# MARMARA ÜNİVERSİTESİ

## FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ


# ZAYIF B-SİMETRİK MANİFOLDLAR


DİLEK KURT


**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

**DANIŞMAN**

Doç.Dr. HÜLYA YILMAZ


İSTANBUL, 2020

# MARMARA ÜNİVERSİTESİ

INSTITUTE FOR GRADUATE STUDIES
IN PURE AND APPLIED SCIENCES


# WEAKLY B-SYMMETRIC MANIFOLDS


DİLEK KURT


**MASTER THESIS**

Department of Mathematics

**Thesis Supervisor**

Assoc. Prof. Dr. HÜLYA YILMAZ

ISTANBUL, 2020

**TEŞEKKÜR**

Yüksek lisans öğrenimim ve tez sürecimde bilgisini ve tecrübelerini her daim aktaran ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen kıymetli hocam Doç. Dr. Hülya YILMAZ'a en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Tüm akademik hayatım boyunca her zaman yanımda olan ve beni teşvik eden sevgili annem Nurgül YARDIM'a, babam Feridun YARDIM'a ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen enerjisi ve sabrıyla bana destek veren eşim Tayyib KURT'a sonsuz şükranlarımı sunarım.

**Haziran, 2020** Dilek KURT

**İÇİNDEKİLER** **SAYFA**

**TEŞEKKÜR ……..……...……i**

**İÇİNDEKİLER TABLOSU...……...…….……ii**

**ÖZET ……..iv**

**ABSTRACT …….……..…..v**

**SEMBOL LİSTESİ ……..……...vi**

**1. GİRİŞ ……..…….....**1

1.1 Temel Tanımlar…….……...…….....3

1.1.1 Riemann manifoldu…..…….….3

1.1.2 Doğrultu türevi …..……...…….….3

1.1.3 Afin konneksiyon ve kovaryant türev……...……..3

1.1.4 Lie parantez operatörü……4

1.1.5 Lie türevi ….....……..…...4

1.1.6 Riemann (Levi-Civita) konneksiyonu ……..…….….5

1.1.7 Riemann eğrilik tensörü ....…….....….5

1.1.8 Yarı-Riemann manifoldu ……...6

1.1.9 Ricci tensörü ...……..…….…...6

1.1.10 Skaler eğrilik ……..…….....6

1.1.11 $Z$-Tensörü ...……...6

1.1.12 $B$-Tensörü ...……...7

1.1.13 Zayıf Ricci simetrik manifold ...……..…...7

1.1.14 Killing vektör alanı ...……...……..……7

1.1.15 Einstein manifoldu ...…..……..…...7

1.1.16 Yarı-Einstein manifoldu ...…….…….…….8

1.1.17 Diverjans ...…..…….…...8

1.1.18 Concircular vektör alanı ……..…...8

1.1.19 Weyl konformal eğrilik tensörü……..9

**2. METERYAL VE YÖNTEM** …….……...…..….....11

2.1 Zayıf $B$-Simetrik Manifold ……...…….……..…...11

2.2 Zayıf Devirli $B$-Simetrik Manifold……...…….……...…….....22

**3. BULGULAR VE TARTIŞMA**……..27

3.1 Zayıf $B$-Simetrik Uzay-zaman ……...……...…..….....27

3.2 Uzay-zamanda Einstein Alan Denklemleri.....35

**4. SONUÇLAR** …….……..……47

**TEZDEN YAPILAN SUNUM** ……..49

**KAYNAKLAR** …….…..…….……...51

**ÖZGEÇMİŞ** …….……..……....53

## ÖZET

Simetrik uzaylar diferansiyel geometride önemli bir role sahiptir. Matematikçiler sabit eğrilikli uzaylarda çalışarak tüm lokal simetrik yarı-Riemann manifoldları sınıflandırmak için çalışmalar yapmış ve 20. yüzyılda da problemi çözmeyi başarmışlardır.Uzayların bu sınıfı matematiğin kompakt Lie grupları, Grassmann ve sınırlı simetrik bölgeler gibi çeşitli dalları için büyük önem oluşturan bir çok ilginç örnekleri içerir.

Bu tezde ise gene zayıflatılmış bir uzay olan zayıf $B$-simetrik ve zayıf devirli $B$-simetrik manifold tanımları verilerek bu uzaylar ile ilgili çalışmalar yapılmıştır.

Üç ayrı bölümden oluşan bu tezde ilk bölümde tez içerisinde kullanacağımız temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir.

İkinci bölümde ise zayıf $B$-simetrik manifoldlar ve zayıf devirli $B$-simetrik manifoldlar tanımlanarak her iki manifoldun da yarı-Einstein olduğu gösterilmiştir. Ayrıca tanımlanan uzayların varlıkları uygun metrikler kullanılarak örneklendirilmiştir. Bazı özel koşullar altında zayıf $B$-simetrik manifoldun Dezscz anlamında yalancı-Ricci simetrik olduğu ispatlanmıştır ve tanımlanan uzayların geometrik özelliklerini inceleyen teoremler ifade edilmiştir. Ayrıca verilen teoremleri destekleyen örnekler verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde ise zayıf $B$-simetrik manifoldların genel rölativite teorisine bir uygulaması olan zayıf $B$-simetrik uzay-zaman incelenmiştir. Einstein alan denklemleri kullanılarak zayıf $B$-simetrik uzay-zamanda bazı özel koşullar altında çıkan sonuçlar incelenerek genel rölativitede özellikleri araştırılmış ve bazı önemli sonuçlara ulaşılmıştır.

**ABSTRACT**

Symmetric spaces play an important role in differential geometry. Mathematicians studied spaces with constant curvature to classify the entire locally symmetric semi-Riemann manifolds and succeeded to solve the problem in the 20th century. This class of spaces includes many significant examples of mathematics, which are of great importance for a variety of materials such as compact Lie groups, Grassmann, and limited symmetric regions. During the past few decades, the notion of locally symmetric manifolds has been weakened by mathematicians in several ways.

In this thesis, we deal with the $B$-tensor on a Riemann manifold. We introduce both weakly $B$-symmetric and weakly cyclic $B$-symmetric manifolds and investigate the properties of these manifolds.

This work consists of three chapters. In the first chapter, we give the necessary notions and definitions used in the next chapters.

In the second chapter, we define the notions of weakly $B$-symmetric and weakly cyclic $B$-symmetric manifolds and obtain that both of them are quasi-Einstein manifolds. Moreover, we prove the existence of these manifolds by constructing non-trivial examples. We show that the weakly $B$-symmetric manifold is pseudo-Ricci symmetric in the sense of Dezscz, under certain conditions. We express some theorems about the geometrical properties of these manifolds.

In the third chapter, we demonstrate the applications of the weakly $B$-symmetric space-time in the theory of general relativity.

## SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{M}$ : Diferansiyellenebilir manifold

$\boldsymbol{g}$ : Riemann metriği

$(\boldsymbol{M^n}, \boldsymbol{g})$ : Riemann manifoldu

$\boldsymbol{T_pM}$ : $M$ manifoldunun $p$ noktasındaki teğet uzayı

$\boldsymbol{C^\infty(M, \mathbb{R})}$ : $M$'den $R$'ye diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi

$\boldsymbol{\chi(M)}$ : $M$ manifoldunun diferansiyellenebilir vektör alanlar kümesi

$\boldsymbol{Z}$ : $Z$-tensörü

$\boldsymbol{B}$ : $B$-tensörü

$\boldsymbol{R}$ : Riemann eğrilik tensörü

$\boldsymbol{C}$ : Weyl konformal eğrilik tensörü

$\boldsymbol{G}$ : Einstein tensörü

$\boldsymbol{T}$ : Enerji-momentum tensörü

$\boldsymbol{S}$ : Ricci tensörü

$\boldsymbol{r}$ : Skaler eğrilik

$\boldsymbol{B_{ij,k}}$ : Lokal koordinatlarda B-tensörünün kovaryant türevi

$\boldsymbol{\nabla}$ : Riemann konneksiyonu

$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ : Lie türevi

$\boldsymbol{\kappa}$ : Einstein sabiti

$\boldsymbol{\lambda}$ : Kozmolojik sabit

$\boldsymbol{P}$ : Sıvının anizotropik basınç tensörü

$\boldsymbol{\omega}$ : Isı akış vektörü

$\boldsymbol{\sigma}$ : Enerji yoğunluğu

# 1. GİRİŞ

Simetrik uzayın diferansiyel geometrideki önemi nedeni ile bu uzayları sınıflandırmak için ilk olarak Cartan tarafından Riemann simetrik uzay tanımlanmıştır (Cartan, 1926).

$(M^n, g)$ $n$-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer $R$ Riemann eğrilik tensörü için $\nabla R = 0$ sağlanıyorsa bu manifolda lokal simetriktir denir (Cartan, 1926). Riemann uzaylarda lokal simetri ile genel simetri arasında hiç bir fark bulunmaması uzayın incelenmesi için çok büyük bir kolaylık sağlamaktadır.

Simetrik uzaylar son 50 yılda bir çok matematikçi tarafından farklı ölçütlerde zayıflatılarak çalışılmıştır. Bu çalışmalara bir kaç örnek verecek olursak; devirli manifoldlar (Walker, 1950), konformal simetrik manifoldlar (Chaki ve Gupta, 1953), yarı-simetrik manifoldlar (Szabó, 1982) gibi bir çok yazar zayıflatılmış manifoldlar üstünde çalışmalar yapmıştır. Şimdi çalışmamıza temel oluşturacak Chaki (Chaki, 1987) ile Tamássy ve Binh'in (Tamássy ve Binh, 1989) makalelerini inceleyelim.

1987'de Chaki tarafından yalancı simetrik manifold $\forall X, Y, Z, U, V \in \chi(M)$ için $R$, $(0,4)$-tipindeki Riemann eğrilik tensörü (Chaki, 1987)

$$(\nabla_X R)(Y,Z,U,V) = 2A(X)R(Y,Z,U,V) + A(Y)R(X,Z,U,V) + A(Z)R(Y,X,U,V)$$
$$+A(U)R(Y,Z,X,V) + A(V)R(Y,Z,U,X)$$

şartını sağlıyorsa $R \neq 0$ olmak üzere yarı-Riemann manifolduna yalancı simetrik Riemann manifoldu denir. Burada $A$ sıfırdan farklı 1-form, $\rho$, $\forall X \in \chi(M)$ için $g(X,\rho) = A(X)$ ile tanımlı vektör alanı, $g$ Riemann metriği, $\nabla$, $g$ metriğine göre kovaryant türev operatörü ve $R(Y,Z,U,V) = g(R(Y,Z)U,V)$, $R(Y,Z)U$, $(1,3)$-tipinde Riemann eğrilik tensörüdür.

1989 yılında, Tamássy ve Binh tarafından yalancı simetrik manifold tanımı genelleştirilerek, zayıf simetrik manifoldu tanımlamışlardır (Tamássy ve Binh, 1989). $(n > 2)$ ve $\forall X, Y, Z, U, V \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X R)(Y,Z,U,V) = A(X)R(Y,Z,U,V) + K(Y)R(X,Z,U,V) + C(Z)R(Y,X,U,V)$$
$$+D(U)R(Y,Z,X,V) + E(V)R(Y,Z,U,X)$$

eşitliği ile tanımlanmıştır. Burada $A, K, C, D$ ve $E$ aynı anda sıfır olmayan 1-formlardır. Böyle bir manifoldu $(WS)_n$ olarak göstermişlerdir.

1999'da, De ve Bandyopadhyay yukarıda verilen 1-formlar arasında

$K(X) = C(X)$ ve $D(X) = E(X)$

bağıntılarının olması gerektiğini ispatlamışlardır (De ve Bandyopadyay, 1999).

1993 yılında Tamássy ve Binh zayıf Ricci simetrik manifoldları

$(\nabla_X S)(Y, Z) = A(X)S(Y, Z) + K(Y)S(X, Z) + C(Z)S(Y, X)$

olarak tanıtmışlardır ve böyle bir manifoldu $(WRS)_n$ olarak göstermişlerdir (Tamássy ve Binh, 1993).

