonuç olarak, $Z-$tensörünün Segre tipi {1(111)} olarak yazılır. Ayrıca, (3.1) denkleminden, Ricci tensörü

$$Ric = -\psi\, g + a\,\varphi \otimes \varphi \tag{3.67}$$

olarak belirlenir. (3.67) eşitliğinden, Ricci tensörünün de Segre tipinin {1(111)} olduğu görülür. Dolayısıyla, (M, g) yapısı, bir *yarı-Einstein uzay-zaman* (*quasi-Einstein space-time*) olarak elde edilir ([28] ile kıyaslayınız). Öte yandan, φ paralel bir vektör alanı olmak üzere,

(3.66) denklemi ile ifade edilen $Z-$tensörünün kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla_j Z_{kh} = \partial_j a \varphi_k \varphi_h \tag{3.68}$$

eşitliğine ulaşılır. Daha sonra, (3.66) ve (3.68) denklemleri yardımıyla

$$\nabla_j Z_{kh} = \frac{\partial_j a}{a} Z_{kh}$$

olarak yazılır ve bu eşitlik, $\frac{\partial_j a}{a} = \partial_j(\log|a|)$ olmak üzere

$$\nabla_j Z_{kh} = \partial_j(\log|a|) Z_{kh} \tag{3.69}$$

biçiminde ifade edilir. (3.69) denklemini sağlayan (M, g) manifoldu, bir $Z-$reküran manifolddur ve reküran $1-$formu bir gradiyenttir. Bu takdirde, $Z-$tensörü paralel olacak şekilde ölçeklendirilebilirdir. Böylelikle, (3.42) bağıntısı yardımıyla, B, D ve null-olmayan bir φ vektör alanı için çıkarımlar yapılabilir. Öncelikle, (3.69) denkleminin k, j, h indisleri sırasıyla, j, k, h olacak biçimde düzenlenirse

$$\partial_k(\log|a|) Z_{jh} = A_k Z_{jh} + B_j Z_{kh} + D_h Z_{jk} \tag{3.70}$$

denklemi bulunur. Söz konusu denklem, (3.66) bağıntısı kullanılarak

$$\frac{a_k}{a} a \varphi_j \varphi_h = A_k a \varphi_j \varphi_h + B_j a \varphi_k \varphi_h + D_h a \varphi_j \varphi_k$$

olarak yazılır ve $a \neq 0$ olmak üzere, gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\frac{a_k}{a} \varphi_j \varphi_h = A_k \varphi_j \varphi_h + B_j \varphi_k \varphi_h + D_h \varphi_j \varphi_k \tag{3.71}$$

denklemine ulaşılır. (3.71) denklemi, null-olmayan bir φ vektör alanı için, $\varphi_j \varphi^j = c \neq 0$

koşulu göz önüne alınıp, φ^j ile daraltılırsa

$$\frac{a_k}{a} c\,\varphi_h = A_k\, c\,\varphi_h + B_j \varphi^j \varphi_k \varphi_h + D_h\, c\,\varphi_k \tag{3.72}$$

elde edilir. Ayrıca, bu denklem φ^h ile daraltılırsa

$$\frac{a_k}{a} c^2 = A_k\, c^2 + B_j \varphi^j \varphi_k\, c + D_h \varphi^h\, c\,\varphi_k \tag{3.73}$$

eşitliği bulunur. Daha sonra, (3.73) denklemi φ^k ile daraltılıp, $c \neq 0$ ile sadeleştirilirse

$$\frac{a_k \varphi^k}{a} = A_k \varphi^k + B_j \varphi^j + D_h \varphi^h \tag{3.74}$$

bağıntısına ulaşılır. (3.74) denkleminde, Einstein uylaşımına göre j ve h üzerinden toplam mevcut olduğundan, bahsedilen bu toplam indisleri k olarak yazılırsa

$$\frac{a_k}{a} \varphi^k = (A_k + B_k + D_k)\,\varphi^k \tag{3.75}$$

haline gelir. Buradan, (3.72) denklemi φ^k ile daraltılıp, (3.75) bağıntısı kullanılırsa ve tüm bileşenler eşitliğin bir tarafında düzenlenirse

$$\left(\frac{a_k}{a} \varphi^k - A_k \varphi^k - B_k \varphi^k\right)\varphi_h - c\, D_h = 0 \tag{3.76}$$

denklemi elde edilir. (3.76) denkleminde, $\frac{1}{c}\left(\frac{a_k}{a}\varphi^k - A_k \varphi^k - B_k \varphi^k\right) = \lambda_1$ olarak belirlensin. Bu durumda, $D_h = \lambda_1 \varphi_h$ olur. Benzer şekilde, (3.71) denklemi $\varphi^h \varphi^k$ ile çarpılıp, tüm bileşenler eşitliğin bir tarafında düzenlenirse

$$\left(\frac{a_k}{a} \varphi^k - A_k \varphi^k - D_k \varphi^k\right)\varphi_j - c\, B_j = 0 \tag{3.77}$$

eşitliğine ulaşılır. (3.77) denkleminde, $\frac{1}{c}\left(\frac{a_k}{a}\varphi^k - A_k \varphi^k - D_k \varphi^k\right) = \lambda_2$ olsun. Dolayısıyla, $B_j = \lambda_2 \varphi_j$ olur. Sonuç olarak, $D_h = \lambda_1 \varphi_h$ ve $B_j = \lambda_2 \varphi_j$ eşitlikleri yardımıyla, null-olmayan, paralel bir φ vektör alanı için, B, D ve φ tensörlerinin lineer bağımlı olduğu görülür.

Öte yandan, (3.69) denkleminde, $\partial_j \log|a| := A_j$ olarak seçilip, gerekli indis değişimleri yapıldığı takdirde, (3.42) bağıntısının, $B = D = 0$ şeklinde düzenlenebileceği görülür. Ayrıca, $B - D = 0$ olduğundan, $\gamma = 0$ olur. Bu durum, $\gamma_j \varphi^j \neq 0$ varsayımı ile çelişkiye sebep olur. Dolayısıyla, $\gamma_j \varphi^j = 0$ olmalıdır. Daha açık olarak, (3.46), (3.49) ve (3.50) denklemleri otomatik olarak sağlanır. Böylece, $(WZS)_4$ manifoldu, $Z-$reküran manifolda indirgenir. Sonuç olarak, aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu:

Teorem 3.2. (M, g), zayıf $Z-$simetrik bir uzay-zaman olsun. φ; M manifoldunun boş olmayan, bağlantılı, açık bir $\mathscr{V}$ alt kümesi üzerinde hiçbir yerde kaybolmayan, paralel bir vektör alanı olsun. Ayrıca, $Z-$tensörünün ψ skaler fonksiyonu, $\mathscr{V}$ üzerinde sıfırdan farklı olsun. Bu durumda, aşağıdaki koşullar gerçeklenir:

(i) Eğer φ bir null vektör alanı ise, $(WZS)_4$ manifoldunun B ve D ilişkili $1-$formları birbirine eşittir. Dahası, φ vektör alanı, B $(= D)$ ve $A - \nabla \log|\psi|$ formlarına karşılık gelen vektör alanlarına diktir.

(ii) Eğer φ null-olmayan bir vektör alanı ise, $(WZS)_4$ manifoldu, reküran $1-$formu gradiyent olan bir $Z-$reküran uzay-zamana indirgenir ve böylece, $Z-$tensörü paralel olacak şekilde ölçeklendirilebilir.

Yukarıdakilere ek olarak, zayıf $Z-$simetrik manifoldların paralel bir vektör alanı içermesi durumu, zayıf Ricci simetrik uzay-zamanların söz konusu vektör alanını içermesi haline de uyarlanabilmektedir. Bunun için, aşağıdaki adımlar dikkate alınabilir:

Uyarı 3.2. (M, g) manifoldunun bir $\mathscr{V}$ açığı üzerinde kaybolmayan, düzgün bir φ paralel vektör alanı tanımlansın. Ricci özdeşliğinden, $R_{ij}\varphi^j = 0$ bulunur ve bu ifade türetilerek, $\nabla_k R_{ij}\varphi^j = 0$ denklemi elde edilir. Dolayısıyla, (3.2) bağıntısı φ paralel vektör alanı ile daraltıldığında, Ric sıfırdan farklı olduğundan, $B_j\varphi^j = 0$ olduğu görülür. Yani, $B \perp \varphi$ şeklinde ifadesi mümkündür. Öte yandan, Ricci tensörü simetrik olduğundan, $\nabla_k R_{ij} = \nabla_k R_{ji}$ olduğu açıktır. Bu takdirde, (3.2) ile tanımlanan zayıf Ricci simetrik yapısı ile

$$A_k R_{ij} + B_j R_{ik} + D_i R_{jk} = A_k R_{ij} + B_i R_{jk} + D_j R_{ik}$$

ifadesine ulaşılır. Bu ifade yeniden düzenlenirse

$$(B_j - D_j)R_{ik} = (B_i - D_i)R_{jk}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlik, φ^i bileşenleriyle daraltılırsa, $(B_i - D_i)\varphi^i = 0$ olduğu görülür. Bir önceki adımda, $B \perp \varphi$ olarak belirlendiğinden, $D_i\varphi^i = 0$ olarak bulunur. Yani, $D \perp \varphi$ şeklinde elde edilir. Dolayısıyla, $(WZS)_4$ manifoldu için gerçekleştirilen benzer hesaplamalar, $(WRS)_4$ manifoldu için de yapılabilir. Tez çalışmasında, $(WZS)_4$ manifoldları üzerine yoğunlaşılmıştır.

Şimdi, zayıf $Z-$simetrik bir uzay-zaman üzerinde reküran vektör alanları ele alınacaktır. v; M manifoldunun boş olmayan, bağlantılı, açık bir $\mathscr{V}$ alt kümesi üzerinde hiçbir yerde kaybolmayan, reküran bir vektör alanı olsun. Bu takdirde, Yardımcı Teorem 3.1 (ii)'den faydalanılarak, v reküran vektör alanının, $Z-$tensörünün $\lambda + \psi \equiv \alpha$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğu görülür. Bu takdirde, (3.46) bağıntısı v^j ile daraltılırsa

$$\gamma_j v^j Z_{kh} = \alpha \gamma_h v_k \tag{3.78}$$

elde edilir. Daha sonra, (3.78) denklemi v^k ile daraltılırsa

$$\gamma_j v^j Z_{kh} v^k = \alpha \gamma_h v_k v^k \tag{3.79}$$

bulunur. Bu durumda, v vektör alanı, $Z-$tensörünün α özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğundan, (3.79) denkleminden

$$\alpha \gamma_j v^j v_h = \alpha \gamma_h v_k v^k \tag{3.80}$$

elde edilir.

Şimdi de, v reküran vektör alanı için, (3.78) ve (3.80) denklemleri göz önüne alınıp, $\alpha = 0$ ve $\alpha \neq 0$ olması durumları incelenecektir.

Durum 1: Öncelikle, bir $\mathscr{V}$ açık kümesi üzerinde $\alpha = 0$ kabul edilsin. Bu durumda, (3.7)

bağıntısından, $Z_{jh}v^h = 0$ olarak elde edilir ve bu eşitliğin kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla_k Z_{jh}v^h + Z_{jh}\nabla_k v^h = 0 \tag{3.81}$$

denklemi elde edilir. Bölüm 1.2'den, reküran bir v vektör alanının, q bir $1-$form olmak üzere, (1.13) koşulunu, $\nabla_k v^h = q_k v^h$ biçiminde sağladığı bilinmektedir. Bu takdirde, v reküran vektör alanı olduğundan, (3.81) denklemi, $Z_{jh}v^h = 0$ bağıntısı yardımıyla

$$\nabla_k Z_{jh}v^h = 0$$

şeklinde düzenlenir. Bununla birlikte, (3.78) denkleminde, $\alpha = 0$ olduğu dikkate alınırsa, $\gamma_j v^j = 0$ ya da $Z \equiv 0$ olmalıdır. İlk olarak, $Z \equiv 0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (3.1) denkleminde, ψ bir sabit olmak üzere, Ricci ve metrik tensörleri orantılı olur. Böylece, (M, g) bir Einstein manifoldu olur. Fakat, $Z \equiv 0$ için, (3.42) koşulu aşikar olarak sağlanacağından, $\gamma_j v^j = 0$ durumunu incelemek uygun olacaktır. Bu takdirde, (3.42) koşulu v^j ile daraltılırsa

$$\nabla_k Z_{jh}v^j = A_k Z_{jh}v^j + B_j Z_{kh}v^j + D_h Z_{kj}v^j \tag{3.82}$$

elde edilir. Daha sonra, $Z_{jh}v^h = 0$ kabulü göz önüne alınıp, (3.82) denklemi yeniden düzenlenirse

$$B_j v^j Z_{kh} = 0$$

eşitliğine ulaşılır. Burada, $Z \neq 0$ olduğundan, $B_j v^j = 0$ olmalıdır. Dahası, $\gamma_j v^j = 0$ varsayımından, $D_j v^j = 0$ olduğu da görülür. Sonuç olarak, v vektörü, B ve D formlarına karşılık gelen vektör alanlarına diktir.