2017 yılında Suh, Mantica, De ve Pal, 2012 yılında Mantica ve Molinari (Mantica ve Molinari, 2012) tarafından $\xi$ keyfi skaler fonksiyon olmak üzere

$Z(X, Y) = S(X, Y) + \xi g(X, Y)$

şeklinde tanımlanan $Z$-tensörünün bir genelleştirmesi olarak, $(0,2)$-tipindeki $B$-tensörü

$B(X, Y) = aS(X, Y) + brg(X, Y)$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $a$ ve $b$ sıfırdan farklı keyfi skaler fonksiyonlar, $r$ skaler eğriliktir (Suh ve ark., 2017).

Üç ayrı bölümden oluşan tezde ilk bölümde Riemann manifoldu tanımlanarak tez içerisinde kullanacağımız temel tanımlar ve kavramlar verilmiştir. İkinci bölümde ise zayıf $B$-simetrik manifoldlar $(WBS)_n$ ve zayıf devirli $B$-simetrik manifoldlar $(WCBS)_n$ tanımlanarak her iki manifoldun da yarı-Einstein olduğu gösterilmiştir. Ayrıca tanımlanan uzayların varlıkları uygun metrikler verilerek desteklenmiştir. Tanımlanan uzayların geometrik özellikleri ile ilgili teoremlerin ispatları yapılmıştır. Tezin üçüncü bölümünde ise zayıf $B$-simetrik uzayların $(WBS)_n$ genel rölativiteye uygulaması olan $(WBS)_4$ zayıf $B$ -simetrik uzay-zaman incelenmiştir ve bazı önemli sonuçlara ulaşılmıştır.

## 1.1. Temel Tanımlar

### Tanım 1.1.1. Riemann manifoldu

$M$ diferansiyellenebilir bir manifold, $\chi(M)$ diferansiyellenebilir vektör alanlarının uzayı ve $\mathbb{C}^{\infty}(M,\mathbb{R})$ $M$ den $\mathbb{R}$ ye diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi olmak üzere $M$ üzerinde,

$g : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \mathbb{C}^{\infty}(M,\mathbb{R})$

şeklinde tanımlanan pozitif tanımlı, simetrik ve bilineer $g$ metriği ile verilen $(M^n, g)$ manifolduna bir Riemann manifoldu denir (Willmore, 1959).

### Tanım 1.1.2. Doğrultu türevi

$\mathbb{C}^{\infty}(M,\mathbb{R})$ $M$ den $\mathbb{R}$ ye diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi olmak üzere $U \subset M$ olsun. $\forall\, p \in U$ için herhangi bir $X \in T_pM$ için,

$df_p(X) = X_p(f) = (df(X))(p)$

olarak tanımlanan $df|_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $f$ 'nin $p \in U \subset M$ noktasındaki doğrultu türevi (diferansiyeli) denir (Willmore, 1959).

### Tanım 1.1.3. Afin konneksiyon ve kovaryant türev

$M$ diferansiyellenebilir bir manifold, $\chi(M)$ diferansiyellenebilir vektör alanlarının uzayı ve $\mathbb{C}^{\infty}(M,\mathbb{R})$ $M$ den $\mathbb{R}$ ye diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesini göstermek üzere

$\forall f, h \in \mathbb{C}^{\infty}(M,\mathbb{R})$ ve $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$

$(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$

dönüşümü;

(1) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

(2) $\nabla_{(fX+hY)} Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z$

(3) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$

eşitliklerini sağlıyorsa $\nabla$'ya $M$ üzerinde afin konneksiyon ve $\nabla_X$'e de $X$ yönünde kovaryant türev denir (Willmore, 1959).

**Tanım 1.1.4. Lie parantez operatörü**

$M$ bir manifold ve $\chi(M)$ diferansiyellenebilir vektör alanlarının uzayı olsun. Bu durumda $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall\, f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için,

$$[,] : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X, Y) \to [X, Y]$$

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

şeklinde tanımlanan $[,]$ operatörüne Lie parantez operatörü denir. Lie parantez operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) bilineerlik,

ii) antisimetriklik: $[X, Y] = -[Y, X]$,

iii) Jacobi özdeşliği: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$,

iv) $\forall\, f, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için: $[fX, hY] = fh[X, Y] + fX(h)Y - hY(f)X$

(Kobayashi ve Nomizu, 1963).

**Tanım 1.1.5. Lie türevi**

$(M^n, g)$ Riemann manifoldu olsun. $\delta$, bir $M$ manifoldu üzerinde $r$-form ve $N$, $(r,1)$ mertebeli tensör alanı olmak üzere bu tensörlerin Lie türevi sırasıyla, $\forall X, X_1, X_2, \dots, X_r \in \chi(M)$ için

$$(\mathcal{L}_X\delta)(X_1, \dots, X_r) = X\big(\delta(X_1, \dots, X_r)\big) - \sum_{i=1}^{r} \delta(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_r)$$

ve

$$(\mathcal{L}_X N)(X_1, \dots, X_r) = [X, N(X_1, \dots, X_r)] - \sum_{i=1}^{r} N(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_r)$$

ile tanımlanır. Lie türevi aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $f \in C^{\infty}(M,R)$ için $\mathcal{L}_X f = X(f)$.

(ii) $Y \in \chi(M)$ için, $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$

(Şahin, 2012).

**Tanım 1.1.6. Riemann (Levi-Civita) konneksiyonu**

$(M^n, g)$ Riemann manifoldu üzerinde $\nabla$ afin konneksiyonu tanımlanmış olsun. Bu durumda $\nabla$ afin konneksiyonu $\forall\, X,Y,Z \in \chi(M)$ için,

(1) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$

(2) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

şartlarını da sağlıyorsa $\nabla$'ya $M$ üzerinde sıfır torsiyonlu Riemann konneksiyonu ya da Levi-Civita konneksiyonu denir (Willmore, 1959).

**Tanım 1.1.7. Riemann eğrilik tensörü**

$(M^n, g)$ Riemann manifoldu üzerinde $\nabla$, $M$ üzerinde tanımlanmış bir Riemann konneksiyonu olsun. Bu durumda $\forall\, X,Y,Z \in \chi(M)$ için,

$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$

$(X,Y,Z) \to R(X,Y,Z) = R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$

şeklinde tanımlanan $(1.3)$-tipindeki $R$ tensör alanına $M$'nin Riemann eğrilik tensörü denir (Willmore, 1959).

Lokal koordinatlarda eğrilik tensörü,

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \Gamma^l_{im}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ik}$$

olarak ifade edilir. Burada $\Gamma^k_{ij}$ konneksiyon katsayıları,

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{hk}\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}\right)$$

olarak verilir.

**Tanım 1.1.8. Yarı-Riemann manifoldu**

Riemann metriği pozitif tanımlılık yerine, sadece $det\, g = \left|g_{ij}\right| \neq 0$ olma koşulu getirilirse, $g$ metriği negatif değer de alabilir. Metriği bu şekilde verilen manifolda yarı-Riemann manifoldu denir (O'Neill, 1983).

**Tanım 1.1.9. Ricci tensörü**

$(M^n, g)$ Riemann manifoldu ve $\{e_1, \dots, e_n\}$ de bir $p \in M$ noktasında teğet uzayının ortonormal bazı olsun. $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için,

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i)$$

şeklinde tanımlanan $(0,2)$-tipindeki $S$ tensör alanına $M$ manifoldu üzerinde Ricci tensörü denir. Ayrıca $Q$ Ricci operatörü

$$S(X,Y) = g(QX, Y)$$

ile ifade edilir (Willmore, 1959).

**Tanım 1.1.10. Skaler eğrilik**

$(M^n, g)$ Riemann manifoldu ve $\{e_1, \dots, e_n\}$ bir $p \in M$ noktasındaki teğet uzayının ortonormal bazı olsun.

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i)$$

eşitliğine $M$'nin skaler eğriliği denir (Willmore, 1959).

**Tanım 1.1.11. $Z$-tensörü**

$(M^n, g)(n > 2)$ Riemann ya da yarı-Riemann manifoldunda $\xi$ keyfi skaler fonksiyon olmak üzere, $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için

$$Z(X,Y) = S(X,Y) + \xi g(X,Y) \tag{1.1}$$

eşitliği sağlanıyorsa $(0,2)$-tipinde simetrik tensöre genelleştirilmiş $Z$-tensörü ya da kısaca $Z$-tensörü denir (Mantica ve Molinari, 2012).

**Tanım 1.1.12. $B$-tensörü**

$(M^n, g)(n > 2)$ Riemann ya da yarı-Riemann manifoldunda $a$ ve $b$ keyfi skaler fonksiyonlar ve $r$ skaler eğrilik olmak üzere, $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için

$$B(X,Y) = aS(X,Y) + brg(X,Y) \tag{1.2}$$

olarak tanımlanan $(0,2)$-tipindeki simetrik $Z$-tensörünün genelleştirmesi olan tensöre $B$-tensörü denir (Suh ve ark., 2017).

**Tanım 1.1.13. Zayıf Ricci simetrik manifold**

$(M^n, g)(n > 2)$ bir Riemann manifoldu olsun. Bu manifoldda $\alpha, \beta, \gamma$ sıfırdan farklı 1-formlar olmak üzere sıfırdan farklı Ricci tensörü, $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X S)(Y,Z) = \alpha(X)S(Y,Z) + \beta(Y)S(Z,X) + \gamma(Z)S(X,Y) \tag{1.3}$$

koşulunu sağlıyorsa manifolda zayıf Ricci simetrik manifold denir ve kısaca $(WRS)_n$ ile gösterilir (Tamássy ve Binh, 1989).

**Tanım 1.1.14. Killing vektör alanı**

$(M^n, g)$ Riemann manifoldu üzerinde $\forall X \in \chi(M)$ için $X(g) = \mathcal{L}_X g = 0$ oluyorsa, $X$ vektör alanına Killing vektör alanı denir (Kobayashi ve Nomizu, 1963).

**Tanım 1.1.15. Einstein manifoldu**

$(M^n, g)(n > 2)$ yarı-Riemann manifoldunda Ricci tensörü $\lambda$ skaler ve $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$S(X,Y) = \lambda g(X,Y)$$

olacak şekilde metrik tensörle orantılı ise manifolda Einstein manifoldu denir (Chaki ve Maity, 2000) (Besse, 2007).

**Tanım 1.1.16. Yarı-Einstein manifoldu**

$(M^n, g)(n > 2)$ $n$-boyutlu bir Riemann manifoldunda $\tilde{a}$ ve $\tilde{b} \neq 0$ skaler fonksiyonlar olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$S(X,Y) = \tilde{a}g(X,Y) + \tilde{b}\tilde{A}(X)\tilde{A}(Y) \tag{1.4}$$

koşulu sağlanıyorsa $(M^n, g)$ manifolduna yarı-Einstein manifoldu denir. Burada $\tilde{A}$ 1-formu $\forall X \in \chi(M)$ ve $g(\tilde{U}, \tilde{U}) = 1$ için $\tilde{A}(X) = g(X, \tilde{U})$ biçiminde tanımlanmıştır (Chaki ve Maity, 2000).

**Tanım 1.1.17. Diverjans**

$(M^n, g)(n > 2)$ Riemann ya da yarı-Riemann manifoldunda $X$ , $M$ manifoldu üzerinde bir vektör alanı ise $X$'in diverjansı $(divX)$ ile gösterilir ve

$(divX) = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i} X, e_i)$

dir. $\{e_i\}$, $(1 \leq i \leq 4)$ ve $K$, (1,3)-tipinde tensör alanı olmak üzere, $\forall X_1, X_2, X_3 \in \chi(M)$ için

$$(divK)(X_1, X_2, X_3) = \sum_{i=1}^{4} \big(g(\nabla_{e_i} K)(X_1, X_2, X_3), e_i\big) \tag{1.5}$$

olarak tanımlanır (Kobayashi ve Nomizu, 1963).

**Tanım 1.1.18. Concircular vektör alanı**

$(M^n, g)(n > 2)$ Riemann ya da yarı-Riemann manifoldunda $X$ herhangi bir teğet vektör alanı, $\nabla$ Riemann konneksiyonu ve $\varepsilon$ manifold üzerinde tanımlı sıfırdan farklı bir fonksiyon için,

$$\nabla_X U = \varepsilon X \tag{1.6}$$

eşitliği sağlanıyorsa $U$ vektör alanına concircular yapıdadır denir ( Fialkow, 1939).

**Tanım 1.1.19. Weyl konformal eğrilik tensörü**

$(M^n, g)$ bir Riemann manifoldunda $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$C(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}\{S(Y,Z)X - S(X,Z)Y + g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY\}$$

$$+\frac{r}{(n-1)(n-2)}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}$$

biçiminde tanımlanan $C$ tensörüne $(M^n, g)$ manifoldunun Weyl konformal eğrilik tensörü denir (Chaki ve Ghosh, 1997).

## 2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde Riemann manifoldları üzerinde 2017 yılında Y. J. Suh, C. Mantica, U. C. De ve P. Pal tarafından tanımlanan $B$-tensörü için zayıf $B$-simetrik ve zayıf devirli $B$-simetrik manifoldlar tanımlanarak her ikisinin de yarı-Einstein manifold olduğu gösterilmiş bunun yanında manifoldların bazı geometrik özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu uzayların varlığı verilen aşikar olmayan örneklerle desteklenmiştir.

### 2.1 Zayıf $B$-Simetrik Manifold

**Tanım 2.1.1.**

$(M, g)$ Riemann manifoldu üzerinde $(0,2)$-tipinde $B$-tensörü sıfırdan farklı ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X B)(Y,Z) = \alpha(X)B(Y,Z) + \beta(Y)B(X,Z) + \gamma(Z)B(Y,X) \tag{2.1}$$

koşulunu sağlıyorsa bu manifolda zayıf $B$-simetriktir denir ve $(WBS)_n$ ile gösterilir. Burada $\alpha, \beta, \gamma$ aynı anda sıfır olmayan 1-formlar ve $V$, $W$, $\varpi$ 1-formları tanımlayan eş-vektör alanları olmak üzere,

$$\alpha(X) = g(X,V),\ \beta(Y) = g(Y,W),\ \gamma(Z) = g(Z,\varpi)$$

dir.

$B$-tensörünü $r \neq 0$ olmak üzere $a$, $b$ ve $r$ 'nin skaler olmasına göre incelersek:

■ $a = 0$ ve $b \neq 0$ için,

$$B(X,Y) = brg(X,Y) \tag{2.2}$$

olur. Böylelikle $B$-tensörü $b$ skalerine, metrik tensöre ve skaler eğriliğe bağlı bir tensör olur.

(2.2) denklemi (2.1) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$(\nabla_X B)(Y,Z) = br(\alpha(X)g(Y,Z) + \beta(Y)g(X,Z) + \gamma(Z)g(Y,X)),$$

(2.2) denkleminden $b$ ve $r$ sıfırdan farklı skalerler olduğundan yukarıdaki denklem,

$Y = Z = e_i$ için,

$$0 = br(\alpha(X)n + \beta(e_i)g(X, e_i) + \gamma(e_i)g(e_i, X))$$

buradan

$$0 = br(n\alpha(X) + \beta(X) + \gamma(X)) \tag{2.3}$$

elde edilir.

Böylece (2.3) denkleminden $a = 0$, $b \neq 0$ $r \neq 0$ olduğundan

$$n\alpha(X) + \beta(X) + \gamma(X) = 0$$

bulunur.

■ $a \neq 0$ *ve* $b = 0$ için,

$$B(X, Y) = aS(X, Y) \tag{2.4}$$

olur. Böylelikle $B$-tensörü Ricci tensörünün skaler bir katı olur ve uzay zayıf Ricci-simetrik manifolda indirgenir. Bu uzay da 1993 yılında Tamássy ve Binh tarafından çalışılmıştır (Tamássy ve Binh, 1993).

$$(\nabla_X B)(Y, Z) = a(\alpha(X)S(Y, Z) + \beta(Y)S(X, Z) + \gamma(Z)S(Y, X)) \tag{2.5}$$

Yukarıdaki denklemde $Y$ ve $Z$ vektör alanlarının yerleri değiştirildiğinde,

$$(\nabla_X B)(Z, Y) = a(\alpha(X)S(Z, Y) + \beta(Z)S(X, Y) + \gamma(Y)S(Z, X)) \tag{2.6}$$

bulunur.

(2.5) denkleminden (2.6) denklemi çıkarılırsa,

$$0 = a\big[\big(\beta(Y) - \gamma(Y)\big)S(X, Z) - \big(\beta(Z) - \gamma(Z)\big)S(X, Y)\big] \tag{2.7}$$

elde edilir.

Buradan $a \neq 0$ ve $b = 0$ için $(\beta(Y) - \gamma(Y))S(X, Z) = (\beta(Z) - \gamma(Z))S(X, Y)$ bulunur.

■$r = 0$ olması durumunda (1.2) denklemi (2.4) formunda olur. Bu durumda da uzay zayıf Ricci-simetrik manifolda indirgenir (Tamássy ve Binh, 1993).

Özel olarak $a = 1$ ve $b = \frac{1}{r}$ alındığında ise, $B$-tensörü $Z$-tensörüne indirgenmiş olur ve bu durumda manifold zayıf $Z$-simetrik manifold olur ki bu da 2012 yılında Mantica ve Molinari tarafından incelenmiştir (Mantica ve Molinari, 2012).

■ $B(X,Y) = 0$ ise, (1.2) denkleminden $S(X,Y) = -\frac{br}{a} g(X,Y)$ bulunur. Böylece manifold Einstein manifolduna indirgenir.

Biz çalışmamızda $a \neq 0$ , $b \neq 0$ ve $r \neq 0$ skaler fonksiyonlar olması durumunu inceledik.

**Örnek 2.1.1.**

Zayıf $B$-simetrik manifoldun varlığını aşağıda verilen metrik üzerinden inceleyelim.

$(R^4, g)$ 4-boyutlu Riemann manifoldu üzerinde

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j = (x^4)^{4/3}\{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\} + (dx^4)^2 \qquad (2.8)$$

metriği verilsin.

Burada $x^1, x^2, x^3, x^4$ $R^4$ ün standart koordinat fonksiyonları olsun.

(2.8) denkleminden

$g_{11} = g_{22} = g_{33} = (x^4)^{4/3}$ , $g_{44} = 1$ dir.

Buradan

$g^{11} = g^{22} = g^{33} = (x^4)^{-4/3}$ , $g^{44} = 1$

kolaylıkla hesaplanır.

Burada, $\Gamma_{ij}^k$ Riemann (Levi-Civita) konneksiyon katsayıları olmak üzere; $i, j, k = 1, 2, 3, 4$ için

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{hk} \left( \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \right)$$

şeklindedir.

Böylelikle sıfırdan farklı Riemann konneksiyon katsayıları

$\Gamma_{14}^{1} = \Gamma_{24}^{2} = \Gamma_{34}^{3} = \frac{2}{3(x^4)}$ , $\Gamma_{11}^{4} = \Gamma_{22}^{4} = \Gamma_{33}^{4} = -\frac{2}{3}(x^4)^{1/3}$

olarak hesaplanır.

Sıfırdan farklı eğrilik tensörünün bileşenleri ise

$$R_{ijkh} = g_{hl}R_{ijk}^{l} = g_{hl}\left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^{l}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{l}}{\partial x^{j}} + \Gamma_{im}^{l}\Gamma_{jk}^{m} - \Gamma_{jm}^{l}\Gamma_{ik}^{m}\right)$$

denklemi kullanılarak

$R_{1221} = R_{1331} = R_{2332} = -\frac{4}{9}(x^4)^{2/3}$ , $R_{2442} = R_{1441} = R_{3443} = \frac{2}{9}(x^4)^{-2/3}$

bulunur.

$S_{ij} = g^{lm}R_{lijm}$

den Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri,

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = -\frac{2}{3(x^4)^{2/3}}, \qquad S_{44} = \frac{2}{3(x^4)^{2}} \tag{2.9}$$

dir. Skaler eğrilik ise,

$r = g^{11}S_{11} + g^{22}S_{22} + g^{33}S_{33} + g^{44}S_{44}$

eşitliğinden $r = -\frac{4}{3(x^4)^2}$ olarak elde edilir.

(1.2) denkleminden

$$a = 6(x^4)^3 \tag{2.10}$$

ve

$$b = 3(x^4)^3 \tag{2.11}$$

olarak seçilirse, $B$-tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} = -8(x^4)^{7/3} \tag{2.12}$$

şeklinde elde edilir. $B$-tensörünün sıfırdan farklı kovaryant türevleri

$B_{ij,k} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^l_{jk} B_{il} - \Gamma^l_{ik} B_{jl}$

eşitliğinden yararlanılarak,

$$B_{11,4=}B_{22,4=}B_{33,4=} - 8(x^4)^{4/3}\,, \qquad B_{14,1=}B_{24,2=}B_{34,3=}\frac{16}{3}(x^4)^{4/3} \tag{2.13}$$

olarak bulunur.

(2.1) denklemini lokal koordinatlarda göz önüne alırsak, yani

$B_{ij,k} = \alpha_k B_{ij+}\beta_i B_{jk+}\gamma_j B_{ik}$ eşitliğindeki 1-formlar,

$$\alpha_k = \begin{cases} (x^4)^{-1};\ k = 4 \\ 0 \quad ;k \neq 4 \end{cases}, \qquad \beta_k = \begin{cases} -\frac{2}{3}(x^4)^{-1};\ k = 4 \\ 0 \quad ;\ k \neq 4 \end{cases},$$

$$\gamma_k = \begin{cases} -\frac{2}{3}(x^4)^{-1};\ k = 4 \\ 0 \quad ;\ k \neq 4 \end{cases}$$

olarak seçilirse $(R^4, g)$ manifoldu zayıf $B$ -simetrik manifolddur. Böylelikle tanımladığımız uzayın varlığını gösteren bir örnek vermiş oluruz.

**Teorem 2.1.1.**

Zayıf $B$-simetrik manifold üzerinde $\forall X \in \chi(M)$ için $A(X) = g(X, \rho)$ olmak üzere Ricci tensörü,

$$S(X, \rho) = krA(X) \tag{2.14}$$

dir. Burada $k = \frac{a+b(n-1)}{a}$ skaler bir fonksiyondur.

**İspat:**

(2.1) denkleminde $Y$ ve $Z$ vektör alanlarının yerleri değiştirildiğinde,

$$(\nabla_X B)(Z, Y) = \alpha(X)B(Z, Y) + \beta(Z)B(X, Y) + \gamma(Y)B(Z, X) \tag{2.15}$$

elde edilir. (2.1) den (2.15) çıkarıldığında

$$0 = \big(\beta(Y) - \gamma(Y)\big)B(X, Z) - \big(\beta(Z) - \gamma(Z)\big)B(X, Y) \tag{2.16}$$

bulunur. $\forall X \in \chi(M)$ için

$$A(X) = \beta(X) - \gamma(X) \tag{2.17}$$

olarak $A$ 1-formunu tanımlayalım. Bu durumda (2.16) eşitliğini,

$$A(Y)B(X,Z) = A(Z)B(Y,X) \tag{2.18}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

(1.2) eşitliği (2.18) denkleminde yerine yazıldığında,

$$A(Y)[aS(X,Z) + brg(X,Z)] = A(Z)[aS(Y,X) + brg(Y,X)] \tag{2.19}$$

elde edilir.

(2.19) denkleminde $X$ ve $Z$ üzerinde daraltma yapılırsa,

$$A(Y)[ar + brn] = A(e_i)[aS(Y,e_i) + brg(Y,e_i)],$$

eşitliğinden

$$(a + bn)rA(Y) = aS(Y,\rho) + brA(Y) \tag{2.20}$$

denklemi bulunur. Denklem düzenlendiğinde,

$$S(Y,\rho) = \frac{a + b(n-1)}{a} rA(Y) \tag{2.21}$$

elde edilir.

$k = \frac{a+b(n-1)}{a}$ denilirse, $S(Y,\rho) = krA(Y)$ bulunur ki böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

**Teorem 2.1.2.**

Zayıf $B$-simetrik manifold $(WBS)_n$ yarı-Einstein'dır.

**İspat:**

(2.18) denkleminde $Y$ vektör alanı yerine $\rho$ alınırsa,

$A(\rho)B(X,Z) = A(Z)B(\rho,X)$,

bulunur. Buradan

$$B(X,Z) = \frac{A(Z)}{A(\rho)}B(\rho,X) \tag{2.22}$$

dir.

(1.2) denklemi ve (2.20) denklemi birlikte göz önüne alındığında

$$(a+bn)rA(Y) = B(Y,\rho) \tag{2.23}$$

eşitliğine ulaşılır.