Durum 2: Bir $\mathscr{V}$ açık kümesi üzerinde $\alpha \neq 0$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, reküran bir v vektör alanı, $Z-$tensörünün sıfırdan farklı bir özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olur. Teorem 3.2'de paralel durum için uygulanan benzer adımlar, v reküran vektör alanı için değerlendirilecektir. Öncelikle, v reküran vektör alanının null olmadığı kabul edilsin. Bu durumda, $v_j v^j = c \neq 0$ için, v vektör alanının, b bir $1-$form olmak üzere, (1.13) koşulunu, $\nabla_k v_j = b_k v_j$ biçiminde sağladığı bilinmektedir. Bununla birlikte, null-olmayan reküran

bir vektör alanının, (2.48) denkleminden paralel olacak şekilde yeniden düzenlenebilmesi mümkündür. O halde, reküran, null-olmayan bir vektör alanı için, paralel vektör alanı durumunda yapılan incelemeler geçerli olacaktır. Daha açık olarak, paralel φ vektör alanı için elde edilen (3.64) ve (3.66) bağıntıları, reküran v vektör alanı için sağlanır. Buradan, a skaler bir fonksiyon olmak üzere,

$$Z_{kh} = av_k v_h \tag{3.83}$$

denklemi elde edilir. Dolayısıyla, (3.83) denklemi, $Z = a\, v\otimes v$ formunda ifade edilebilir. Buna göre, $Z-$tensörünün Segre tipi $\{1(111)\}$ olarak bulunur. Ayrıca, (3.1) denkleminden

$$Ric = -\psi g + av \otimes v \tag{3.84}$$

eşitliği yazılır. (3.84) eşitliğinden, Ricci tensörünün Segre tipi $\{1(111)\}$ şeklindedir ve (M, g), bir yarı-Einstein uzay-zamanı olarak belirlenir. Daha sonra, (3.83) denkleminin kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla_j Z_{kh} = \partial_j a\, v_k v_h + a\nabla_j v_k\, v_h + av_k \nabla_j v_h$$

denklemi elde edilir ve burada, v vektör alanı reküran olduğundan

$$\nabla_j Z_{kh} = \partial_j(\log|a| + 2b)Z_{kh}$$

eşitliği bulunur. Dolayısıyla, $(WZS)_4$ manifoldu bir $Z-$reküran manifolda indirgenir ve manifoldun reküran $1-$formu bir gradiyenttir. Bu takdirde, $Z-$tensörü paralel olacak şekilde ölçeklendirilebilir.

Şimdi de, $\alpha \neq 0$ iken, v reküran vektör alanının null olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (3.80) denkleminde α skaleri sadeleştirilerek, v vektör alanının null olduğu göz önüne alınırsa

$$\gamma_j v^j = 0$$

denklemine ulaşılır. Buna göre, $\gamma_j = B_j - D_j$ olduğundan, $\gamma_j v^j = (B_j - D_j)v^j = 0$ eşitliği sağlanır. Bu bağıntı, (3.78) denkleminde uygulanırsa, $\alpha\gamma_h v_k = 0$ eşitliğine ulaşılır. Buradan, $\gamma = 0$ olarak elde edilir. Dolayısıyla, $B = D$ olduğu görülür. Öte yandan, v reküran vek-

tör alanı, $Z-$tensörünün α özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğundan, $Z_{jh}v^h = \alpha v_j$ bağıntısı mevcuttur. Bu bağıntının kovaryant türevi alınıp, v vektör alanının reküran olma koşulu kullanılırsa

$$\nabla_k Z_{jh} v^h = \partial_k \alpha \, v_j \tag{3.85}$$

denklemine ulaşılır. (3.42) ve (3.85) denklemleri yardımıyla

$$A_k Z_{jh} v^h + B_j Z_{kh} v^h + D_h Z_{kj} v^h = \partial_k \alpha \, v_j \tag{3.86}$$

elde edilir. Reküran v vektör alanına karşılık gelen özdeğer α olduğundan, (3.86) denklemi

$$\alpha A_k v_j + \alpha B_j v_k + D_h v^h Z_{kj} = \partial_k \alpha \, v_j \tag{3.87}$$

halinde yazılır. (3.87) denklemi v^j ile çarpılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\alpha (B_j v^j + D_j v^j) v_k = 0 \tag{3.88}$$

denklemine ulaşılır. (3.88) denkleminde $\alpha \neq 0$ olduğundan, $(B_j + D_j)v^j = 0$ bağıntısı gerçeklenir. Dahası, $B = D$ olduğundan, $B_j v^j = D_j v^j = 0$ bulunur. Bu ise, v vektör alanının, B $(= D)$ $1-$formuna karşılık gelen vektör alanına dik olması gerektiği anlamına gelir. Öte yandan, (3.87) denklemi v^k ile daraltıldığı takdirde

$$\alpha A_k v^k v_j + \alpha D_h v^h v_j = \partial_k \alpha \, v^k v_j \tag{3.89}$$

elde edilir. (3.89) denkleminde, $D_h v^h = 0$ olduğundan, bu denklem yeniden düzenlenirse

$$\alpha A_k v^k v_j = \partial_k \alpha \, v^k v_j$$

eşitliğine ulaşılır ve buradan

$$A_k v^k = \frac{\partial_k \alpha}{\alpha} v^k = \nabla_k \log|\alpha| \, v^k \tag{3.90}$$

elde edilir. (3.90) denkleminden

$$(A_k - \nabla_k \log|\alpha|)v^k = 0 \tag{3.91}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, v vektör alanının, $A - \nabla \log|\alpha|$ formuna karşılık gelen vektör alanına dik olduğu açıktır. Böylece, yapılan tüm bu incelemeler altında aşağıdaki teorem kanıtlanmıştır:

Teorem 3.3. (M, g), zayıf $Z-$simetrik bir uzay-zaman olsun. v; M manifoldunun boş olmayan, bağlantılı, açık bir $\mathscr{V}$ alt kümesi üzerinde hiçbir yerde kaybolmayan, reküran bir vektör alanı olsun. Bu durumda, aşağıdaki koşullar gerçeklenir:

(i) v vektör alanının, $Z-$tensörünün sıfır özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, v vektör alanı B ve D ilişkili formlarına karşılık gelen vektör alanlarına dik veya (M, g) bir Einstein manifoldu olmalıdır.

(ii) Eğer v null-olmayan bir vektör alanı ise, paralel olacak şekilde ölçeklendirilebilir ve Teorem 3.2 (ii)'de yer alan koşullar geçerli olur. Öte yandan, v vektör alanı null ve $Z-$tensörünün sıfırdan farklı bir α özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü ise, $(WZS)_4$ manifoldunun ilişkili $1-$formları olan B ve D birbirine eşittir. Dahası, v vektör alanı, $B\ (= D)$ ve $A - \nabla \log|\alpha|$ formlarına karşılık gelen vektör alanlarına diktir.

Buraya kadar, zayıf $Z-$simetrik manifoldlar üzerinde, paralel ve reküran vektör alanları için çeşitli incelemelerde bulunulmuştur. Şimdi, yukarıda yer verilen benzer adımlar, $(WZS)_4$ manifoldunun sabit uzunluklu bir $\varphi(Ric)$ ya da yakınsak bir vektör alanı içermesine göre uygulanacaktır. Bunun için φ; M manifoldunun boş olmayan, bağlantılı, açık bir $\mathscr{V}$ alt kümesi üzerinde kaybolmayan, sabit uzunluklu bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı olsun. Buna göre, Yardımcı Teorem 3.1 (iii)'den, φ vektör alanının, $Z-$tensörünün ψ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğu görülür. Dolayısıyla, (3.47) bağıntısı mevcut olur. Ayrıca, (3.49) ve (3.50) denklemleri yeniden sağlanır. Öncelikle, (3.47) bağıntısının kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla_k Z_{jh}\varphi^h + Z_{jh}\nabla_k\varphi^h = \partial_k\psi\varphi_j + \psi\nabla_k\varphi_j \tag{3.92}$$

elde edilir. Daha sonra, $\varphi(Ric)$ vektör alanı, (1.15) koşulunu sağladığından, (3.92) denklemi, ϱ bir sabit olmak üzere

$$\nabla_k Z_{jh}\varphi^h + Z_{jh}\varrho R^h_k = \partial_k\psi\varphi_j + \psi\varrho R_{jk} \tag{3.93}$$

şeklinde düzenlenir. Bununla birlikte, (3.93) denklemi ve (3.5) bağıntısı yardımıyla

$$\nabla_k Z_{jh}\varphi^h = \partial_k\psi\varphi_j - \varrho R_{jh}R^h_k \tag{3.94}$$

eşitliği elde edilir.

Öte yandan, φ bir null vektör alanı olsun. Buradan, (3.42) denklemi φ^h ile çarpılıp, (3.47) bağıntısı yardımıyla

$$\nabla_k Z_{jh}\varphi^h = A_k\psi\varphi_j + B_j\psi\varphi_k + D_h\varphi^h Z_{kj} \tag{3.95}$$

olarak yazılır. Dolayısıyla, (3.94) ve (3.95) denklemlerinden

$$\partial_k\psi\varphi_j - \varrho R_{jh}R^h_k = A_k\psi\varphi_j + B_j\psi\varphi_k + D_h\varphi^h Z_{kj} \tag{3.96}$$

elde edilir. Daha sonra, (3.96) denklemi φ^j ile daraltılıp, $R_{jh}\varphi^h = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$B_j\varphi^j\psi\varphi_k + D_h\varphi^h\psi\varphi_k = 0$$

bulunur ve burada, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(B_j + D_j)\varphi^j\psi\varphi_k = 0 \tag{3.97}$$

elde edilir. Bu durumda, $\psi \neq 0$ olduğundan, (3.97) denkleminden, $(B_j + D_j)\varphi^j = 0$ olur. Ayrıca, (3.51) denkleminden, $(B_j - D_j)\varphi^j = 0$ eşitliğinin mevcut olduğu daha önce gösterilmiştir. Bu takdirde, $B_j\varphi^j = 0$ ve $D_j\varphi^j = 0$ olur. Sonuç olarak, φ vektör alanı, B ve D ilişkili $1-$formlarına karşılık gelen vektör alanlarına diktir ve $B = D$ dir. Bir başka açıdan, (3.96) denklemi φ^k ile daraltılırsa

$$\partial_k\psi\varphi_j\varphi^k - \varrho R_{jh}R^h_k\varphi^k = A_k\psi\varphi_j\varphi^k + B_j\psi\varphi_k\varphi^k + D_h\varphi^h Z_{kj}\varphi^k \tag{3.98}$$

elde edilir. Daha sonra, (3.98) denkleminde, φ vektör alanı null ve D ilişkili $1-$formuna karşılık gelen vektör alanına dik olduğundan

$$\partial_k \psi \varphi^k \varphi_j = A_k \varphi^k \psi \varphi_j \tag{3.99}$$

denklemi bulunur. Buradan, $\psi \neq 0$ olduğundan, (3.99) denklemi ψ ile bölünüp, tüm bileşenler eşitliğin bir tarafında düzenlenirse

$$(A_k - \nabla_k \log|\psi|)\varphi^k = 0$$

denklemine ulaşılır. Dolayısıyla, φ vektör alanının, $A-\nabla \log|\psi|$ formuna karşılık gelen vektör alanına dik olduğu açıkça görülür.

Diğer bir yönden, φ null-olmayan, sabit uzunluklu bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı olsun. O halde, $c \neq 0$ sabiti için, $\varphi_i \varphi^i = c$ bağıntısı mevcuttur. Öncelikle, $\gamma_j \varphi^j \neq 0$ olsun. Bu takdirde, (3.50) denklemi

$$\gamma_j \varphi^j \varphi_h = c\gamma_h \tag{3.100}$$

olarak yazılır. Daha sonra, (3.100) denkleminden γ_h değeri

$$\gamma_h = \frac{\gamma_j \varphi^j}{c} \varphi_h \tag{3.101}$$

biçiminde belirlenir. Buradan, (3.101) bağıntısı, (3.49) denkleminde yerine yazılırsa

$$\gamma_j \varphi^j Z_{kh} = \psi \frac{\gamma_j \varphi^j}{c} \varphi_k \varphi_h \tag{3.102}$$

ifadesine ulaşılır. (3.102) denkleminde $\gamma_j \varphi^j$ skalerleri sadeleştirilir ve daha sonra yapılacak olan hesaplamaların kolaylığı açısından, indisler yeniden düzenlenirse

$$Z_{jh} = \frac{\psi}{c} \varphi_j \varphi_h \tag{3.103}$$

bağıntısı elde edilir. Bu takdirde, $Z-$tensörü, $Z = \frac{\psi}{c} \varphi \otimes \varphi$ formunda yazılır ve Segre tipi