(2.23) denklemi (2.22) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$B(X,Z) = (a+bn)r\frac{A(Z)}{A(\rho)}A(X) \tag{2.24}$$

elde edilir.

Şimdi $\frac{A(Z)}{\sqrt{A(\rho)}} = T(Z)$ olarak $T$ 1-formunu tanımlayalım. Böylece (2.24) eşitliği,

$$B(X,Z) = (a+bn)rT(X)T(Z) \tag{2.25}$$

formunda yazılır.

(2.25) denkleminde (1.2) yerine yazılırsa,

$$aS(X,Z) + brg(X,Z) = (a+bn)rT(X)T(Z)$$

elde edilir.

Buradan

$$S(X,Z) = \frac{(a+bn)r}{a}T(X)T(Z) - \frac{br}{a}g(X,Z) \tag{2.26}$$

olarak bulunur. Böylece

$$\varphi = -\frac{br}{a} \tag{2.27}$$

ve

$$\varsigma = \frac{(a+bn)r}{a} \tag{2.28}$$

tanımlamaları yapılırsa,

$$S(X,Z) = \varsigma T(X)T(Z) + \varphi g(X,Z) \tag{2.29}$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan zayıf $B$-simetrik manifoldun yarı-Einstein manifold olduğu görülür. Bu da ispatı tamamlar.

**Örnek 2.1.2.**

Örnek 2.1.1. de (2.8) eşitliği ile verilen metriğin zayıf $B$-simetrik manifold olduğunu göstermiştik. Şimdi bu manifoldun Teorem 2.1.2.'yi sağladığını görelim,

(2.10), (2.11), (2.27), (2.28), (2.29) eşitlikleri ve $r = -\frac{4}{3(x^4)^2}$ göz önüne alınarak,

$\varsigma = -4(x^4)^{-2}$ ve $\varphi = \frac{2}{3}(x^4)^{-2}$

elde edilir.

$$T_i = \begin{cases} \frac{(x^4)^{2/3}}{\sqrt{3}} & ; i = 1,2,3 \\ 0 & ; i = 4 \end{cases}$$

olarak bulunur.

$g^{ij}T_iT_j = 3(x^4)^{-4/3}\frac{(x^4)^{4/3}}{3} = 1$ dir. Bu da bize $(R^4, g)$ zayıf $B$-simetrik manifoldunun yarı-Einstein olduğunu ifade eder. Böylece Teorem 2.1.2. sağlanmış olur.

**Teorem 2.1.3.**

$(WBS)_n$ zayıf $B$-simetrik manifold üzerinde, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X B(Y,Z) + \nabla_Y B(X,Z) + \nabla_Z B(Y,X) = 0 \tag{2.30}$$

olması için gerek ve yeter şart

$\alpha(X) + \beta(X) + \gamma(X) = 0$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

**İspat*:***

($\Rightarrow$) $(WBS)_n$ üzerinde (2.30) denklemi sağlansın. (2.1) denkleminden

$$(\nabla_Y B)(Z,X) = \alpha(Y)B(Z,X) + \beta(Z)B(X,Y) + \gamma(X)B(Y,Z) \tag{2.31}$$

ve

$$(\nabla_Z B)(X,Y) = \alpha(Z)B(X,Y) + \beta(X)B(Z,Y) + \gamma(Y)B(X,Z) \tag{2.32}$$

dir.

(2.1), (2.31) ve (2.32) eşitliklerini taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned}(\nabla_X B)(Y,Z) + (\nabla_Y B)(Z,X) + (\nabla_Z B)(X,Y) \\ = \{\alpha(X) + \beta(X) + \gamma(X)\}B(Y,Z) + \{\alpha(Y) + \beta(Y) + \gamma(Y)\}B(X,Z) \\ + \{\alpha(Z) + \beta(Z) + \gamma(Z)\}B(X,Y)\end{aligned} \tag{2.33}$$

elde edilir.

Buradan, (2.30) denklemi göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}\{\alpha(X) + \beta(X) + \gamma(X)\}B(Y,Z) + \{\alpha(Y) + \beta(Y) + \gamma(Y)\}B(X,Z) \\ + \{\alpha(Z) + \beta(Z) + \gamma(Z)\}B(X,Y) = 0\end{aligned} \tag{2.34}$$

eşitliğine ulaşılır.

$\alpha(X) + \beta(X) + \gamma(X) = \tilde{\omega}(X)$ olarak tanımlarsak, (2.34) denkleminden,

$$\tilde{\omega}(X)B(Y,Z) + \tilde{\omega}(Y)B(X,Z) + \tilde{\omega}(Z)B(X,Y) = 0 \tag{2.35}$$

bulunur. Buradan, Walker Lemma (Walker, 1950) gereğince ya $B(Y,Z)=0$ ya da $\widetilde{\omega}(X)=0$ olmalıdır. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için $B(X,Y)\neq 0$ olduğundan $\widetilde{\omega}(X)=0$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ $\alpha(X)+\beta(X)+\gamma(X)=\widetilde{\omega}(X)=0$ olsun

Bu durumda, (2.33) eşitliğinden (2.30) denkleminin sağlandığı görülür.

**Teorem 2.1.4.**

Zayıf $B$-simetrik manifold üzerinde $(WBS)_n$ $\tau,\zeta$ ve $\Gamma$ skaler fonksiyonlar olmak üzere 1-formlar $\alpha,\beta,\gamma$

$$(\nabla_X\alpha)(U)=\alpha(X)\alpha(U)+\tau g(X,U) \tag{2.36}$$

$$(\nabla_X\beta)(U)=\beta(X)\beta(U)+\zeta g(X,U) \tag{2.37}$$

$$(\nabla_X\gamma)(U)=\gamma(X)\gamma(U)+\Gamma g(X,U) \tag{2.38}$$

şeklinde concircular yapıda ise, $\forall X,Y,Z,U\in\chi(M)$ için

$$\nabla_X(\nabla_U B)(Y,Z)-\nabla_U(\nabla_X B)(Y,Z)=\zeta(g(X,Y)B(U,Z)-g(Y,U)B(X,Z))$$
$$+\Gamma(g(Z,X)B(Y,U)-g(U,Z)B(Y,X)) \tag{2.39}$$

eşitliği sağlanır. Özel olarak $\zeta=\Gamma$ olması durumunda, manifold Deszcz anlamında yalancı-Ricci simetrik manifold olur (Deszcz, 1992).

**İspat:**

(2.1) eşitliğinin kovaryant türevi alındığında,

$$\nabla_U(\nabla_X B)(Y,Z)=(\nabla_U\alpha)(X)B(Y,Z)+\alpha(X)(\nabla_U B)(Y,Z)+(\nabla_U\beta)(Y)B(X,Z)$$
$$+\beta(Y)(\nabla_U B)(X,Z)+(\nabla_U\gamma)(Z)B(Y,X)+\gamma(Z)(\nabla_U B)(Y,X) \tag{2.40}$$

elde edilir.

(2.40) eşitliğinde (2.1) yerine yazılırsa,

$$\nabla_U(\nabla_X B)(Y,Z) =$$

$$(\nabla_U\alpha)(X)B(Y,Z) + \alpha(X)\{\alpha(U)B(Y,Z) + \beta(Y)B(U,Z) + \gamma(Z)B(Y,U)\}$$

$$+(\nabla_U\beta)(Y)B(X,Z) + \beta(Y)\{\alpha(U)B(X,Z) + \beta(X)B(U,Z) + \gamma(Z)B(X,U)\}$$

$$+(\nabla_U\gamma)(Z)B(Y,X) + \gamma(Z)\{\alpha(U)B(Y,X) + \beta(Y)B(U,X) + \gamma(X)B(Y,U)\} \tag{2.41}$$

denklemi elde edilir.

(2.41) eşitliğinde $X$ ile $U$ vektör alanlarının yerlerini değiştirerek tekrar yazarsak,

$$\nabla_X(\nabla_U B)(Y,Z) =$$

$$(\nabla_X\alpha)(U)B(Y,Z) + \alpha(U)\{\alpha(X)B(Y,Z) + \beta(Y)B(X,Z) + \gamma(Z)B(Y,X)\}$$

$$+(\nabla_X\beta)(Y)B(U,Z) + \beta(Y)\{\alpha(X)B(U,Z) + \beta(U)B(X,Z) + \gamma(Z)B(U,X)\}$$

$$+(\nabla_X\gamma)(Z)B(Y,U) + \gamma(Z)\{\alpha(X)B(Y,U) + \beta(Y)B(X,U) + \gamma(U)B(Y,X)\} \tag{2.42}$$

bulunur.

(2.42) denkleminden (2.41) denklemi çıkarılırsa,

$$\begin{aligned}\nabla_X(\nabla_U B)(Y,Z) - \nabla_U(\nabla_X B)(Y,Z) =& [\nabla_X\alpha(U) - \nabla_U\alpha(X)]B(Y,Z) \\ &+ [(\nabla_X\beta)(Y) - \beta(X)\beta(Y)]B(U,Z) - [(\nabla_U\beta)(Y) - \beta(Y)\beta(U)]B(X,Z) \\ &- [(\nabla_U\gamma)(Z) - \gamma(Z)\gamma(U)]B(Y,X) \\ &+ [(\nabla_X\gamma)(Z) - \gamma(Z)\gamma(X)]B(Y,U)\end{aligned} \tag{2.43}$$

elde edilir.

(2.43) denkleminde (2.36), (2.37) ve (2.38) eşitlikleri yerine yazıldığında

$$\nabla_X(\nabla_U B)(Y,Z) - \nabla_U(\nabla_X B)(Y,Z) = \zeta[g(X,Y)B(U,Z) - g(Y,U)B(X,Z)]$$

$$+\Gamma[g(Z,X)B(Y,U) - g(U,Z)B(Y,X)]$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece (2.39) denklemi elde edilir.

$\zeta = \Gamma$ olması durumunda ise, (2.39) eşitliği

$$\begin{aligned}\nabla_X(\nabla_U B)(Y,Z) - \nabla_U(\nabla_X B)(Y,Z) \\ = \Gamma[g(X,Y)B(U,Z) - g(Y,U)B(X,Z) + g(Z,X)B(Y,U) \\ - g(U,Z)B(Y,X)]\end{aligned} \tag{2.44}$$

olur.

(1.2) denklemi (2.44) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\nabla_X(\nabla_U B)(Y,Z) - \nabla_U(\nabla_X B)(Y,Z) = \\ \Gamma[g(X,Y)\{aS(U,Z) + brg(U,Z)\} - g(Y,U)\{aS(X,Z) + brg(X,Z)\} \\ +g(Z,X)\{aS(Y,U) + brg(Y,U)\} - g(U,Z)\{aS(Y,X) + brg(Y,X)\}] \ ,\end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned}\nabla_X(\nabla_U B)(Y,Z) - \nabla_U(\nabla_X B)(Y,Z) \\ = a\Gamma[g(X,Y)S(U,Z) - g(Y,U)S(X,Z) + g(Z,X)S(Y,U) \\ - g(U,Z)S(Y,X)]\end{aligned} \tag{2.45}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu ise, manifoldun Deszcz anlamında yalancı-Ricci simetrik manifold olduğunu gösterir ve bu da ispatı tamamlar.

## 2.2 Zayıf Devirli $B$-Simetrik Manifold

**Tanım 2.2.1.**

$(M^n, g)$ Riemann manifoldu üzerinde tanımlı $(0,2)$-tipindeki $B$-tensörü özdeş olarak sıfırdan farklı ve $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}(\nabla_X B)(Y,Z) + (\nabla_Y B)(X,Z) + (\nabla_Z B)(Y,X) \\ = \alpha(X)B(Y,Z) + \beta(Y)B(X,Z) + \gamma(Z)B(Y,X)\end{aligned} \tag{2.46}$$

eşitliği sağlanıyorsa, bu manifolda zayıf devirli $B$-simetrik manifold denir ve bu manifold $(WCBS)_n$ ile gösterilir.

**Örnek 2.2.1.**

Örnek 2.1.1. de verilen metrik kullanılarak (1.2) denkleminde $a$ ve $b$ skaler fonksiyonlarını sırasıyla $-\frac{3(x^4)^3}{2}$ ve $-\frac{3(x^4)^3}{4}$ olarak seçersek, $B$ -tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$B_{11} = B_{22} = B_{33} = 2(x^4)^{7/3} \tag{2.47}$$

olarak elde edilir.

Böylece $B$-tensörünün sıfırdan farklı kovaryant türevleri,

$$B_{11,4} = B_{22,4} = B_{33,4} = 2(x^4)^{4/3}\,,\quad B_{14,1} = B_{24,2} = B_{34,3} = -\frac{4}{3}(x^4)^{4/3} \tag{2.48}$$

şeklinde bulunur.

(2.46) tanımını lokal koordinatlarda göz önüne alırsak,

$B_{ij,k} + B_{jk,i} + B_{ki,j} = \alpha_k B_{ij} + \beta_i B_{jk} + \gamma_j B_{ik}$ eşitliğindeki $\alpha, \beta, \gamma$ 1-formlarını,

$$\alpha_k = \begin{cases} -\frac{1}{3}(x^4)^{-1}\,;\ k = 4 \\ 0 \quad\ ;\ k \neq 4 \end{cases}, \qquad \beta_k = \begin{cases} -\frac{1}{3}(x^4)^{-1};\ k = 4 \\ 0 \quad\ ;\ k \neq 4 \end{cases},$$

$$\gamma_k = \begin{cases} -\frac{1}{3}(x^4)^{-1};\ k = 4 \\ 0 \quad\ ;\ k \neq 4 \end{cases}$$

olarak seçersek, (2.47) , (2.48) eşitlikleri kullanılarak $(R^4, g)$ manifoldunun zayıf devirli $B$-simetrik manifold olduğu görülür ve böylelikle tanımladığımız uzayın varlığını ispatlamış oluruz.

**Örnek 2.2.2.**

Zayıf devirli $B$-simetrik manifoldun varlığını başka bir metrik üzerinden incelersek

$(R^4, g)$ 4-boyutlu Riemann manifoldu üzerinde

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = (dx^1)^2 + e^{x^2}(dx^2)^2 + e^{2x^2}(dx^3)^2 + (dx^4)^2$$

verilsin.

Bu metrikten

$g_{11} = g_{44} = 1\,, \qquad g_{22} = e^{x^2}, \qquad g_{33} = e^{2x^2},$

buradan

$g^{11} = g^{44} = 1\,, \qquad g^{22} = e^{-x^2}\,, \qquad g^{33} = e^{-2x^2}$

hesaplanır.

Sıfırdan farklı Riemann konneksiyon katsayıları

$\Gamma_{23}^{3} = \Gamma_{32}^{3} = 1, \qquad \Gamma_{33}^{2} = -e^{x^2}, \qquad \Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{2}$

olarak hesaplanır.

Sıfırdan farklı eğrilik tensörünün bileşenleri ise

$R_{2332} = -\frac{1}{2}e^{2x^2}$

bulunur.

Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri,

$S_{22} = -\frac{1}{2} \qquad , \qquad S_{33} = -\frac{1}{2}e^{x^2}$

dir. Skaler eğrilik ise,

$r = -e^{-x^2}$

olarak elde edilir.

(1.2) denkleminde $a = -2e^{2x^2}$ ve $b = e^{2x^2}$ olarak seçilirse, $B$-tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$B_{11} = B_{44} = -e^{x^2}$

şeklinde elde edilir.

$B$-tensörünün sıfırdan farklı kovaryant türevleri

$$B_{11,2} = B_{44,2} = -e^{x^2}$$

olarak bulunur.

(2.46) tanımını lokal koordinatlarda göz önüne alırsak,

$B_{ij,k} + B_{jk,i} + B_{ki,j} = \alpha_k B_{ij} + \beta_i B_{jk} + \gamma_j B_{ik}$ eşitliğindeki $\alpha, \beta, \gamma$ 1-formlarını,

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 & ; k = 2 \\ 0 & ; k \neq 2 \end{cases}' \qquad \beta_k = \begin{cases} 1 & ; k = 2 \\ 0 & ; k \neq 2 \end{cases},$$

$$\gamma_k = \begin{cases} 1 & ; k = 2 \\ 0 & ; k \neq 2 \end{cases}$$

olarak seçilirse $(R^4, g)$ manifoldu zayıf devirli $B$ -simetrik manifolddur. Böylelikle tanımladığımız uzayın varlığını gösteren ikinci bir örnek vermiş oluruz.

**Teorem 2.2.1.**

Zayıf devirli $B$-simetrik manifold $(WCBS)_n$ yarı-Einstein manifolddur.

**İspat:**

(2.46) denkleminde $Y$ ile $Z$ vektör alanlarının yerleri değiştirerek tekrar yazarsak,

$$(\nabla_X B)(Z,Y) + (\nabla_Z B)(X,Y) + (\nabla_Y B)(Z,X) = \alpha(X)B(Z,Y) + \beta(Z)B(X,Y) + \gamma(Y)B(Z,X) \qquad (2.49)$$

eşitliğine ulaşılır.

(2.46) denkleminden (2.49) çıkarılırsa,

$$\big(\beta(Y) - \gamma(Y)\big)B(X,Z) = \big(\beta(Z) - \gamma(Z)\big)B(X,Y) \qquad (2.50)$$

olarak bulunur.

(2.17) ve (2.50) denklemleri birlikte değerlendirildiğinde (2.18) eşitliğine ulaşılır. Daha sonra Teorem 2.1.2.'deki adımlar tekrarlanarak, zayıf devirli $B$-simetrik manifoldun yarı-Einstein manifold olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

**Örnek 2.2.3.**

Örnek 2.4 de $(R^4, g)$ manifoldunun zayıf devirli $B$-simetrik manifold olduğunu gördük.

(2.29) eşitliğinden

$\varsigma = \frac{1}{e^{x^2}}$ ve $\varphi = -\frac{1}{2e^{x^2}}$

olarak hesaplanır. Buradan,

$T_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & ; i = 1,4 \\ 0 & ; i = 2,3 \end{cases}$ bulunur.

$g^{ij}T_iT_j = 1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$ olduğundan, $(R^4, g)$ manifoldu Teorem 2.2.1.'i sağlar.

## 3.BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde daha önceki bölümde incelenen zayıf $B$ -simetrik manifoldları genel rölativite teorisinin bir uygulaması olarak, bu manifoldları uzay-zamanda irdeleyerek çıkan sonuçları değerlendireceğiz. Öncelikle uzay-zamanın tarihçesine bir göz atalım. 1920'lerde gökbilimci Edwin Hubble evrenin statik olduğu düşüncesini yıkarak yaptığı gözlemlerle uzayın genişlemekte olduğunu gösterdi. Bu keşfi ile uzayı anlama noktasında Euclid uzayı yetersiz kalmıştı. Çünkü bilindiği üzere Euclid uzayında sabit bir referans noktasına göre zaman boyutunun yer almadığı sadece uzaysal boyutlar vardır.

Hubble'ın bu keşfi Einstein'ın genel görelilik teorisini desteklemekteydi. Matematikçi Hermann Minkowski'nin adını taşıyan Minkowski uzayı matematiksel olarak Hubble'ın söylediği gibi genişlemekte olan evrenin anlatılabildiği en uygun yapıdır. Minkowski uzayında Lorentz dönüşümleri herhangi iki olay arasında uzay aralığını korumaktadır. Böylelikle görelilik kuramının ikinci ilkesi olan ışık hızının her gözlemciye göre değişmezliği sağlanır. Minkowski uzayı, Euclid uzayında da bilinen 3-uzay boyutunu zaman boyutuyla birleştirerek 4-boyutlu bir manifold oluşturur.

Bu bölümde, zayıf $B$ -simetrik uzay-zaman olgusu diferansiyel geometri yardımıyla incelenecektir. Uzay-zamanda işlem yaparken $(M^4, g)$ yarı-Riemann manifoldunda yapılan çalışmalar uzayda vektörlerin karakterlerini de en uygun şekilde ifade edilebilmesini sağlayan $(-,+,+,+)$ işaretleri ile tanımlı lineer bir dönüşüm olan Lorentz metriği kullanılarak yapılmıştır (O'Neill, 1983).

### 3.1 Zayıf $B$-Simetrik Uzay-zaman

**Teorem 3.1.1.**

$(WBS)_4$ uzay zaman yarı-Einstein'dır.

**İspat:**

(2.1) denkleminde $Y$ ve $Z$ vektör alanlarının yerlerini değiştirilirse,

$$(\nabla_X B)(Z,Y) = \alpha(X)B(Z,Y) + \beta(Z)B(X,Y) + \gamma(Y)B(Z,X) \tag{3.1}$$

eşitliği elde edilir.

(2.1) eşitliğinden (3.1) eşitliği çıkarılırsa,

$$(\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_X B)(Z,Y) = \big(\beta(Y) - \gamma(Y)\big)B(X,Z) + \big(\gamma(Z) - \beta(Z)\big)B(Y,X) \quad (3.2)$$

bulunur. $A(X) = \beta(X) - \gamma(X)$ kabul edilirse, $A$ $\forall X \epsilon \chi(M)$ için $\rho$ zaman-benzeri vektör alanı ile ilişkili 1- form, yani $A(X) = g(X,\rho)$ ve $g(\rho,\rho) = -1$ dir.

(3.2) eşitliğinin sol tarafı sıfıra eşit olduğundan,

$$A(Y)B(X,Z) = A(Z)B(Y,X) \quad (3.3)$$

haline indirgenir.

(3.3) eşitliğinde (1.2) yerine yazılıp $X$ ve $Z$ üzerinde daraltma yapılırsa,

$$A(Y)(a+4b)r = aA(e_i)S(Y,e_i) + brg(Y,e_i)A(e_i),$$

$$(a+3b)rA(Y) = aS(Y,\rho) \quad (3.4)$$

bulunur.

(3.3) eşitliğinde $Y = \rho$ alırsak,

$$A(\rho)B(X,Z) = A(Z)B(\rho,X),$$

$A(\rho) = -1$ den,

$$B(X,Z) = -A(Z)B(\rho,X) \quad (3.5)$$

eşitliğine ulaşılır. (1.2) tanımından

$$B(\rho,X) = aS(\rho,X) + brg(\rho,X) \quad (3.6)$$

eşitliği yazılıp, (3.5) denkleminde yerleştirilirse,

$$B(X,Z) = -A(Z)\{aS(\rho,X) + brg(\rho,X)\} \quad (3.7)$$

eşitliğine ulaşılır. (3.4) ve $A(X) = g(X,\rho)$ (3.7) de yerine yazılırsa,

$$B(X,Z) = -(a+4b)rA(X)A(Z) \quad (3.8)$$

elde edilir.

(3.5) ifadesi (1.2) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$-A(Y)B(\rho,X) = aS(X,Y) + brg(X,Y)$ bulunur. Burada (3.6) eşitliği yerine yazılırsa,

$-A(Y)[aS(\rho,X) + brg(\rho,X)] = aS(X,Y) + brg(X,Y)$,

elde edilir. Yukarıdaki denklemde (3.4) yerine yazıldığında,

$-A(X)[(a+3b)rA(Y) + brA(Y)] = aS(X,Y) + brg(X,Y)$

denklemine ulaşılır ki bu denklem düzenlendiğinde,

$$S(X,Y) = \left(-\frac{a+4b}{a}\right) rA(X)A(Y) + \left(\frac{-br}{a}\right) g(X,Y)$$

denklemi elde edilir. Böylece,

$$\psi = \left(-\frac{4b+a}{a}\right) r \tag{3.9}$$

ve

$$\varphi = -\frac{br}{a} \tag{3.10}$$

olarak alınırsa,

$$S(X,Y) = \varphi g(X,Y) + \psi A(X)A(Y) \tag{3.11}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu da uzay-zamanın yarı-Einstein olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Bu bölümün tamamında $A$ 1-formuna karşılık gelen vektör alanı ile Ricci tensörünün üreteç vektör alanı aynı alınmıştır ve $A(X) = g(X,\rho)$, $g(\rho,\rho) = -1$ dir.

**Teorem 3.1.2.**

Sıfırdan farklı skaler eğrilikli $(WBS)_4$ uzay zamanda $C$, Weyl konformal eğrilik tensörü olmak üzere $divC = 0$ ve $\frac{b}{a} \neq \frac{1}{4}$ ve sabit ise, $A$ 1-formu kapalıdır ve $\rho$ vektör alanının integral eğrileri geodeziklerdir. Burada $a$ ve $b$ $B$ -tensörünün ifadesindeki skaler fonksiyonlardır.