{1(111)} şeklinde belirlenir. (3.103) denkleminin kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla_k Z_{jh} = \frac{\partial_k \psi}{c}\varphi_j\varphi_h + \frac{\psi}{c}\nabla_k\varphi_j\varphi_h + \frac{\psi}{c}\varphi_j\nabla_k\varphi_h \tag{3.104}$$

denklemine ulaşılır. Bununla birlikte, φ vektör alanı, bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı olduğundan, (1.15) koşulunu sağladığı bilinir. Dolayısıyla, (3.104) denklemi, (3.42) ve (3.103) bağıntılarıyla düzenlenip, $\psi \neq 0$ ve $c \neq 0$ için gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$A_k\varphi_j\varphi_h + B_j\varphi_k\varphi_h + D_h\varphi_k\varphi_j = \frac{\partial_k\psi}{\psi}\varphi_j\varphi_h + \varrho R_{jk}\varphi_h + \varrho\varphi_j R_{hk} \tag{3.105}$$

eşitliği bulunur. Daha sonra, $\dfrac{\partial_k\psi}{\psi} = \nabla_k \log|\psi|$ olmak üzere, (3.105) denklemi $\varphi^j\varphi^k$ ile daraltılırsa

$$A_k\varphi^k c\varphi_h + B_j\varphi^j c\varphi_h + D_h c^2 = \nabla_k \log|\psi|\varphi^k c\varphi_h + \varrho R_{jk}\varphi^k\varphi^j\varphi_h + \varrho c R_{hk}\varphi^k$$

bulunur ve buradan, c sabitleri sadeleştirilip, $R_{jk}\varphi^k = 0$ bağıntısı dikkate alınırsa

$$A_k\varphi^k\varphi_h + B_j\varphi^j\varphi_h + cD_h = \nabla_k \log|\psi|\varphi^k\varphi_h \tag{3.106}$$

denklemine ulaşılır. Benzer biçimde, (3.105) denklemi $\varphi^h\varphi^k$ ile daraltılıp, yeniden düzenlenirse

$$A_k\varphi^k c\varphi_j + B_j c^2 + D_h\varphi^h c\varphi_j = \nabla_k \log|\psi|\varphi^k c\varphi_j + \varrho R_{jk}\varphi^k c + \varrho R_{hk}\varphi^k\varphi^h\varphi_j$$

elde edilir ve buradan, c sabitleri sadeleştirilip, gereken düzenlemeler yapılırsa

$$A_k\varphi^k\varphi_j + cB_j + D_h\varphi^h\varphi_j = \nabla_k \log|\psi|\varphi^k\varphi_j \tag{3.107}$$

ifadesine ulaşılır. (3.106) ve (3.107) denklemleri, sırasıyla

$$\begin{aligned} \left(A_k\varphi^k + B_k\varphi^k\right)\varphi_h + cD_h &= \nabla_k \log|\psi|\varphi^k\varphi_h \\ \left(A_k\varphi^k + D_k\varphi^k\right)\varphi_j + cB_j &= \nabla_k \log|\psi|\varphi^k\varphi_j \end{aligned} \tag{3.108}$$

olarak yazılır. (3.108)'de bulunan eşitliklerden, sırasıyla

$$\begin{aligned} D_h &= \frac{1}{c}\left(\nabla_k \log|\psi| - A_k - B_k\right)\varphi^k\varphi_h \\ B_j &= \frac{1}{c}\left(\nabla_k \log|\psi| - A_k - D_k\right)\varphi^k\varphi_j \end{aligned} \tag{3.109}$$

bağıntıları bulunur. Burada, $\beta_1 = \frac{1}{c}\left(\nabla_k \log|\psi| - A_k - B_k\right)\varphi^k$ ve $\beta_2 = \frac{1}{c}\left(\nabla_k \log|\psi| - A_k - D_k\right)\varphi^k$ olarak isimlendirilsin. Bu takdirde, (3.109) bağıntılarından, $D_h = \beta_1\varphi_h$ ve $B_j = \beta_2\varphi_j$ olur. Böylece, B, D ve φ tensörlerinin lineer bağımlı olduğu görülür. Öte yandan, $B = D = 0$ ise, $\gamma_j\varphi^j \neq 0$ varsayımı ile çelişkiye sebep olur. Dolayısıyla, $\gamma_j\varphi^j = 0$ olmalıdır ve (3.50) denkleminden $\gamma = 0$ bulunur. Bu sebeple, $B = D$ olur. Bu durumda, (3.49) ve (3.50) denklemleri özdeş olarak sağlanır. Ancak, (3.108) eşitliklerinden, bu koşulda da B, D ve φ tensörleri lineer bağımlı olmalıdır. Buna göre, (3.105) denklemi ve (3.109) bağıntıları kullanılarak, $\varrho R_{hk} = 0$ sonucuna ulaşılır. Böylece, $\varphi(Ric)$ vektör alanı, paralel vektör alanına indirgenmektedir ve Teorem 3.2 (ii)'deki benzer adımlar uygulanabilir. Bu takdirde, (3.42) koşulundan, zayıf $Z-$simetrik manifoldun, bir $Z-$reküran uzay-zamana indirgendiği görülür. Dahası, $B = D = 0$ ise, (3.105) denklemi g^{jh} ile daraltılıp, $c \neq 0$ olduğu dikkate alınırsa

$$A_k = \nabla_k \log|\psi| \tag{3.110}$$

olduğu görülür. Bununla birlikte, (3.105) denkleminde, $B = D = 0$ varsayımı göz önüne alınarak, (3.110) bağıntısı yerine konulursa

$$\varrho R_{jk}\varphi_h + \varrho R_{hk}\varphi_j = 0 \tag{3.111}$$

denklemine ulaşılır. Diğer taraftan, φ null-olmayan vektör alanının, Ricci tensörünün sıfır özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğu dikkate alınıp, (3.111) denklemi φ^h ile daraltılırsa

$$\varrho c R_{jk} = 0 \tag{3.112}$$

elde edilir. (3.112) denkleminde $c \neq 0$ olduğundan, $\varrho Ric = 0$ bağıntısına ulaşılır. Dolayısıyla, (1.15) koşulundan, $\nabla\varphi = 0$ bulunur. Bu durumda, φ vektör alanı, paralel bir vektör alanına

indirgenir. Sonuç olarak, $(WZS)_4$ manifoldu üzerinde, φ null-olmayan, sabit uzunluklu bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı ise, söz konusu vektör alanı, paralel vektör alanına indirgenir. Bu durumda, $(WZS)_4$ manifoldu da, $Z-$reküran bir uzay-zamana indirgenmektedir.

Şimdi de, $(WZS)_4$ manifoldu üzerinde, yakınsak vektör alanları değerlendirilecektir. Bölüm 1.2'de, yakınsak vektör alanlarının, (1.14) koşulunu, ρ bir sabit olmak üzere sağladığı açıkça belirtilmiştir. φ; M manifoldunun boş olmayan, bağlantılı, açık bir $\mathscr{V}$ alt kümesi üzerinde kaybolmayan, yakınsak bir vektör alanı olsun. Öncelikle, φ yakınsak vektör alanı null olsun. Bu takdirde, Teorem 3.1 (iii) koşulu yardımıyla, φ yakınsak (null) vektör alanı, paralel vektör alanına indirgenir. Bu durumda, Teorem 3.2 (i) koşulu gerçeklenir.

Öte yandan, φ null-olmayan, yakınsak bir vektör alanı olsun. Bu durumda, $c \neq 0$ için, $\varphi_i\varphi^i = c$ bağıntısı mevcuttur. Daha önce elde edilen hesaplamalar, null-olmayan φ yakınsak vektör alanı için de göz önüne alınacaktır. İlk olarak, φ null-olmayan, yakınsak bir vektör alanı ise, (3.50) denklemi yardımıyla (3.101) bağıntısına ulaşılır. Daha sonra, (3.49) eşitliğinde (3.101) bağıntısı yerine yerleştirilip, $\gamma_j\varphi^j \neq 0$ olmak üzere gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (3.103) bağıntısı elde edilir. Bu takdirde, $Z-$tensörü, $Z = \dfrac{\psi}{c}\varphi\otimes\varphi$ formunda yazılır ve Segre tipi {1(111)} şeklinde belirlenir. Daha sonra, (3.103) denkleminin kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla_k Z_{jh} = \partial_k\left(\frac{\psi}{c}\right)\varphi_j\varphi_h + \frac{\psi}{c}\nabla_k\varphi_j\varphi_h + \frac{\psi}{c}\varphi_j\nabla_k\varphi_h \tag{3.113}$$

elde edilir. φ vektör alanının yakınsak olması halinde, (1.14) denklemi ρ bir sabit olmak üzere sağlanır. Bu durumda, (1.14) ve (3.113) denklemlerinden

$$\nabla_k Z_{jh} = \partial_k\left(\frac{\psi}{c}\right)\varphi_j\varphi_h + \frac{\psi}{c}\rho g_{jk}\varphi_h + \frac{\psi}{c}\varphi_j\rho g_{hk} \tag{3.114}$$

bulunur. Daha sonra, (3.42) ve (3.103) denklemleri göz önüne alınıp, (3.114) denklemi düzenlenirse

$$A_k\varphi_j\varphi_h + B_j\varphi_k\varphi_h + D_h\varphi_k\varphi_j = \nabla_k \log\left|\frac{\psi}{c}\right|\varphi_j\varphi_h + \rho g_{jk}\varphi_h + \rho g_{hk}\varphi_j \tag{3.115}$$

elde edilir. Daha önce, null-olmayan, sabit uzunluklu bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı için, (3.42) ve (3.104) denklemleri ile verilen benzer adımlar, yakınsak vektör alanı için de uygulanabilir.

Dolayısıyla, (3.109) bağıntılarından, $D_h = \lambda_1\varphi_h$ ve $B_j = \lambda_2\varphi_j$ olarak yazılır. Söz konusu bağıntılar, (3.115) denkleminde yerine yazılıp, elde edilen denklem φ^j ile daraltılırsa

$$A_k\varphi_j\varphi^j\varphi_h + \lambda_2\varphi_j\varphi^j\varphi_k\varphi_h + \lambda_1\varphi_h\varphi_k\varphi_j\varphi^j = \nabla_k \log\left|\frac{\psi}{c}\right|\varphi_j\varphi^j\varphi_h + \rho g_{jk}\varphi^j\varphi_h + \rho g_{hk}\varphi_j\varphi^j \quad (3.116)$$

bulunur. Bununla birlikte, (3.116) denklemi, null-olmayan φ yakınsak vektör alanı için düzenlenirse

$$A_k\varphi_h + \lambda_2\varphi_k\varphi_h + \lambda_1\varphi_h\varphi_k = \nabla_k \log\left|\frac{\psi}{c}\right|\varphi_h + \frac{\rho}{c}\varphi_k\varphi_h + \rho g_{hk} \quad (3.117)$$

denklemi elde edilir. Daha sonra, (3.117) denklemi, g^{hk} tensörü ile daraltılıp, $g_{hk}g^{hk} = 4$ olmak üzere gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$A_k\varphi^k + \lambda_2\varphi_k\varphi^k + \lambda_1\varphi_k\varphi^k = \nabla_k \log\left|\frac{\psi}{c}\right|\varphi^k + \frac{\rho}{c}\varphi_k\varphi^k + 4\rho \quad (3.118)$$

şeklinde yazılır. Son olarak, (3.118) denklemi, null-olmayan φ yakınsak vektör alanı için düzenlenirse

$$A_k\varphi^k + (\lambda_1 + \lambda_2)c = \nabla_k \log\left|\frac{\psi}{c}\right|\varphi^k + 5\rho \quad (3.119)$$

denklemine ulaşılır. Bu durumda, (3.117) denklemi φ^k ile daraltılıp, (3.119) denklemi kullanılırsa, $\rho = 0$ olması gerektiği görülür. O halde, (1.14) bağıntısından, φ null-olmayan, yakınsak vektör alanı, paralel vektör alanına indirgenmektedir. Bu durumda, Teorem 3.2 (ii) koşulunda ispatlanan sonuçlar gerçeklenir. Dolayısıyla, bu incelemeler yardımıyla aşağıdaki teorem verilir:

Teorem 3.4. (M, g), zayıf $Z-$simetrik bir uzay-zaman olsun. φ; M manifoldunun boş olmayan, bağlantılı, açık bir $\mathscr{V}$ alt kümesi üzerinde hiçbir yerde kaybolmayan, sabit uzunluklu bir $\varphi(Ric)$ ya da yakınsak bir vektör alanı olsun. Ayrıca, $Z-$tensörünün ψ skaler fonksiyonu, $\mathscr{V}$ kümesi üzerinde sıfırdan farklı olsun. Bu durumda, aşağıdaki koşullar gerçeklenir:

(i) Eğer φ bir null vektör alanı ise, Teorem 3.2 (i) koşulu geçerli olur. Ayrıca, φ vektör alanı yakınsak ise, paralel vektör alanı olacak şekilde indirgenmektedir.

(ii) Eğer φ null-olmayan bir vektör alanı ise, paralel vektör alanı olacak şekilde indirgenmektedir. Bu durumda, Teorem 3.2 (ii) koşulu gerçeklenir.

Uyarı 3.3. Buraya kadar elde edilenlere göre, zayıf $Z-$simetrik bir uzay-zaman, sırasıyla null-olmayan bir paralel, reküran, sabit uzunluklu $\varphi(Ric)$ ya da yakınsak vektör alanı içeriyorsa, Teorem 3.2–3.4'den, $(WZS)_4$ manifoldunun bir $Z-$reküran uzay-zamana indirgendiği açıkça görülür. Bununla birlikte, $(WZS)_4$ manifoldunun, aynı zamanda bir yarı-Einstein uzay-zaman olduğu da gösterilmiştir. Ayrıca, bir $Z-$reküran manifoldun, (3.10) koşulunu sağladığı bilinmektedir. Bu takdirde, (3.5) bağıntısı, söz konusu koşulda yerine yazılırsa

$$\nabla_k(R_{jh} + \psi g_{jh}) = A_k(R_{jh} + \psi g_{jh}) \tag{3.120}$$

ifadesi bulunur. Elde edilen (3.120) bağıntısı düzenlenirse

$$\nabla_k R_{jh} = A_k R_{jh} + (\psi A_k - \partial_k \psi) g_{jh} \tag{3.121}$$

denklemi bulunur. Bu durumda, (3.121) eşitliğini sağlayan bir (M, g) manifoldu, *genelleştirilmiş Ricci reküran manifold* olarak adlandırılmaktadır, [7].