**İspat:**

Weyl konformal eğrilik tensörünün diverjansını alırsak,

$$(divC)(X,Y,Z) = \sum_{i=1}^{4} \big(g(\nabla_{e_i} C)(X,Y,Z), e_i\big)$$

$$(divC)(X,Y,Z) = (divR)(X,Y,Z) - \frac{1}{n-2}\{g(X,e_i)(\nabla_{e_i}S)(Y,Z) -$$
$$g(Y,e_i)(\nabla_{e_i}S)(X,Z) + g(Y,Z)(\nabla_{e_i}S)(X,e_i) - g(X,Z)(\nabla_{e_i}S)(Y,e_i)\} -$$
$$\frac{r}{(n-1)(n-2)}\{g(X,Z)(\nabla_{e_i}S)(Y,e_i) - g(X,e_i)(\nabla_{e_i}S)(Y,Z)\}$$

olur.

$divC = 0$ olduğu göz önüne alınırsa, yukarıdaki denklemden

$$(\nabla_X S)(Y,U) - (\nabla_U S)(X,Y) = \frac{1}{6}[g(Y,U)dr(X) - g(X,Y)dr(U)] \tag{3.12}$$

elde edilir. Teorem 3.1.1.'den biliyoruz ki $(WBS)_4$ uzayı yarı-Einstein'dır. O halde Ricci tensörü (3.11) denklemindeki gibidir. (3.11) denkleminin $U$ vektör alanına göre kovaryant türevi alınırsa,

$$(\nabla_U S)(X,Y) = d\varphi(U)g(X,Y) + d\psi(U)A(X)A(Y)$$
$$+ \psi[(\nabla_U A)(X)A(Y) + A(X)(\nabla_U A)(Y)] \tag{3.13}$$

olur.

(3.13) de $U$ ile $X$ vektör alanlarının yerleri değiştirilerek tekrar yazılırsa,

$$(\nabla_X S)(U,Y) = d\varphi(X)g(U,Y) + d\psi(X)A(U)A(Y)$$
$$+ \psi[(\nabla_X A)(U)A(Y) + A(U)(\nabla_X A)(Y)] \tag{3.14}$$

elde edilir.

(3.12) eşitliğinde (3.13) ve (3.14) denklemleri yerine yazılırsa,

$$d\varphi(X)g(U,Y) + d\psi(X)A(Y)A(U) + \psi[(\nabla_X A)(U)A(Y) + A(U)(\nabla_X A)(Y)]$$
$$- d\varphi(U)g(X,Y) - d\psi(U)A(X)A(Y)$$
$$- \psi[(\nabla_U A)(X)A(Y) + A(X)(\nabla_U A)(Y)]$$
$$= \frac{1}{6}[g(Y,U)dr(X) - g(X,Y)dr(U)] \qquad (3.15)$$

eşitliği elde edilir.

(3.15) de $X$ ve $Y$ üzerinde daraltma yapıldığında,

$$d\varphi(e_i)g(e_i,U) + d\psi(e_i)A(U)A(e_i) + \psi\big[\big(\nabla_{e_i}A\big)(U)A(e_i) + A(U)\big(\nabla_{e_i}A\big)(e_i)\big]$$
$$- d\varphi(U)g(e_i,e_i) - d\psi(U)A(e_i)A(e_i)$$
$$- \psi[(\nabla_U A)(e_i)A(e_i) + A(e_i)(\nabla_U A)(e_i)]$$
$$= \frac{1}{6}[g(e_i,U)dr(e_i) - g(e_i,e_i)dr(U)],$$

buradan,

$$d\varphi(U) + d\psi(\rho)A(U) + \psi A(e_i)\big(\nabla_{e_i}A\big)(U) + \psi A(U)\big(\nabla_{e_i}A\big)(e_i) - 4d\varphi(U) + d\psi(U)$$
$$- \psi(\nabla_U A)(e_i)A(e_i) - \psi A(e_i)(\nabla_U A)(e_i) = -\frac{dr(U)}{2},$$

son olarak,

$$-3d\varphi(U) + d\psi(\rho)A(U) + \psi A(U)\big(\nabla_{e_i}A\big)(e_i) + \psi\big(\nabla_\rho A\big)(U) + d\psi(U) = -\frac{1}{2}dr(U) \qquad (3.16)$$

eşitliğine ulaşılır.

(3.15) eşitliğinde $X = Y = \rho$ alınırsa,

$$d\varphi(\rho)g(\rho,U) + d\psi(\rho)A(\rho)A(U) + \psi\big[\big(\nabla_\rho A\big)(U)A(\rho) + A(U)\big(\nabla_\rho A\big)(\rho)\big]$$
$$- d\varphi(U)g(\rho,\rho) - d\psi(U)A(\rho)A(\rho)$$
$$- \psi[(\nabla_U A)(\rho)A(\rho) + A(\rho)(\nabla_U A)(\rho)]$$
$$= \frac{1}{6}[g(\rho,U)dr(\rho) - g(\rho,\rho)dr(U)]$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem düzenlendiğinde,

$$d\varphi(\rho)A(U) - d\psi(\rho)A(U) - \psi\big(\nabla_\rho A\big)(U) + \psi\big(\nabla_\rho A\big)(\rho)A(U) + d\varphi(U) - d\psi(U) + \psi(\nabla_U A)(\rho)A(\rho) + \psi(\nabla_U A)(\rho) = \frac{1}{6}[dr(\rho)A(U) + dr(U)],$$

buradan,

$$\psi\big(\nabla_\rho A\big)(U) = d\varphi(\rho)A(U) - d\psi(\rho)A(U) + d\varphi(U) - d\psi(U) - \frac{1}{6}[dr(\rho)A(U) + dr(U)] \tag{3.17}$$

bulunur.

(3.16) eşitliğini (3.17) denkleminde yerine yazılır,

$$-3d\varphi(U) + d\psi(\rho)A(U) + \psi A(U)\big(\nabla_{e_i} A\big)(e_i) + d\varphi(\rho)A(U) - d\psi(\rho)A(U) + d\varphi(U) - d\psi(U) - \frac{1}{6}[dr(\rho)A(U) + dr(U)] + d\psi(U) = -\frac{1}{2}dr(U)$$

ve yukarıdaki denklem düzenlenirse,

$$-2d\varphi(U) + \psi A(U)\big(\nabla_{e_i} A\big)(e_i) + d\varphi(\rho)A(U) - \frac{1}{6}dr(\rho)A(U) = -\frac{1}{3}dr(U) \tag{3.18}$$

eşitliğine ulaşılır.

(3.18) denkleminde $U = \rho$ yazılırsa,

$$-2d\varphi(\rho) + \psi A(\rho)\big(\nabla_{e_i} A\big)(e_i) + d\varphi(\rho)A(\rho) - \tfrac{1}{6}dr(\rho)A(\rho) = -\tfrac{1}{3}dr(\rho)$$

elde edilir. Buradan

$$\psi\big(\nabla_{e_i} A\big)(e_i) = \tfrac{1}{2}dr(\rho) - 3d\varphi(\rho) \tag{3.19}$$

eşitliğine ulaşılır.

(3.19) denklemi (3.18) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$-2d\varphi(U) + \frac{1}{2}dr(\rho)A(U) - 3d\varphi(\rho)A(U) + d\varphi(\rho)A(U) - \frac{1}{6}dr(\rho)A(U) = -\frac{1}{3}dr(U)$$

$$-2d\varphi(U)+\frac{1}{3}dr(\rho)A(U)-2d\varphi(\rho)A(U)=-\frac{1}{3}dr(U) \tag{3.20}$$

bulunur. Burada $\frac{b}{a}$ sabit olarak alınırsa, $-\frac{b}{a}=s$ olmak üzere, (3.9) ve (3.10) denklemlerinden $\varphi=sr$ ve $\psi=(4s-1)r$ elde edilir. Bu iki eşitliğin diferansiyelleri alındığında ise,

$$d\varphi(U)=sdr(U) \tag{3.21}$$

ve

$$d\psi(U)=(4s-1)dr(U) \tag{3.22}$$

eşitliklerine ulaşılır.

(3.21) eşitliği (3.20) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\left(\frac{1}{3s}-2\right)d\varphi(\rho)A(U)=\left(2-\frac{1}{3s}\right)d\varphi(U)$$

buradan,

$$d\varphi(U)=-d\varphi(\rho)A(U) \tag{3.23}$$

bulunur.

(3.21) ve (3.23) denklemlerinden

$$dr(U)=-dr(\rho)A(U) \tag{3.24}$$

eşitliğini elde ederiz.

(3.15) denkleminde $Y=\rho$ alınarak (3.21), (3.22) ve (3.23) eşitlikleri, $\varphi=sr$ ve $\psi=(4s-1)r$ olduğu kullanılırsa,

$$sdr(X)g(\rho,U) - (4s-1)dr(X)A(\rho)A(U)$$
$$-(4s-1)r[(\nabla_X A)(U)A(\rho) + A(U)(\nabla_X A)(\rho)] - sdr(U)g(\rho,X)$$
$$+(4s-1)dr(U)A(X)A(\rho)$$
$$+(4s-1)r[(\nabla_U A)(X)A(\rho) + A(X)(\nabla_U A)(\rho)]$$
$$=\frac{1}{6}[g(\rho,U)dr(X) - g(X,\rho)dr(U)]$$

denklemine ulaşılır ve yukarıdaki denklem düzenlendiğinde,

$$sdr(X)A(U) + (4s-1)dr(X)A(U) - sdr(U)A(X) - (4s-1)dr(U)A(X)$$
$$+(4s-1)r[(\nabla_X A)(U) - A(U)(\nabla_X A)(\rho) - (\nabla_U A)(X)$$
$$+(\nabla_U A)(\rho)A(X)] = \frac{1}{6}[A(U)dr(X) - A(X)dr(U)],$$

buradan

$$(4s-1)r[(\nabla_X A)(U) - A(U)(\nabla_X A)(\rho) - (\nabla_U A)(X) + (\nabla_U A)(\rho)A(X)]$$
$$+(5s-1)[dr(X)A(U) - dr(U)A(X)] = \frac{1}{6}[A(U)dr(X) - A(X)dr(U)],$$

buradan da

$$(4s-1)r[(\nabla_X A)(U) - (\nabla_U A)(X)] = \left(\frac{7}{6} - 5s\right)[A(U)dr(X) - A(X)dr(U)]$$

eşitliği elde edilir.

(3.24) denklemi yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa eşitliğin sağ tarafı sıfır olacağından

$s \neq \frac{1}{4}$ ve $r \neq 0$ olmak üzere

$$(\nabla_X A)(U) = (\nabla_U A)(X) \tag{3.25}$$

bulunur.

Bu eşitlik $A$ 1-formunun $s \neq \frac{1}{4}$ ve $r \neq 0$ için kapalı olduğunu gösterir.

(3.25) de $U = \rho$ alınırsa

$$g(\nabla_X \rho, \rho) = g\left(\nabla_\rho \rho, X\right) \tag{3.26}$$

dır.

$g(\rho, \rho) = -1$ eşitliğinin kovaryant türevi alınırsa

$$(\nabla_X g)(\rho, \rho) = \nabla_X g(\rho, \rho) - g(\nabla_X \rho, \rho) - g(\rho, \nabla_X \rho) = 0$$

den $g(\nabla_X \rho, \rho) = 0$ elde edilir. Böylece (3.26) eşitliğinden $g\left(\nabla_\rho \rho, X\right) = 0$ bulunur. Buradan $\nabla_\rho \rho = 0$ elde edilir ki bu da $\rho$ vektör alanının integral eğrilerinin geodezik olduğunu gösterir.

### 3.2 Uzay-zamanda Einstein Alan Denklemleri

Einstein 1915 yılında yaptığı çalışmada, enerji-momentum ile uzay-zaman eğriliği arasında bir ilişki olduğunu ortaya koymuştur. Evrenin yapısını açıklayan ve genel görelilik teorisinin temelini oluşturan Einstein alan denklemleri

$$S(X, Y) - \frac{1}{2} g(X, Y) r + \Lambda g(X, Y) = \kappa T(X, Y) \tag{3.27}$$

biçiminde olup, denklemde $T$ enerji-momentum tensörünü, $\Lambda$ kozmolojik sabiti ve $\kappa$ Einstein sabitini ifade etmektedir (O'Neill, 1983). Einstein alan denklemlerinin sol tarafı uzay-zaman geometrisiyle diğer tarafı da enerji-momentum tensörü ile ilgilidir. Bu denklemlerin çözümü oldukça zordur ve çözümlemeler yapılırken bazı özel koşulların kullanılması gerekir.

Kozmolojik sabit içermeyen Einstein alan denklemleri,

$$S(X, Y) - \frac{1}{2} g(X, Y) r = \kappa T(X, Y) \tag{3.28}$$

eşitliği ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Aslında (3.28) ile verilen denklem evrenin genişlemesi ispatlanmadan önce Einstein'ın kozmolojik sabiti çıkararak verdiği ve daha sonra da en büyük gafı olarak değerlendirdiği denklemdir.

**Teorem 3.2.1.**

Sabit skaler eğriliğe sahip kozmolojik sabitli Einstein alan denklemlerini sağlayan $(WBS)_4$ uzay-zamanda $\rho$ Killing vektör alanı ise, $T$ enerji-momentum tensörü için $\mathcal{L}_\rho T = 0$ dır.

**İspat:**

Uzay-zamanda $\rho$ Killing vektör alanı olsun. O zaman $\mathcal{L}_\rho g = 0$ dır.

Bu durumda $\mathcal{L}$ Lie türevi olmak üzere,

$$\big(\mathcal{L}_\rho g\big)(X,Y) = \mathcal{L}_\rho g(X,Y) - g\big(\mathcal{L}_\rho X, Y\big) - g\big(X, \mathcal{L}_\rho Y\big) = 0 \tag{3.29}$$

dır. Burada $Y = \rho$ alınırsa

$$\big(\mathcal{L}_\rho g\big)(X,\rho) = \mathcal{L}_\rho g(X,\rho) - g\big(\mathcal{L}_\rho X, \rho\big) - g\big(X, \mathcal{L}_\rho \rho\big) = 0$$

elde edilir. $A(X) = g(X,\rho)$ olduğu göz önüne alınarak (3.29) eşitliği düzenlenirse

$$\big(\mathcal{L}_\rho A\big)(X) = \mathcal{L}_\rho A(X) - A\big(\mathcal{L}_\rho X\big) - g\big(X, \mathcal{L}_\rho \rho\big) = 0 \tag{3.30}$$

bulunur.

Diğer yandan $A$ 1-formunun Lie türevi

$\big(\mathcal{L}_\rho\, A\big)(X) = \mathcal{L}_\rho A(X) - A\big(\mathcal{L}_\rho X\big)$ olduğundan (3.30) göz önüne alınarak

$$\mathcal{L}_\rho A(X) = A\big(\mathcal{L}_\rho X\big) = g\big(\mathcal{L}_\rho X, \rho\big)$$

bulunur. Böylece (3.30) eşitliğinden

$$g(X, \mathcal{L}_\rho \rho) = 0$$

bulunur.

(3.27) denkleminde (3.11) yerine yazıp, Lie türevini alırsak,

$$\kappa(\mathcal{L}_\rho T)(X,Y) = (\varphi - \frac{r}{2} + \Lambda)\big(\mathcal{L}_\rho g\big)(X,Y) + \psi[A(X)\big(\mathcal{L}_\rho A\big)(Y) + A(Y)\big(\mathcal{L}_\rho A\big)(X)\big]$$

bulunur. (3.30) ve $\rho$'nun Killing vektör alanı olduğundan

$$0 = \kappa(\mathcal{L}_\rho T)(X,Y)$$

elde edilir. Buradan

$\kappa \neq 0$ olduğundan $\forall X, Y \epsilon\ \chi(M)$ için $\mathcal{L}_\rho T = 0$ olur.

**Tanım 3.2.1.**

Mükemmel akışkan uzay-zamanda $T$ enerji momentum tensörünün eşitliği, $\sigma$ enerji yoğunluğu ve $p$ sıvının izotropik basıncı olmak üzere, $\forall\ X, Y \in \chi(M)$ için

$$T(X,Y) = (\sigma + p)A(X)A(Y) + pg(X,Y) \tag{3.31}$$

şeklindedir (O'Neill, 1983), (Novella ve Reboucas, 1978), (De ve ark., 2016).

Teorem 3.1.1. göz önüne alınarak (3.27) denkleminde (3.11) eşitliği yerine yazılırsa,

$$\varphi g(X,Y) + \psi A(X)A(Y) - \frac{1}{2} r g(X,Y) + \Lambda g(X,Y) = \kappa T(X,Y) \tag{3.32}$$

buradan,

$$\left(\varphi - \frac{r}{2} + \Lambda\right) g(X,Y) + \psi A(X)A(Y) = \kappa T(X,Y) \tag{3.33}$$

bulunur.

**Teorem 3.2.2.**

Kozmolojik sabitli Einstein alan denklemlerini sağlayan sabit skaler eğrilikli $(WBS)_4$ mükemmel akışkan uzay-zamanda, $\frac{b}{a}$ sabit olmadıkça $p$ akışın izotropik basıncı ve $\sigma$ enerji yoğunluğu sabit olamaz.

Burada $a$ ve $b$ $B$-tensörünün ifadesindeki skaler fonksiyonlardır.

**İspat:**

(3.31) ve (3.33) denklemlerinden $p = \frac{1}{\kappa}(\varphi - \frac{r}{2} + \Lambda)$ ve $\sigma = \frac{\psi}{\kappa} - p$ elde edilir. (3.9) ve (3.10) eşitliklerini bu denklemlerde yerine yazılarak düzenlendiğinde,

$$p = -\frac{1}{\kappa}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{b}{a}\right) r - \Lambda\right) \quad \text{ve} \quad \sigma = -\frac{1}{\kappa}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{3b}{a}\right) r + \Lambda\right)$$

eşitlikleri elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerden $\frac{b}{a}$ sabit olmadıkça akışın basıncının ve yoğunluğunun sabit olmayacağı görülür. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

**Tanım 3.2.2.**

Basınç içermeyen akışkan uzay-zamanda $T$ enerji momentum tensörü, $\sigma$ enerji yoğunluğu olmak üzere, $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için

$$T(X,Y) = \sigma A(X)A(Y) \tag{3.34}$$

şeklindedir (O'Neill, 1983), (Novella ve Reboucas, 1978), (De ve ark., 2016).

**Teorem 3.2.3.**

Kozmolojik sabit içermeyen Einstein alan denklemlerini sağlayan basınç içermeyen $(WBS)_4$ akışkan uzay-zamanda $\frac{b}{a} = \frac{1}{6}$ oranı sabittir. Burada $a$ ve $b$ $B$-tensörünün ifadesindeki skaler fonksiyonlardır.

**İspat:**

(3.34) eşitliği (3.28) denkleminde yerine yazılırsa,

$$S(X,Y) - \frac{1}{2}g(X,Y)r = \kappa\sigma A(X)A(Y) \tag{3.35}$$

eşitliğine ulaşılır. (1.2) eşitliğinde (3.35) denklemi kullanılarak,

$$B(X,Y) = a\left[\kappa\sigma A(X)A(Y) + \tfrac{1}{2}g(X,Y)r\right] + brg(X,Y)\,,$$

buradan

$$B(X,Y) = a\kappa\sigma A(X)A(Y) + \left(\frac{a}{2} + b\right)rg(X,Y) \tag{3.36}$$

eşitliği elde edilir.

$\tilde{B}$, $B$-tensörünün izi olmak üzere, (3.36) ifadesinde $X$ ve $Y$ üzerinden daraltma yapılırsa,

$$\tilde{B} = -a\kappa\sigma + 4\left(\frac{a}{2} + b\right)r \tag{3.37}$$

eşitliğine ulaşılır.

(1.2) eşitliğinde $X$ ve $Y$ üzerinde daraltma yapılırsa,

$$\tilde{B} = r(a + 4b) \tag{3.38}$$

olduğu açıktır. (3.37) ve (3.38) denklemleri birleştirilerek

$$r(a + 4b) = -a\kappa\sigma + 4\left(\frac{a}{2} + b\right)r ,$$

gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$r = \kappa\sigma \tag{3.39}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.1. göz önüne alınarak (3.11) denkleminde $X = Y = \rho$ alınırsa, $g(\rho, \rho) = -1$ ve $A(X) = g(X, \rho)$ eşitliklerinden

$$S(\rho, \rho) = -\sigma + \psi$$

elde edilir.

(3.9) ve (3.10) denklemlerinden

$$S(\rho, \rho) = \frac{-3br}{a} + r \tag{3.40}$$

bulunur.

(3.35) denkleminde $X = Y = \rho$ alınırsa,

$$S(\rho, \rho) + \frac{r}{2} = \kappa\sigma \tag{3.41}$$

eşitliğine ulaşılır. (3.39) , (3.40) ve (3.41) denklemlerinde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{6}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

**Tanım 3.2.3.**

$T(X,Y)$ enerji-momentum tensörü olmak üzere, $\forall\, X,Y \in \chi(M)$ için $T(X,Y)=0$ olması durumunda uzay-zaman boş (vakum) olarak adlandırılır (Novella ve Reboucas, 1978).

**Teorem 3.2.4.**

Kozmolojik sabitli Einstein alan denklemlerini sağlayan skaler eğriliği sıfırdan farklı basınç içermeyen yarı-Einstein $(WBS)_4$ uzay zamanda $\frac{b}{a}=-\frac{1}{4}$ ise, uzay zaman vakumdur. Burada $a$ ve $b$, $B$-tensörünün ifadesindeki skaler fonksiyonlardır.

**İspat:**

(3.11) ve (3.34) denklemleri (3.27) de yerine yazılırsa,

$$\varphi g(X,Y)+\psi A(X)A(Y)-\frac{r}{2}g(X,Y)+\Lambda g(X,Y)=\kappa\sigma A(X)A(Y),$$

buradan

$$\left(\varphi-\frac{r}{2}+\Lambda\right)g(X,Y)=(\kappa\sigma-\psi)A(X)A(Y) \tag{3.42}$$

denklemine ulaşılır.

(3.42) denkleminde $X$ ve $Y$ vektör alanları üzerinde daraltma yapılırsa,

$$4\left(\varphi-\frac{r}{2}+\Lambda\right)=\psi-\kappa\sigma,$$

buradan

$$\Lambda=\frac{1}{4}(\psi-\kappa\sigma+2r-4\varphi) \tag{3.43}$$

elde edilir.

(3.42) denkleminde $X=Y=\rho$ alındığında ise,

$$-\varphi + \frac{r}{2} - \Lambda = \kappa\sigma - \psi,$$

buradan

$$\Lambda = -\varphi + \frac{r}{2} - \kappa\sigma + \psi \tag{3.44}$$

eşitliklerine ulaşılır.

(3.43) ve (3.44) eşitlikleri birlikte değerlendirilirse,

$$\frac{1}{4}(\psi - \kappa\sigma + 2r - 4\varphi) = -\varphi + \frac{r}{2} - \kappa\sigma + \psi$$

elde edilir ve bu eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\sigma = \frac{\psi}{\kappa} \tag{3.45}$$

bulunur.

(3.9) eşitliği (3.45) de yerine konulduğunda,

$$\sigma = -\frac{(1 + 4\,b/a)}{\kappa} r \tag{3.46}$$

eşitliğine ulaşılır ve $\frac{b}{a} = -\frac{1}{4}$ için $\sigma = 0$ bulunur. Böylece (3.33)ten $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için $T(X,Y) = 0$ elde edilir ki bu da uzayın vakum olduğunu ifade eder.

**Tanım 3.2.4.**

Viskoz sıvı uzay-zamanda $p$ izotropik basınç, $P(X,Y)$ sıvının anizotropik basınç tensörü olmak üzere, $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için

$$T(X,Y) = pg(X,Y) + (\sigma + p)A(X)A(Y) + P(X,Y) \tag{3.47}$$

eşitliği ile verilmektedir (Novella ve Reboucas, 1978).

**Teorem 3.2.5.**

Kozmolojik sabitli Einstein alan denklemlerini sağlayan $(WBS)_4$ viskoz sıvı uzay-zamanda $\sigma$ enerji yoğunluğu ve $p$ izotropik basınç

$$\sigma = \frac{1}{\kappa}\left[-\varphi + \psi + \frac{r}{2} - \Lambda + I\kappa\right] \quad \text{ve} \quad p = \frac{1}{\kappa}\left[\varphi - \frac{r}{2} + \Lambda + \frac{\kappa(I-J)}{3}\right]$$

bağıntıları ile verilir. Burada İz$P = J = P(e_i, e_i)$ ve $I = P(\rho, \rho)$ dır.