3.4. Uzay-Zamanlar Üzerinde $Z-$Tensörü ve Ricci Solitonlar

Bu kısımda, uzay-zamanlar üzerinde $Z-$tensörünün, Ricci solitonlarla bağlantısı araştırılıp, birtakım sonuçlar elde edilmiştir. (M, g, w, Υ) ile gösterilecek olan bir *Ricci soliton* yapısı

$$\frac{1}{2}\mathscr{L}_w g + Ric = \Upsilon g \tag{3.122}$$

eşitliği tarafından karakterize edilir. (3.122) denklemindeki w vektör alanına, *potansiyel vektör alanı* adı verilir. $\mathscr{L}_w$ ise, w potansiyel vektör alanı boyunca Lie türevini ifade etmektedir ve Υ bir sabittir. Bir Ricci soliton, içerdiği Υ sabitinin sıfırdan büyük, sıfıra eşit ve sıfırdan küçük olmasına göre; $\Upsilon > 0$ ise, büzülen (shrinking), $\Upsilon = 0$ ise, durağan (steady) ve $\Upsilon < 0$ ise, genişleyen (expanding) şeklinde sınıflandırılmaktadır. Ricci solitonlar, Hamilton'un Ricci akışları ile yakından ilişkili olduğundan yaygın bir çalışma konusu olmuştur, [21]. Ayrıca, Ricci solitonlar, uzay-zamanların simetri kavramıyla da yakından ilişkilidir. Kabaca bir simetri; manifoldun bazı geometrik özelliklerini koruyan yerel bir dönüşüm tarafından tanımlanır. Vektör alanları simetrilerin tanımında temel bir yere sahiptir. Simetri-

lerde iyi bilinen vektör alanlarından bazıları; afin, projektif, konformal, homotetik ve Killing vektör alanlarıdır. Örneğin; afin vektör alanları tarafından temsil edilen simetriler, ilişkili yerel difeomorfizmaları, jeodezikleri afin parametreleriyle birlikte koruyan simetrilerdir (bkz. [14]). Öncelikle, (M,g) bir uzay-zaman ve w, M manifoldu üzerinde bir afin vektör alanı olsun. Bu takdirde, w afin vektör alanı aşağıdaki denklemler ile karakterize edilebilir:

$$\nabla_j w_i = \frac{1}{2}h_{ij} + F_{ij}, \qquad \nabla_k h_{ij} = 0, \qquad \nabla_k F_{ij} = R_{ijkm}w^m. \tag{3.123}$$

(3.123) denklemlerinde, $F \in \Lambda_p(M)$ tensörü, bileşen formu F_{ij} $(= -F_{ji})$ olmak üzere, w afin vektör alanının *afin bivektörü* olarak adlandırılır. Ayrıca, h ikinci mertebeden, simetrik, paralel bir tensör alanıdır ve $h_{ij} = \mathscr{L}_w g_{ij}$ koşulu mevcuttur, [14].

Yukarıda verilen bağıntılardan yararlanarak, şimdi uzay-zamanlar üzerinde bir (M,g,w,Υ) Ricci soliton düşünülsün. Söz konusu Ricci solitonun w potansiyel alanı bir afin vektör alanı olsun. Bu durumda, (3.122) ve (3.123) denklemlerinden

$$\frac{1}{2}h_{ij} + R_{ij} = \Upsilon g_{ij} \tag{3.124}$$

olduğu görülür. Ardından, (3.124) denkleminin kovaryant türevi alındığı takdirde

$$\frac{1}{2}\nabla_k h_{ij} + \nabla_k R_{ij} = \partial_k \Upsilon g_{ij} + \Upsilon \nabla_k g_{ij} \tag{3.125}$$

eşitliğine ulaşılır. Bununla birlikte, Υ bir sabit, $\nabla_k g_{ij} = 0$ ve $\nabla_k h_{ij} = 0$ olduğundan, (3.125) denkleminden

$$\nabla_k R_{ij} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\nabla Ric = 0$ şeklinde ifade edilir (ayrıca bkz. [3], [35] ve [42]). Bu durumda, Ricci tensörü için olası tüm Segre tipleri ve bunlara karşılık gelen dolanım tipleri [16] numaralı kaynakta yer alan Teorem 4'te hesaplanmıştır. Diğer taraftan, (3.5) ile verilen genelleştirilmiş $Z-$tensörünün kovaryant türevi alınıp, $\nabla Ric = 0$ koşulu kullanılırsa

$$\nabla_k Z_{ij} = \partial_k \psi g_{ij} \tag{3.126}$$

bulunur. Özel olarak, (3.126) denkleminde ψ bir sabit ise, $Z-$tensörü paralel olur. Öte yandan, ψ bir sabit değilse, indislerin yer değiştirmesiyle

$$\nabla_k Z_{ij} + \nabla_i Z_{jk} + \nabla_j Z_{ki} = \partial_k \psi g_{ij} + \partial_i \psi g_{jk} + \partial_j \psi g_{ki} \tag{3.127}$$

denklemi elde edilir. En nihayetinde, (3.127) denklemi, $Z-$tensörünün *kuadratik konformal Killing tensörü* olduğunu gösterir, [39]. Tüm bu çıkarımlar birleştirilerek aşağıdaki sonuca varılır:

Teorem 3.5. (M, g, w, Υ) Ricci solitonu bir uzay-zaman üzerinde düşünülsün ve w potansiyel alanı, bir afin vektör alanı olsun. Bu takdirde, aşağıdaki koşullar sağlanır:

(i) Ricci tensörü bir paralel tensör alanıdır. Dahası, Ricci tensörünün muhtemel Segre tipleri (ve karşılık gelen dolanım tipleri) $\{1,(111)\}$ (R_{13}), $\{(1,11)1\}$ (R_{10}), $\{(1,1)(11)\}$ (R_2, R_4 veya R_7) ve $\{(211)\}$ (R_3 veya R_8, tüm özdeğerler sıfır) şeklindedir.

(ii) $Z-$tensörü bir kuadratik konformal Killing tensör olmalıdır. Özel olarak, ψ sabit ise, $Z-$tensörü bir paralel tensör alanıdır.

Teorem 3.5'i sağlayan bir Ricci soliton örneği aşağıda verilmektedir. Örneklerdeki bazı hesaplamalarda Maple programı kullanılmıştır.

Örnek 3.2. $M = \mathbb{R}^4$ manifoldu üzerinde u, v, x, y ile gösterilen bir global koordinat sistemi

$$ds^2 = v^2 du^2 + 2dudv + dx^2 + dy^2 \tag{3.128}$$

metriği ile verilsin. İlk olarak, (3.128) metriği için, sıfırdan farklı Christoffel sembolleri

$$\Gamma^u_{uu} = -v, \;\; \Gamma^v_{uu} = v^3, \;\; \Gamma^v_{uv} = v, \;\; \Gamma^v_{vu} = v$$

bulunur. Daha sonra, Riemann eğrilik tensörü

$$Riem = \partial_u dududv - \partial_u dudvdu - v^2 \partial_v dududv + v^2 \partial_v dudvdu - \partial_v dvdudv + \partial_v dvdvdu$$

olarak belirlenir. Buradan, Riemann eğrilik tensörü metrik tensör yardımı ile daraltılırsa, Ricci tensörü

$$Ric = v^2 dudu + dudv + dvdu$$

şeklinde elde edilir. Buradan, skaler eğriliğin $r = 2$ olduğu görülür. Bununla birlikte, (3.128) metriği için, Ricci tensörü $\{(1,1)(11)\}$ Segre tipine sahiptir. Burada, $\frac{\partial}{\partial x}$ ve $\frac{\partial}{\partial y}$ uzaysal, paralel vektör alanları, Ricci tensörünün sıfır (0) özdeğerine karşılık gelen özvektörleridir. Dahası, $\frac{\partial}{\partial u}$ ve $\frac{\partial}{\partial v}$ özvektörleri, Ricci tensörünün bir (1) özdeğerine karşılık gelir. Öte yandan, Weyl tensörünün cebirsel sınıflandırılması göz önüne alınırsa, Petrov tipi **D** olarak belirlenir (Petrov sınıflandırması için bkz. [14]). Ayrıca, $\nabla Riem = 0$ ve $\nabla Ric = 0$ koşulları gerçeklenmektedir. Başka bir deyişle, Riemann ve Ricci tensörlerinin paralel tensör alanları olduğu görülür.

Daha sonra, w vektör alanı $x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ olarak seçilsin. Buradan, $\frac{\partial}{\partial x}$ ve $\frac{\partial}{\partial y}$ (Killing ve paralel) vektör alanlarına karşılık gelen kovektörlerin bileşenleri, sırasıyla x_i ve y_i olarak ifade edilsin. Bu takdirde, $h_{ij} = 2(x_i x_j + y_i y_j)$ ve $\nabla h = 0$ olmak üzere, $\mathscr{L}_w g = h$ koşulu gerçeklenmektedir. Böylece, (3.123) bağıntıları sağlandığından, $w = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ vektör alanının, bir afin vektör alanı olduğu görülür. Her afin vektör alanı bir *eğrilik kollinasyonu* (*curvature collineation*) olduğundan [14], $\mathscr{L}_w Riem = 0$ şeklinde belirlenir. Benzer şekilde, w bir *Ricci kollinasyonu* (*Ricci collineation*) olduğundan, $\mathscr{L}_w Ric = 0$ bağıntısı gerçeklenir. Öte yandan, yukarıdaki hesaplamalardan yararlanılarak

$$\frac{1}{2}h_{ij} + R_{ij} = g_{ij} \tag{3.129}$$

denklemi elde edilir. Böylece, w potansiyel vektör alanı bir afin vektör alanı olmak üzere, (M, g) manifoldunun, bir Ricci soliton olduğu (3.129) denkleminden görülür. Bununla birlikte, $\Upsilon = 1 > 0$ olduğundan, (M, g, w, Υ) bir *büzülen (shrinking) Ricci solitondur*. Ayrıca, söz konusu manifold üzerindeki $\frac{\partial}{\partial v}$ vektör alanı, null ve rekürandır. İlgili vektör alanının rekürان $1-$formu vdu şeklinde hesaplanır. Bu takdirde, $\frac{\partial}{\partial x}$ ve $\frac{\partial}{\partial y}$ vektör alanlarının da uzaysal ve paralel olduğu dikkate alınarak, Tablo 2 yardımıyla, (M, g) manifoldunun dolanım tipinin R_2 olduğu görülür. Bir başka açıdan, $\nabla Ric = 0$ olduğundan, (3.5) eşitliği ile verilen $Z-$tensörü

(3.127) denklemini sağlar. Dolayısıyla, $Z-$tensörü, bir kuadratik konformal Killing tensörüdür. Özel olarak, ψ sabit ise, $Z-$tensörünün paralel bir tensör alanı olduğu görülür. Sonuç olarak, Teorem 3.5'in (3.128) metriği ile birlikte R_2 dolanım tipi için sağlandığı gösterilmiştir. Tüm bunlara ek olarak, $Z-$tensörü paralel ise, Teorem 3.1 (i), Sonuç 3.1 ve Yardımcı Teorem 3.1 (iii) koşullarının ayrıca sağlandığı görülür.

Şimdi de, söz konusu uzay-zamanlar üzerinde Ricci solitonlar ve simetrilere ilişkin bazı temel bilgiler verilecektir. (3.123) bağıntılarında $h \equiv 0$ ise, diğer bir deyişle, $\mathscr{L}_w g = 0$ koşulu sağlandığı takdirde, w potansiyel alanına bir *Killing vektör alanı* ve F bivektörüne de w vektör alanının *Killing bivektörü* denir. Ayrıca, bir Ricci solitonun potansiyel alanının bir Killing vektör alanı olması halinde (3.122) denkleminden

$$Ric = \Upsilon g \tag{3.130}$$

bulunur. Dolayısıyla, (3.130) denkleminde, Ricci tensörü ile metrik tensör orantılı olduğundan, (M, g) bir Einstein manifoldu olarak belirlenir. Bunlara ek olarak, Ricci tensörü $\{(1, 111)\}$ Segre tipine sahiptir. Öte yandan, potansiyel alanın homotetik vektör alanı ya da konformal Killing vektör alanı olması halinde de Einstein manifoldu elde edilebilir. Daha açık olarak, (3.123) bağıntıları $c \in \mathbb{R}$ sabit olmak üzere, $h = 2cg$ için sağlanırsa, w bir *homotetik vektör alanı* olarak adlandırılır. (3.122) denklemi bileşen formunda

$$\frac{1}{2}\mathscr{L}_w g_{ij} + R_{ij} = \Upsilon g_{ij} \tag{3.131}$$

şeklinde ifade edilir. Daha sonra, w homotetik vektör alanı için, $\mathscr{L}_w g_{ij} = h_{ij} = 2cg_{ij}$ koşulu (3.131) denkleminde yerine yazılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$R_{ij} = (\Upsilon - c) g_{ij} \tag{3.132}$$

elde edilir. Böylece, (3.132) denkleminden, (M, g) manifoldunun bir Einstein manifoldu olduğu, yani aşikar bir Ricci soliton temsil ettiği gösterilmiştir. Diğer taraftan, $\sigma : M \to \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, $\mathscr{L}_w g = 2\sigma g$ koşulu sağlanıyorsa, w vektör alanı,

bir *konformal vektör alanı* ve σ, *konformal fonksiyon* olarak adlandırılır. Bununla birlikte, (M, g, w, Υ) Ricci solitonun w potansiyel alanının, bir konformal vektör alanı olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (3.131) denklemi düzenlenerek

$$R_{ij} = (\Upsilon - \sigma)g_{ij} \tag{3.133}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (3.133) denkleminden, (M, g) manifoldunun yine bir Einstein manifoldu olduğu görülür. Ayrıca, $\Upsilon - \sigma$ ve Υ sabitler olduğundan, σ fonksiyonu da sabit olmalıdır. Bu durumda, w potansiyel vektör alanı, bir homotetik vektör alanına indirgenir. Dahası, [17] numaralı kaynakta bir öz Einstein (yani Ricci-düz olmayan bir Einstein) manifoldunun dolanım tipinin R_7, R_{14} ya da R_{15} olabileceği gösterilmiştir.

Ardından, w potansiyel alanı, sabit uzunluklu bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı olsun. Öncelikle, (3.122) denkleminde g metrik tensörünün w vektör alanı boyunca Lie türevi açılırsa

$$\frac{1}{2}(\nabla_j w_i + \nabla_i w_j) + R_{ij} = \Upsilon g_{ij} \tag{3.134}$$

bulunur. Ayrıca, w potansiyel alanı bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı olduğundan, (1.15) koşulu ve (3.134) denklemi göz önüne alınarak

$$(\varrho + 1)R_{ij} = \Upsilon g_{ij} \tag{3.135}$$

eşitliği bulunur. Buradan, (3.135) denklemi $\varrho \neq -1$ olmak üzere, $Ric = \left(\frac{\Upsilon}{\varrho+1}\right) g$ şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla, (M, g) bir Einstein manifoldu olur. Daha sonra, (3.135) denklemi w^j ile daraltılırsa

$$(\varrho + 1)R_{ij}w^j = \Upsilon g_{ij}w^j \tag{3.136}$$

ifadesine ulaşılır. (3.136) denkleminde, $R_{ij}w^j = 0$ olduğundan, $\Upsilon w_i = 0$ bağıntısı elde edilir. Böylece, $\Upsilon = 0$ olur ve söz konusu Ricci soliton durağan (steady) olarak sınıflandırılmaktadır. Bununla birlikte, $\Upsilon = 0$ olmak üzere, (3.135) denklemi yeniden düzenlenirse, $(\varrho + 1)R_{ij} = 0$ elde edilir. Bu durumda, $\varrho \neq -1$ ise, $Ric = 0$ olmalıdır. Buna göre, (M, g) bir Ricci-düz manifold olmalıdır. Ayrıca, genel görelilik teorisi açısından (M, g) manifoldu bir

vakum uzay-zamana (*vacuum space-time*) indirgenmektedir. Ek olarak, $\varrho = -1$ ve $\Upsilon = 0$ için (3.135) denkleminin aşikar olarak sağlandığı açıktır.