**İspat:**

(3.11) ve (3.47) eşitlikleri (3.27) de yerine yazılırsa,

$$\varphi g(X,Y) + \psi A(X)A(Y) - \frac{r}{2}g(X,Y) + \Lambda g(X,Y) = \kappa[pg(X,Y) + (\sigma + p)A(X)A(Y) + P(X,Y)] \tag{3.48}$$

elde edilir.

(3.48) denkleminde $X$ ve $Y$ üzerinde daraltma yapılırsa,

$$4\varphi - \psi - 2r + 4\Lambda = \kappa[4p - (\sigma + p) + P(e_i, e_i)] \tag{3.49}$$

ve gene $X = Y = \rho$ yazılırsa,

$$-\varphi + \psi + \frac{r}{2} - \Lambda = \kappa[-p + (\sigma + p) + P(\rho, \rho)] \tag{3.50}$$

eşitliklerine ulaşılır. $I = P(\rho, \rho)$ olmak üzere, (3.50) denklemi düzenlendiğinde,

$$\kappa\sigma = -\varphi + \psi + \frac{r}{2} - \Lambda + I\kappa,$$

buradan

$$\sigma = \frac{1}{\kappa}\left[-\varphi + \psi + \frac{r}{2} - \Lambda + I\kappa\right] \tag{3.51}$$

bulunur.

(3.51) ifadesi (3.49) denkleminde yazılır ve $izP = J$ denirse,

$$4\varphi - \psi - 2r + 4\Lambda = 3p\kappa - \psi + \varphi - \frac{r}{2} + \Lambda - I\kappa + J\kappa,$$

$$p = \frac{1}{\kappa}\left[\varphi - \frac{r}{2} + \Lambda + \frac{\kappa(I-J)}{3}\right] \tag{3.52}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu da ispatı tamamlar.

**Tanım 3.2.5.**

Viskoz sıvı uzay-zamanda $\widetilde{\omega}$ ısı akış vektörü, $\pi$ 1-formu $\pi(X) = g(X, \widetilde{\omega})$, $g(\rho, \widetilde{\omega}) = 0$ ve anizotropik basınç tensörü, $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için

$$P(X,Y) = A(X)\pi(Y) + A(Y)\pi(X) \tag{3.53}$$

eşitliği ile verilir (O'Neill, 1983), (Novella M., Reboucas M. J., 1978).

**Teorem 3.2.6.**

Kozmolojik sabitli Einstein alan denklemlerini sağlayan $(WBS)_4$ viskoz sıvı uzay-zaman izotropik basınç tensörü (3.53) formunda olduğu zaman ısı akışını kabul etmez.

**İspat**:

Teorem 3.1.1. göz önüne alınıp (3.48) eşitliğinde (3.53) yerine yazılırsa,

$$\varphi g(X,Y) + \psi A(X)A(Y) - \frac{r}{2}g(X,Y) + \Lambda g(X,Y) = \kappa[pg(X,Y) + (\sigma + p)A(X)A(Y) + A(X)\pi(Y) + A(Y)\pi(X)] \tag{3.54}$$

elde edilir.

(3.54) denkleminde $Y = \rho$ alınırsa,

$$\varphi g(X,\rho) + \psi A(X)A(\rho) - \frac{r}{2}g(X,\rho) + \Lambda g(X,\rho) = \kappa[pg(X,\rho) + (\sigma + p)A(X)A(\rho) + A(X)\pi(\rho) + A(\rho)\pi(X)],$$

buradan

$$A(X)\left[\varphi-\psi-\frac{r}{2}+\Lambda\right]=-\kappa[\sigma A(X)+\pi(X)],$$

buradan da

$$\pi(X)=\frac{1}{\kappa}\left[\psi+\frac{r}{2}-\varphi-\Lambda-\kappa\sigma\right]A(X) \tag{3.55}$$

eşitliğine ulaşılır.

(3.9) ve ( 3.10) eşitliklerinden,

$$\varphi-\psi=\left(1+3\frac{b}{a}\right)r \tag{3.56}$$

bulunur.

(3.56), (3.55) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\pi(X)=\frac{1}{\kappa}[-(\frac{1}{2}+3\ \frac{b}{a})r-\Lambda-\kappa\sigma]A(X) \tag{3.57}$$

elde edilir. (3.57) denkleminde $X=\rho$ alınırsa $\left(\frac{1}{2}+3\ \frac{b}{a}\right)r+\Lambda+\kappa\sigma=0$ bulunur. Böylece $\forall X\in\chi(M)$ için $\pi(X)=0$ elde edilir. Bu durumda anizotropik basınç (3.53) formunda ise uzay ısı akışı kabul etmez.

**Tanım 3.2.6.**

Radyasyon akışkanlığı uzay-zamanda $T$ enerji-momentum tensörü, $p$ basınç olmak üzere, $\forall\ X,Y\in\chi(M)$ için

$$T(X,Y)=p[4A(X)A(Y)+g(X,Y)] \tag{3.58}$$

formundadır (O'Neill, 1983).

**Teorem 3.2.7.**

Kozmolojik sabitli Einstein alan denklemlerini sağlayan $(WBS)_4$ uzay-zamanda radyasyon akışkanlığı yoktur.

**İspat**:

Varsayalım ki bu uzayda radyasyon akışkanlığı olsun.

(3.11) ve (3.58), (3.27) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$\varphi g(X,Y) + \psi A(X)A(Y) - \frac{r}{2} g(X,Y) + \Lambda g(X,Y) = \kappa p[4A(X)A(Y) + g(X,Y)] \quad (3.59)$$

elde edilir.

(3.59) denkleminde daraltma yapılırsa,

$$\Lambda = \frac{1}{4}[\psi - 4\varphi + 2r] \quad (3.60)$$

elde edilir.

(3.59) denkleminde $X = Y = \rho$ alındığında ise,

$$p = \frac{1}{3\kappa}\left[-\varphi + \psi + \frac{r}{2} - \Lambda\right] \quad (3.61)$$

eşitliğine ulaşılır.

(3.60) ve (3.61) denklemleri birlikte göz önüne alınırsa,

$$p = \frac{\psi}{4\kappa} \quad (3.62)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten görülür ki izotropik basıncın sıfır olması ancak ve ancak $\psi$ nin sıfır olması ile mümkündür. Bu ise, $B$- tensörünün skaler fonksiyonları olan $a$ ve $b$ nin sıfırdan farklı olmasından dolayı mümkün değildir. O halde, kabulümüz hatalıdır. Uzayın radyasyon akışkanlığı yoktur.

# 4. SONUÇLAR

Tez çalışmasında zayıf $B$ -simetrik ve zayıf devirli $B$ -simetrik uzay tanımları yapılarak bu uzayların yarı-Einstein olduğu ispatlanmış ve bu durumlara örnekler verilmiştir. 1-formlar üzerine bazı şartlar koyularak bu uzay üzerinde bazı önemli özellikler elde edilmiştir.

Ayrıca $(WBS)_n$ manifoldların genel rölativiteye uygulaması yapılmıştır. Bu uzay-zamanın yarı-Einstein olduğu ispatlanmıştır ve bu uzayın getirdiği özellikler kullanılarak Einstein alan denklemleri yardımıyla farklı uzay-zamanlarda incelenmiştir. Uzaya bazı özel koşullar eklendiğinde çıkan sonuçlar teoremlerle ifade edilmiştir. İspatlanan teoremlerin fizikte genel rölativite alanında kullanılabileceği düşünülmektedir.

## TEZDEN YAPILAN SUNUM

"Zayıf $B$ -simetrik manifoldlar üzerine bir çalışma" 32. Ulusal Matematik Sempozyumu, 31 Ağustos-03 Eylül 2019 Samsun. Bildiri özet kitapçığı s.40.

## KAYNAKLAR


[1] Besse, A. L., (2007). Einstein Manifolds. Springer Science & Business Media.

[2] Cartan, É., (1926). Sur une Classe Remarquable D'espaces de Riemann. Bulletin de la Société Mathématique de France, 54, 214-264.

[3] Chaki, M. C., Gupta, B. (1963). On Conformally Symmetric Spaces. Indian Journal of Mathematics, 5, 113-122.

[4] Chaki, M. C., (1987). On Pseudo Symmetric Manifolds. Analele Stiintifice Ale Univ.'AL. I. CUZA'din Iasi, 33, 53-58.

[5] Chaki, M. C., Ghosh, M. L., (1997). On Quasi Conformally Flat and Quasi Conformally Conservative Riemannian Manifolds. An. St. Univ." AL. I. CUZA" IASI Tomul XXXVIII SIa Mathematica f2, 375-381.

[6] Chaki, M. C., (2000). On Quasi Einstein Manifolds. Publicationes Mathematicae, Debrecen, 57, 297-306.

[7] De, U. C., Bandyopadhyay, S., (1999). On Weakly Symmetric Spaces. Publications Mathematics Debrecen, 54, 377–381.

[8] De, U. C., Ghosh, G. C., (2004). On Quasi Einstein and Special Quasi Einstein manifolds. In Proceeding of the International Conference on Mathematics and its Applications. Kuwait University department of Mathematics Computer Science, 57, 178-191).

[9] De, U. C., Mantica, C. A., Suh, Y. J., (2015). On Weakly Cyclic Z Symmetric Manifolds. Acta Mathematica Hungarica, 146(1), 153-167.

[10] De, U. C., Mantica, C. A., Molinari, L. G., Suh, Y. J., (2016). On Weakly Cyclic Z Symmetric Spacetimes. Acta Mathematica Hungarica, 149(2), 462-477.

[11] Deszcz, R., (1992). On Pseudo Symmetric Spaces. The Bulletin of the Belgian Mathematical Society, A44, 1-34

[12] Fialkow, A., (1939). Conformal Geodesics. Transactions of the American Mathematical Society, 45(3), 443-473.

[13] Heinicke, C., Hehl, F. W., (2015). Schwarzschild and Kerr solutions of Einstein's field equation: An Introduction. International Journal of Modern Physics D, 24(02), 1530006.

[14] Kobayashi, S., Nomizu, K., (1963). Foundations of Differential Geometry (Vol. 1, No. 2). New York, London.

[15] Mantica, C. A., Molinari, L. G., (2012). Weakly Z-symmetric Manifolds. Acta Mathematica Hungarica, 135(1-2), 80-96.

[16] Novello, M., Reboucas, M. J., (1978). The Stability of a Rotating Universe. The Astrophysical Journal, 225, 719-724.

[17] O' Neill, B., (1983). Semi-Riemannian Geometry with Applications to the Relativity. Academic Press, New York-London.

[18] Suh, Y. J., Mantica C. A., De, U. C., Pal, P., (2017). Pseudo B-symmetric Manifolds. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 14(09), 1750119.

[19] Szabó, Z. I., (1982). Structure Theorems on Riemannian Spaces Satisfying $R(X,Y).R = 0$, I. The local version. Journal of Differential Geometry, 17(4), 531-582.

[20] Şahin, B., (2012) Manifoldların Diferansiyel Geometrisi. Nobel Yayın.

[21] Tamássy, L., Binh, T. Q., (1989). On Weakly Symmetric and Weakly Projective Symmetric Riemann Manifolds. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 50 ,663-670.

[22] Tamássy, L., Binh, T. Q., (1993). On Weak Symmetries of Einstein and Sasakian Manifolds. Tensor Society, 53, 140-148.

[23] Walker, A. G., (1950). On Ruse's Space Of Recurrent Curvature. Proceedings of the London Mathematical Society, 2(1), 36-64.

[24] Willmore, T. J., (1959). An Introduction to Differential Geometry. Oxford University Press.

## ÖZGEÇMİŞ

Dilek Kurt, 1979 yılında Mersin'de doğdu. 2004 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden mezun olup aynı sene Yıldız Teknik Üniversitesi Orta Öğretim Alan Öğretmenliği için tezsiz yüksek lisansa devam etti. Tezsiz yüksek lisans süresinde ve sonrasında lise düzeyinde matematik öğretmenliği yaptı. Daha sonra 2018 yılında Marmara Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yüksek lisansa kabul edildi. Yüksek lisansta çalışmalarını ilgi alanı olan geometri üzerine yaptı.