Benzer adımlar, w potansiyel vektör alanının konsörkılır olması halinde de uygulanabilir. Bu takdirde, w potansiyel vektör alanı için, (1.14) koşulundan $\nabla_j w_i = \rho g_{ij}$ bağıntısı mevcuttur. Burada, ρ düzgün bir fonksiyondur. Buna göre, (3.122) ve (3.134) denklemleri, w konsörkılır vektör alanı için göz önüne alınırsa

$$R_{ij} = (\Upsilon - \rho) g_{ij} \tag{3.137}$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla, (3.137) denkleminden, (M, g) bir Einstein manifoldu olur ve ρ fonksiyonu bir sabit olarak elde edilir. Böylece, w konsörkılır vektör alanı, yakınsak bir vektör alanına indirgenir. Öte yandan, Yardımcı Teorem 3.1 (iii) koşulunun ispatında yer aldığı üzere, yakınsak bir vektör alanının, Ricci tensörünün sıfır özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğu (1.16) Ricci özdeşliği yardımıyla gösterilmiştir. Buradan, w yakınsak vektör alanı için, $R_{ij} w^j = 0$ olduğu açıktır. Bununla birlikte, (3.137) denklemi w^j ile daraltılırsa

$$R_{ij} w^j = (\Upsilon - \rho) w_i \tag{3.138}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu durumda, (3.138) denkleminden, $\Upsilon - \rho = 0$ bulunur. Dolayısıyla, (3.137) eşitliğinden, (M, g) bir Ricci-düz manifold olmalıdır. Başka bir deyişle, (M, g) manifoldu, bir vakum uzay-zamana indirgenmektedir.

Yukarıdakilere ek olarak, w potansiyel vektör alanının, paralel olması durumunda da aynı yöntemler uygulanabilmektedir. Zira, w paralel bir vektör alanı ise, (3.122) denklemi $R_{ij} = \Upsilon g_{ij}$ şeklinde düzenlenir ve (M, g) bir Einstein manifoldu olarak elde edilir. İlgili denklem, w^j ile daraltılıp, w vektör alanının Ricci tensörünün sıfır özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğu göz önüne alınırsa, $R_{ij} w^j = \Upsilon w_i = 0$ bağıntısı bulunur. Dolayısıyla, $\Upsilon = 0$ olmalıdır ve böylece, $Ric = 0$ olduğu görülür. O halde, (M, g) manifoldu yine bir vakum uzay-zamana indirgenmektedir.

Vakum uzay-zaman için, $Ric = 0$ olduğundan, (3.1) bağıntısından, $Z-$tensörü $Z = \psi g$ biçiminde ifade edilir. Ayrıca, böyle bir uzay-zamanın muhtemel dolanım tiplerinin R_8, R_{14}

ya da R_{15} olduğu bilinmektedir, [14, 17]. Tüm bu bilgiler bir araya toplanarak aşağıdaki sonuca ulaşılır:

Sonuç 3.2. (M, g, w, Υ) Ricci solitonu, uzay-zamanlar üzerinde düşünülsün. Bu durumda, aşağıdaki koşullar sağlanır:

(i) Eğer w potansiyel vektör alanı Killing, homotetik ya da konformal Killing ise, (M, g) bir Einstein manifoldudur ve (öz Einstein durumu için) mümkün olan dolanım tipleri R_7, R_{14} ya da R_{15} şeklindedir.

(ii) Eğer w potansiyel vektör alanı paralel ya da $\varrho \neq -1$ olmak üzere sabit uzunluklu bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı ya da konsörkılır vektör alanı ise, (M, g) bir vakum uzay-zamana indirgenir. Buna göre, mümkün olan dolanım tipleri R_8, R_{14} ya da R_{15} şeklindedir.

(iii) Yukarıda verilen iki koşulda da $Z-$tensörü ile g metrik tensör orantılıdır. Dolayısıyla, $Z-$tensörünün Segre tipi $\{(1, 111)\}$ olmalıdır.

Örnek 3.3. $M = \mathbb{R}^4$ manifoldu üzerinde x, y, z, t ile gösterilen bir global koordinat sistemi

$$ds^2 = e^t(dx^2 + dy^2 + dz^2) - dt^2 \tag{3.139}$$

metriği ile verilsin. (3.139) metriği için, Ricci tensörü, $Ric = \left(\frac{3}{4}\right)g$ şeklinde hesaplanır ve böylece, Segre tipi $\{(1, 111)\}$ olarak bulunur. Bu takdirde, (M, g) bir Einstein uzay-zamandır. Dahası, $\mathscr{W} \equiv 0$ olduğundan, (M, g) manifoldu konformal olarak düzdür (yani, Petrov tipi **O** olur) ve skaler eğriliği sabittir ($r = 3$). Bunun yanı sıra, Riemann ve Ricci tensörleri paralel tensör alanlarıdır. Killing cebrinin boyutu $\dim K(M)$ ile gösterilmek üzere, $\dim K(M) = 10$ bulunur. Söz konusu $K(M)$ cebrinin herhangi bir elemanı için (3.122) eşitliği aşikar olarak sağlanmaktadır. Örneğin, $w := z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}$ bir Killing vektör alanı olmak üzere, $\mathscr{L}_w g = 0$ olur ve $\Upsilon = \frac{3}{4} > 0$ için, (3.122) eşitliği sağlanır. Dolayısıyla, w potansiyel vektör alanı bir Killing vektör alanı olmak üzere, (M, g, w, Υ) bir büzülen (shrinking) Ricci solitondur. İlaveten, $Z-$tensörü ile metrik tensör orantılı olmalıdır. Böylece, $Z-$tensörünün Segre tipi $\{(1, 111)\}$ şeklinde bulunur. Elde edilen hesaplamalar yardımıyla, Sonuç 3.2 (i) koşulunun (M, g, w, Υ) için sağlandığı görülür.

3.5. Uygulamalar

Örnek 3.4. $M = \mathbb{R}^4$ manifoldu üzerinde u, v, x, y ile gösterilen bir global koordinat sistemi

$$ds^2 = (u^2 + y^2)du^2 + 2dudv + dx^2 + dy^2 \tag{3.140}$$

metriği ile verilsin. En genelde, (3.140) metriğinde, du^2 ifadesinin katsayısı düzgün bir $H(u, x, y)$ fonksiyonu olarak ele alınırsa, oluşan bu yapı genel görelilik teorisinde *pp-dalga metriği* şeklinde bilinmektedir. Söz konusu pp-dalga uzay-zamanlar, Einstein alan denklemlerinin tam çözümlerinde önemli bir yere sahiptir. Bu sebeple, ilgili metrik üzerine yapılan çalışmalar farklı bağlantılar oluşturmuş ve yapılan araştırmalara çeşitli bakış açıları geliştirilmiştir (ör. bkz. [10, 14]). (3.140) metriği için sıfırdan farklı Christoffel sembolleri

$$\Gamma^v_{uu} = u, \;\; \Gamma^v_{uy} = y, \;\; \Gamma^v_{yu} = y, \;\; \Gamma^y_{uu} = -y$$

olarak hesaplanır. Bu veriler kullanılarak, Riemann eğrilik tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$R^v_{yuy} = -1, \;\; R^v_{yyu} = 1, \;\; R^y_{uuy} = 1, \;\; R^y_{uyu} = -1$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra, Riemann eğrilik tensörü, g metriği ile daraltılırsa, Ricci tensörü

$$Ric = -dudu$$

olarak belirlenir. Öte yandan, (3.140) metriği için, $l := \frac{\partial}{\partial v}$ null vektörü, paralel bir vektör alanıdır. Bu takdirde, Ricci tensörü, $Ric = -dudu = -l \otimes l$ olarak ifade edilir. Buna göre, l vektör alanının, Ricci tensörünün bir özvektörü olduğu açıktır. Dahası, Ricci tensörünün Segre tipi $\{(211)\}$ (tüm özdeğerler sıfır) şeklinde bulunur. Bununla birlikte, Weyl konformal eğrilik tensörünün cebirsel sınıflandırılmasına göre, (M, g) manifoldunun Petrov tipi **N** olarak bulunur. Burada, l vektör alanı, tekrarlanan asal null doğrultudur (the repeated principal null direction) (bkz. [14]). Ayrıca, $\nabla l = 0$ olduğundan, $\nabla Ric = 0$ şeklinde bulunur. Daha sonra, $Z-$tensörü $\psi \neq 0$ bir sabit olmak üzere, (3.5) formunda göz önüne alınsın. Bu durumda, $Z-$tensörünün

ψ özdeğerine karşılık gelen özvektörleri l, x ve y olur. Dolayısıyla, $Z-$tensörünün Segre tipi $\{(211)\}$ olarak belirlenir. Ayrıca, ψ bir sabit olarak kabul edildiğinden, $\nabla Z = 0$ olur. Bu durumda, (M, g) bir $Z-$paralel manifolddur ve Teorem 3.1 (i) koşulu sağlanır. Diğer taraftan, $\psi \neq 0$ düzgün bir fonksiyon ise, $\nabla_k Z_{ij} = \partial_k \psi \, g_{ij}$ eşitliği mevcuttur ve indislerin dairesel olarak yer değiştirmesi ile (3.127) denkleminin sağlandığı görülür. Bu ise, $Z-$tensörünün bir kuadratik konformal Killing tensörü olduğunu gösterir.

Şimdi de, (3.140) metriğinde, du^2 ifadesinin katsayısı $u(x^2 - y^2)$ $(u > 0)$ olarak değiştirilsin. Oluşturulan yeni metriğe göre sıfırdan farklı Christoffel sembolleri

$$\Gamma^v_{uu} = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}, \;\; \Gamma^v_{ux} = ux, \;\; \Gamma^v_{uy} = -uy, \;\; \Gamma^v_{xu} = ux,$$

$$\Gamma^v_{yu} = -uy, \;\; \Gamma^x_{uu} = -ux, \;\; \Gamma^y_{uu} = uy$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra, Riemann eğrilik tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$R^v_{xux} = -u, \;\; R^v_{xxu} = u, \;\; R^v_{yuy} = u, \;\; R^v_{yyu} = -u,$$

$$R^x_{uux} = u, \;\; R^x_{uxu} = -u, \;\; R^y_{uuy} = -u, \;\; R^y_{uyu} = u$$

olarak hesaplanır. Söz konusu bileşenlere sahip olan Riemann eğrilik tensörü g metriği ile daraltılırsa, Ricci tensörü, $Ric \equiv 0$ bulunur. Buradan, (M, g) bir Ricci-düz manifold, yani bir vakum uzay-zaman olarak elde edilir. Dolayısıyla, $\nabla Ric = 0$ olarak bulunur. Ayrıca, (M, g) manifoldunun dolanım tipi R_8 olarak belirlenir. Dahası, (3.5) denkleminden, $Z-$tensörünün g metriği ile orantılı olduğu görülür. O halde, $Z-$tensörünün Segre tipi $\{(1, 111)\}$ şeklindedir. Ayrıca, ψ fonksiyonu bir sabit olarak kabul edilirse, $\nabla Z = 0$ bulunur ve buradan, (M, g) bir $Z-$paralel manifold olmalıdır. Diğer taraftan, $\psi \neq 0$ düzgün bir fonksiyon ise, (3.5) denkleminin kovaryant türevi alındığı takdirde, $\nabla_k Z_{ij} = \partial_k \psi g_{ij}$ bağıntısı elde edilir. Buna göre, (3.127) denklemi sağlanır ve böylece, $Z-$tensörünün bir kuadratik konformal Killing tensörü olduğu görülür.

Örnek 3.5. $M = \mathbb{R}^4$ manifoldu üzerinde x, y, z, t ile gösterilen bir global koordinat sistemi $t > 0$ olmak üzere

$$ds^2 = t^2 dx^2 + dy^2 + dz^2 - t^2 dt^2 \tag{3.141}$$

metriği ile verilsin. Bu metriğe göre sıfırdan farklı Christoffel sembolleri

$$\Gamma^x_{xt} = \frac{1}{t}, \ \Gamma^x_{tx} = \frac{1}{t}, \ \Gamma^t_{xx} = \frac{1}{t}, \ \Gamma^t_{tt} = \frac{1}{t}$$

olarak belirlenir. Daha sonra, Riemann eğrilik tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$R^x_{txt} = \frac{1}{t^2}, \ R^x_{ttx} = -\frac{1}{t^2}, \ R^t_{xxt} = \frac{1}{t^2}, \ R^t_{xtx} = -\frac{1}{t^2}$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki bileşenlere sahip olan Riemann eğrilik tensörü g metriği ile daraltılırsa, (3.141) metriği için Ricci tensörü, $Ric = -\frac{1}{t^2}(dxdx - dtdt)$ formunda bulunur. Buna göre, Ricci tensörü $\{(1,1)(11)\}$ Segre tipine sahiptir. Ayrıca, Weyl konformal eğrilik tensörü, **D** Petrov tipine sahiptir. (M, g) manifoldu üzerinde, $\nabla Ric = Ric \otimes P$ koşulu sağlandığından, söz konusu manifold, reküran $1-$formu $P = -\frac{4}{t}dt$ olan bir Ricci reküran uzay-zamandır. Böylece, (3.5) eşitliğinin kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla_k Z_{jh} = P_k Z_{jh} + (\partial_k \psi - \psi P_k) g_{jh} \tag{3.142}$$

denklemine ulaşılır. (3.142) denklemine göre, (M, g) bir genelleştirilmiş $Z-$reküran manifold olarak elde edilir. Özel olarak, (3.5) denkleminde, $\psi = t^{-4}$ şeklinde seçilsin. Bu takdirde, $\partial_k \psi - \psi P_k = 0$ denklemi gerçeklenir. Buna göre, (3.142) denkleminden, $\nabla Z = Z \otimes P$ şeklinde elde edilir. O halde, (M, g) bir $Z-$reküran uzay-zaman olmalıdır. Dahası, P reküran $1-$formu bir gradiyent olmak üzere, bileşenleri $P_k = \nabla_k(-4\log|t|)$ şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla, $Z-$tensörü paralel olacak şekilde ölçeklendirilebilir. Benzer şekilde, $\nabla Ric = Ric \otimes P$ olduğundan, Ricci tensörü de paralel olacak şekilde ölçeklendirilebilir. Söz konusu durum, $\nabla(t^4 Z) = \nabla(t^4 Ric) = 0$ bağıntılarından açıkça görülür. Dahası, $\frac{\partial}{\partial y}$ ve $\frac{\partial}{\partial z}$ birim uzaysal vektör alanları birbirine dik ve paralel olmak üzere, $Z-$tensörünün ψ özdeğerine karşılık gelen özvektörleridir. Dolayısıyla, Yardımcı Teorem 3.1 (iii) ve Teorem 3.1 (i) koşulları sağlanır.

3.6. Schouten ve Cotton Tensörleri Üzerine Bazı İncelemeler

Bu kısımda, Schouten ve Cotton tensörleri üzerinde araştırmalar yapılacaktır. Söz konusu tensör alanları sahip oldukları geometrik özelliklerden dolayı birçok araştırmacının ilgisini çekmektedir. Bununla birlikte, bu tensör alanlarının simetriler gibi genel görelilik teorisinde yer bulan kavramlarla olan ilişkileri de araştırılmaktadır. Bu çalışmada, ilgili tensör alanlarının bazı özel vektör alanları ve dolanım teorisiyle olan bağlantıları incelenmiştir.

Tanım 3.1. (M,g), $n-$boyutlu $(n>2)$ bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Her $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ için

$$S(X,Y)=\frac{1}{n-2}\left(Ric(X,Y)-\frac{r}{2(n-1)}g(X,Y)\right) \tag{3.143}$$

biçiminde tanımlanan ikinci mertebeden, simetrik S tensörü, *Schouten tensörü* olarak adlandırılır (ör. bkz. [12]). Yerel koordinatlar göz önüne alındığı takdirde, (3.143) denklemi ile verilen Schouten tensörünün bileşenleri

$$S_{ij}=\frac{1}{n-2}\left(R_{ij}-\frac{r}{2(n-1)}g_{ij}\right) \tag{3.144}$$

biçiminde ifade edilir. Buradan, $S_{ij}=S_{ji}$ olduğu açıktır.

Tanım 3.2. (M,g), $n-$boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu olsun. M manifoldu üzerinde bileşenleri

$$C_{ijk}=\nabla_k R_{ij}-\nabla_j R_{ik}+\frac{1}{2(n-1)}\left(g_{ik}\nabla_j r-g_{ij}\nabla_k r\right) \tag{3.145}$$

şeklinde verilen $(0,3)$ tipinden tensör alanına *Cotton tensörü* adı verilir, [6]. Cotton tensörü, C sembolü ile gösterilecektir. (3.145) denkleminden, $C_{ijk}=-C_{ikj}$ bağıntısının sağlandığı açıktır. Bu nedenle, Cotton tensörü son iki indise göre ters-simetriktir. Ayrıca, $n<3$ için, $C\equiv 0$ olduğu bilinmektedir.

Uyarı 3.4. Cotton tensörünün bileşenleri C_{ijk} ve Schouten tensörünün bileşenleri S_{ij} ile ifade edilmek üzere, bu iki tensör arasındaki bağıntı

$$C_{ijk}=(n-2)\left(\nabla_k S_{ij}-\nabla_j S_{ik}\right) \tag{3.146}$$

şeklinde ifade edilir.

Uyarı 3.5. Tanım 1.20'den yararlanarak (0, 4) tipinden Weyl konformal eğrilik tensörünün bileşenleri

$$\mathscr{W}_{ijkh} = R_{ijkh} + \frac{1}{n-2}\left(g_{ih}R_{jk} - g_{ik}R_{jh} + g_{jk}R_{ih} - g_{jh}R_{ik}\right) + \frac{r}{(n-1)(n-2)}\left(g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk}\right) \tag{3.147}$$

biçiminde verilir. Bu takdirde, (3.144) ve (3.147) eşitlikleri yardımıyla (0, 4) tipinden Riemann eğrilik tensörünün bileşenlerinin

$$R_{ijkh} = \mathscr{W}_{ijkh} + g_{ik}S_{jh} - g_{jk}S_{ih} - g_{ih}S_{jk} + g_{jh}S_{ik} \tag{3.148}$$

şeklinde ifadesi mümkündür, [2].

Uyarı 3.5'te ifade edildiği üzere, Riemann eğrilik, Weyl konformal eğrilik ve Schouten tensörleri arasındaki bağıntı (3.148) eşitliğiyle ilişkilendirilmiştir. Diğer taraftan, Weyl konformal eğrilik ve Cotton tensörleri arasındaki bağlantı da aşağıdaki uyarıda sunulmaktadır:

Uyarı 3.6. (M, g), $n > 3$ boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Bu takdirde, Weyl konformal eğrilik ve Cotton tensörlerinin bileşenleri arasındaki bağıntı

$$\nabla_l \mathscr{W}^l_{ijk} = \frac{n-3}{n-2} C_{ijk}$$

eşitliği ile verilmektedir.

Önerme 3.1. $n-$boyutlu bir yarı-Riemann manifoldu (M, g) ile temsil edilsin. Bu takdirde, Schouten tensörünün paralel bir tensör alanı olması için gerek ve yeter koşul Ricci tensörünün paralel bir tensör alanı olmasıdır. Bununla birlikte, Cotton tensörü özdeş olarak sıfırdır. Özel olarak, (M, g) bir uzay-zaman ve Ricci tensörü paralel bir tensör alanı olduğu takdirde, karşılık gelen Segre tipleri ve dolanım tipleri Sonuç 3.1'de sunulmuştur.

İspat: İlk olarak, $\nabla S = 0$ kabul edilsin. (3.144) eşitliğinde her iki tarafın kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla_k S_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(\nabla_k R_{ij} - \frac{\nabla_k r}{2(n-1)} g_{ij}\right) \tag{3.149}$$

elde edilir. (3.149) denkleminde, $\nabla S = 0$ kabulü göz önüne alındığı takdirde

$$\nabla_k R_{ij} = \frac{\nabla_k r}{2(n-1)} g_{ij} \tag{3.150}$$

bağıntısı bulunur. (3.150) eşitliği, g^{ij} tensörü ile daraltılırsa

$$\nabla_k r = \frac{n}{2(n-1)} \nabla_k r$$

ifadesine ulaşılır ve buradan

$$\frac{n-2}{2(n-1)} \nabla_k r = 0 \tag{3.151}$$

denklemi elde edilir. O halde, $n > 2$ için, (3.151) denkleminden, $\nabla_k r = 0$ olur. Buradan, r skaler eğriliği sabit olmalıdır. Dolayısıyla, (3.150) eşitliğinden, $\nabla Ric = 0$ olarak belirlenir. Tersine, $\nabla Ric = 0$ ise, $\nabla r = 0$ olur. Bu durumda, (3.149) denkleminden, $\nabla S = 0$ şeklinde elde edilir. Öte yandan, $\nabla S = 0$ ise, (3.146) bağıntısına göre, $C \equiv 0$ olarak bulunur. Özel olarak, paralel Ricci tensörüne sahip bir (M, g) uzay-zamanı için, muhtemel Segre tipleri ve karşılık gelen muhtemel dolanım tipleri Sonuç 3.1'de sunulduğundan ispat tamamlanmış oldu. ■

Örnek 3.1'de incelenen R_3 dolanım tipindeki β fonksiyonunun bir sabit olması durumunda, Önerme 3.1'in koşullarının sağlandığı görülebilir. Zira, β sabitse, (3.37) denkleminden, $\nabla Ric = 0$ olduğu aşikardır. Dolayısıyla, (3.149) denklemine göre, $\nabla S = 0$ olduğu açıktır. Diğer bir yönden, β fonksiyonunun sabit olmadığı kabul edilerek, Schouten tensörü için Örnek 3.1 aşağıdaki şekilde incelenebilir:

Örnek 3.6. Örnek 3.1'deki R_3 dolanım tipi göz önüne alındığı takdirde, Ricci tensörü, (3.34) denkleminden, $R_{jh} = \beta l_j l_h$ şeklinde hesaplanmış ve söz konusu manifoldun Ricci reküran yapıda olduğu gösterilmiştir. Aynı zamanda, manifoldun r skaler eğriliğinin sıfıra eşit olduğu bulunmuştur. Bu veriler, $\dim M = 4$ olmak üzere, (3.144) denkleminde yerine yerleştirildiği

takdirde, Schouten tensörünün bileşenleri

$$S_{jh} = \frac{\beta}{2} l_j l_h \tag{3.152}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, Schouten tensörünün Segre tipi {(211)} (tüm özdeğerler sıfır) olarak belirlenir. Öte yandan, (3.152) eşitliğinin kovaryant türevi alınıp, l vektör alanının paralel olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\nabla_k S_{jh} = \frac{\partial_k \beta}{2} l_j l_h$$

denklemi elde edilir. Bu eşitlik, (3.152) bağıntısı yardımıyla, $l_j l_h = \frac{2}{\beta} S_{jh}$ biçiminde yeniden düzenlenirse

$$\nabla_k S_{jh} = \frac{\partial_k \beta}{\beta} S_{jh} = \nabla_k (\log|\beta|) S_{jh} \tag{3.153}$$

ifadesine ulaşılır. Bu durumda, (3.153) bağıntısından, Schouten tensörünün reküran olduğu görülür ve bu tensörün reküran $1-$formu bir gradiyenttir.

Benzer şekilde, diğer bir boyutlu dolanım tipleri olan R_2 ve R_4 için de, Örnek 3.6'daki adımlar uygulanabilmektedir. Söz konusu dolanım tipleri için, Schouten tensörü $\{(1,1)(11)\}$ Segre tipine sahiptir. Bu durumda, aşağıdaki sonuca ulaşılır:

Sonuç 3.3. (M, g) bir uzay-zaman olsun. Bu takdirde, tüm $1-$boyutlu dolanım tipleri için, Ricci ve Schouten tensörleri rekürandır ve bu tensör alanlarının reküran $1-$formları gradiyenttir. Dolayısıyla, ilgili tensör alanları, paralel olacak şekilde ölçeklendirilebilir.

Şimdi de, Schouten tensörünün bazı özel vektör alanlarıyla olan bağlantıları incelenecektir. Bunun için, Yardımcı Teorem 3.1'in Schouten tensörü için de uygulanabileceği gösterilecektir. Bu durum, aşağıdaki yardımcı teorem ile ifade edilebilir:

Yardımcı Teorem 3.2. M, $n-$boyutlu düzgün bir manifold ($n > 2$) ve g, M üzerinde keyfi işaretli bir metrik olsun. Eğer, v ve φ, M manifoldunun boş olmayan, bağlantılı, açık bir $\mathscr{V}$ alt kümesi üzerinde kaybolmayan düzgün vektör alanları ise aşağıdaki koşullar sağlanır:

(i) Ricci tensörünün bir özvektörü, Schouten tensörünün de bir özvektörüdür ve bu durumun tersi de doğrudur.

(ii) Eğer v vektör alanı $\mathscr{V}$ üzerinde reküran ise, Schouten tensörünün $\frac{1}{n-2}\left(\lambda - \frac{r}{2(n-1)}\right)$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörüdür. Burada, λ, Ricci tensörünün aynı v özvektörüne karşılık gelen özdeğeridir.

(iii) Eğer φ vektör alanı $\mathscr{V}$ kümesi üzerinde sabit uzunluklu bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı ya da yakınsak ya da paralel bir vektör alanı ise, Schouten tensörünün $-\frac{r}{2(n-1)(n-2)}$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörüdür.

İspat: w vektörü, M manifoldunun boş olmayan, bağlantılı, açık bir $\mathscr{V}$ alt kümesi üzerinde Ricci tensörünün α özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olsun. Bu durumda, (3.4) bağıntısının gerçeklendiği bilinmektedir. (3.144) denklemi w^j ile daraltılırsa

$$S_{ij}w^j = \frac{1}{n-2}\left(\alpha - \frac{r}{2(n-1)}\right)w_i \tag{3.154}$$

olarak bulunur. Bu takdirde, (3.154) bağıntısından, w vektörünün, Schouten tensörünün $\frac{1}{n-2}\left(\alpha - \frac{r}{2(n-1)}\right)$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğu görülür. Tersine, Schouten tensörünün bir özvektörünün, Ricci tensörünün de bir özvektörü olduğu açıktır. Böylece (i) koşulu ispatlanmıştır.

Daha sonra, $\mathscr{V}$ kümesi üzerinde kaybolmayan reküran vektör alanı (1.13) koşulunu sağlamak üzere, v ile temsil edilsin. Bu durumda, v reküran vektör alanı, Ricci tensörünün λ gibi bir özdeğerine karşılık gelen bir özvektörüdür, [16]. Buna göre, (3.144) denklemi v^j ile daraltılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$S_{ij}v^j = \frac{1}{n-2}\left(\lambda - \frac{r}{2(n-1)}\right)v_i \tag{3.155}$$

koşulu elde edilir. Dolayısıyla, v vektörü, Schouten tensörünün $\frac{1}{n-2}\left(\lambda - \frac{r}{2(n-1)}\right)$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörüdür ve böylece (ii) koşulu da ispatlanır.

Bir başka açıdan, öncelikle $n-$boyutlu bir (M,g) yarı-Riemann manifoldunun φ ile gösterilen paralel bir vektör alanı içerdiği varsayılsın. Bu durumda, $\nabla\varphi = 0$ olmalıdır. (1.16) eşitliği ile verilen Ricci özdeşliği göz önüne alındığı takdirde, $R_{ijkh}\varphi^h = 0$ denklemine ulaşılır. Böylece, $R_{jh}\varphi^h = 0$ elde edilir. Elde edilen bu veriler yardımıyla, (3.144) denklemi φ^j ile

daraltılır ve yeniden düzenlenirse

$$S_{ij}\varphi^{j} = -\frac{r}{2(n-1)(n-2)}\,\varphi_i \tag{3.156}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (3.156) bağıntısından, φ vektör alanının, S tensörünün $-\frac{r}{2(n-1)(n-2)}$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olduğu görülür. Benzer işlemler, φ vektör alanının, sabit uzunluklu bir $\varphi(Ric)$ vektör alanı ya da yakınsak vektör alanı olarak seçilmesi durumunda da uygulanabilir. Böylece, ispat tamamlanır. ■

Sırada, Schouten tensörünün dairesel paralel ve Codazzi tipinden olmasına göre birtakım incelemeler yapılacaktır. (M,g) yarı-Riemann manifoldunun Ricci tensörü Ric ile ifade edilmek üzere, her $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\nabla_Z Ric(X,Y) + \nabla_X Ric(Y,Z) + \nabla_Y Ric(Z,X) = 0 \tag{3.157}$$

eşitliği sağlandığı takdirde, Ricci tensörü *dairesel paralel bir tensör alanı* olarak adlandırılır. Dairesel paralel Ricci tensörüne sahip bir manifold için, $\nabla r = 0$ olduğu bilinmektedir. Bu ise, (M,g) manifoldunun r skaler eğriliğinin sabit olduğu anlamına gelir. Benzer tanımlama Schouten tensörü için de yapılabilir. Zira, (M,g) yarı-Riemann manifoldu üzerinde *dairesel paralel Schouten tensörü*, her $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$\nabla_Z S(X,Y) + \nabla_X S(Y,Z) + \nabla_Y S(Z,X) = 0 \tag{3.158}$$

eşitliğini sağlamaktadır. Bu tanımlara göre, öncelikle Ricci tensörü dairesel paralel kabul edilsin. Bu takdirde, (3.157) koşulu sağlanır ve $\nabla r = 0$ olmalıdır. Öte yandan, Schouten tensörünün dairesel permütasyonu (3.144) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}\nabla_k S_{ij} + \nabla_j S_{ik} + \nabla_i S_{kj} = {} & \frac{1}{n-2}\left(\nabla_k R_{ij} - \frac{\nabla_k r}{2(n-1)} g_{ij}\right) + \frac{1}{n-2}\left(\nabla_j R_{ik} - \frac{\nabla_j r}{2(n-1)} g_{ik}\right) \\ & + \frac{1}{n-2}\left(\nabla_i R_{kj} - \frac{\nabla_i r}{2(n-1)} g_{kj}\right)\end{aligned} \tag{3.159}$$

şeklinde bulunur. Buna göre, (3.157) ve (3.159) denklemleri göz önüne alınarak

$$\nabla_k S_{ij} + \nabla_j S_{ik} + \nabla_i S_{kj} = 0$$

sonucuna ulaşılır. Böylece, (3.158) koşulunun sağlandığı görülür. O halde, Schouten tensörü, dairesel paralel bir tensör alanıdır. Dolayısıyla, aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.4. M, $n-$boyutlu ($n > 2$) bir yarı-Riemann manifoldu olmak üzere, Ricci tensörü dairesel paralel kabul edilsin. Bu durumda, Schouten tensörü de dairesel paralel bir tensör alanıdır.

Aksine, Schouten tensörü dairesel paralel kabul edilsin. Bu takdirde, (3.158) ve (3.159) denklemlerinden

$$\frac{1}{n-2}\left(\nabla_k R_{ij} + \nabla_j R_{ik} + \nabla_i R_{kj}\right) - \frac{1}{2(n-1)(n-2)}\left(\nabla_k r\, g_{ij} + \nabla_j r\, g_{ik} + \nabla_i r\, g_{kj}\right) = 0 \qquad (3.160)$$

eşitliği elde edilir. Bu denklem, g^{ij} tensörü ile daraltılır ve yeniden düzenlenirse

$$\frac{3(n-2)}{2(n-1)}\nabla_k r = 0$$

bağıntısına ulaşılır. Bu durumda, $n \geq 3$ için, $\nabla_k r = 0$ olduğu anlaşılır. Dolayısıyla, manifoldun r skaler eğriliği bir sabittir. Buna göre, (3.160) denkleminden, (3.157) koşulunun sağlandığı görülür. Bu sayede, aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.5. M, $n-$boyutlu ($n > 2$) bir yarı-Riemann manifoldu olmak üzere, Schouten tensörü dairesel paralel kabul edilsin. Bu durumda, Ricci tensörü de dairesel paralel bir tensör alanıdır.

En nihayetinde; M, $n-$boyutlu ($n > 2$) bir yarı-Riemann manifoldu olmak üzere, Schouten tensörünün dairesel paralel bir tensör alanı olması için gerek ve yeter koşulun, Ricci tensörünün de dairesel paralel bir tensör alanı olması gerektiği Sonuç 3.4 ve Sonuç 3.5'ten görülmektedir.

Şimdi de, (M,g) yarı-Riemann manifoldunun $(n>2)$ Ricci tensörü Ric ile ifade edilmek üzere, *Codazzi tipinden* olduğu kabul edilsin. Bu takdirde, her $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ için

$$(\nabla_X Ric)(Y,Z)=(\nabla_Y Ric)(X,Z) \tag{3.161}$$

eşitliği sağlanmaktadır. Codazzi tipinden Ricci tensörüne sahip bir manifold için, $\nabla r=0$ olduğu bilinmektedir. Bu ise, (M,g) manifoldunun r skaler eğriliğinin sabit olduğu anlamına gelir. Benzer tanımlama Schouten tensörü için de yapılabilir. Zira, (M,g) yarı-Riemann manifoldu üzerinde *Codazzi tipinden Schouten tensörü*, her $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ için

$$(\nabla_X S)(Y,Z)=(\nabla_Y S)(X,Z) \tag{3.162}$$

eşitliğini sağlamaktadır. Bu tanımlara göre, Ricci tensörünün Codazzi tipinden olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (3.161) bağıntısından, bileşen formunda $\nabla_k R_{ij}=\nabla_j R_{ik}$ eşitliği sağlanmaktadır ve manifoldun r skaler eğriliği sabittir. Bu şartlar altında, Schouten tensörünün (3.144) formu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\nabla_k S_{ij}-\nabla_j S_{ik}&=\frac{1}{n-2}\left(\nabla_k R_{ij}-\frac{\nabla_k r}{2(n-1)}g_{ij}\right)-\frac{1}{n-2}\left(\nabla_j R_{ik}-\frac{\nabla_j r}{2(n-1)}g_{ik}\right)\\&=\frac{1}{n-2}\left(\nabla_k R_{ij}-\nabla_j R_{ik}\right)+\frac{1}{2(n-1)(n-2)}\left(\nabla_j r g_{ik}-\nabla_k r g_{ij}\right)\end{aligned} \tag{3.163}$$

sonucuna varılır. Ricci tensörü Codazzi tipinden ve $\nabla r=0$ olduğundan, (3.163) denkleminden, Schouten tensörünün $\nabla_k S_{ij}=\nabla_j S_{ik}$ eşitliğini sağladığı görülür. Dolayısıyla, (3.162) bağıntısından, Schouten tensörü de Codazzi tipinden bir tensör olur. Dahası, (3.146) eşitliğine göre, $C\equiv 0$ olmalıdır. Böylece, aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.6. (M,g) yarı-Riemann manifoldunun $(n>2)$ Ricci tensörü Codazzi tipinden ise Schouten tensörü de Codazzi tipinden bir tensör alanı olmalıdır. Bu koşullar altında, Cotton tensörü özdeş olarak sıfırdır.

Örnek 3.7. $M=\mathbb{R}^4$ manifoldu üzerinde x,y,z,t ile gösterilen bir global koordinat sistemi

$$ds^2=dx^2+dy^2+t^3dz^2-\frac{1}{t}dt^2 \tag{3.164}$$

metriği ile verilsin ($t > 0$). Öncelikle, (3.164) metriğine göre sıfırdan farklı Christoffel sembolleri

$$\Gamma^z_{zt} = \frac{3}{2t},\ \Gamma^z_{tz} = \frac{3}{2t},\ \Gamma^t_{zz} = \frac{3t^3}{2},\ \Gamma^t_{tt} = -\frac{1}{2t} \tag{3.165}$$

olarak belirlenir. Daha sonra, Riemann eğrilik tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$R^z_{tzt} = -\frac{3}{2t^2},\ R^z_{ttz} = \frac{3}{2t^2},\ R^t_{zzt} = -\frac{3t^2}{2},\ R^t_{ztz} = \frac{3t^2}{2}$$

şeklinde hesaplanır. Buradan, Ricci tensörü,

$$Ric = \frac{3t^2}{2} dzdz - \frac{3}{2t^2} dtdt$$

elde edilir. Dahası, skaler eğrilik $r = \frac{3}{t}$ olarak bulunur. Ayrıca, Ricci tensörünün Segre tipi $\{(1,1)(11)\}$ şeklinde bulunur. Öte yandan, A bir $1-$form olmak üzere, $A = -\left(\frac{1}{t}\right)dt$ şeklinde belirlensin. Bununla birlikte, Ricci tensörünün kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla Ric = -\frac{3t}{2} dzdzdt + \frac{3}{2t^3} dtdtdt = Ric \otimes A$$

bağıntısının gerçeklendiği görülür. Bu takdirde, $\nabla Ric = Ric \otimes A$ olduğundan, Ricci tensörü reküran bir tensör alanıdır. Daha sonra, (3.143) denkleminden Schouten tensörü

$$S = -\frac{1}{4t} dxdx - \frac{1}{4t} dydy + \frac{t^2}{2} dzdz - \frac{1}{2t^2} dtdt$$

olarak belirlenir. Ayrıca, Schouten tensörü, (2.1) ile verilen pseudo-ortonormal baz elemanlarıyla daraltılırsa

$$\begin{aligned} S_{ij}x^j &= -\frac{1}{4t} x_i, \\ S_{ij}y^j &= -\frac{1}{4t} y_i, \\ S_{ij}z^j &= \frac{1}{2t} z_i, \\ S_{ij}t^j &= \frac{1}{2t} t_i \end{aligned} \tag{3.166}$$

bulunur. Dolayısıyla, (3.166) bağıntılarından, Schouten tensörünün Segre tipi $\{(1,1)(11)\}$ olarak belirlenir. Daha sonra, Schouten tensörünün kovaryant türevi alınırsa

$$\nabla S = \frac{1}{4t^2} dxdxdt + \frac{1}{4t^2} dydydt - \frac{t}{2} dzdzdt + \frac{1}{2t^3} dtdtdt$$

bulunur. Diğer taraftan, $A = -\left(\frac{1}{t}\right)dt$ için, S tensörü ve A formunun tensör çarpımı yapıldığı takdirde, $\nabla S = S \otimes A$ olduğu görülür. Dolayısıyla, Schouten tensörü de reküran bir tensör alanı olur. Ayrıca, (3.164) metriği için, Weyl konformal eğrilik tensörünün asal null doğrultuları, $l = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{t^3}}\partial z - \sqrt{t}\partial t\right)$ ve $n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{t^3}}\partial z + \sqrt{t}\partial t\right)$ şeklindedir. Buradan, $\alpha = -\frac{1}{2t}$ olmak üzere, $\mathscr{W}_{ijkh} l^j l^h = \alpha l_i l_k$ ve $\mathscr{W}_{ijkh} n^j n^h = \alpha n_i n_k$ olduğu hesaplanabilir. Böylece, Weyl konformal eğrilik tensörünün Petrov tipi **D** olarak belirlenir (bkz. [14], Teorem 7.6 (ii)).

Örnek 3.8. $M = \mathbb{R}^4$ manifoldu üzerinde u, v, x, y ile gösterilen bir global koordinat sistemi

$$ds^2 = (x^2 + y^2)du^2 + 2dudv + dx^2 + dy^2 \tag{3.167}$$

metriği ile verilsin. (3.167) metriği için sıfırdan farklı Christoffel sembolleri

$$\Gamma^v_{ux} = x, \;\; \Gamma^v_{uy} = y, \;\; \Gamma^v_{xu} = x, \;\; \Gamma^v_{yu} = y, \;\; \Gamma^x_{uu} = -x, \;\; \Gamma^y_{uu} = -y$$

olarak bulunur. Öte yandan, $(1,3)$ tipinden Riemann eğrilik tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$\begin{aligned} &R^v_{xux} = -1, \;\; R^v_{xxu} = 1, \quad R^v_{yuy} = -1, \;\; R^v_{yyu} = 1, \\ &R^x_{uux} = 1, \quad R^x_{uxu} = -1, \;\; R^y_{uuy} = 1, \quad R^y_{uyu} = -1 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Daha sonra, Riemann eğrilik tensörü g metriği ile daraltılırsa, (3.167) metriği için Ricci tensörü, $Ric = -2dudu$ formunda bulunur. Bu takdirde, Ricci tensörünün Segre tipi $\{(211)\}$ (tüm özdeğerler sıfır) olarak belirlenir. Ayrıca, skaler eğriliğin $r = 0$ olduğu görülür. Dahası, (3.143) denkleminden Schouten tensörü, $S = -dudu$ olarak bulunur. Buradan, Schouten tensörünün Segre tipi de $\{(211)\}$ (tüm özdeğerler sıfır) olarak belirlenir. Bununla birlikte, (3.167) metriği için, $l := \frac{\partial}{\partial v}$ null vektörü, paralel bir vektör alanıdır. Bu

durumda, Schouten tensörü, $S = -l \otimes l$ olarak ifade edilir. Buna göre, $\nabla S = 0$ olmalıdır. Benzer şekilde, Ricci tensörü de paraleldir. Böylece, (3.146) denkleminden Cotton tensörünün bileşenleri, $C_{ijk} = 0$ olarak belirlenir. O halde, $C \equiv 0$ biçiminde elde edilir. Sonuç olarak, Önerme 3.1'in koşulları gerçeklenmektedir. Ayrıca, manifoldun Weyl konformal eğrilik tensörü, $\mathscr{W} \equiv 0$ şeklinde hesaplanır ve böylece, Petrov tipi **O** olarak belirlenir. Dolayısıyla, (M, g) uzay-zamanı konformal olarak düzdür.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, 4−boyutlu manifoldlar üzerinde diferansiyel geometride temel bir yere sahip olan farklı tensör alanları ele alınarak incelemeler yapılmıştır. 4−boyutlu $(+,+,+,-)$ Lorentz metrik işaretine sahip uzay-zamanların dolanım teorisi göz önüne alınarak bu kapsamda bazı özel tensör alanları detaylı araştırılmıştır. Mevcut araştırmada bilhassa ikinci mertebeden, simetrik özel tensör alanları olan $Z-$tensörü, Ricci tensörü ve Schouten tensörü üzerine yoğunlaşılmıştır. Söz konusu tensör alanlarının pek çok özelliği, uzay-zamanlar üzerinde elde edilmiştir. Uzayın reküran ve zayıf simetrik olması durumları göz önüne alınıp $Z-$reküran ve zayıf $Z-$simetrik manifoldlar irdelenmiştir. Ayrıca bahsi geçen manifoldlar üzerinde reküran, paralel, $\varphi(Ric)$ ve yakınsak vektör alanlarının $Z-$tensörünün cebirsel formuyla yakın ilişkisi araştırılıp çeşitli teoremler kanıtlanmıştır. Ele alınan manifoldlarla alakalı çeşitli örnekler bulunmuştur (bkz. Örnek 3.1–Örnek 3.6). Verilen bu örneklerde $Z-$tensörünün cebirsel formunu temsil eden Segre tipi gösteriminin belirlenmesinin yanı sıra Ricci ve Weyl tensörlerinin sınıflandırmasıyla ilgili bağlantılar da kurulmuştur. Bu kapsamda, Ricci tensörünün cebirsel formu tespit edilmiş ve Weyl tensörünün Petrov tipi irdelenmiştir. Bunlara ek olarak, ilgili örneklerde paralel ve reküran vektör alanları bulunarak elde edilen teoremleri destekleyici çeşitli çıkarımlar yapılmıştır. Öte yandan, söz konusu özel tensör alanlarının simetri kavramıyla olan ilişkisi de incelenmiştir. Daha açık olarak, afin simetrilerle alakalı araştırmalar yapılarak Ricci solitonlar üzerinde uygulamalara yer verilmiştir. Ricci solitonun potansiyel vektör alanının afin vektör alanı seçilmesi durumunda Ricci tensörün paralel olması gerektiği saptanmış ve uzay-zamanların muhtemel dolanım tipleri elde edilmiştir. Bununla birlikte, $Z-$tensörünün de kuadratik konformal Killing tensör yapısında olduğu gösterilmiştir. Bu koşulları sağlayan büzülen (shrinking) Ricci soliton uzay-zaman örneği de verilmiştir (bkz. Örnek 3.2).

Diğer taraftan, tez çalışmasında Schouten ve Cotton tensör alanları üzerinde benzer incelemeler yapılmıştır. $Z-$tensörü araştırılırken göz önüne alınan bazı vektör alanlarının özellikleri Schouten tensör alanı için de çalışılmıştır. Schouten tensörünün paralel, reküran, dairesel paralel ve Codazzi tipinden olması durumunda çeşitli bulgular elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların Cotton tensör alanıyla bağlantıları analiz edilmiş ve özel dolanım tiplerinde ör-

neklendirmeler yapılmıştır.

Yukarıda belirtildiği üzere, bu tezde fiziksel yorumlamalar yapabilmek amacıyla her ne kadar uzay-zamanlar üzerine yoğunlaşılmış olsa da, elde edilen sonuçlardan bazıları (ör. Yardımcı Teorem 3.1 ve Teorem 3.1) genel $n-$boyutlu manifoldlarda ve metrik işaret farkı gözetmeksizin verilebilmektedir. Tez çalışmasının, gerek uzay-zamanların dolanım teorisi gerekse bivektörler, Ricci, Weyl, $Z-$tensörü, Schouten ve Cotton gibi özel tensör alanlarının cebirsel sınıflandırmasıyla yakından ilişkili olması gerçeğinin ileride yapılacak olan araştırmalara sağlam bir temel oluşturduğuna inanılmaktadır. Zira, bu çalışmada göz önüne alınan pek çok yapının farklı metrik işarete sahip özel manifoldlar üzerinde de incelenebileceği düşünülmektedir. Bu bağlamda, nötr metrik işarete sahip, yani $(+,+,-,-)$ metrik işaretli $4-$boyutlu manifoldlar üzerinde söz konusu özel tensör alanları araştırılabilir. Bununla birlikte, $4-$boyutlu nötr metrik işaretli manifoldların teğet uzayları birbirine dik lineer bağımsız null vektörler ile birbirine dik zamansal $2-$uzaylar barındırabileceğinden tensör sınıflandırmaları daha karmaşık hal alacaktır. Buna karşın, bahsi geçen manifoldlar üzerinde çalışmanın ilginç sonuçlar doğurabileceği öngörülmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Ali, M., Haseeb, A., Mofarreh, F., Vasiulla, M. (2022) $Z-$symmetric manifolds admitting Schouten tensor. Mathematics, 10(22), 4293.

[2] Besse, A.L. (1987) Einstein Manifolds, Springer-Verlag, Berlin.

[3] Blaga, A.M., Chen, B.Y. (2022) On conformal collineation and almost Ricci solitons. arXiv:2210.05284.

[4] Boothby, W.M. (2003) An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, 2^{nd} Edition., Academic Press, Inc., USA.

[5] Cartan, E. (1926) Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann. Bulletin de la Société Mathématique de France, 54, 214–264.

[6] Cotton, É. (1899) Sur les variétés à trois dimensions. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. II, 1(4), 385–438.

[7] De, U.C., Guha, N., Kamilya, D. (1995) On generalized Ricci-recurrent manifolds. Tensor (N.S.), 56(3), 312–317.

[8] De, U.C., Mantica, C.A., Suh, Y.J. (2015) On weakly cyclic Z symmetric manifolds. Acta Mathematica Hungarica, 146(1), 153–167.

[9] De, U.C., Mantica, C.A., Molinari, L.G., Suh, Y.J. (2016) On weakly cyclic Z symmetric spacetimes. Acta Mathematica Hungarica, 149(2), 462–477.

[10] Ehlers, J., Kundt, W. (1962) "Exact solutions of the gravitational field equations.", In The Theory of Gravitation. John Wiley & Sons, Inc., New York, 49–101.

[11] Ghanam, R., Thompson G. (2001) The holonomy Lie algebras of neutral metrics in dimension four. Journal of Mathematical Physics, 42(5), 2266–2284.

[12] Guan, P., Viaclovsky, J., Wang, G. (2003) Some properties of the Schouten tensor and applications to conformal geometry. Transactions of the American Mathematical Society, 355(3), 925–933.

[13] Hall, G.S. (1988) Connections and symmetries in spacetime. General Relativity and Gravitation, 20(4), 399–406.

[14] Hall, G.S. (2004) Symmetries and Curvature Structure in General Relativity, World Scientific.

[15] Hall, G. (2023) Four-Dimensional Manifolds and Projective Structure, CRC Press.

[16] Hall, G., Kırık, B. (2015) Recurrence structures in 4−dimensional manifolds with metric of signature $(+,+,-,-)$. Journal of Geometry and Physics, 98, 262–274.

[17] Hall, G.S., Lonie, D.P. (2000) Holonomy groups and spacetimes. Classical Quantum Gravity, 17(6), 1369–1382.

[18] Hall, G.S., Lonie, D.P. (2009) Holonomy and projective equivalence in 4-dimensional Lorentz manifolds. SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 5, 066.

[19] Hall, G.S., Lonie, D.P. (2011) Projective structure and holonomy in general relativity. Classical Quantum Gravity, 28 083101.

[20] Hall, G., Wang, Z. (2012) Projective structure in 4-dimensional manifolds with positive definite metrics. Journal of Geometry and Physics, 62(2), 449–463.

[21] Hamilton, R.S. (1982) Three-manifolds with positive Ricci curvature. Journal of Differential Geometry, 17(2), 255–306.

[22] Hinterleitner, I., Kiosak, V.A. (2008) φ(Ric)-vector fields in Riemannian spaces. Archivum Mathematicum, 44(5), 385–390.

[23] Kırık, B. (2016) Bazı Özel Manifoldlar Üzerinde Vektör Alanları. Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.

[24] Kırık, B., Özen Zengin, F. (2015) Conformal mappings of quasi-Einstein manifolds admitting special vector fields. Filomat, 29(3), 525–534.

[25] Kobayashi, S., Nomizu, K. (1996) Foundations of Differential Geometry, Vol.1, Wiley-Interscience, New York.

[26] Lalnunsiami, K., Singh, J.P. (2020) On some classes of weakly $Z-$symmetric manifolds. Communications of the Korean Mathematical Society, 35(3), 935–951.

[27] Lee, J.M. (2012) Introduction to Smooth Manifolds, 2nd Edition, Springer, New York.

[28] Mantica, C.A., Molinari, L.G. (2012) Weakly $Z-$symmetric manifolds. Acta Mathematica Hungarica, 135, 80–96.

[29] Mantica, C.A., Suh, Y.J. (2012) Pseudo Z symmetric Riemannian manifolds with harmonic curvature tensors. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 9(1), 1250004.

[30] Mantica, C.A., Suh, Y.J. (2012) Recurrent Z forms on Riemannian and Kaehler manifolds. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 9(7), 1250059.

[31] Mantica, C.A., Suh, Y.J. (2014) Pseudo-Z symmetric space-times. Journal of Mathematical Physics, 55(4), 042502.

[32] Munkres, J.R. (2000) Topology, Second Edition. Prentice Hall.

[33] Özen Zengin, F., Yavuz Taşcı, A. (2021) Spacetimes admitting the $Z-$symmetric tensor. Quaestiones Mathematicae, 44(11), 1613–1623.

[34] Schell, J.F. (1961) Classification of four-dimensional Riemannian spaces. Journal of Mathematical Physics, 2(2), 202–206.

[35] Sharma, R., Deshmukh, S. (2022) Ricci almost solitons with associated projective vector field. Advances in Geometry, 22(1), 1–8.

[36] Tamássy, L., Binh, T.Q. (1992) On weakly symmetric and weakly projective symmetric Riemannian manifolds. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 56, 663–670.

[37] Tamássy, L., Binh, T.Q. (1993) On weak symmetries of Einstein and Sasakian manifolds. Tensor (N.S.), 53, 140–148.

[38] Tu, L.W. (2011) An Introduction to Manifolds, 2^{nd} Edition, Springer, New York.

[39] Walker, M., Penrose, R. (1970) On quadratic first integrals of the geodesic equations for type {22} spacetimes. Communications in Mathematical Physics, 18, 265–274.

[40] Wang, Z., Hall, G. (2013) Projective structure in $4-$dimensional manifolds with metric of signature $(+,+,-,-)$. Journal of Geometry and Physics, 66, 37–49.

[41] Yano, K. (1944) On the torse-forming directions in Riemannian spaces. Proceedings of the Imperial Academy, 20(6), 340–345.

[42] Yoldaş, H.İ. (2022) Remarks on some soliton types with certain vector fields. Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences, 3(2), 146–159.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	**:** Burcu CINDIK
İlk Öğrenimi	**:** Soğuksu İlköğretim Okulu (2004-2012)
Orta Öğrenimi	**:** Beykoz Fevzi Çakmak Lisesi (2012-2016)
Yüksek Öğrenimi	
Lisans	**:** Yıldız Teknik Üniversitesi (2016-2021)
Yüksek Lisans	**:** Marmara Üniversitesi (2022-2024)

- **Destek (Bursiyer)**

  TÜBİTAK-BİDEB 2210-A Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı

  TÜBİTAK-ARDEB 3501 Kariyer Geliştirme Programı

- **Proje**

  122F478 numaralı 4-Boyutlu Uzaylarda Bazı Özel Vektör Alanları ve Ricci Solitonlara Uygulamaları, TÜBİTAK Kariyer Geliştirme Programı 3501, ARDEB.

- **Konferans**

  Cındık, B. and **Kırık Rácz, B.**, 2023: Some Special Second-Order Symmetric Tensor Fields on 4-dimensional Lorentzian Spaces, ICOM 2023 (*7th International Conference on Mathematics "An Istanbul Meeting for World Mathematicians"*), July 11-13, 2023, page 65, Fatih Sultan Mehmet Vakif University, Istanbul, Türkiye, ISBN: 978-605-67964-8-7.

- **Çalıştay Organizasyonu (Düzenleme Komitesi Üyesi)**

  Marmara Geometry Days 2024, May 6-7, 2024, Marmara University, Faculty of Science, İstanbul, Türkiye.